Спектральные асимптотики для задач с интегральными ограничениями

Ю.П. Петрова*

21 июня 2016 г.

Аннотация: рассматривается задача на собственные значения для дифференциального оператора произвольного порядка с интегральными ограничениями. Получена асимптотика собственных чисел. Результаты применяются к нахождению асимптотики вероятности малых уклонений для некоторых процессов с исключенным трендом n-ого порядка.

1 Введение

Рассмотрим следующую задачу на собственные значения:

$$(-1)^p u^{(2p)}(t) = \lambda^{(n,p)} u(t) + \mathcal{P}_{n-2p}(t), \qquad \int\limits_0^1 t^i u(t)\, dt = 0, \quad i = 0 \ldots n-1, \tag{1}$$

где $n, p \in \mathbb{N}$, $n > 2p$, $\mathcal{P}_{n-2p}(t)$ — полином с неизвестными коэффициентами, степень которого менее $(n-2p)$.

Целью данной статьи является нахождение асимптотики собственных чисел $\lambda_k^{(n,p)}$ при $k \to +\infty$, где $\lambda_k^{(n,p)}$ — k-ое собственное число задачи (1). Эта задача возникает при изучении асимптотики малых уклонений некоторых гауссовских процессов (см. §3). При $p = 1$ эта задача рассматривалась в работе [1]. Отметим, что операторы второго порядка с интегральными условиями более общего вида рассматривались в монографии А.Л. Скубачевского [2, §1.2] (там же можно найти дальнейшие ссылки по этой теме).

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$(-1)^p y^{(2n)}(t) = \lambda^{(n,p)} y^{(2n-2p)}(t), \qquad y^{(j)}(0) = y^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0 \ldots n-1. \tag{2}$$

Задача (2) возникает при поиске точной константы в теореме вложения $\overset{\circ}{W}{}_2^n(0,1) \hookrightarrow \overset{\circ}{W}{}_2^{n-p}(0,1)$:

$$\lambda_1^{(n,p)} = \min_{y \in \overset{\circ}{W}{}_2^n} \frac{\int\limits_0^1 (y^{(n)}(x))^2\, dx}{\int\limits_0^1 (y^{(n-p)}(x))^2\, dx}.$$

Эта константа была найдена М. Жане [3] (см. также [4]) при произвольных $n \in \mathbb{Z}_+$ и $p = 1$. При произвольных $p \in \mathbb{N}$ ответ был сформулирован в работе [5] без доказательства и в неявных терминах (см. также [6] при $p = 2$).

*Санкт-Петербургский государственный университет; e-mail: delafer21@gmail.com. Работа поддержана грантом РФФИ 16-01-00258а

Лемма 1. *Задачи (1) и (2) эквивалентны, т.е. имеют решения при одних и тех же положительных $\lambda^{(n,p)}$, причем если $u(t)$ — решение задачи (1), а $y(t)$ — решение задачи (2), то они связаны соотношением: $u(t) = y^{(n)}(t)$.*

Доказательство. Если положить $u(t) := y^{(n)}(t)$, то уравнение (2) примет вид:

$$(-1)^p u^{(n)}(t) = \lambda^{(n,p)} u^{(n-2p)}(t), \text{ что равносильно уравнению в (1).}$$

Перепишем граничные условия (2) в терминах функции $u(t)$. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$0 = y^{(n-1)}\Big|_0^1 = \int\limits_0^1 y^{(n)}(t)\,dt = \int\limits_0^1 v(t)\,dt;$$

$$0 = y^{(n-2)}\Big|_0^1 = \int\limits_0^1 y^{(n-1)}(t)\,dt = ty^{(n-1)}\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 ty^{(n)}\,dt = -\int\limits_0^1 tv(t)\,dt.$$

Аналогично все остальные граничные условия запишутся в виде интегральных условий из (1).

Обратно, имеет место представление

$$y^{(k)}(t) = \frac{1}{(n-k-1)!}\int_0^t (t-s)^{(n-k-1)} u(s)\,ds$$

поэтому из интегральных условий в (1) получаем граничные условия в (2). ∎

Статья организована следующим образом. В §2 выведено уравнение для собственных чисел $\lambda_k^{(n,p)}$ и построена их асимптотика. В §3 полученные результаты применяются к нахождению асимптотики вероятностей малых уклонений для некоторых процессов с исключенным трендом.

