В.Г.Осмоловский.

Квазистационарная задача о фазовых переходах в механике двухфазовых сред. Одномерный случай. Нулевой коэффициент поверхностного натяжения.

Для одномерной двухфазовой упругой среды в рамках квазистационарного приближения построена эволюция границы раздела фаз.

§1. Введение.

(a) *Функционалы энергии.* В модельном одномерном случае зададим плотности энергии деформации каждой из фаз двухфазовой упругой среды равенством

$$F^{\pm}(z) = a_{\pm}(z - c_{\pm})^2, \quad a_{\pm}, c_{\pm}, z \in \mathbb{R}, \quad a_{\pm} > 0. \tag{1.1}$$

По плотностям энергии (1.1) определим величины

$$\Phi^{\pm}(z) = F^{\pm}(z) - zF^{\pm}_z(z) \tag{1.2}$$

(здесь и далее нижний индекс означает дифференцирование по соответствующему аргументу). Функции $\Phi^{\pm}(z)$ задают химический потенциал для каждой из плотностей энергии $F^{\pm}(z)$.

Будем считать, что одномерная двухфазовая упругая среда занимает отрезок $(0, l)$. В качестве допустимых полей смещения возьмём пространство

$$\mathbb{X} = \overset{\circ}{W}{}^1_2(0, l). \tag{1.3}$$

Такой выбор означает, что мы рассматриваем лишь нулевые граничные условия для поля смещений. Распределение фаз будем задавать с помощью измеримой характеристической функции $\chi(x)$, $x \in (0, l)$. На носителе функции χ разместим фазу с индексом $+$, а на его дополнении — фазу с индексом $-$. Множество всех измеримых характеристических функций обозначим через $\mathbb{Z}'$:

$$\mathbb{Z}' = \{\chi \in L_\infty(0, l) : \chi(x) = \chi^2(x) \quad \text{почти всюду на} \quad (0, l)\}. \tag{1.4}$$

Наряду с множеством $\mathbb{Z}'$ нам потребуется его подмножество

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}' \cap \mathrm{BV}(0, l), \tag{1.5}$$

характеризующееся тем, что функция $\chi \in \mathbb{Z}$ (после исправления её на множестве нулевой меры) имеет на интервале $(0, l)$ конечное число скачков $S[\chi]$, определяемое равенством

$$S[\chi] = \sup_{h \in C^1_0(0,l), |h| \le 1} \int_0^l \chi(x) h'(x)\, dx. \tag{1.6}$$

С плотностями энергии (1.1) свяжем два функционала

$$J[u, \chi] = \int_0^l (\chi F^+(u') + (1 - \chi)F^-(u'))\, dx, \qquad u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \tag{1.7}$$

$$I_0[u, \chi, t] = \int_0^l (\chi(F^+(u') + t) + (1 - \chi)F^-(u'))\, dx, \qquad u \in \mathbb{X}, \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.8}$$

Аргументом функционала (1.7) служит функция u, функция χ для него является параметром. Решение вариационной задачи

$$J[\check{u}^\chi, \chi] = \inf_{u \in \mathbb{X}} J[u, \chi], \quad \check{u}^\chi \in \mathbb{X} \tag{1.9}$$

для каждой фиксированной функции $\chi \in \mathbb{Z}'$ является равновесным полем смещений композитной среды с заданным функцией χ распределением фаз. Для краткости функцию $\check{u}^\chi$ будем называть состоянием равновесия композитной среды.

Аргументами функционала (1.8) являются обе функции u и χ, а числовой параметр t, определяется температурой (в дальнейшем будем называть его температурой). Решение вариационной задачи

$$I_0[\hat{u}^t, \hat{\chi}^t, t] = \inf_{u \in \mathbb{X}, \chi \in \mathbb{Z}'} I_0[u, \chi, t], \qquad \hat{u}^t \in \mathbb{X}, \quad \hat{\chi}^t \in \mathbb{Z}' \tag{1.10}$$

для каждого фиксированного значения t является равновесным полем смещения и равновесным распределением фаз для двухфазовой упругой среды. Для краткости пару $\hat{u}^t$, $\hat{\chi}^t$ будем называть состоянием равновесия этой среды.

В модельном одномерном случае функционал (1.7) является функционалом энергии деформации композитной среды, а (1.8) — двухфазовой среды. Индекс ноль в левой части (1.8) означает, что в этом функционале не учитывается поверхностная энергия границы раздела фаз, пропорциональная (коэффициент пропорциональности называется коэффициентом поверхностного натяжения) величине (1.6).

(b) *Уравнения эволюции межфазовых границ.* Для каждого значения времени $\tau \geq 0$ фиксируем точки

$$x_j(\tau) \in (0, l), \quad j = 1, \ldots, N(\tau), \quad x_j(\tau) < x_{j+1}(\tau), \tag{1.11}$$

которые вместе с концами 0 и l интервала $(0, l)$ являются граничными точками системы отрезков

$$\begin{gathered} l_i(\tau) \subset (0, l), \quad i = 1, \ldots, N(\tau) + 1, \\ l_1(\tau) = (0, x_1(\tau)), \quad l_2(\tau) = (x_1(\tau), x_2(\tau)), \quad \ldots, \quad l_{N(\tau)+1}(\tau) = (x_{N(\tau)}(\tau), l). \end{gathered} \tag{1.12}$$

Разобьём отрезки $\{l_i(\tau)\}$ на две непересекающиеся группы $\{l_r^+(\tau)\}$ и $\{l_s^-(\tau)\}$. Интервалы этих групп будем считать перемежающимися: ближайшими соседями интервала группы $\pm$ могут быть лишь интервалы группы $\mp$ для знаков $+$ и $-$, соответственно. По каждому разбиению зададим характеристическую функцию, удовлетворяющую условиям

$$\chi(x, \tau) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in \cup_r l_r^+(\tau) \\ 0 & \text{при} \quad x \in \cup_s l_s^-(\tau) \end{cases}. \tag{1.13}$$

Очевидно, что с помощью данного представления можно записать любую функцию $\chi(., \tau) \in \mathbb{Z}$, причём

$$N(\tau) = S[\chi(., \tau)]. \tag{1.14}$$

Приведённые построения сводят описание эволюции функции $\chi(., \tau)$ к описанию движения точек границы раздела фаз (1.11). Если в процессе эволюции какой-либо из интервалов группы $\{l_r^+(\tau)\}$ или $\{l_s^-(\tau)\}$ при $\tau = \tau'$ (момент времени τ' назовём временем перестройки) исчезнет (схлопнется в некоторую точку отрезка $(0, l)$ или будет вытеснен из этого отрезка), то этот интервал будем считать выбывшим из списка (1.12), а (в случае схлопывания в точку) его ближайшие соседи — объединившимися в один интервал группы противоположного знака. Данная договорённость приводит к тому, что эволюция $\chi(., \tau)$ начального условия $\chi_0 \in \mathbb{Z}$, $S[\chi_0] \geq 1$ не выходит из класса $\mathbb{Z}$, а величина $S[\chi(., \tau)]$ может лишь убывать с ростом τ.

