О симметрии спектров ядерных операторов

О. И. Рейнов

1. Введение. М. И. Зеликин в работе [1] установил, что спектр ядерного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве является центрально-симметричным тогда и только тогда, когда спектральные следы всех нечетных степеней этого оператора равны нулю. Напомним, что спектр любого ядерного оператора в гильбертовом пространстве представляет собой последовательность, ненулевые элементы которой являются собственными числами оператора конечной алгебраической кратности. Эта система собственных чисел (взятая с учетом их кратностей) абсолютно суммируема, и спектральный след этого оператора есть, по определению, сумма всех элементов последовательности его собственных чисел (взятых с учетом их кратностей).

Пространство ядерных операторов в гильбертовом пространстве может быть определено как пространство всех операторов со следом (см. [2, с. 77], [3, Теорема 8.1]; в этом случае мы говорим о "ядерном следе"оператора). Операторы со следом интерпретируются также как элементы пополнения тензорного произведения гильбертова пространства и его банахова сопряженного пространства по наибольшей кросснорме на этом тензорном произведении [2, с. 119]. Хорошо известная теорема Лидского [4] (см. также [3, Теорема 8.4]) утверждает, что ядерный след любого ядерного оператора в гильбертовом пространстве (или, что тоже, соответствующего тензорного элемента) совпадает с его спектральным следом. Таким образом, теорема М. И. Зеликина [1] может быть переформулирована следующим образом: спектр ядерного оператора в сепарабельном гильбертовом пространстве является центрально-симметричным тогда и только тогда, когда ядерные следы всех нечетных степеней тензорного элемента, соответствующего этому оператору, равны нулю.

Цель настоящей заметки — привести обобщение этого результата для случая тензорных элементов так называемых s-проективных тензорных произведений подпространств факторпространств $L_p(\mu)$-пространств. В частности, при $p=2$, как следствие получается теорема М. И. Зеликина.

2. Предварительные сведения. Везде далее через $X, Y, \dots$ обозначаются банаховы пространства, $L(X,Y)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов из X в Y; $L(X) := L(X,X)$. Для банахова сопряженного к пространству X используется обозначение X^*. Если $x \in X$ и $x' \in X^*$, то используем обозначение $\langle x', x\rangle$ для $x'(x)$.

Через $X^*\widehat{\otimes}X$ обозначается проективное тензорное произведение пространств X^* и X [5] (см. также [6]). Это есть пополнение алгебраического тензорного произведения $X^*\otimes X$ (рассматриваемого как линейное пространство всех конечномерных непрерывных операторов w в X) относительно проективной нормы $||w||_\wedge := \inf\left(\sum_{k=1}^N ||x'_k||\,||x_k||\right)$, где инфимум берется по всем (конечным) представениям w в виде $w=\sum_{k=1}^N x'_k\otimes x_k$. Каждый элемент u проективного тензорного произведения $X^*\widehat{\otimes}X$ может быть представлен в виде $u=\sum_i \mu_i\, x'_i\otimes x_i$, где $(\mu_i)\in l_1$ и $||x'_i||\leqslant 1$, $||x_i||\leqslant 1$ [5].

Более общо, если $0<s\leqslant 1$, то $X^*\widehat{\otimes}_s X$ — подпространство этого проективного тензорного произведения, состоящее из тех тензорных элементов $u, u\in X^*\widehat{\otimes}X$, которые допускают представление вида $u=\sum_{k=1}^\infty x'_k\otimes x_k$, где $(x'_k)\subset X^*, (x_k)\subset X$, причем $\sum_{k=1}^\infty ||x'_k||^s\,||x_k||^s<\infty$ [5], [6]. Таким образом, $X^*\widehat{\otimes}X = X^*\widehat{\otimes}_1 X$.

На линейном пространстве $X^*\otimes X$ естественным образом определен линейный функционал "след" — trace. Он непрерывен на нормированном пространстве $(X^*\otimes X, ||\cdot||_\wedge)$ и имеет единственное непрерывное продолжение на пространство $X^*\widehat{\otimes}X$, которое мы снова обозначаем через trace.