В статье используются следующие обозначения: $\mathfrak{V}[x_1,\dots,x_n]$ — определитель Вандермонда; $J_k(x)$ — функция Бесселя первого рода порядка k, $[f(x)] := f(x) + O(\frac{1}{x})$. Говоря о четных и нечетных функциях, мы имеем в виду четность относительно точки 1/2.

2 Асимптотика собственных чисел λ_k

Не умаляя общности, можем считать, что решения задачи (2) являются либо четными, либо нечетными функциями. Рассмотрим четное решение $y(t)$. Заметим, что $y'(t)$ есть нечетная функция, удовлетворяющая уравнению:

$$(-1)^p (y'(t))^{(2n-1)} - \lambda^{(n,p)} (y'(t))^{(2n-2p-1)} = 0,$$

откуда

$$(-1)^p (y'(t))^{(2n-2)} - \lambda^{(n,p)} (y'(t))^{(2(n-1-p))} = const,$$

где левая часть есть нечетная и непрерывная функция. Поэтому константа в правой части равна 0. Тем самым получаем, что собственное число $\lambda^{(n,p)}$, отвечающее четному решению задачи, равно $\lambda^{(n-1,p)}$, отвечающему нечетному решению задачи.

Наоборот, рассмотрим нечетное решение $y(t)$ задачи (2) с $\lambda^{(n-1,p)}$. Ясно, что $Y(t) := \int_0^t y(x)\,dx$ есть четное решение краевой задачи:

$$(-1)^p Y^{(2n)}(t) - \lambda^{(n-1,p)} Y^{(2n-2p)}(t) = 0, \qquad Y^{(j)}(0) = Y^{(j)}(1) = 0, \quad j = 0, \dots, n-1.$$

Таким образом, достаточно рассматривать только нечетные решения задачи (2). Любое такое решение может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} y(t) = a_0 \sin(\xi_0(2t-1)) + a_1 \sin(\xi_1(2t-1)) + \ldots + a_{p-1} \sin(\xi_{p-1}(2t-1)) + \\ + a_p(2t-1) + \ldots + a_{n-1}(2t-1)^{2n-2p-1}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $\xi_j := \frac{\omega z^j}{2}$, $j = 0 \ldots p-1$, $\omega = |\lambda^{(n,p)}|^{\frac{1}{2p}}$, $z = e^{\frac{i\pi}{p}}$. Подставляя (3) в граничные условия из (2), получаем систему линейных уравнений на a_j, $j = 0 \ldots n-1$.

Для существования нетривиального решения необходимо, чтобы определитель системы был равен нулю. После сокращения на подходящие степени двойки этот определитель равен

$$\begin{vmatrix} \sin(\xi_0) & \cdots & \sin(\xi_{p-1}) & 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \xi_0 \cos(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}\cos(\xi_{p-1}) & 1 & 3 & 5 & \cdots & (2n-2p-1) \\ -\xi_0^2 \sin(\xi_0) & \cdots & -\xi_{p-1}^2 \sin(\xi_{p-1}) & 0 & 3\cdot 2 & 5\cdot 4 & \cdots & (2n-2p-1)(2n-2p-2) \\ -\xi_0^3 \cos(\xi_0) & \cdots & -\xi_{p-1}^3 \cos(\xi_{p-1}) & 0 & 3! & 5\cdot 4\cdot 3 & \cdots & (2n-2p-1)(2n-2p-2)(2n-2p-3) \\ \xi_0^4 \sin(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^4 \sin(\xi_{p-1}) & 0 & 0 & 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Обозначим этот определитель $\Delta_{n,p}$ и рассмотрим его как функцию переменных $(\xi_0, \dots, \xi_{p-1})$. Дифференцируя $\Delta_{n,p}$ по каждой переменной, получим

$$\frac{\partial^p \Delta_{n,p}}{\partial \xi_0 \ldots \partial \xi_{p-1}} = \begin{vmatrix} \cos(\xi_0) & \cdots & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cos(\xi_0) - \xi_0 \sin(\xi_0) & \cdots & 1 & 3 & \cdots & (2n-2p-1) \\ -2\xi_0 \sin(\xi_0) - \xi_0^2 \cos(\xi_0) & \cdots & 0 & 3\cdot 2 & \cdots & (2n-2p-1)(2n-2p-2) \\ -3\xi_0^2 \cos(\xi_0) + \xi_0^3 \sin(\xi_0) & \cdots & 0 & 3! & \cdots & (2n-2p-1)(2n-2p-2)(2n-2p-3) \\ 4\xi_0^3 \sin(\xi_0) + \xi_0^4 \cos(\xi_0) & \cdots & 0 & 0 & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}.$$