Обозначим через τ_i, $i = 1, \ldots, k$, априори неизвестные времена перестроек (если таковые существуют)

$$0 < \tau_1 < \cdots < \tau_k, \quad 1 \leq k \leq S[\chi_0]. \tag{1.15}$$

Тогда на каждом из временны́х интервалов

$$(0, \tau_1), (\tau_1, \tau_2), \ldots, (\tau_{k-1}, \tau_k), (\tau_k, \infty) \quad \text{при наличии перестроек}, \quad (0, \infty) \quad \text{при их отсутствии} \tag{1.16}$$

монотонно убывающая функция $S[\chi(., \tau)]$ принимает различные неотрицательные целочисленные значения.

В рамках рассматриваемой модели делаются два предположения [1,2]:

(1) эволюция расположения фаз $\chi(.,\tau)$ сопровождается эволюцией поля смещений $u(.,\tau)$ согласно равенству

$$u(.,\tau) = \check{u}^{\chi(.,\tau)} \equiv \check{u}^{\tau}(.); \tag{1.17}$$

(2) скорость перемещения концов интервалов (1.12) на каждом из промежутков времени (1.16) связано с полем смещения (1.17) по следующему правилу

$$\begin{gathered}
\dot{x}_j(\tau) = -\gamma([\Phi(\check{u}^{\tau}_x)]|_{x_j(\tau)} + t),\\
\text{если } x_j(\tau) \text{ является правым концом интервала группы} \quad \{l^+_r(\tau)\},\\
\\
\dot{x}_j(\tau) = +\gamma([\Phi(\check{u}^{\tau}_x)]|_{x_j(\tau)} + t),\\
\text{если } x_j(\tau) \text{ является левым концом интервала группы} \quad \{l^+_r(\tau)\},
\end{gathered} \tag{1.18}$$

где γ фиксированная положительная константа,

$$[\Phi(\check{u}^{\tau}_x)]|_{x_j(\tau)} = \Phi^{+}(\check{u}^{\tau}_x(x_j(\tau))) - \Phi^{-}(\check{u}^{\tau}_x(x_j(\tau))), \tag{1.19}$$

а под величиной $\check{u}^{\tau}_x(x_j(\tau))$ для первого слагаемого правой части (1.19) понимается её предельное значение со стороны отрезка группы $\{l^+_r\}$, а для второго — со стороны отрезка группы $\{l^-_s\}$.

Легко видеть что требования (1.18) влекут за собой следующие соотношения

$$\begin{gathered}
\dot{x}_j(\tau) = -\gamma([\Phi(\check{u}^{\tau}_x)]|_{x_j(\tau)} + t),\\
\text{если } x_j(\tau) \text{ является левым концом интервала группы} \quad \{l^-_s(\tau)\},\\
\\
\dot{x}_j(\tau) = +\gamma([\Phi(\check{u}^{\tau}_x)]|_{x_j(\tau)} + t),\\
\text{если } x_j(\tau) \text{ является правым концом интервала группы} \quad \{l^-_s(\tau)\}.
\end{gathered} \tag{1.20}$$

Сформулированные выше условия означают, что в процессе эволюции двухфазовая упругая среда проходит через состояния равновесия композитной среды, а скорость движения границы раздела фаз пропорциональна скачку на ней химического потенциала.

Приведённая конструкция позволяет эволюционировать лишь характеристической функции, не равной тождественно ни нулю, ни единице. Отсюда возникает ограничение на начальное условие $S[\chi(.,0)] \geq 1$. Если в процессе эволюции окажется, что для некоторого $\tau' > 0$ выполняется одно из равенств $\chi(x,\tau') = 0$ или $\chi(x,\tau') = 1$ при всех $x \in (0,l)$, то будем считать это равенство справедливым и для всех $\tau > \tau'$. Данная договорённость позволяет всегда рассматривать эволюцию $\chi(.,\tau)$ на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Для объёмной доли фазы с индексом $+$ в момент времени τ зарезервируем обозначение

$$Q(\tau) = \frac{1}{l}\int_0^l \chi(x,\tau)\,dx. \tag{1.21}$$

§2. Свойства состояний равновесия.

Для формулировки основного результата этой работы нам потребуется ряд перечисленных ниже свойств состояний равновесия композитной и двухфазовой среды, доказательство которых можно найти в [3].

Основой для описания решений задач (1.9) и (1.10) в удобной для нас форме служит следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Функционал* (1.8) *для всех* $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$ *представи́м в виде*

$$I_0[u,\chi,t] =$$
$$= \int_0^l (a_+\chi + a_-(1-\chi))(u' - \alpha(Q)(\chi - Q))^2\,dx + lG(Q,t),$$
$$Q = \frac{1}{l}\int_0^l \chi(x)\,dx, \quad \alpha(Q) = \frac{[ac]}{a_-Q + a_+(1-Q)}, \tag{2.1}$$

$$G(Q,t) = tQ + a_+c_+^2Q + a_-c_-^2(1-Q) - [ac]\alpha(Q)Q(1-Q),$$

где $[ac] = a_+c_+ - a_-c_-$.

Поскольку

$$I_0[u,\chi,t] = J[u,\chi] + t\int_0^l \chi(x)\,dx \tag{2.2}$$

очевидным следствием (2.1) является приводимая ниже лемма.

