Геометрические модели в теории нелинейных дифференциальных уравнений*

Н. М. Ивочкина†, Н. В. Филимоненкова‡

Аннотация

В процессе развития современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка естественным образом появились новые алгебраические и геометрические характеристики. Реализация геометрических характеристик на языке классической дифференциальной геометрии приводит к неоправданным техническим трудностям, близким к непреодолимым. Данная работа содержит обзор предпринятой методологической реформы и демонстрирует новый дифференциально-геометрический аппарат на примере построения приграничных барьеров для гессиановских уравнений.

Ключевые слова: матрица кривизны, p-кривизна, m-выпуклая гиперповерхность, m-гессиановские уравнения, ядро приграничного барьера.

УДК 514.763.85

1. Введение

Тема этой работы принадлежит области дифференциальной геометрии, но мотивирована теорией полностью нелинейных уравнений в частных производных второго порядка (FNPDE – fully nonlinear partial differential equations). Полностью нелинейными называют уравнения, нелинейные по вторым производным решения (в отличие от квазилинейных). Начало развитию современной теории FNPDE положили работы [17], [8], [11], в которых построены локальные априорные оценки гёльдеровских норм вторых производных для решений. Эти результаты позволили использовать методы теории линейных эллиптических и параболических уравнений для доказательства разрешимости задачи Дирихле для уравнения Монжа – Ампера $\det u_{xx} = f$, родственных ему гессиановских уравнений и др. при условии C^2-априорной ограниченности решений.

До 1970 года уравнение Монжа – Ампера было предметом исследования геометров (см. список источников в [10]) и было показано, что задача Дирихле для него корректна в конусе выпуклых функций в выпуклых областях. В 1985 году в статье [15] L. Caffarelly,

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты № 15-01-07650а, № 15-31-20600 мол-а-вед.

†Санкт-Петербургский государственный университет, 198504, Россия, Санкт-Петербург, Старый Петергоф, Университетский пр. 28. E-mail: ninaiv@NI1570.spb.edu.

‡Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул. 29. E-mail: nf33@yandex.ru.

L. Nirenberg и J. Spruck предприняли попытку описать общий класс полностью нелинейных уравнений (включающий уравнение Монжа – Ампера), для которого задача Дирихле корректна в некотором конусе допустимых функций. Основной результат работы [15] отражен в теореме 1. С нашей точки зрения, принципиальные геометрические особенности новой теории содержит теорема 3 ([15], с. 264), представленная как частный случай теоремы 1. Приводим ее почти дословно, изменив для удобства только некоторые обозначения.

Теорема 1.1. *The Dirichlet problem*

$$\sigma_m(\lambda(u_{xx})) = f > 0 \quad in \quad \overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^n, \quad m > 1, \tag{1.1}$$

$$u = \varphi \quad on \quad \partial\Omega$$

admits a (unique) admissible solution $u \in C^\infty(\overline{\Omega})$ *provided*

$$\partial\Omega \text{ is connected, and at every point } x \in \partial\Omega,\ \sigma^{(m-1)}(\kappa_1, \ldots, \kappa_{n-1}) > 0. \tag{1.2}$$

In case $\varphi \equiv const$, *condition (1.2) is also necessary for existence of a solution in* $C^2(\overline{\Omega})$.

Здесь σ_m – элементарная симметрическая функция порядка m; $\lambda(u_{xx})$ – собственные значения матрицы Гессе функции u; $\{\kappa_i\}_{i=1}^{n-1}$ – главные кривизны гиперповерхности $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Уравнение (1.1) называется m-гессиановским. Оно полностью нелинейное. Семейство m-гессиановских уравнений, $m = 2, 3, \ldots, n$, содержит в качестве крайнего случая уравнение Монжа – Ампера ($m = n$), и его можно дополнить линейным уравнением Пуассона ($m = 1$).

Замечание 1.2. В статье [15] впервые к исследованию полностью нелинейных уравнений привлечена алгебраическая теория конусов Гординга. В работе [26] 1959 года L. Gårding сформулировал понятие однородного a-гиперболического многочлена нескольких переменных как многочлена, имеющего только вещественные корни в направлении вектора a, и связал с такими многочленами специальные конусы (см. историко-математический обзор [14]). В работе [15] было обнаружено, что a-гиперболические многочлены порождают полностью нелинейные задачи, которые разрешимы в функциональных аналогах алгебраических конусов Гординга. Эталонным примером такой задачи является (1.1) в теореме 1.1: упомянутые допустимые функции и замкнутые гиперповерхности, удовлетворяющие условию (1.2), являются реализациями алгебраического конуса Гординга, порожденного m-однородным многочленом $\sigma_m(\lambda)$. Сейчас можно сказать, что теория конусов Гординга – алгебраический фундамент для изучения уравнений с полностью нелинейными дифференциальными операторамич. Исследование этого фундамента содержится в публикациях [25], [20], [6], [14], поэтому в данной статье мы ограничиваемся только ссылками на теорию Гординга.