Проделаем с полученным определителем следующие операции:

1. Из второй строчки вычтем первую, затем из третьей строчки вычтем удвоенную вторую, из четвертой — утроенную третью и т.д.
2. Разложим $\Delta_{n,p}$ по $(p+1)$-ому столбцу, получим определитель порядка $(n-1)$.
3. Вынесем общие множители из каждого столбца. Получим рекуррентное соотношение:
$$\frac{\partial^p}{\partial \xi_0 \ldots \partial \xi_{p-1}} \Delta_{n,p} = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n-2p-2) \cdot \xi_0 \cdot \ldots \cdot \xi_{p-1} \cdot \Delta_{n-1,p}. \quad (4)$$

При $n = p$ имеем

$$\Delta_{p,p} = \begin{vmatrix} \sin(\xi_0) & \cdots & \sin(\xi_{p-1}) \\ \xi_0 \sin'(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1} \sin'(\xi_{p-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_0^{p-1} \sin^{(p-1)}(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^{p-1} \sin^{(p-1)}(\xi_{p-1}) \end{vmatrix}.$$

Перепишем $\Delta_{p,p}$ в терминах функций Бесселя. Заметим, что $\sin(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x)$. Если мы из второй строчки вычтем первую, то получим $x\cos(x) - \sin(x) = -\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot x^{\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x)$. Аналогичным образом, вычитая из каждой строчки некоторую линейную комбинацию всех предыдущих, получаем согласно формуле [7, 8.463] следующее выражение для $\Delta_{p,p}$ (с точностью до мультипликативной константы, за которой мы следить не будем):

$$\Delta_{p,p} = C_p \begin{vmatrix} \xi_0^{1/2} J_{1/2}(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^{1/2} J_{1/2}(\xi_{p-1}) \\ \xi_0^{3/2} J_{3/2}(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^{3/2} J_{3/2}(\xi_{p-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_0^{(2p-1)/2} J_{(2p-1)/2}(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^{(2p-1)/2} J_{(2p-1)/2}(\xi_{p-1}) \end{vmatrix}.$$

Зная $\Delta_{p,p}$ и пользуясь соотношением (4), найдем $\Delta_{p+1,p}$. Домножим $\Delta_{p,p}$ на ξ_j, $j = 0, \ldots, p-1$, и проинтегрируем по каждой переменной ξ_j от 0 до ξ_j. Пользуясь рекуррентным соотношением на функцию Бесселя [7, 8.472.3], получим

$$\Delta_{p+1,p} = C_{p+1} \begin{vmatrix} \xi_0^{3/2} J_{3/2}(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^{3/2} J_{3/2}(\xi_{p-1}) \\ \xi_0^{5/2} J_{5/2}(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^{5/2} J_{5/2}(\xi_{p-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_0^{(2p+1)/2} J_{(2p+1)/2}(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^{(2p+1)/2} J_{(2p+1)/2}(\xi_{p-1}) \end{vmatrix}.$$

Таким образом, проделав эту операцию $(n-p)$ раз, получим окончательно

$$\Delta_{n,p} = C_n \begin{vmatrix} \xi_0^{(2n-2p+1)/2} J_{(2n-2p+1)/2}(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^{(2n-2p+1)/2} J_{(2n-2p+1)/2}(\xi_{p-1}) \\ \xi_0^{(2n-2p+3)/2} J_{(2n-2p+3)/2}(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^{(2n-2p+3)/2} J_{(2n-2p+3)/2}(\xi_{p-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_0^{(2n-1)/2} J_{(2n-1)/2}(\xi_0) & \cdots & \xi_{p-1}^{(2n-1)/2} J_{(2n-1)/2}(\xi_{p-1}) \end{vmatrix}. \tag{5}$$

Теорема 1. *При $k \to \infty$ имеем*

$$\lambda_k^{(n,p)} = \left(\pi k + \frac{(2n-p-1)\pi}{2} + O(k^{-1})\right)^{2p}. \tag{6}$$

Доказательство. Рассмотрим $\Delta_{n,p}$ как функцию одной переменной $\omega \in \mathbb{C}$ (напомним, что $\xi_j = \frac{\omega z^j}{2}$). Найдем асимптотику корней $\Delta_{n,p}(\omega) = 0$ при $|\omega| \to \infty$. Заметим, что $|\Delta_{n,p}(\omega)| = |\Delta_{n,p}(z\omega)|$, поэтому достаточно рассматривать $|\arg(\omega)| \le \frac{\pi}{2p}$.