Лемма 2.2 *Для каждой функции* $\chi \in \mathbb{Z}'$ *задача* (1.9) *однозначно разрешима. Её решение задаётся равенством*

$$\check{u}^\chi(x) = \alpha(Q)\int_0^x (\chi(y) - Q)\,dy, \quad Q = \frac{1}{l}\int_0^l \chi(x)\,dx. \tag{2.3}$$

Для каждого значения температуры t *задача* (1.10) *разрешима. Множество всех её решений имеет следующее описание*

$$\hat{u}^t(x) = \alpha(\hat{Q}(t))\int_0^x (\hat{\chi}^t(y) - \hat{Q}(t))\,dy \tag{2.4}$$

с любой функцией $\hat{\chi}^t \in \mathbb{Z}'$, *для которой*

$$\frac{1}{l}\int_0^l \hat{\chi}^t(x)\,dx = \hat{Q}(t), \tag{2.5}$$

где число $\hat{Q}(t)$ *определяется соотношением*

$$G(\hat{Q}(t),t) = \min_{Q\in[0,1]} G(Q,t), \quad \hat{Q}(t) \in [0,1]. \tag{2.6}$$

Отметим, что из (2.1) и (2.3)-(2.5) вытекают равенства

$$I_0[\check{u}^\chi,\chi,t] = lG(Q,t), \quad I_0[\hat{u}^t,\hat{\chi}^t,t] = lG(\hat{Q}(t),t). \tag{2.7}$$

Для формулировки свойств решения задачи (2.6) введём следующие обозначения

$$t_+ = t^* + \frac{[ac]^2}{a_+}, \quad t_- = t^* - \frac{[ac]^2}{a_-}, \qquad t^* = -[ac^2], \tag{2.8}$$

где $[\beta] = \beta_+ - \beta_-$ — скачок величины β, принимающей два значения β_+ и β_-. Очевидно, что

$$t_+ \ge t_-, \quad t_+ - t_- = \frac{[ac]^2}{a_+a_-}(a_+ + a_-). \tag{2.9}$$

Лемма 2.3. *Пусть* $t_+ > t_-$. *Тогда функция* $\hat{Q}(t)$ *непрерывна по* $t \in \mathbb{R}$, $\hat{Q}(t) = 1$ *при* $t \le t_-$, $\hat{Q}(t) = 0$ *при* $t \ge t_+$, $\hat{Q}(.) \in C^\infty[t_-,t_+]$, *строго монотонно убывает на этом интервале и*

$$G_Q(\hat{Q}(t),t) = 0 \quad \text{для всех} \quad t \in [t_-,t_+]. \tag{2.10}$$

Пусть $t_+ = t_-(= t^*)$. *Тогда при* $t < t^*$ *единственным решением задачи* (2.5) *является число* $\hat{Q}(t) = 1$, *при* $t > t^*$ *– число* $\hat{Q}(t) = 0$, *а в случае* $t = t^*$ *величиной* $\hat{Q}(t)$ *служит каждое число из интервала* $[0, 1]$. *Кроме того,*

$$G_Q(Q, t^*) = 0 \quad \textit{для всех} \quad Q \in [0, 1]. \tag{2.11}$$

Утверждения леммы 2.3 дают мотивацию называть температуры $t_\pm$ температурами фазовых переходов.

В дальнейшем будут полезны следующие формулы

$$G_Q(0, t) = t - t_+, \quad G_Q(1, t) = t - t_-,$$
$$G_Q(Q, t) = t + [ac^2] - a_+\alpha^2(Q)(1 - Q)^2 + a_-\alpha^2(Q)Q^2, \quad G_{QQ}(Q, t) = \frac{2[ac]^2 a_+ a_-}{(a_-Q + a_+(1 - Q))^3}. \tag{2.12}$$

§3. Формулировка основных результатов.

Мы будем изучать сформулированную в §1 эволюционную задачу по определению распределения фаз $\chi(., \tau)$. В качестве начального условия возьмём функцию

$$\chi(., 0) = \chi_0 \in \mathbb{Z} \quad S[\chi_0] \geq 1. \tag{3.1}$$

Из последнего ограничения для χ_0 следует, что для величины (1.21) при $\tau = 0$ справедливо включение

$$Q(0) = Q_0 \in (0, 1). \tag{3.2}$$

В зависимости от параметров двухфазовой среды $a_\pm$, $c_\pm$ и температуры t с помощью величины Q_0 разобьём множество начальных данных χ_0 на три непересекающихся класса

$$\begin{gathered} t_- < t_+, \quad t \in [t_-, t_+], \\ (a)\ 0 < Q_0 < \hat{Q}(t) \leq 1, \quad (b)\ 0 \leq \hat{Q}(t) < Q_0 < 1, \quad (c)\ Q_0 = \hat{Q}(t) \in (0, 1); \end{gathered} \tag{3.3}$$

$$t_- \leq t_+, \quad t \notin [t_-, t_+], \qquad Q_0 \in (0, 1); \tag{3.4}$$

$$t_+ = t_-(= t^*), \qquad Q_0 \in (0, 1). \tag{3.5}$$

Свойства решений эволюционной задачи будет зависеть от класса, в который попало начальное данное.

Для формулировки первой теоремы введём следующие обозначения

$$g_+ = \max_{Q \in [0,1]} G_{QQ}(Q, t) = \frac{2[ac]^2 a_+ a_-}{(\min\{a_+, a_-\})^3}, \quad g_- = \min_{Q \in [0,1]} G_{QQ}(Q, t) = \frac{2[ac]^2 a_+ a_-}{(\max\{a_+, a_-\})^3}, \tag{3.6}$$

последние равенства в которых вытекают из формулы (2.12).

Теорема 1 *Пусть выполняются условия* (3.3). *Тогда эволюция* $\chi(., \tau)$, $\tau > 0$, *однозначно определяется начальным условием* (3.1).

(1) *В случае* $(3.3)_a$ *носитель функции* $\chi(., \tau)$ *строго монотонно возрастает: для всех интервалов* $l_j(\tau)$ *группы* $\{l_r^+(\tau)\}$ *и чисел* $\tau' < \tau''$, *лежащих в общем для них интервале* (1.16), *справедливы включения* $\bar{l}_j(\tau') \subset l_j(\tau'')$.