Для нашей работы важно, что условием (1.2) в теорию m-гессиановских уравнений была введена новая геометрическая характеристика гладких гиперповерхностей:

$$\mathbf{k}_p = \sigma_p(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{n-1}), \quad p = 1, 2, ..., n-1,$$

известная как средняя кривизна при $p = 1$ и гауссова кривизна при $p = n - 1$.

Характеристика $\mathbf{k}_p$ имеет решающее значение для построения локальных приграничных барьеров, однако в статье [15] это построение осуществляется неоправданно громоздкими средствами. Причина переусложненности заключается в том, что m-гессиановский оператор и величина $\mathbf{k}_p$ определяются в терминах собственных значений (как известно, главные кривизны – спектр оператора Вейнгартена). Такая форма записи эффектна, но не практична. Например, возникают не вызванные существом дела препятствия для дифференцирования уравнения (1.1): функция $\sigma_m(\lambda(u_{xx}))$, будучи гладкой функцией точки x, оказывается выраженной через негладкие аргументы $\lambda(u_{xx})$. С реализацией условия (1.2) на языке главных кривизн дело обстоит еще хуже: в классической дифференциальной геометрии отсутствует подходящий аппарат и технические трудности становятся близки к непреодолимым. Данная методологическая проблема берет начало в [15] и до сих пор характерна для многих англоязычных публикаций в этой области (например, [16], [28], [29]).

С 1980-х исследованием m-гессиановских уравнений занимается Н. М. Ивочкина, причем уже в ранних работах [2], [3] развивает другой, более органичный подход к постановке и анализу задачи (1.1). Грубо говоря, элементарные симметрические функции от собственных значений матрицы (т. е. от корней характеристического многочлена) заменяются на суммы главных миноров этой матрицы (т. е. на коэффициенты многочлена). Для геометрического условия (1.2) это означает отказ от использования главных кривизн в качестве ведущих инвариантов поверхности и перенос внимания на новый инвариант – матрицу кривизны, которая является симметричным аналогом оператора (тензора) Вейнгартена. Эти простые и естественные идеи привели к пересмотру оснований дифференциальной геометрии и потому вызревали достаточно долго. Первые шаги были сделаны в статье [4], последние – в публикациях недавнего времени [6], [20], [21], [7] совместно с Н. В. Филимоненковой. В результате сложилась методология, в рамках которой характеристика $\mathbf{k}_p$, выраженная иным способом, называется p-кривизной и условие (1.2) наполняется геометрическим смыслом: замкнутая поверхность $\partial\Omega$, удовлетворяющая неравенству $\mathbf{k}_{m-1} > 0$, называется $(m-1)$-выпуклой.

В данной работе мы впервые синтезируем весь накопленный на этом пути дифференциально-геометрический аппарат в одну систему согласованных инструментов исследования поверхностей и для примера коротко демонстрируем его приложение к анализу задачи Дирихле для m-гессиановского уравнения.

В §2 договариваемся о самом понятии поверхности в евклидовом пространстве и о том, какие характеристики называются абсолютными геометрическими инвариантами. Перечисляем известные инварианты.

В §3–4 вводятся новые инварианты: инвариантное дифференцирование на поверхности и матрица кривизны для ориентированной гиперповерхности. Демонстрируется простота и удобство новых инструментов, их связь с классическими аналогами.

В §5, в разделе 5.1 содержится небольшое введение в алгебру m-положительных матриц, которые образуют один из конусов Гординга. В разделе 5.2, дается квалифицированное определение p-кривизны гиперповерхности как суммы главных миноров порядка p матрицы кривизны (p-след матрицы). Тем самым порождается понятие m-выпуклой поверхности как поверхности с положительными p-кривизнами, $p = 1, 2, \dots, m$, или, что то же самое, с m-положительной матрицей кривизны. Все гладкие поверхности распределяются по конусам m-выпуклости: от 1-выпуклых (поверхностей положительной средней кривизны) до n-выпуклых (строго выпуклых поверхностей). В разделе 5.3 вводим понятие секционной матрицы кривизны, чтобы на основе критерия Сильвестра для m-положительных матриц получить новый критерий m-выпуклой гиперповерхности.

В §6 описано приложение всех этих понятий к исследованию FNPDE на примере задачи (1.1), переформулированной в наших терминах. В разделе 6.1 понятие m-выпуклых гиперповерхностей дополняется понятием m-допустимых функций, среди которых ищется решение задачи (1.1). Как уже было отмечено, основная техническая работа специалистов по FNPDE – получение априорных C^2-оценок решения. При этом главной проблемой является доказательство априорной ограниченности решений и их производных на границе области, что сводится к построению приграничных барьеров. В разделе 6.2 мы конструируем такие барьеры и таким образом демонстрируем в действии геометрический аппарат, введенный в предыдущих параграфах. Раздел 6.2 является наиболее сложным в техническом отношении.