В угле $|\arg(\omega)| < \varphi_0 < \pi$ у функции Бесселя имеется равномерная асимптотика на бесконечности (см. [7, 8.451.1]):

$$J_{n+\frac{1}{2}}(\omega) = (-1)^n \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin^{(n)}(\omega)}{\omega^{\frac{1}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\omega}\right)\right), \quad |\omega| \to \infty.$$

Поэтому при $|\arg(\omega)| \le \frac{\pi}{2p}$ имеем

$$\Delta_{n,p}(\omega) = C_n \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{p}{2}} \begin{vmatrix} (-\frac{\omega}{2})^{n-p} \sin^{(n-p)}(\frac{\omega}{2}) & \cdots & (-\frac{\omega}{2})^{n-p} z^{(p-1)(n-p)} \sin^{(n-p)}(\frac{\omega}{2} z^{p-1}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\frac{\omega}{2})^{n-1} \sin^{(n-1)}(\frac{\omega}{2}) & \cdots & (-\frac{\omega}{2})^{n-1} z^{(p-1)(n-1)} \sin^{(n-1)}(\frac{\omega}{2} z^{p-1}) \end{vmatrix} \cdot [1].$$

Заметим, что при $|\arg(\omega)| \le \frac{\pi}{2p}$ верно $\Im(\omega z^j) > a\omega > 0$ при некотором $a > 0$ и $j = 0, \ldots, p-1$, поэтому

$$\sin\left(\frac{\omega}{2} z^j\right) = -\frac{e^{-i\frac{\omega}{2} z^j}}{2i} \cdot [1], \quad j = 1, \ldots, p-1, \quad |\omega| \to \infty.$$

Во всех столбцах, кроме первого, заменим синусы на соответствующие экспоненты:

$$\Delta_{n,p} = \frac{C_n (-1)^{p-1}}{(2i)^p} \Big(\frac{2}{\pi}\Big)^{\frac{p}{2}} \times$$

$$\begin{vmatrix} (-\frac{\omega}{2})^{n-p} (i^{n-p} e^{i\frac{\omega}{2}} - (-i)^{n-p} e^{-i\frac{\omega}{2}}) & z^{n-p} (\frac{i\omega}{2})^{n-p} e^{-i\frac{\omega}{2} z} & \cdots & z^{(p-1)(n-p)} (\frac{i\omega}{2})^{n-p} e^{-i\frac{\omega}{2} z^{p-1}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\frac{\omega}{2})^{n-1} (i^{n-1} e^{i\frac{\omega}{2}} - (-i)^{n-1} e^{-i\frac{\omega}{2}}) & z^{n-1} (\frac{i\omega}{2})^{n-1} e^{-i\frac{\omega}{2} z} & \cdots & z^{(p-1)(n-1)} (\frac{i\omega}{2})^{n-1} e^{-i\frac{\omega}{2} z^{p-1}} \end{vmatrix} \cdot [1].$$

Вынося общие множители из строк и столбцов, получим

$$\Delta_{n,p} = \frac{C_n(-1)^{p-1}}{(2\pi)^{\frac{p}{2}} i^p} \left(\frac{i\omega}{2}\right)^{p(2n-p-1)/2} e^{-i\frac{\omega}{2}} \cdot \ldots \cdot e^{-i\frac{\omega}{2} z^{p-1}} \cdot z^{(n-p)p(p-1)/2} \times$$

$$\times \begin{vmatrix} (-1)^{n-p} e^{i\omega} - 1 & 1 & \cdots & 1 \\ (-1)^{n-p+1} e^{i\omega} - 1 & z & \cdots & z^{p-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{n-1} e^{i\omega} - 1 & z^{p-1} & \cdots & z^{(p-1)^2} \end{vmatrix} \cdot [1]. \qquad (7)$$

Таким образом, асимптотическое решение уравнения $\Delta_{n,p}(\omega) = 0$ сводится к решению уравнения

$$e^{i\omega}(-1)^{n-p} \cdot \mathfrak{V}[-1, z, \ldots, z^{p-1}] = \mathfrak{V}[1, z, \ldots, z^{p-1}] \cdot [1],$$

