УДК 517.98

О произведении ядерных операторов

О. И. Рейнов

Эта работа появилась благодаря следующему вопросу Б. С. Митягина, заданному автору в 2014 г. на конференции, посвященной памяти А. Пелчинского, в Бедлево (Польша): верно ли, что произведение двух ядерных операторов в банаховых пространствах факторизуется через ядерный оператор в гильбертовом пространстве? Мы получили сначала отрицательный ответ (см. ниже доказательство части следствия 2), а затем рассмотрели более общую ситуацию. Именно, пусть оператор T представляет собой композицию $T_1T_2\cdots T_n$ ядерных операторов таких, что для $j=1,2,\dots,n$ оператор T_j является s_j-ядерным, где $0<s_j\le 1$. Каков *точный* показатель $r=r(s_1,s_2,\dots,s_n)$, для которого T факторизуется через S_r- оператор в гильбертовом пространстве? Здесь S_r — класс фон Неймана-Шаттена. Ниже мы приводим ответы на этот вопрос.

Везде далее через $X,Y,\dots$ обозначаются банаховы пространства, H — гильбертово пространство, $L(X,Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из X в Y.

Напомним, что оператор $T:X\to Y$ называется *s-ядерным* ($0<s\le 1$, см., например, [3]), если он представим в виде $Tx=\sum_{k=1}^{\infty}\langle x'_k,x\rangle y_k$ для $x\in X$, где $(x'_k)\subset X^*,(y_k)\subset Y$, $\sum_k ||x'_k||^s\,||y_k||^s<\infty$. Мы используем обозначение $N_s(X,Y)$ для линейного пространства всех таких операторов и $\nu_s(T)$ для соответствующей квазинормы $\inf(\sum_k ||x'_k||^s\,||y_k||^s)^{1/s}$. В случае, когда $s=1$, эти операторы называют просто *ядерными*.

Класс $S_p, 0<p<\infty$, операторов фон Неймана-Шаттена определяется следующим образом. Пусть U — компактный оператор в гильбертовом пространстве H и (μ_n) — последовательность его сингулярных чисел (см. [6], Теорема VI.17, с. 227). Оператор U принадлежит пространству $S_p(H)$, если сходится ряд $\sum \mu_n^p$ (см., например, [5], 15.5.1). Пространство $S_p(H)$ имеет естественную квазинорму $\sigma_p(U)=(\sum\mu_n^p)^{1/p}$. Отметим, что для $s\in(0,1]$ имеет место равенство $N_s(H)=S_s(H)$ [2]. Известно, что последовательность всех собственных чисел оператора $U\in S_p(H)$, взятых с учетом кратностей, лежит в пространстве l_p [5, теорема 27.4.3]. Мы также будем использовать включение $S_p\circ S_q\subset S_r$, где $0<p,q,r<\infty, 1/r=1/p+1/q$ [5, теорема 15.5.9].

Определение идеала Π_2 абсолютно 2-суммирующих операторов можно найти в [5] (оно здесь нам не нужно). Отметим лишь, что в гильбертовом случае $\Pi_2(H)=S_2(H)$ (операторы Гильберта-Шмидта; см. [5], теорема 17.5.3). Кроме того, $\Pi_2(C(K),H)=L(C(K),H)$ (см., например, [5]).

Определение. Оператор T *факторизуется через оператор* из $S_p(H)$, если существуют такие операторы $A\in L(X,H)$, $U\in S_p(H)$ и $B\in L(H,Y)$, что $T=BUA$. Если T факторизуется через оператор из $S_p(H)$, то полагаем $\gamma_{S_p}(T)=$

$\inf ||A||\,\sigma_p(U)\,||B||$, где инфимум берется по всем возможным факторизациям оператора T через оператор из $S_p(H)$.

Имеет место следующая

Теорема. *Если $X_1, X_2, \dots, X_{n+1}$ — банаховы пространства, $s_k \in (0,1]$ и $T_k \in N_{s_k}(X_k, X_{k+1})$ для $k = 1, 2, \dots, n$, то произведение $T := T_n T_{n-1} \cdots T_1$ факторизуется через оператор из $S_r(H)$, где $1/r = 1/s_1 + 1/s_2 + \cdots + 1/s_n - (n+1)/2$. При этом, $\gamma_{S_r}(T) \le \prod_{k=1}^n \nu_{s_k}(T_k)$. Результат точен.*

Следствие 1. *Пусть $s, q \in (0,1]$. Произведение s-ядерного и q-ядерного операторов в банаховых пространствах факторизуется через $S_r(H)$-оператор, где $1/r = 1/s + 1/q - 3/2$. Результат точен.*

Следствие 2. *Произведение двух ядерных операторов в банаховых пространствах факторизуется через $S_2(H)$-оператор. Результат точен.*

Проведем доказательство (эскиз) второй части следствия 2, из которого получится и отрицательный ответ на упомянутый выше вопрос Б. С. Митягина.

Пусть f — непрерывная на единичной окружности $\mathbf{T}$ функция Карлемана [1] (см. также [4], теорема 4.11, с. 321), последовательность коэффициентов Фурье которой лежит в $l_2 \setminus \cup_{p<2} l_p$. Рассмотрим на $C := C(\mathbf{T})$ оператор свертки с функцией f :

$$T : C \overset{*f}{\to} C.$$

Оператор T является ядерным (как интегральный оператор с непрерывным ядром). Рассмотрим произведение TT. Отметим, что последовательность собственных чисел этого оператора лежит в l_1, но не в $l_s, 0 < s < 1$. Пусть $r \in [1,2]$. Предположим, что существует такой S_r-оператор $U \in S_r(H)$, что TT факторизуется следующим образом:

$$TT : C \overset{A}{\to} H \overset{U}{\to} H \overset{B}{\to} C.$$

Рассмотрим диаграмму

$$H \overset{B}{\to} C \overset{A}{\to} H \overset{U}{\to} H \overset{B}{\to} C.$$

Набор собственных чисел оператора UAB совпадает (с учетом их алгебраических кратностей) с набором всех собственных чисел оператора $TT = BUA$ [5, стр. 436] (и, таким образом, лежит в l_1 и не лучше). Но:

$$A \in \Pi_2;\ \text{следовательно},\ \ AB \in S_2;\ U \in S_r.$$

Отсюда: $UAB \in S_s$, где $1/s = 1/2 + 1/r$, и, таким образом, последовательность собственных чисел этого оператора лежит в l_s. Следовательно, $s = 1$ и $r = 2$.

В заключение, автор приносит свою благодарность Б.С. Митягину за его вопрос и внимание к приведенному выше доказательству.

ЛИТЕРАТУРА

[**1**] T. Carleman, Acta Mathematica, **41**:1 (1916), 377-384. [**2**] R. Oloff, Beiträge Anal., **4** (1972), 105-108. [**3**] O. I. Reinov, J. Math. Sciences, **115**:3 (2003), 2243-2250. [**4**] А. Зигмунд, *Тригонометрические ряды* I, Мир, Москва, 1965. [**5**] А.

Пич, *Операторные идеалы*, Мир, Москва, 1982. [**6**] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики* 1, *Функциональный анализ*, Мир, Москва, 1977.

Санкт-Петербургский Государственный Университет
E-mail address: orein51@mail.ru