Предлагаемая работа может быть полезна специалистам по FNPDE и всем, кто интересуется анализом кривизны гладких поверхностей.

Заметим, что с появлением понятия p-кривизн возникли новые задачи на стыке FNPDE и дифференциальной геометрии. Появились аналоги задач о построении поверхностей по заданной средней или гауссовой кривизне. Последняя, как известно, называется классической проблемой Минковского, [10]. Задача о построении замкнутой гиперповерхности по заданной p-кривизне, $1 \leqslant p < n-1$, сформулирована в монографии [10] и названа обобщенной проблемой Минковского. Однако она не имеет удовлетворительного решения до сих пор. Построение поверхности по заданной p-кривизне и краю исследовалось в работах [16], [4], [27], но также не доведено до конца. В работах [30], [5], [23], [19], [18] были получены результаты об эволюции замкнутых выпуклых гиперповерхностей с предписанным законом изменения p-кривизны, но остаются открытыми задачи о сжимающей эволюции m-выпуклых гиперповерхностей.

Таким образом, данная работа, с одной стороны, завершает формирование геометрического "бэкграунда" для m-гессиановских уравнений и, с другой стороны, предлагает проверенную в деле методологию для постановки и исследования других задач.

Статья носит обзорный характер. Утверждения, доказательства которых опубликованы ранее и не представляют интереса в развитии сюжетной линии, приводятся в виде формулировок со ссылкой на источники.

Поскольку описание нового подхода предполагает определенную педантичность, то основная часть статьи (особенно §2–4) напоминает по жанру учебное пособие, которое вместе с новыми понятиями содержит систематизацию хорошо известных геометрических понятий.

По соображениям удобства изложения, в §2–5 рассматриваются n-мерные поверхности, в отличие от §1 и §6, где $\partial\Omega$ – $(n-1)$-мерная поверхность.

В статье используются следующие общепринятые обозначения:
$B_r(M_0)$ – шар с центром в точке M_0 и радиусом $r > 0$;
$\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$; I – единичная матрица;
(x, y) – скалярное произведение векторов $x, y \in \mathbb{R}^n$; $x^2 = (x, x)$; $|x| = \sqrt{(x, x)}$;
$C = (c^i_j)$, $i = 1, 2, \ldots p$, $j = 1, 2, \ldots n$, – матрица размера $p \times n$ с элементами c^i_j;
$S = (s_{ij}) = (s_{ij})^n_{i,j=1}$ – симметричная матрица размера $n \times n$ с элементами s_{ij};

$\mathrm{O}(n)$ – группа ортогональных $n \times n$-матриц;
$\theta_\xi = (\partial\theta^i/\partial\xi^j)$ – градиент вектор-функции $\theta(\xi) \in \mathbb{R}^n$, $\xi \in \mathbb{R}^p$ ($n \times p$-матрица Якоби).

Символами i, j, k, l, p, m, n, N обозначаются по умолчанию натуральные числа. Используется правило суммирования тензорного исчисления по повторяющимся верхним и нижним индексам. Более специальные обозначения определены по месту появления в тексте.

2. О поверхностях в евклидовом пространстве

Рассмотрим N-мерное евклидово пространство $\mathbb{E}^N$.

Определение 2.1. Пусть $1 \leqslant n < N$. Связное множество $\Gamma^n \subset \mathbb{E}^N$ называется *поверхностью* коразмерности $N-n$, если существует такое число $r > 0$, что для каждой точки $M_0 \in \Gamma^n$ найдётся область $\Theta \subset \mathbb{E}^n$ и гомеоморфизм $\Theta \to \Gamma^n \cap B_r(M_0)$.

Будем называть отображение $\Theta \to \Gamma^n \cap B_r(M_0)$ локальной параметризацией поверхности (в окрестности данной точки M_0).

Введем какой-либо базис в пространстве $\mathbb{E}^n$ и ортонормированный базис в пространстве $\mathbb{E}^N$, а также соответствующие системы координат, после чего имеем дело с арифметическими пространствами $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^N$. Свяжем с каждой точкой $M \in \Gamma^n \cap B_r(M_0)$ радиус-вектор $X(M) \in \mathbb{R}^N$. Тогда локальная параметризация поверхности является, по сути, вектор-функцией

$$X(\theta) = \begin{pmatrix} x^1(\theta) \\ x^2(\theta) \\ \dots \\ x^N(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta = (\theta^1, \theta^2, ..., \theta^n) \in \Theta \subset \mathbb{R}^n. \tag{2.1}$$

Рассмотрим градиент ($N \times n$-матрицу Якоби) этой вектор-функции:

$$X_\theta = \left(\frac{\partial x^i}{\partial \theta^j}\right), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Обозначим символами X_j столбцы матрицы X_θ:

$$X_j = \frac{\partial X}{\partial \theta^j} = \left(\frac{\partial x^1}{\partial \theta^j}, \frac{\partial x^2}{\partial \theta^j}, \dots, \frac{\partial x^N}{\partial \theta^j}\right)^T, \quad j = 1, 2, \dots, n. \tag{2.2}$$

Как известно, векторы $X_j(M)$ являются касательными к поверхности Γ^n в точке M.