или

$$e^{i\omega} = (-1)^{n-p} \frac{(z-1) \cdot \ldots \cdot (z^{p-1} - 1)}{(z+1) \cdot \ldots \cdot (z^{p-1}+1)} \cdot [1] = (-1)^{n-p} \frac{z-1}{z^{p-1}+1} \cdot \ldots \cdot \frac{z^{p-1}-1}{z+1} \cdot [1] =$$
$$= (-1)^{n-p} e^{i\frac{\pi}{p}} \cdot \ldots \cdot e^{i\frac{(p-1)\pi}{p}} = e^{i\frac{(2n-p-1)\pi}{2}} \cdot [1]. \qquad (8)$$

Стандартные рассуждения, использующие теорему Руше (подробно можно почитать в [8, стр.78]), показывают, что все корни уравнения (8) достаточно большого модуля находятся в окрестностях точек $2\pi k + \frac{(2n-p-1)\pi}{2}$ с радиусом $O(k^{-1})$, причем в окрестности каждой точки находится ровно один корень уравнения. У уравнения $\Delta_{n-1,p}(\omega) = 0$ корни находятся вблизи точек $2\pi k - \pi + \frac{(2n-p-1)\pi}{2}$, $k \to \infty$. Поскольку множество $\left\{\left(\lambda_k^{(n,p)}\right)^{\frac{1}{2p}}\right\}_{k\in\mathbb{N}}$ есть объединение положительных корней определителей $\Delta_{n,p}$ и $\Delta_{n-1,p}$, мы получаем такую асимптотику собственных чисел задачи (2) (здесь k_0 — некоторое целое число):

$$\lambda_{k+k_0} = \left(\pi k + \frac{(2n-p-1)\pi}{2} + O(k^{-1})\right)^{2p}, \qquad k \to \infty.$$

Осталось показать, что $k_0 = 0$. Для этого воспользуемся теоремой Йенсена (см. [9, §3.6]).

Обозначим $\delta := \frac{(2n-p-1)}{2}$. Из того, что $|\Delta_{n,p}(\omega)| = |\Delta_{n,p}(z\omega)|$, следует, что корни уравнения $\Delta_{n,p}(\omega) = 0$ имеют вид $\omega_k z^j$, $j = 0, \ldots, 2p-1$, где ω_k — положительные корни этого уравнения. Кроме этих корней, есть посторонние корни $\omega = 0$, которые не соответствуют собственным числам. Для их исключения воспользуемся асимптотическим поведением функций Бесселя в окрестности нуля (см. [7, 8.440]). Получим при $\omega \to 0$

$$\Delta_{n,p} = C_n \begin{vmatrix} \dfrac{(\frac{\omega}{2})^{2n-2p+1} \cdot (1+o(1))}{2^{\frac{2n-2p+1}{2}} \Gamma(n-p+\frac{3}{2})} & \cdots & \dfrac{(\frac{\omega}{2} z^{p-1})^{2n-2p+1} \cdot (1+o(1))}{2^{\frac{2n-2p+1}{2}} \Gamma(n-p+\frac{3}{2})} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{(\frac{\omega}{2})^{2n-1} \cdot (1+o(1))}{2^{\frac{2n-1}{2}} \Gamma(n+\frac{1}{2})} & \cdots & \dfrac{(\frac{\omega}{2} z^{p-1})^{2n-1} \cdot (1+o(1))}{2^{\frac{2n-1}{2}} \Gamma(n+\frac{1}{2})} \end{vmatrix}.$$

Значит,

$$\left.\frac{|\Delta_{n,p}(\omega)|}{\omega^{p(2n-p)}}\right|_{\omega=0} = \frac{C_n \cdot |\mathfrak{V}[1, z^2, \ldots, z^{2(p-1)}]| \cdot 2^{-\frac{3}{2}p(2n-p)}}{\prod\limits_{j=1}^{p} \Gamma(n-p+j+\frac{1}{2})} = \frac{C_n \cdot p^{\frac{p}{2}} \cdot 2^{-\frac{3}{2}p(2n-p)}}{\prod\limits_{j=1}^{p} \Gamma(n-p+j+\frac{1}{2})}.$$

Рассмотрим функцию

$$\tilde{\Delta}_{n,p}(\omega) := \frac{\Delta_{n,p}(\omega)}{C_n \omega^{p(2n-p)}} \cdot \frac{\Delta_{n-1,p}(\omega)}{C_{n-1} \omega^{p(2n-2-p)}}. \tag{9}$$

Заметим, что

$$\tilde{\Delta}_{n,p}(0) = \frac{p^p \cdot 2^{-3p(2n-p-1)}}{\Gamma(n-p+\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2}) \prod\limits_{j=1}^{p-1} \Gamma^2(n-p+j+\frac{1}{2})} \neq 0. \tag{10}$$