(2) *В случае* $(3.3)_b$ *носитель функции* $\chi(., \tau)$ *строго монотонно убывает: для всех интервалов* $l_j(\tau)$ *группы* $\{l_r^+(\tau)\}$ *и чисел* $\tau' < \tau''$, *лежащих в общем для них интервале* (1.16), *справедливы включения* $l_j(\tau') \supset \bar{l}_j(\tau'')$.

(3) *В случае* $(3.3)_c$ *для всех* $\tau > 0$ *выполняется равенство* $\chi(., \tau) = \chi_0(.)$.

(4) *Для каждого случая* (3.3) *справедлива оценка*

$$|Q_0 - \hat{Q}(t)| \exp(-g_+ \frac{\gamma}{l} S[\chi_0]\tau) \le |Q(\tau) - \hat{Q}(t)| \le |Q_0 - \hat{Q}(t)| \exp(-g_- \frac{\gamma}{l}\tau). \tag{3.7}$$

Теорема 2. *Пусть выполняется условие* (3.4). *Тогда эволюция* $\chi(.,\tau)$, $\tau > 0$ *однозначно определяется начальным условием* (3.1).

(1) *При* $t < t_-$ *существует такой момент времени* $\tau_- > 0$, *что носитель функции* $\chi(.,\tau)$, $\tau \in (0,\tau_-)$ *строго монотонно возрастает в указанном в теореме* 1 *смысле, а при* $\tau > \tau_-$ *выполняется равенство* $\chi(x,\tau) = 1$ *для всех* $x \in (0,l)$.

(2) *При* $t > t_+$ *существует такой момент времени* τ_+, *что носитель функции* $\chi(.,\tau)$, $\tau \in (0,\tau_+)$ *строго монотонно убывает в указанном в теореме* 1 *смысле, а при* $\tau > \tau_+$ *выполняется равенство* $\chi(x,\tau) = 0$ *для всех* $x \in (0,l)$.

(3) *Для чисел* $\tau_\pm$ *справедливы оценки*

$$\frac{(1-Q_0)l}{\gamma(t_+ - t)S[\chi_0]} \le \tau_- \le \frac{(1-Q_0)l}{\gamma(t_- - t)}, \quad \frac{Q_0 l}{\gamma(t - t_-)S[\chi_0]} \le \tau_+ \le \frac{Q_0 l}{\gamma(t - t_+)}. \tag{3.8}$$

Теорема 3. *Пусть выполняется условие* (3.5). *Тогда для всех* $\tau > 0$ *справедливо равенство* $\chi(.,\tau) = \chi_0(.)$.

Теорема 4. (1) *Для каждого фиксированного значения температуры* t *любое равновесное распределение фаз класса* $\mathbb{Z}$ *является неподвижной точкой эволюции* $\chi(.,\tau)$: *если* $\chi_0 = \hat{\chi}^t$, *то* $\chi(.,\tau) = \chi_0(.)$ *для всех* $\tau > 0$.

(2) *Для каждого фиксированного значения температуры* t *равновесные распределения фаз класса* $\mathbb{Z}$ *являются атракторами эволюции* $\chi(.,\tau)$: *для любого начального условия* χ_0 *существует такое равновесное распределение фаз* $\hat{\chi}^t \in \mathbb{Z}$, *что*

$$\lim_{\tau\to\infty} \|\chi(.,\tau) - \hat{\chi}^t(.)\|_{L_1} = 0. \tag{3.9}$$

Утверждение (3.9) по-разному реализуется для условий $(3.3)_{a,b}$ и (3.5). Для первого из них равенство достигается лишь "в пределе", в то время как для второго (теорема 2) — допредельное выражение совпадает с пределом для всех достаточно больших значений времени.

Из (3.9), (2.3) и (2.4) следует, что для состояний равновесия композитной среды (1.17) справедлив аналог (3.9)

$$\lim_{\tau\to\infty} \|\check{u}^\tau - \hat{u}^t\|_X = 0 \tag{3.10}$$

для равновесного поля смещений $\hat{u}^t$, соответствующего равновесному распределению фаз $\hat{\chi}^t$.

§4. Преобразование эволюционной системы.

Основным фактом, упрощающим исследование эволюционной системы, является следующее утверждение, в котором использовано обозначение (1.19), комментарии к нему и третья формула (2.12).

Лемма 4.1. *Справедливо равенство*

$$[\varPhi(\check{u}_x^\tau)]|_{x_j(\tau)} + t = G_Q(Q(\tau), t). \tag{4.1}$$

Доказательство. Для функций $u \in \mathbb{X}$, $\chi \in \mathbb{Z}'$ положим

$$\varPhi[u,\chi](x,t) = \chi(x)(\varPhi^+(u_x(x)) + t) + (1 - \chi(x))\varPhi^-(u_x(x)).$$

Введённая величина задаёт химический потенциал двухфазовой упругой среды, соответствующий полю смещений u и распределению фаз χ. Поскольку $\varPhi^\pm(z) = -a_\pm(z^2 - c_\pm^2)$, из (2.3) получаем

$$\varPhi[\check{u}^\chi, \chi](x,t) = \chi(x)(-a_+\alpha^2(Q)(1-Q)^2 + a_+c_+^2 + t) + (1-\chi(x))(-a_-\alpha^2(Q)Q^2 + a_-c_-^2).$$

Следовательно,

$$[\Phi(\check{u}_x^\tau)]|_{x_j(\tau)} + t = t + [ac^2] - a_+\alpha^2(Q(\tau))(1-Q(\tau))^2 + a_-\alpha^2(Q(\tau))Q^2(\tau).$$

Сравнивая правую часть полученного соотношения с третьей формулой (2.12), завершим доказательство леммы. □

Благодаря (4.1) соотношения (1.18) и (1.20) примут, соответственно, вид

$$\begin{gathered}\dot{x}_j(\tau) = -\gamma G_Q(Q(\tau),t),\\ \text{если } x_j(\tau) \text{ является правым концом интервала группы } \quad \{l_r^+(\tau)\},\\ \\ \dot{x}_j(\tau) = +\gamma G_Q(Q(\tau),t),\\ \text{если } x_j(\tau) \text{ является левым концом интервала группы } \quad \{l_r^+(\tau)\},\end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\begin{gathered}\dot{x}_j(\tau) = -\gamma G_Q(Q(\tau),t),\\ \text{если } x_j(\tau) \text{ является левым концом интервала группы } \quad \{l_s^-(\tau)\},\\ \\ \dot{x}_j(\tau) = +\gamma G_Q(Q(\tau),t),\\ \text{если } x_j(\tau) \text{ является правым концом интервала группы } \quad \{l_s^-(\tau)\}.\end{gathered} \tag{4.3}$$