Взаимную однозначность соответствия между значениями параметра $\theta \in \Theta$ и точками $M \in \Gamma^n \cap B_r(M_0)$ можно гарантировать условием

$$\det X_\theta^T X_\theta \neq 0. \tag{2.3}$$

Это условие, в свою очередь, равносильно тому, что векторы $\{X_j\}_{j=1}^n$ линейно независимы в каждой точке поверхности, а значит, образуют в касательной n-плоскости базис, вообще говоря, неортогональный.

Определение 2.2. Поверхность $\Gamma^n \subset \mathbb{R}^N$ называется *C^k-гладкой*, если в окрестности каждой точки она допускает C^k-гладкую локальную параметризацию (2.1), удовлетворяющую условию (2.3).

В статье по умолчанию рассматриваются C^k-гладкие поверхности, $k \geqslant 2$.

Если в окрестности данной точки $M_0 \in \Gamma^n$ имеется хотя бы одна C^k-гладкая параметризация (2.1), удовлетворяющую условию (2.3), то их бесчисленное множество. Именно, любое C^k-гладкое отображение

$$\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n) \in \Xi \subset \mathbb{R}^n \to \theta = (\theta^1, \theta^2, ..., \theta^n) \in \Theta \subset \mathbb{R}^n$$

приводит к аналогичной параметризации, если $\det \theta_\xi \neq 0$. По знаку якобиана множество всех таких параметризаций разбивается на два класса эквивалентности: параметризации эквивалентны, если $\det \theta_\xi > 0$. Локальные параметризации из одного, предпочтительного, класса эквивалентности назовём *допустимыми*.

Параметризация позволяет использовать дифференциальное исчисление для исследования геометрических характеристик поверхности.

Замечание 2.3. В данной работе все характеристики поверхности определены, исходя из параметризованной окрестности данной точки M_0, т. е., строго говоря, являются характеристиками поверхности $\Gamma^n \cap B_r(M_0)$. Для простоты изложения мы присваиваем их всей поверхности Γ^n, предполагая, что имеется согласование между параметризациями окрестностей любых двух разных точек. Условие согласования понимается в классическом смысле (см. например, [1], глава XII) и считается по умолчанию выполненным.

Нас интересуют абсолютные геометрические инварианты поверхности в смысле следующего определения.

Определение 2.4. Характеристика поверхности Γ^n называется (абсолютным) геометрическим *инвариантом*, если она не зависит от выбора допустимой локальной параметризации, т. е. остается неизменной при переходе к другой, эквивалентной, параметризации.

Для поверхности произвольной коразмерности примером абсолютного геометрического инварианта является свойство линейной независимости касательных векторов X_j. Для поверхностей коразмерности 1 известно несколько абсолютных геометрических инвариантов: вектор нормали, нормальная кривизна поверхности в каком-либо направлении, главные кривизны и главные направления. Основные параграфы данной работы посвящены описанию новых геометрических инвариантов.

3. Инвариантное дифференцирование

Определение инвариантного дифференцирования предварим обзором некоторых свойств метрического тензора. Термин “метрический тензор” появился в рамках римановой геометрии, но поскольку поверхности в евклидовом пространстве можно рассматривать как геометрическую реализацию римановых многообразий, мы будем использовать его и в нашем случае.

Определение 3.1. Пусть $X(\theta)$ – допустимая локальная параметризация поверхности Γ^n в окрестности какой-либо точки, X_θ – градиент вектор-функции $X(\theta)$. *Метрическим тензором* этой поверхности называется $n \times n$-матрица

$$g(\theta) = X_\theta^T X_\theta, \quad g_{ij} = (X_i, X_j). \tag{3.1}$$

Поскольку g – это матрица Грама линейно независимой системы $\{X_j\}_{j=1}^n$, её определитель равен квадрату объема n-мерного параллелепипеда, образованного этой системой векторов. Однако ранее не было замечено, что простым геометрическим смыслом обладают и суммы главных миноров, иными словами, p-следы матрицы g.

Определение 3.2. Пусть $1 \leqslant p \leqslant n$, *$p$-следом* $n \times n$-матрицы S называется сумма всех главных миноров порядка p матрицы S. Мы используем обозначение $T_p(S)$ (от англ. "trace") и полагаем $T_0(S) \equiv 1$.