Нули функции $\tilde{\Delta}_{n,p}(\omega)$ асимптотически близки к нулям функции $\Psi(\omega)$ (см. [10, стр.8])

$$\Psi(\omega) := \psi_\delta(\omega) \cdot \psi_\delta(\omega z) \cdot \ldots \cdot \psi_\delta(\omega z^{p-1}),$$

где

$$\psi_\delta(\omega) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega^2}{(\pi(n+\delta))^2}\right) = \frac{\Gamma^2(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta+\frac{\omega}{\pi})\Gamma(1+\delta-\frac{\omega}{\pi})}.$$

Докажем, что существует равномерный предел

$$\lim \frac{|\tilde{\Delta}_{n,p}(\omega)|}{|\Psi(\omega)|} \quad \text{при} \quad |\omega| = \pi\left(N+\delta+\frac{1}{2}\right), \quad N \to \infty.$$

Как и выше, достаточно ограничиться сектором $|\arg(\omega)| \leq \frac{\pi}{2p}$. Известно, что (см. [10, лемма 1.3])

$$\psi_\delta(\omega) \sim \Gamma^2(1+\delta)\pi^{2\delta}\omega^{-2\delta-1} \cos\left(\omega - \pi\Big(\delta+\frac{1}{2}\Big)\right).$$

равномерно по $|\omega| = \pi(N+\delta+\frac{1}{2})$, $N \to \infty$, в данном секторе. Далее, из формул (7), (9) с учетом (8) получаем равномерное асимптотическое поведение при $|\omega| \to \infty$ и $|\arg(\omega)| \leq \frac{\pi}{2p}$

$$\begin{aligned}\left|\tilde{\Delta}_{n,p}(\omega)\right| \sim & (2\omega)^{-p(2n-p)} \left(\frac{2}{\pi}\right)^p \cdot \left|\mathfrak{V}[1, z, \ldots, z^{p-1}]\right|^2 \cdot \left|e^{-i\omega z}\right| \cdot \ldots \cdot \left|e^{-i\omega z^{p-1}}\right| \cdot \\ & \left|e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{i(\delta\pi - \frac{\omega}{2})}\right| \cdot \left|e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{i(\delta\pi - \pi - \frac{\omega}{2})}\right|.\end{aligned}$$

Для $j = 1 \ldots p-1$, имеем при $|\omega| \to \infty$ равномерно в данном секторе

$$\left|\cos\left(\omega z^j - \pi\Big(\delta+\frac{1}{2}\Big)\right)\right| \sim \frac{1}{2}\left|e^{-i(\omega z^j - \pi(\delta+\frac{1}{2}))}\right| = \frac{1}{2}\left|e^{-i\omega z^j}\right|.$$

Кроме того,

$$\left|e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{i(\delta\pi - \frac{\omega}{2})}\right| \cdot \left|e^{i\frac{\omega}{2}} - e^{i(\delta\pi - \pi - \frac{\omega}{2})}\right| = \left|e^{i\omega} - e^{i(2\delta\pi - \omega)}\right| = 2\left|\cos\left(\omega - \pi\Big(\delta+\frac{1}{2}\Big)\right)\right|.$$

Поэтому при $|\omega| = \pi(N+\delta+\frac{1}{2})$, $N \to \infty$,

$$\frac{|\tilde{\Delta}_{n,p}(\omega)|}{|\Psi(\omega)|} \rightrightarrows \frac{2^{2p} \cdot |\mathfrak{V}[1, z, \ldots, z^{p-1}]|^2}{\Gamma^{2p}(1+\delta)(2\pi)^{p(2n-p)}}. \tag{11}$$

По теореме Йенсена

$$\prod_{k=1}^{N}\frac{(\pi(k+\delta))^{2p}}{\omega_k^{2p}}=\frac{|\Psi(0)|}{|\tilde{\Delta}_{n,p}(0)|}\cdot\exp\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln\frac{|\tilde{\Delta}_{n,p}(\pi(N+\delta+\frac{1}{2})e^{i\varphi})|}{|\Psi(\pi(N+\delta+\frac{1}{2})e^{i\varphi})|}\,d\varphi\right). \qquad (12)$$

Из формул (10), (11) и (12) видно, что бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty}\frac{(\pi(k+\delta))^{2p}}{\omega_k^{2p}}$ сходится. Отсюда получаем, что $k_0=0$. ■