Каждый тензорный элемент $u, u \in X^*\widehat{\otimes}X$, вида $u = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k \otimes x_k$ естественным образом порождает (ассоциированный с этим элементом) оператор $\widetilde{u} : X \to X$, $\widetilde{u}(x) := \sum_{k=1}^{\infty} \langle x'_k, x\rangle\, x_k$ для $x \in X$. Возникает естественное отображение $j_1 : X^*\widehat{\otimes}X \to L(X)$. Операторы, лежащие в образе этого отображения называются ядерными [5], [7]. Более общо, если $0 < s \leqslant 1$, $u = \sum_{k=1}^{\infty} x'_k \otimes x_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} ||x'_k||^s\, ||x_k||^s < \infty$, то соответствующий оператор $\widetilde{u}$ называется s-ядерным [6]. Через j_s обозначим возникающее естественное отображение из $X^*\widehat{\otimes}_s X$ в $L(X)$. Говорят, что пространство X обладает свойством аппроксимации порядка $s, 0 < s \leqslant 1$ (свойством AP_s), если каноническое отображение j_s взаимно однозначно [6]. Отметим, что свойство AP_1 есть в точности свойство аппроксимации AP А. Гротендика [5], [7]. Классические пространства, такие как $L_p(\mu)$ и $C(K)$ обладают свойством аппроксимации. Если пространство X обладает свойством AP_s, то можно отождествить тензорное произведение $X^*\widehat{\otimes}_s X$ с пространством $N_s(X)$ всех s-ядерных операторов в X (т.е. с образом этого тензорного произведения при отображении j_s). В этом случае для любого оператора $T \in N_s(X) = X^*\widehat{\otimes}_s X$ след trace T вполне определен, и мы называем его *ядерным следом* оператора T.

Ясно, что если банахово пространство обладает свойством аппроксимации, то оно обладает и всеми свойствами AP_s, $s \in (0, 1]$. Каждое банахово пространство обладает свойством $AP_{2/3}$ [5], [8]. Так как всякое банахово пространство есть подпространство некоторого $L_\infty(\mu)$-пространства, то следующий факт (используемый ниже) является обобщением указанного результата А. Гротендика:

Лемма 1. [9, Corollary 10] *Пусть $s \in (0, 1]$, $p \in [1, \infty]$ и $1/s = 1 + |1/p - 1/2|$. Если банахово пространство Y изоморфно подпространству факторпространства (или факторпространству подпространства) некоторого $L_p(\mu)$-пространства, то оно обладает свойством AP_s.*

Таким образом, для таких пространств $Y^*\widehat{\otimes}_s Y = N_s(Y)$ и ядерный след любого оператора $T \in N_s(Y)$ вполне определен.

Нам понадобится также следующее вспомогательное утверждение (первая часть которого вытекает из предыдущей леммы).

Лемма 2. [9, Theorem 1] *Пусть Y есть подпространство факторпространства (или факторпространство подпространства) некоторого $L_p(\mu)$-пространства, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если $T \in N_s(Y)$, где $1/s = 1 + |1/2 - 1/p|$, то ядерный след оператора T волне определен, $\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n(T)| < \infty$, где $\{\lambda_n(T)\}$ — система всех собственных чисел оператора T (взятых с учетом их алгебраических кратностей) и* trace $T = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(T)$.

Следуя работе М. И. Зеликина [1], говорим, что спектр компактного оператора в банаховом пространстве является центрально-симметричным, если вместе с каждым собственным числом λ он содержит и число $-\lambda$, причем той же алгебраической кратности.

3. Основные результаты. Отметим сначала, что теорема М. И. Зеликина в том виде, в каком она сформулирована в [1], не переносится на случай произвольных банаховых пространств, даже обладающих свойством аппроксимации А. Гротендика.

Пример 1. *Пусть U — ядерный оператор в пространстве l_1, построенный в* [7, Предложение 10.4.8]. *Этот оператор обладает тем свойством, что* trace $U = 1$ *и* $U^2 = 0$. *Очевидно, что спектр этого оператора есть $\{0\}$. Отметим, что данный оператор является не просто ядерным, но и принадлежит пространству $N_s(l_1)$ при всех $s \in (2/3, 1]$. Подобный пример невозможен, если рассматриваются в точности 2/3-ядерные операторы* (см. следствие 3 ниже). *Заметим также, что, однако, следы всех операторов $U^m, m = 2, 3, \dots$ (в частности, U^{2n+1}) равны нулю.*

Замечание 1. *Для любого ядерного оператора $T : X \to X$ и для всякого натурального числа $n > 1$ ядерный след* trace T^n *вполне определен* (см. [5, Chap II, §1, $n^\circ 4$, Corollaire

2]) *и равен сумме всех его собственных чисел (с учетом их алгебраических кратностей)* [5, Chap II, §1, $n^\circ 4$, Corollaire 1]. *Поэтому, если спектр ядерного оператора* $T: X \to X$ *центрально симметричен, то для любого нечетного* $m = 3, 5, 7, \ldots$ *ядерный след оператора* T^m *равен нулю.*

Приведем центральный результат заметки.