В частности, $T_1(S) = \mathrm{tr} S$, $T_n(S) = \det S$.

Пусть $1 \leqslant i_1 < \ldots < i_p \leqslant n$ – произвольный набор целых чисел. Обозначим символом $V_{i_1 \ldots i_p}$ при $p > 2$ объём параллелепипеда с рёбрами $X_{i_1}, \ldots, X_{i_p}$, при $p = 2$ – площадь параллелограмма с ребрами X_{i_1}, X_{i_2}, при $p = 1$ – длину вектора X_{i_1}. Справедливо равенство

$$T_p(g) = \sum_{i_1 < \ldots < i_p} V_{i_1 \ldots i_p}^2, \quad 1 \leqslant p \leqslant n,$$

и все p-следы метрического тензора положительны. Это равносильно (см. раздел 5.1) положительной определённости метрического тензора.

Рассмотрим замену параметра $\theta = (\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n)$ на $\xi = (\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^p)$, $p \leqslant n$, такую что $\theta = \theta(\xi)$, $\det \theta_\xi^T \theta_\xi \neq 0$. Градиент вектор-функции $X(\xi)$ и метрический тензор $g(\xi)$ вычисляются по формулам

$$X_\xi = X_\theta \theta_\xi, \quad g(\xi) = \theta_\xi^T g(\theta) \theta_\xi. \tag{3.2}$$

Следовательно, метрический тензор вложенной поверхности $\Gamma^p \subset \Gamma^n$ определяется метрическим тензором поверхности Γ^n и отображением $\Xi \subset \mathbb{R}^p \to \Theta \subset \mathbb{R}^n$. В случае $p = n$ по формуле (3.2) осуществляется преобразование матрицы g при переходе к эквивалентной параметризации.

Как известно, геометрия поверхностей, в которой единственным источником информации является метрический тензор, называется внутренней. В процессе её развития и был создан современный дифференциально-геометрический язык: например, была развита техника дифференцирования на поверхности, использующая понятие "ковариантная производная". В приложении к нашим исследованиям в области FNPDE этот язык оказался чрезмерно сложным, неприспособленным. Это подтолкнуло к разработке новых дифференциально-геометрических инструментов, отличных от классических. В первую очередь была создана конструкция, которую мы называем теперь "инвариантная производная".

Ключевую роль для этой конструкции играет $n \times n$-матрица τ, определенная двумя следующими требованиями.

1. Матрица τ должна удовлетворять разложению

$$g^{-1} = \tau\tau^T. \tag{3.3}$$

2. Должно выполняться естественное правило преобразования при замене параметризации $X(\theta)$ на эквивалентную параметризацию $X(\xi)$:

$$\tau(\xi) = \theta_\xi^{-1}\tau(\theta). \tag{3.4}$$

При $n > 1$ требованиям (3.3), (3.4) удовлетворяет бесчисленное множество матриц τ и все они имеют вид

$$\tau = \sqrt{g^{-1}}B, \quad B \in \mathrm{O}(n). \tag{3.5}$$

Причем ортогональная $n \times n$-матрица B может быть выбрана произвольно, независимо от способа параметризации поверхности. Матрицу B можно взять постоянной или переменной функцией точки на поверхности. Далее считаем, что выбор матрицы B сделан и конкретная матрица τ вида (3.5) построена.

Отметим, что столбцы матрицы $\tau = (\tau_j^i)$, рассматриваемые как векторы $\tau_j = (\tau_j^1, \tau_j^2, \ldots \tau_j^n)^T$, $j = 1, 2, \ldots, n$, составляют ортонормированный базис на поверхности в смысле скалярного произведения $(g\tau_i, \tau_j)$.

Определение 3.3. Производные, вычисленные по правилу

$$X_{(j)} = X_k\tau_j^k, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{3.6}$$

назовем *инвариантными.* Векторы $X_{(j)}$ являются столбцами $N \times n$-матрицы $X_{(\theta)} = X_\theta\tau(\theta)$. Систему векторов $\{X_{(j)}\}_{j=1}^n$ назовём *сопровождающим базисом* поверхности Γ^n.

Векторы $X_{(j)}$ являются невырожденными линейными комбинациями касательных векторов X_j, поэтому они также принадлежат касательной n-плоскости поверхности Γ^n в данной точке. Благодаря свойству (3.4) матрицы τ векторы $X_{(j)}$ не зависят от выбора допустимой локальной параметризации, для их вычисления подойдет любая:

$$X_{(\xi)} = X_\xi\tau(\xi) = X_\theta\theta_\xi\theta_\xi^{-1}\tau(\theta) = X_{(\theta)}.$$

Из свойства (3.3) матрицы τ вытекает, что $(X_{(i)}, X_{(j)}) = \delta_{ij}$. Таким образом, в отличие от базиса $\{X_j\}_1^n$, система $\{X_{(j)}\}_{j=1}^n$ является инвариантным ортонормированным базисом в касательных n-плоскостях (рис. 1). За счет выбора матрицы τ из семейства (3.5) в нашем распоряжении есть ортогональные преобразования этого базиса.