3 Применение к асимптотике малых уклонений

Как уже указывалось во введении, задача (1) возникает при изучении асимптотики малых уклонений $\mathbb{P}\{\|X_n\|_2<\varepsilon\}$ при $\varepsilon\to 0$ некоторых гауссовских процессов $X_n(t)$, $t\in[0,1]$, а именно:

$$X_n(t):=X(t)-\sum_{i=0}^{n-1}a_it^i, \qquad (13)$$

где a_i определяются соотношениями

$$\int_0^1 t^iX_n(t)\,dt=0,\ i=0\ldots n-1.$$

Здесь $X(t)$, $t\in[0,1]$, — гауссовский процесс с нулевым средним ($\mathbb{E}X(t)\equiv 0$), функция ковариации которого $G(s,t)=\mathbb{E}X(s)X(t)$ является функцией Грина следующей краевой задачи:

$$Lu:=(-1)^pu^{(2p)}=\lambda u\ +\ \text{граничные условия}. \qquad (14)$$

Случай $n=1$ (центрированные процессы) активно изучался для различных $X(t)$. В частности, результаты для центрированного броуновского движения $W_1(t)$ и броуновского моста $B_1(t)$ были получены в работах [11, 12] (они отвечают случаю $p=1$ и подходящим граничным условиям).

Естественно смотреть на центрированный процесс $X_1(t)$ как на ортогональную компоненту $X(t)$ к проекции на подпространство констант в $L_2[0,1]$. Если вычитать проекцию на линейные функции, то получаем так называемые процессы с исключенным трендом $X_2(t)$. Для процесса $B_2(t)$ асимптотика малых уклонений изучалась в работе [13]. Для произвольного n процессы X_n называют процессами с исключенным трендом n-ого порядка. Для процессов $W_n(t)$ и $B_n(t)$ собственные числа ковариационного оператора были найдены в [1].

В силу известного разложения Кархунена—Лоэва (см., напр. [14, §12]) имеем равенство по распределению

$$\|X_n\|_2^2\stackrel{d}{=}\sum_{k=1}^{\infty}\mu_k\eta_k^2,$$

где η_k, $k\in\mathbb{N}$, — независимые стандартные гауссовские с.в., а μ_k, $k\in\mathbb{N}$, — собственные числа интегрального оператора с ядром $G_n(s,t)=\mathbb{E}X_n(s)X_n(t)$.

Заметим, что

$$G_n(s,t)=\mathbb{E}\Big(X(s)-\sum_{i=1}^{n-1}a_is^i\Big)\Big(X(t)-\sum_{i=1}^{n-1}a_it^i\Big)=G(s,t)+\mathcal{P}_n(s,t),$$

где $\mathcal{P}_n(s,t)$ — многочлен степени не более $(n-1)$ по обеим переменным. Тогда уравнение на собственные числа выглядит следующим образом:

$$\mu u(t) = \int_0^1 u(s)(G(s,t) + \mathcal{P}_n(s,t))\,ds.$$

Применяя оператор L к обеим частям этого равенства и обозначая $\lambda^{(n,p)} := \mu^{-1}$, мы получаем уравнение из (1). Если допустить, что $n \geq 2p$, получаем, что $u(t)$ удовлетворяет также интегральным условиям из (1). В этом случае асимптотика малых уклонений не зависит от исходных граничных условий в (14).

Для получения точной асимптотики малых уклонений воспользуемся принципом сравнения Венбо Ли:

Предложение 1. ([15, 16]) *Пусть η_k — последовательность независимых стандартных гауссовских с.в. , а μ_k и $\tilde{\mu}_k$ — две положительные невозрастающие суммируемые последовательности такие, что $\prod \tilde{\mu}_k/\mu_k < \infty$. Тогда*

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \eta_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_k \eta_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}_k}{\mu_k}\right)^{1/2}, \qquad \varepsilon \to 0.$$

В качестве аппроксимации возьмём последовательность

$$\tilde{\mu}_k := \Big[\pi\,(k+\delta)\Big]^{-2p}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

где $\delta = \frac{2n-p-1}{2}$. Тогда

$$\mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \eta_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \sim \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_k \eta_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\mu}_k}{\mu_k}\right)^{\frac{1}{2}} = \mathbb{P}\Big\{\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mu}_k \eta_k^2 < \varepsilon^2\Big\} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\omega_k^p}{(\pi(k+\delta))^p}.$$