В силу (4.2) на временны́х интервалах (1.16) для длины $|l_j(\tau)|$ каждого отрезка l_j группы $\{l_r^+\}$ имеем

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}|l_j(\tau)| = -\gamma G_Q(Q(\tau),t), \quad \text{если } l_j(\tau) \text{ имеет одну граничную точку в } (0,l),\\ &\frac{d}{d\tau}|l_j(\tau)| = -2\gamma G_Q(Q(\tau),t), \quad \text{если } l_j(\tau) \text{ имеет две граничные точки в } (0,l).\end{aligned} \tag{4.4}$$

После суммирования равенств (4.4) по всем отрезкам группы $\{l_r^+\}$ приходим к выводу, что

$$\dot{Q}(\tau) = -\gamma l^{-1} S[\chi(.,\tau)] G_Q(Q(\tau),t), \quad Q(0) = Q_0. \tag{4.5}$$

Отметим, что перестройка функции $\chi(.,\tau)$ в точках (1.15) не нарушает непрерывности функции $Q(\tau)$. Поэтому $Q(.) \in W^1_\infty(\mathbb{R}_+)$, а уравнение (4.5) станет справедливым при всех $\tau > 0$, если в его левой части иметь в виду соболевскую производную.

Используя (4.3) получим аналог соотношений (4.4) для длины каждого отрезка $l_j(\tau)$ группы $\{l_s^-\}$:

$$\begin{aligned}&\frac{d}{d\tau}|l_j(\tau)| = \gamma G_Q(Q(\tau),t), \quad \text{если } l_j(\tau) \text{ имеет одну граничную точку в } (0,l),\\ &\frac{d}{d\tau}|l_j(\tau)| = 2\gamma G_Q(Q(\tau),t), \quad \text{если } l_j(\tau) \text{ имеет две граничные точки в } (0,l).\end{aligned} \tag{4.6}$$

С помощью первого равенства (2.7) и соотношения (4.5) придём к монотонному убыванию функционала энергии двухфазовой среды вдоль эволюции $\check{u}^\tau(.)$, $\chi(.,\tau)$:

$$\frac{d}{d\tau} I_0[\check{u}^\tau(.), \chi(.,\tau), t] = G_Q(Q(\tau),t)\dot{Q}(\tau) = -\gamma l^{-1} S[\chi(.,\tau)] G_Q^2(Q(\tau),t). \tag{4.7}$$

§5. Модельная задача для объёмной доли фазы.

Фиксируем монотонно убывающую функцию $s(\tau)$, $\tau \geq 0$, принимающую неотрицательные целочисленные значения. Если $s(0) \geq 1$ и $s(\tau) \not\equiv \text{const}$, то у неё имеется конечное число скачков в некоторых точках $\tau = \xi_j$, $j = 1,\dots,k$

$$0 < \xi_1 < \dots < \xi_k, \quad 1 \leq k \leq s(0) - 1 \tag{5.1}$$

(предполагается, что $\tau=0$ не является точкой скачка).

Рассмотрим уравнение по определению функции $q(\tau)$, $\tau\ge 0$ со значениями в интервале $[0,1]$

$$\dot q(\tau)=-\gamma l^{-1}s(\tau)G_Q(q(\tau),t),\quad q(0)=q_0\in(0,1). \tag{5.2}$$

Отличие (4.5) от (5.2) заключается в том, что в (4.5) величины $Q(\tau)$ и $S[\chi(.,\tau)]$ не являются независимыми: они обе порождаются функцией $\chi(.,\tau)$ по формулам (1.21) и (1.6), соответственно. В уравнении (5.2) эта зависимость разрушена. Переменные в обыкновенном дифференциальном уравнении (5.2) разделяются. Однако явные формулы для его решения (за исключением случая $[a]=0$) столь громоздки, что легче описать свойства решения задачи (5.2) на качественном уровне.

Рассмотрим две задачи (5.2) с функциями $s_1(\tau)$, $s_2(\tau)$, $s_1(\tau)=s_2(\tau)\equiv s(\tau)$ при $\tau\in[0,\tau']$ и общим начальным условием q_0. Для этих задач справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.1. *Два решения из класса $W^1_\infty(\mathbb{R}_+)$ со значениями в интервале $[0,1]$ совпадают на отрезке $[0,\tau']$. В частности, задача (5.2) не может иметь двух различных решений класса $W^1_\infty(\mathbb{R}_+)$ со значениями в интервале $[0,1]$.*

Доказательство. Пусть q_1, q_2 — два начальных данных, $q_1(\tau)$, $q_2(\tau)$ — два соответствующих им решения указанных задач. Тогда на отрезке $[0,\tau']$

$$\frac{d}{d\tau}|q_1(\tau)-q_2(\tau)|^2=-2\gamma l^{-1}s(\tau)(G_Q(q_1(\tau),t)-G_Q(q_2(\tau),t))(q_1(\tau)-q_2(\tau)).$$

Пользуясь (3.6) для $y(\tau)=|q_1(\tau)-q_2(\tau)|^2$, имеем

$$-2\gamma l^{-1}s(\tau)g_+y(\tau)\le\dot y(\tau)\le-2\gamma l^{-1}s(\tau)g_-y(\tau),$$

что приводит к неравенству $y(\tau)\le y(0)$, означающему совпадение $q_-(\tau)$ и $q_2(\tau)$ на отрезке $[0,\tau']$ при совпадении начальных данных $q_1=q_2\equiv q_0$. □

По аналогии с (3.3)-(3.5) разобьём множество начальных данных q_0 на три класса:

$$\begin{gathered} t_-<t_+,\quad t\in[t_-,t_+],\\ (a)\ 0<q_0<\hat Q(t)\le 1,\quad (b)\ 0\le\hat Q(t)<q_0<1,\quad (c)\ q_0=\hat Q(t)\in(0,1); \end{gathered} \tag{5.3}$$

$$t_-\le t_+,\quad t\notin[t_-,t_+],\qquad q_0\in(0,1); \tag{5.4}$$

$$t_+=t_-(=t^*),\qquad q_0\in(0,1). \tag{5.5}$$

Свойства решений задачи (5.2) будет зависеть от класса, в который попало начальное данное q_0.