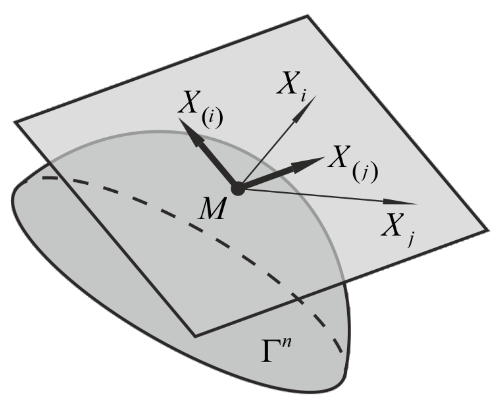

Рис. 1

Введем обозначение для $N \times n \times n$-массива производных второго порядка вектор-функции $X(\theta)$:

$$X_{kl} = \frac{\partial^2 X}{\partial\theta^k \partial\theta^l}, \quad X_{\theta\theta} = (X_{kl})_{k,l=1}^n .$$

Рассмотрим следующую коммутативную операцию:

$$X_{(ij)} = X_{kl}\tau_i^k \tau_j^l, \quad X_{(\theta\theta)} = \left(X_{(ij)}\right)_{i,j=1}^n = \tau^T X_{\theta\theta}\tau. \tag{3.7}$$

Вычислим инвариантные производные второго порядка:

$$X_{(i)(j)} = \left(X_{(i)}\right)_{(j)} = \left(X_k\tau_i^k\right)_l \tau_j^l = X_{(ij)} + X_k(\tau_i^k)_l\tau_j^l, \quad X_{(\theta)(\theta)} = \left(X_{(i)(j)}\right)_{i,j=1}^n . \tag{3.8}$$

Заметим, что производные (3.8) так же, как (3.6), инвариантны относительно выбора допустимой локальной параметризации. Однако каждое из двух слагаемых выражения $X_{(i)(j)}$ по отдельности не инвариантно.

Инвариантное дифференцирование, как и классическое ковариантное, в общем случае не коммутативно, что приводит к естественным техническим трудностям. Исследование свойств коммутатора ждет внимания специалистов.

4. Матрица кривизны

4.1. Понятия матрицы кривизны поверхности и кривизны плоской кривой

Начиная с этого параграфа, полагаем $N = n+1$, т. е. рассматриваем гиперповерхности $\Gamma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$, опуская иногда для краткости приставку “гипер”. Пусть $M_0 \in \Gamma^n$ и $X(\theta)$ – допустимая параметризация поверхности $\Gamma^n \cap B_r(M_0)$.

Как известно, единичный вектор нормали поверхности с точностью до направления можно вычислить при помощи векторного произведения базисных векторов касательной n-плоскости:

$$\mathbf{n}[\Gamma^n] = \frac{[X_1, X_2, \ldots, X_n]}{|[X_1, X_2, \ldots, X_n]|} = [X_{(1)}, X_{(2)}, \ldots, X_{(n)}]. \tag{4.1}$$

Напомним, что множество всех C^k-гладких локальных параметризаций разбито на два класса эквивалентности. Формула (4.1) неизменна при переходе к новой параметризации в рамках одного класса эквивалентности и меняет знак на противоположный при переходе от параметризации из одного класса эквивалентности к параметризации из другого класса эквивалентности. Поэтому вектор нормали с выбранным направлением является абсолютным геометрическим инвариантом в смысле определения 2.4. Все характеристики гиперповерхности, которые вводим далее, осмысленны для двусторонних гиперповерхностей (в классическом значении этого термина, [1], глава XII), ориентированных выбором направления $\mathbf{n}^+ = \mathbf{n}^+[\Gamma^n]$. При этом в случае замкнутой гиперповерхности мы отдаем предпочтение внутренней нормали, т. е. нормали, направленной в ограниченную область с краем Γ^n.

Допустим, для поверхности Γ^n выбрана матрица τ из семейства (3.5) и введено инвариантное дифференцирование (3.6). Заметим, что проекция вторых инвариантных производных (3.8) на инвариантный орт нормали выделяет в них коммутативные слагаемые (3.7). На основе этой идеи введем понятие матрицы кривизны.

Определение 4.1. *Матрицей кривизны* ориентированной гиперповерхности Γ^n мы называем $n \times n$-матрицу

$$\mathcal{K}[\Gamma^n] = (X_{(\theta)(\theta)}, \mathbf{n}^+[\Gamma^n]) = \tau^T(\theta)(X_{\theta\theta}, \mathbf{n}^+[\Gamma^n])\tau(\theta),$$

$$\mathcal{K}_{ij} = (X_{(i)(j)}, \mathbf{n}^+) = (X_{kl}, \mathbf{n}^+)\tau_i^k \tau_j^l, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.2}$$

где $\mathbf{n}^+$ – орт внутренней нормали, если поверхность замкнутая.