Последнее произведение вычисляется из формул (12), (10), (11). Используя [17, теорема 6.2], получаем следующую теорему:

Теорема 2. *Для процессов X_n имеем при $\varepsilon \to 0$*

$$\mathbb{P}\Big\{\|X_n\|_2 < \varepsilon\Big\} \sim C\varepsilon^{\gamma} \exp\Big(-\frac{2p-1}{2(2p\sin(\frac{\pi}{2p}))^{\frac{2p}{2p-1}}}\varepsilon^{-\frac{2}{2p-1}}\Big),$$

где $\gamma = \dfrac{1-2np+p^2}{2p-1}$ *и*

$$C = \frac{(2p)^{1+\frac{\gamma}{2}+\frac{p}{2}} \cdot \pi^{\frac{p-1}{2}} \cdot \sin^{\frac{1+\gamma}{2}}(\frac{\pi}{2p})}{2^{p(2n-p-\frac{1}{2})}\sqrt{2p-1} \cdot |\mathfrak{V}[1, z, \ldots, z^{p-1}]|} \cdot \frac{\Gamma^{-\frac{1}{2}}\left(n-p+\frac{1}{2}\right)\Gamma^{-\frac{1}{2}}\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\prod\limits_{j=1}^{p-1}\Gamma(n-p+j+\frac{1}{2})}.$$

Замечание 1. *при $n = 2$, $p = 1$ этот результат был получен в работе [13] без точного значения константы C. Для случая $p = 1$ и произвольного n в [1, Proposition 4.3] приведен ответ также с неизвестной константой C. Кроме того, значение γ в этой работе вычислено неверно.*

Я признательна А.И. Назарову за ценные советы и редакторские правки, а также Я.Ю. Никитину за указание на работы [13, 1].

Список литературы

[1] Ai X., Li W. Karhunen–Loève expansions for the m-th order detrended Brownian motion // Science China Mathematics. — 2014. — Vol. **57**, no. **10**. — P. 2043–2052.

[2] Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи I // Современная математика. Фундаментальные направления. — 2007. — Vol. **26**. — P. 3–132.

[3] Janet M. Les valeurs moyennes des carrés de deux dérivées d'ordre consécutifs, et le développement en fraction continue de $\tan(x)$ // Bulletin Des Sciences Mathematiques. — 1931. — Vol. **2**, no. **55**. — P. 1–13.

[4] Назаров А. И., Петрова А. Н. О точных константах в некоторых теоремах вложения высокого порядка // Вестник Санкт-Петербургского университета. — 2008. — no. **4**. — P. 16–20.

[5] Janet M. Sur le minimum du rapport de certaines intégrales // Comptes Rendus de l'Académie des Sciences Paris. — 1931. — Vol. **193**. — P. 977–979.

[6] Сластенин А. С. Точные константы в некоторых одномерных теоремах вложения // Дипломная работа. — СПбГУ. — 2014.

[7] Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4, перераб. — Физматгиз, 1963.

[8] Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. Изд. 2, перераб. и дополн. — М., ФМЛ, — 1969.

[9] Титчмарш Е. Теория функций. — Наука. Главная редакция ФМЛ, — 1980.

[10] Назаров А. И. О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2-норме некоторых гауссовских процессов // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Т. Рожковская. — 2003. — Т. **26**. — С. 179–214.

[11] Beghin L., Nikitin Y., Orsingher E. Exact small ball constants for some Gaussian processes under the L_2-norm // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2003. — Vol. **298**. — P. 5–21.

[12] Deheuvels P. A Karhunen–Loève expansion for a mean-centered Brownian bridge // Statistics & Probability Letters. — 2007. — Vol. **77**, no. **12**. — P. 1190–1200.

[13] Ai X., Li W., Liu G. Karhunen–Loève expansions for the detrended Brownian motion // Statistics & Probability Letters. — 2012. — Vol. **82**, no. **7**. — P. 1235–1241.

[14] Лифшиц М. А. Лекции по гауссовским случайным процессам. — СПб, Лань, —2016.

[15] Li W. V. Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms // Journal of Theoretical Probability. — 1992. — Vol. **5**, no. **1**. — P. 1–31.

[16] Gao F., Hannig J., Torcaso F. Comparison theorems for small deviations of random series // Electronic Journal of Probability. — 2003. — Vol. **8**, no. **21**. — P. 1–17.

[17] Nazarov A. I., Nikitin Y. Y. Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems // Probability Theory and Related Fields. — 2004. — Vol. **129**, no. **4**. — P. 469–494.