Лемма 5.2. *При выполнении условий (5.3) задача (5.2) однозначно разрешима на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ в классе $W^1_\infty(\mathbb{R}_+)$.*

При выполнении условий $(5.3)_a$ её решение $q(\tau)\in[q_0,\hat Q(t))$ и строго монотонно возрастает по $\tau\in[0,\infty)$.

При выполнении условий $(5.3)_b$ её решение $q(\tau)\in(\hat Q(t),q_0]$ и строго монотонно убывает по $\tau\in[0,\infty)$.

При выполнении условий $(5.3)_c$ для всех $\tau\ge0$ справедливо равенство $q(\tau)=q_0$.

Во всех перечисленных случаях выполняется оценка

$$|q_0-\hat Q(t)|\exp(-\frac{\gamma}{l}g_+\int_0^\tau s(\xi)\,d\xi)\le|q(\tau)-\hat Q(t)|\le|q_0-\hat Q(t)|\exp(-\frac{\gamma}{l}g_-\int_0^\tau s(\xi)\,d\xi). \tag{5.6}$$

Доказательство. Докажем сначала оценку (5.6) как априорную. Пусть $q(\tau)$ — решение задачи (5.2) со значениями в интервале $[0,1]$. Так как при $t_-<t_+$, $t\in[t_-,t_+]$ справедливо равенство (2.10) имеем

$$\frac{d}{d\tau}\hat Q(t)=-\gamma l^{-1}s(\tau)G_Q(\hat Q(t),t).$$

Вычитая это равенство из (5.2) и домножая результат на $q(\tau) - \hat{Q}(t)$, получаем

$$\frac{d}{d\tau}|q(\tau) - \hat{Q}(t)|^2 = -2\frac{\gamma}{l}s(\tau)(G_Q(q(\tau),t) - G_Q(\hat{Q}(t),t))(q(\tau) - \hat{Q}(t)).$$

Пользуясь обозначениями (3.6), приходим к двусторонней оценке

$$-2\frac{\gamma}{l}g_+ s(\tau)|q(\tau) - \hat{Q}(t)|^2 \le \frac{d}{d\tau}|q(\tau) - \hat{Q}(t)|^2 \le -2\frac{\gamma}{l}g_- s(\tau)|q(\tau) - \hat{Q}(t)|^2.$$

Дальнейшие выкладки традиционны [4]. Положим

$$y(\tau) = |q(\tau) - \hat{Q}(t)|^2, \quad C_\pm(\tau) = -2\frac{\gamma}{l}g_\pm s(\tau).$$

В в терминах этих обозначений двустороняя оценка примет вид

$$\frac{d}{d\tau}(y(\tau)\exp(-\int_0^\tau C_-(\xi)\,d\xi)) \le 0, \quad \frac{d}{d\tau}(y(\tau)\exp(-\int_0^\tau C_+(\xi)\,d\xi)) \ge 0,$$

что после интегрирования приводит к соотношениям

$$y(0)\exp(\int_0^\tau C_+(\xi)\,d\xi) \le y(\tau) \le y(0)\exp(\int_0^\tau C_-(\xi)\,d\xi).$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, приходим к (5.6).

Из гладкости функции $G_Q(.,t)$ следует локальная однозначная разрешимость задачи (5.2) в пространстве W^1_∞ для каждого начального данного q_0.

Пусть выполняются условия $(5.3)_a$. Тогда из строгой выпуклости функции $G(.,t)$ следует, что $G_Q(q,t) < 0$ при всех $q \in [q_0, \hat{Q}(t))$. Поэтому локально существующее решение задачи (5.2) монотонно возрастает с ростом τ. Благодаря оценке (5.6) оно не выйдет из интервала $[q_0, \hat{Q}(t))$. Поскольку функция $G_Q(.,t)$ равномерно липшицева на этом интервале, решение задачи (5.2) единственным образом продолжается на всю полуось $\mathbb{R}^+$. Принадлежность продолжения пространству $W^1_\infty(\mathbb{R}^+)$ очевидна.

Условие $(5.3)_b$ рассматривается аналогично. При выполнении условия $(5.3)_c$ утверждение леммы очевидно благодаря доказанной оценке (5.6). □

В силу леммы 5.2 при условиях (5.3) задача (5.2) разрешима на всей полуоси $\mathbb{R}_+$ и при $q_0 \ne \hat{Q}(t)$ величина $\hat{Q}(t)$, если и достигается функцией $q(\tau)$, то лишь в пределе. Иначе обстоит дело в случае (5.4). Поскольку нас интересует решение, значения которого лежат в интервале $[0,1]$, оно для положительной функции $s(\tau)$ будет существовать лишь на конечном промежутке времени.

Лемма 5.3 *Пусть выполняются условия* (5.4), *а функция* $s(\tau)$ *положительна. Тогда*

при $t < t_-$ *задача* (5.2) *однозначно разрешима на интервале* $[0, \tau_-]$ *в классе* $W^1_\infty(0,\tau_-)$, *функция* $q(\tau)$ *строго монотонно возрастает и* $q(\tau_-) = 1$;

при $t > t_+$ *задача* (5.2) *однозначно разрешима на интервале* $[0, \tau_+]$ *в классе* $W^1_\infty(0,\tau_+)$, *функция* $q(\tau)$ *строго монотонно убывает и* $q(\tau_+) = 0$.