Для незамкнутой поверхности есть две версии матрицы кривизны, соответствующие разному выбору $\mathbf{n}^+$.

Из формулы (4.2) ясно, что матрицы кривизны является, во-первых, геометрически инвариантной и, во-вторых, симмеричной.

Замечание 4.2. Если поверхность C^k-гладкая и матрица τ выбрана C^{k-2}-гладкой функцией параметра θ, то матрица (4.2) является C^{k-2}-гладкой функцией точки $M \in \Gamma^n \cap B_r(M_0)$. Напомним, что в качестве τ можно выбрать любую матрицу из семейства (3.5). Поэтому формула (4.2) на самом деле задает семейство матриц кривизны

$$\mathcal{K} = B^T \mathcal{K}_0 B, \quad B \in \mathrm{O}(n),$$

где матрица $\mathcal{K}_0$ соответствует выбору $\tau = \sqrt{g^{-1}}$. Поскольку $\sqrt{g^{-1}}$ несомненно C^{k-1}-гладкая матрица, то гладкость матрицы кривизны зависит от того, насколько гладкой выбрана ортогональная матрица $B = B(M)$. Например, заманчиво выбрать матрицу $B(M)$ таким образом, чтобы матрица кривизны была диагональной сразу во всех точках данной локальной параметризации. Но при этом мы, скорее всего, потеряем свойство C^{k-2}-гладкости матрицы кривизны.

Продемонстрируем частный случай определения 4.1. Рассмотрим замкнутую гиперповерхность $\Gamma^1 \subset \mathbb{R}^2$, т. е. плоскую замкнутую кривую с какой-либо локальной параметризацией:

$$X(\theta) = \begin{pmatrix} x^1(\theta) \\ x^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^1.$$

Метрический тензор g и матрица τ являются в данном случае числами, причем семейство (3.5) состоит из одного элемента:

$$X_\theta = \begin{pmatrix} x_\theta^1 \\ x_\theta^2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad g = X_\theta^T X_\theta = |X_\theta|^2 = (x_\theta^1)^2 + (x_\theta^2)^2 \quad \Rightarrow \quad \tau = \sqrt{g^{-1}} = \frac{1}{|X_\theta|}.$$

Очевидно, вектор

$$\mathbf{n}^+ = \frac{1}{|X_\theta|} \begin{pmatrix} x_\theta^1 \\ -x_\theta^2 \end{pmatrix}$$

является единичной нормалью к кривой. Допустим, параметризация кривой такова, что данный вектор задает внутреннюю нормаль. Тогда матрица кривизны (4.2) вычисляется следующим образом:

$$X_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} x^1_{\theta\theta} \\ x^2_{\theta\theta} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K}[\Gamma^1] = \frac{x^1_{\theta\theta}x^2_\theta - x^2_{\theta\theta}x^1_\theta}{|X_\theta|^3}. \tag{4.3}$$

Таким образом, матрица кривизны плоской кривой есть число, которое мы называем *кривизной* этой кривой. В классической геометрии кривизной плоской кривой обычно называют модуль величины (4.3), поскольку инструкции по предписанию кривизне разных знаков недостаточно прозрачны даже в случае замкнутой кривой. Предлагаемое определение кривизны, напротив, вполне конкретно, причем значение кривизны получается неотрицательным в точках выпуклости замкнутой кривой и меняет знак на противоположный при переходе к точкам вогнутости.

4.2. Расчетные формулы

В этом разделе выводим расчетные формулы для матрицы τ и для матрицы кривизны $\mathcal{K}$, предполагая, что гиперповерхность $\Gamma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является графиком явно заданной функции:

$$x^{n+1} = \omega(\tilde{x}), \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}. \tag{4.4}$$

Введем обозначения:

$$\omega_i = \frac{\partial \omega}{\partial x^i}, \quad \omega_{\tilde{x}} = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n), \quad \omega_{\tilde{x}} \times \omega_{\tilde{x}} = (\omega_i \omega_j)^n_{i,j=1};$$

$$\omega_{kl} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^k \partial x^l}, \quad \omega_{\tilde{x}\tilde{x}} = (\omega_{kl})^n_{k,l=1}.$$

Лемма 4.3. Пусть в окрестности некоторой точки гиперповерхность Γ^n является графиком C^k-гладкой, $k \geqslant 2$, явно заданной функции (4.4). Тогда в качестве матрицы τ можно взять любую матрицу вида

$$\tau = \left(I - \frac{\omega_{\tilde{x}} \times \omega_{\tilde{x}}}{\sqrt{1+\omega^2_{\tilde{x}}}(1+\sqrt{1+\omega^2_{\tilde{x}}})} \right) B, \quad B \in \mathrm{O}(n). \tag{4.5}$$

Соответствующая матрица кривизны вычисляется по формуле

$$\mathcal{K} = \pm \frac{\tau^T \omega_{\tilde{x}\tilde{x}} \tau}{\sqrt{1+\omega^2_{\tilde{x}}}}, \tag{4.6}$$

где знак “+” соответствуют выбору нормали $\mathbf{n}^+$, образующей острый угол с координатной осью x^{n+1}.