Теорема 1. *Пусть* Y — *подпространство факторпространства (или факторпространство подпространства) некоторого* L_p*-пространства,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *и* $u \in Y^*\widehat{\otimes}_s Y$, *где* $1/s = 1 + |1/2 - 1/p|$, *Спектр оператора* $\widetilde{u}$ *центрально-симметричен тогда и только тогда, когда* trace $u^{2n-1} = 0, n = 1, 2, \ldots$.

Необходимость указанного условия вытекает из леммы 2 и того факта, что полный набор собственных чисел оператора $\widetilde{u}^{2n-1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ вместе с собственный числом λ включает в себя и число $-\lambda$, причем той же алгебраической кратности. Доказательство достаточности существенно использует теорию Фредгольма, развитую А. Гротендиком в [10].

Поскольку, в условиях теоремы 1, пространство Y обладает свойством AP_s, то тензорное произведение $Y^*\widehat{\otimes}_s Y$ естественным образом отождествимо с пространством всех s-ядерных операторов в X. Поэтому утверждение теоремы 1 можно переформулировать следующим образом:

Следствие 1. *Пусть* $s \in [2/3, 1], p \in [2, \infty], 1/s = 1 + |1/2 - 1/p|$, Y — *подпространство факторпространства (или факторпространство подпространства) некоторого* $L_p(\mu)$*-пространства,* T — s*-ядерный оператор, действующий на* Y. *Спектр* T *является центрально-симметричным тогда и только тогда, когда* trace $T^{2n-1} = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Следствие 2. [1] *Спектр ядерного оператора* T *в гильбертовом пространстве является центрально-симметричным тогда и только тогда, когда* trace $T^{2n-1} = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Для доказательства применяем теорему 1 при $p = 2$.

Следствие 3. *Спектр* $2/3$*-ядерного оператора* T, *действующего на произвольном банаховом пространстве является центрально-симметричным тогда и только тогда, когда* trace $T^{2n-1} = 0$, $n \in \mathbf{N}$.

Для доказательства применяем теорему 1 при $p = \infty$, принимая во внимание тот факт, что всякое банахово пространство изометрично некоторому подпространству в $L_\infty(\mu)$-пространстве.

В связи со следствием 3, обратим еще раз внимание на оператор из примера 1.

4. Точность полученных результатов. Покажем, что утверждение теоремы точно и показатель s нельзя увеличить при фиксированном p (если, разумеется, $p \neq 2$, т. е. $s \neq 1$).

Рассмотрим случай $2 < p \leqslant \infty$. В этом случае $1/s = 1 + |1/2 - 1/p| = 3/2 - 1/p$. В работе автора [6, Example 2] получен следующий результат (см. доказательство в [6]):

$(\star)$ *Пусть* $r \in [2/3, 1), p \in (2, \infty], 1/r = 3/2 - 1/p$. *Существуют подпространство* Y *пространства* l_p *и тензорный элемент* $w \in Y^*\widehat{\otimes}_1 Y$ *такие, что* $w \in Y^*\widehat{\otimes}_s Y$ *для каждого* $s > r$, trace $w = 1, \tilde{w} = 0$ *и пространство* Y *(также как и* Y^**) обладает свойством* AP_r. *Более того, этот элемент допускает ядерное представление вида* $w = \sum_{k=1}^\infty \mu_k\, x'_k \otimes x_k$, *где* $||x'_k|| = ||x_k|| = 1$, $\sum_{k=1}^\infty |\mu_k|^s < \infty \ \forall\, s > r$.

Для тензорного элемента из утверждения $(\star)$, очевидно, имеем: trace $w = 1$ и спектр оператора $\widetilde{w}$ равен $\{0\}$.

Случай $1 \leqslant p < 2$ рассматривается аналогично (с применением утверждения $(\star)$ к "транспонированному" тензорному элементу $w^t \in Y\widehat{\otimes}_1 Y^*$.)