Для чисел $\tau_\pm$ *справедливы оценки*

$$\frac{(1-q_0)l}{\gamma(t_+ - t)s(0)} \le \tau_- \le \frac{(1-q_0)l}{\gamma(t_- - t)}, \quad \frac{q_0 l}{\gamma(t - t_-)s(0)} \le \tau_+ \le \frac{q_0 l}{\gamma(t - t_+)}. \tag{5.7}$$

Доказательство. В силу (2.12) справедливы соотношения

$$t - t_+ = G_Q(0,t) \le G_Q(q,t) \le G_Q(1,t) = t - t_-, \quad q \in (0,1). \tag{5.8}$$

С их помощью и уравнения (5.2) получаем

$$\gamma l^{-1}s(\tau)(t_- - t) \le \dot{q}(\tau) \le \gamma l^{-1}s(\tau)(t_+ - t). \tag{5.9}$$

Пусть выполняется условие (5.4) и $t < t_-$. Поскольку убывающая функция $s(\tau)$ принимает только натуральные значения, из предыдущего неравенства имеем

$$\gamma l^{-1}(t_- - t) \leq \dot{q}(\tau) \leq \gamma l^{-1} s(0)(t_+ - t). \tag{5.10}$$

Из локальной однозначной разрешимости задачи (5.2) для любого начального условия $q_0 \in (0,1)$ и отделённости от нуля величины $\dot{q}(\tau)$ следует существование такого положительного числа τ_-, что строго монотонно растущая функция $q(\tau)$ при $\tau = \tau_-$ достигает границы интервала $[0,1]$ в его правом конце. Интегрирование предыдущих неравенства $\tau \in (0,\tau_-)$ приводит к соотношениям

$$\gamma l^{-1}(t_- - t)\tau_- \leq 1 - q_0 \leq \gamma l^{-1} s(0)(t_+ - t)\tau_-, \tag{5.11}$$

дающим оценки (5.7) для числа τ_-.

Случай $t > t_+$ рассматривается аналогично. □

Неохваченным в леммах 5.2-5.3 остаётся случай (5.5).

Лемма 5.4. *Пусть выполняется условие* 5.5. *Тогда для любого q_0 функция $q(\tau) = q_0$, $\tau \geq 0$ является единственным решением задачи* (5.2) *в классе $W^1_\infty(\mathbb{R}_+)$.*

Доказательство. При условии (5.5) справедливо равенство (2.11). Поэтому функция $q(\tau) \equiv q_0$ заведомо является решением задачи (5.2). Из (2.11), как и при доказательстве леммы 5.2, получаем априорную оценку (5.6) с $\hat{Q}(t) = q_0$. Из неё следует, что $q(\tau) \equiv q_0$ — единственное решение этой задачи. □

§6. Доказательство теорем.

Сейчас нам предстоит построить эволюцию функции $\chi(.,\tau)$ по её начальному условию χ_0. Построение проведём последовательно для каждого из интервалов времени (1.16).

Начнём с первого интервала $(0,\tau_1)$. В том случе, если перестроек не будет, положим $\tau_1 = \infty$. Рассмотрим задачу

$$\begin{gathered} \dot{q}(\tau) = -\gamma l^{-1} s(\tau) G_Q(q(\tau),t), \quad s(\tau) \equiv S[\chi_0], \\ q(0) = Q_0, \quad q(\tau) \in [0,1]. \end{gathered} \tag{6.1}$$

Если эволюция существует, то по лемме 5.1 для функции (1.21) должно выполняться равенство

$$Q(\tau) = q(\tau), \quad \tau \in [0,\tau_1]. \tag{6.2}$$

Наше цель — по решению задачи (6.1) определить величину τ_1 и эволюцию функции $\chi(.,\tau)$ на интервале $[0,\tau_1]$.

Для этого по решению задачи (6.1) вычислим координаты концов интервалов (1.12) исходя из равенств

$$\begin{gathered} \dot{x}_j(\tau) = -\gamma G_Q(q(\tau),t), \\ \text{если } x_j(\tau) \text{ является правым концом интервала группы } \quad \{l^+_r(\tau)\}, \\ \\ \dot{x}_j(\tau) = +\gamma G_Q(q(\tau),t), \\ \text{если } x_j(\tau) \text{ является левым концом интервала группы } \quad \{l^+_r(\tau)\}, \end{gathered} \tag{6.3}$$

таким образом, чтобы характеристическая функция (1.13) при $\tau = 0$ обращалась в χ_0. В случае существования эволюции уравнения (6.3) совпадают с (4.2). Зная функции $x_j(\tau)$, определим момент времени τ_1, в который какой-либо из интервалов группы $\{l^+_r(\tau)\}$ или $\{l^-_s(\tau)\}$ схлопнется в некоторую точку отрезка $(0,l)$ или будет вытеснен из этого отрезка. Если таковое не произойдёт за конечное время, положим $\tau_1 = \infty$. В силу (6.3) при $\tau \in [0,\tau_1)$ для интервалов группы $\{l^+(\tau)\}$ выполняются равенства

$$\begin{aligned} &\frac{d}{d\tau}|l_j(\tau)| = -\gamma G_Q(q(\tau),t), \quad \text{если } l_j(\tau) \text{ имеет одну граничную точку в } (0,l), \\ &\frac{d}{d\tau}|l_j(\tau)| = -2\gamma G_Q(q(\tau),t), \quad \text{если } l_j(\tau) \text{ имеет две граничные точки в } (0,l). \end{aligned} \tag{6.4}$$

После сложения которых приходим к выводу, что величина (1.21) построенная по характеристической функции (1.13), на интервале времени $[0, \tau_1]$ удовлетворяет уравнению

$$\dot{Q}(\tau) = -\gamma l^{-1} s(\tau) G_Q(q(\tau), t), \quad Q(0) = Q_0. \tag{6.5}$$

Сравнивая (6.1) с (6.5) приходим к равенству

$$Q(\tau) = q(\tau), \quad \tau \in [0, \tau_1]. \tag{6.6}$$

завершающему построение эволюции функции $\chi(., \tau)$, $\tau \in [0, \tau_1]$.

Предположим существование двух эволюций $\chi(., \tau)$ и $\chi'(., \tau)$ с общим начальным условием χ_0 и временами первой перестройки τ_1 и τ_1'. Величины (1.21) для этих эволюций обозначим через $Q(\tau)$ и $Q'(\tau)$, соответственно. Тогда

$$\dot{Q}(\tau) = -\gamma l^{-1} S[\chi_0] G_Q(Q(\tau), t), \quad \dot{Q}'(\tau) = -\gamma l^{-1} S[\chi_0] G_Q(Q'(\tau), t),$$
$$Q(0) = Q'(0) = Q_0, \quad \tau \in [0, \tau''], \quad \tau'' = \min\{\tau_1, \tau_1'\}.$$

В силу леммы 5.1 при $\tau \in [0, \tau'']$ выполняется равенство $Q(\tau) = Q'(\tau)$, что приводит к совпадению на указанном интервале времени уравнений (4.2) для обеих эволюций. Поэтому $\tau_1 = \tau_1'$.

Таким образом, первое время перестройки τ_1 и эволюция функции $\chi(., \tau)$, $\tau \in [0, \tau_1]$ существуют и однозначно определяются начальным данным χ_0.

Если для построенной эволюции при конечном τ_1 выполняется одно из равенств $Q(\tau_1) = 0$ или $Q(\tau_1) = 1$, то $\chi(x, \tau_1) \equiv 0$ или $\chi(x, \tau_1) \equiv 1$, соответственно, и в обоих случаях $S[\chi(., \tau)] = 0$. Тогда эти равенства сохранятся для всех $\tau > \tau_1$ и процесс эволюции считается завершённым.

Если $Q(\tau) \in (0, 1)$, то для построения числа τ_2 (если второй перестройки не будет, положим $\tau_2 = \infty$) и эволюции $\chi(., \tau)$, $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$ в формулировке задачи (6.1) достаточно сделать следующие изменения

$$s(\tau) = S[\chi(., \tau_1)], \quad q(\tau_1) = Q(\tau_1).$$

Повторяя эту конструкция, за конечное число шагов определим все времена перестроек и эволюцию функции $\chi(., \tau)$. Окончательный результат сформулируем в следующей лемме.

Лемма 6.1. *Эволюция функции $\chi(., \tau)$ существует для всех $\tau \geq 0$ и однозначно определяется начальным условием χ_0.*

Перейдём к описанию свойств эволюции $\chi(., \tau)$. Они будут существенно зависеть от условий (3.3) — (3.5).

Лемма 6.2. *При условиях* $(3.3)_c$ *или* (3.5) *эволюция $\chi(., \tau)$ не зависит от времени τ.*

Доказательство. Для каждого из условий $(3.3)_c$ или (3.5) в силу лемм 5.2 или 5.4 решение задачи (6.1) не зависит от времени τ. Поскольку при этих условиях $Q_0 = \hat{Q}(t)$, а (см. (2.10), (2.11)) $G_Q(\hat{Q}(t), t) = 0$, для решения задачи (6.1) имеем $G_Q(q(\tau), t) = 0$. Так как на интервале $[0, \tau_1]$ выполняется равенство $q(\tau) = Q(\tau)$, из (4.2) вытекает постоянство координат $x_j(\tau)$ концов интервалов $l_j(\tau)$. Следовательно, $\chi(., \tau) = \chi_0$ и $\tau_1 = \infty$ □

Следствием леммы 6.2 является утверждения теорем 1(3) и 3. В силу леммы 2.2 множество начальных данных, удовлетворяющих условиям $(3.3)_c$ или (3.5) совпадает с множеством равновесных распределений фаз. Поэтому из леммы 6.2 вытекает утверждение теоремы 4(1).

Лемма 6.2. *При выполнении любых условий* (3.3) *справедлива оценка* (3.7).

Доказательство. Поскольку для эволюции $\chi(., \tau)$ функция (1.21) является решением задачи (5.2) с $s(\tau) = S[\chi(., \tau)]$, справедлива оценка (5.6). Из неё следует, что $Q(\tau) \in (0, 1)$ при всех $\tau \in \mathbb{R}_+$. Поэтому $S[\chi(., \tau)] \geq 1$. Так как функция $S[\chi(., \tau)]$ монотонно убывает, имеем $1 \leq S[\chi(., \tau)] \leq S[\chi_0]$. Используя последние неравенства и оценку (5.6), приходим к справедливости (3.7). □

Если выполняется условие $(3.3)_a$, то из уравнения (4.2) и строгой выпуклости на отрезке $[0, 1]$ функции $G(., t)$ с помощью леммы 5.2 устанавливается справедливость теоремы 1(1). Тогда для каждого фиксированного $x \in (0, l)$ величина $\chi(x, \tau)$ будет монотонно возрастать с ростом τ. Поэтому существует предел

$$\lim_{\tau \to \infty} \chi(x, \tau) = \tilde{\chi}(x), \quad x \in (0, l),$$

в силу (1.4) являющийся характеристической функцией. Так как величина $S[\chi(.,\tau)]$ может лишь убывать с ростом τ, справедливо включение $\tilde{\chi}_0 \in \mathbb{Z}$. Пользуясь теоремой о монотонной сходимости и оценкой (3.7), имеем

$$\hat{Q}(t) = \lim_{\tau\to\infty} Q(\tau) = \lim_{\tau\to\infty} \int_0^l \chi(x,\tau)\,dx = \int_0^l \tilde{\chi}(x)\,dx.$$

Следовательно (лемма 2.2), функция $\tilde{\chi}(x)$ совпадает с некоторым равновесным распределением фаз $\hat{\chi}^t(x)$. Поскольку $\tilde{\chi}(x) \geq \chi(x,\tau)$, для всех $\tau > 0$ и $x \in (0,l)$, из предыдущих соотношений вытекает равенство (3.9).

Если выполняется условие $(3.3)_b$, то из уравнения (4.2) и строгой выпуклости на отрезке $[0,1]$ функции $G_Q(0,t)$ с помощью леммы 5.2 устанавливается справедливость утверждений теоремы 1(2). Тогда для каждого фиксированного $x \in (0,l)$ величина $1-\chi(x,\tau)$ будет монотонно возрастать с ростом τ. Повторяя предыдущие рассуждения, придём к справедливости (3.9) при условии $(3.3)_b$.

Для доказательства теоремы 3 применим лемму 5.3 к уравнению (4.5). Заметим, что до тех пор, пока $Q(\tau) \in (0,1)$, функция $s(\tau) = S[\chi(.,\tau)]$ положительна.

Литература

1. Abeyarante R., Knowles J.K. Evolution of phase transformation. A continuum theory. Cambrige University Press. 2006. 241pp.
2. Д.О.Волкова, А.Б.Фрейдин. Влияние внешних деформаций и параметров материала на кинетику плоских межфазовых границ. Вестник СПБГУ. Сер.1, 2012 вып.2.с.99-108.
3. В.Г.Осмоловский. "Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред". St. Petersburg Mathematical Society Preprint #2014-04.
4. О.А.Ладыженская Краевые задачи математической физики. М., Наука, 1973.