Как уже отмечалось выше (пример 1), в l_1 существует ядерный оператор U такой, что $U^2 = 0$ и trace $U = 1$. Следующая теорема представляет собой существенное обобщение этого результата и приводит к доказательству точности утверждения из следствия 1 (даже в случае, когда $Y = l_p$).

Теорема 2. *Пусть* $p \in [1,\infty], p \neq 2,\ 1/r = 1+|1/2-1/p|$. *Существует такой ядерный оператор* V *в* l_p, *что* 1) $V \in N_s(l_p)$ *для любого* $s \in (r,1]$; 2) $V \notin N_r(l_p)$; 3) $\operatorname{trace} V = 1$ *и* $V^2 = 0$.

Мы приведем *доказательство теоремы* 2, поскольку оно достаточно коротко. Рассмотрим тензорный элемент w из утверждения ($\star$) и его соответствующее представление $w = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k\, x'_k \otimes x_k$, где $||x'_k|| = ||x_k|| = 1$ и $\sum_{k=1}^{\infty} |\mu_k|^s < \infty$ для каждого $s, s > r$. Пусть $l : Y \to l_p$ — тождественное вложение. Продолжим функционалы x'_k с подпространства Y на все l_p до функционалов y'_k с сохранением нормы и положим $v := \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k\, y'_k \otimes l(x_k)$. Тогда $v \in l_{p'}\widehat{\otimes}_s l_p \quad (1/p + 1/p' = 1)$ для любого $s \in (r,1]$, $\operatorname{trace} v = \sum \mu_k \,\langle y'_k, l(x_k)\rangle = 1$ и $\widetilde{v}(l_p) \subset l(Y) \subset l_p$. С другой стороны, имеем диаграмму: $Y \xrightarrow{l} l_p \xrightarrow{\widetilde{v}_0} Y \xrightarrow{l} l_p \xrightarrow{\widetilde{v}_0} Y \xrightarrow{l} l_p$, где $\widetilde{v}_0$ — приведение оператора $\widetilde{v}$; при этом $\widetilde{v} = l\widetilde{v}_0$ и $\widetilde{v}_0 l = \widetilde{w} = 0$. Полжим теперь $V := \widetilde{v}$. Ясно, что $\operatorname{trace} V = 1$ и спектр $sp\, V^2 = \{0\}$. Отметим, что $V \notin N_r(l_p)$ по лемме 2.

Из доказанной теоремы следует, что утверждение следствия 1 является точным уже в случае пространства $Y = l_p$ (которое, заметим, обладает даже свойством аппроксимации А. Гротендика).

Замечание 2. *В работе Б. С. Митягина* [11], *в частности, показано, что если для ядерного оператора* T *на банаховом пространстве ядерные следы операторов* $T^3, T^5, \ldots$ *равны нулю, то спектр оператора* T *является центрально симметричным. Обратное также верно* (*см. выше замечание 1*). *Что касается ядерного следа самого оператора* T, *то он может быть вообще не определен* (*случай пространства без свойства аппроксимации А. Гротендика*), *либо, как в примере 1, ядерный след оператора может быть отличен от нуля, даже если он не имеет ни одного ненулевого собственного числа.*

В заключение, автор выражает признательность Б. С. Митягину, который обратил внимание автора на работу М. И. Зеликина [1].

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1] М. И. Зеликин, *ДАН*, **418**:6 (2008), 737–740. **[2]** R. Schatten, *A theory of cross-spaces*, Princeton University Press, 1950. **[3]** И. Ц. Гохберг, М. Г. Крейн, *Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*, Наука, М., 1965. **[4]** В. Б. Лидский, *ДАН СССР*, **125**:3 (1959), 485–487. **[5]** A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espases nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc., **16**, 1955. **[6]** O. I. Reinov, *J. Math. Anal. Appl.*, **415** (2014), 816–824. **[7]** А. Пич, *Операторные идеалы*, Мир, М., 1982. **[8]** О. И. Рейнов, *Вестник ЛГУ*, **7** (1983), 115–116. **[9]** O. Reinov, Q. Latif, *Banach Center Publications*, **102** (2014), 189–195. **[10]** А. Гротендик, *Математика*, **2**:5 (1958), 51–103. **[11]** B. S. Mityagin, *J. Operator Theory*, **76**:1 (2016), 57–65.

О. И. Рейнов
Санкт-Петербургский Государственный
Университет, г. Санкт Петербург
E-mail: orein51@mail.ru