Доказательство. Выберем в качестве параметра θ набор $\tilde{x}$ декартовых координат:

$$\theta^i = x^i, \quad i = 1, 2, ..., n,$$

и в качестве допустимой локальной параметризации поверхности – вектор-функцию

$$X(\tilde{x}) = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \omega(\tilde{x}) \end{pmatrix}.$$

Характеристики (2.2) и (3.1) вычисляются следующим образом:

$$X_j = (0, \dots, 1, \dots, 0, \omega_j)^T,$$

$$g_{ij} = \delta_{ij} + \omega_i \omega_j, \quad g = I + \omega_{\tilde{x}} \times \omega_{\tilde{x}},$$

$$g_{ij}^{-1} = \delta_{ij} - \frac{\omega_i \omega_j}{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}, \quad g^{-1} = I - \frac{\omega_{\tilde{x}} \times \omega_{\tilde{x}}}{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}.$$

Найдем собственные значения и собственные векторы матрицы g^{-1}:

$$g^{-1}\xi = \xi - \frac{\omega_{\tilde{x}} \times \omega_{\tilde{x}}}{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}\xi = \xi - \frac{(\omega_{\tilde{x}}, \xi)}{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}\omega_{\tilde{x}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Видно, что $\xi = \omega_{\tilde{x}}$ является собственным вектором, соответствующим собственному значению $\lambda_1 = 1/(1 + \omega_{\tilde{x}}^2)$. Поскольку остальные собственные векторы удовлетворяют условию $\xi \perp \omega_x$, то $\lambda_2 = \lambda_3 = \ldots = \lambda_n = 1$. Справедливо разложение

$$g^{-1} = C\Lambda C^T, \quad \Lambda = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}, 1, 1, \dots, 1\right), \quad C \in \mathrm{O(n)}.$$

Столбцы матрицы $C = (c_j^i)$ – ортонормированная система собственных векторов матрицы g^{-1}. В частности, известен первый столбец этой матрицы:

$$c_1^i = \frac{\omega_i}{|\omega_{\tilde{x}}|}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Этой информации достаточно, чтобы извлечь квадратный корень из матрицы g^{-1}:

$$\left(\sqrt{g^{-1}}\right)_j^i = \left(C\sqrt{\Lambda}C^T\right)_j^i = \sum_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k} c_k^i c_k^j = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}} c_1^i c_1^j + \sum_{k=2}^n c_k^i c_k^j =$$

$$= \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_{\tilde{x}}^2 \sqrt{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}} + \delta_j^i - \frac{\omega_i \omega_j}{\omega_{\tilde{x}}^2} = \delta_j^i - \frac{\omega_i \omega_j}{\sqrt{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}(1 + \sqrt{1 + \omega_{\tilde{x}}^2})}.$$

В качестве матрицы τ можно взять любую матрицу из семейства (3.5) – этим обоснована формула (4.5). Матрицу кривизны вычисляем по формуле (4.2):

$$X_{kl} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \omega_{kl} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{n}^+ = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}} \begin{pmatrix} -\omega_{\tilde{x}} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{K}_{ij} = \frac{\omega_{kl}\tau_i^k \tau_j^l}{\sqrt{1 + \omega_{\tilde{x}}^2}}.$$

□

Приведем примеры вычисления матрицы кривизны по формулам (4.5), (4.6) для конкретных гиперповерхностей в пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

1. Для сферы (замкнутой поверхности) матрица кривизны однозначно определяется направлением внутренней нормали и является постоянной:

$$x^{n+1} = \sqrt{R^2 - \tilde{x}^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K} = \frac{1}{R} I. \tag{4.7}$$

   Заметим, что в этом идеальном случае матрица кривизны не зависит от выбора ортогональной матрицы B в формуле (4.5).

2. Для гиперболоида (незамкнутой поверхности) матрица кривизны определена с точностью до знака, зависящего от ориентации, и с точностью до выбора ортогональной матрицы $B \in \mathrm{O}(n)$:

$$x^{n+1} = \sqrt{\tilde{x}^2 - R^2} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{K} = \frac{\pm 1}{\sqrt{2\tilde{x}^2 - R^2}} \left(I - \frac{2(B\tilde{x}) \times (B\tilde{x})}{2\tilde{x}^2 - R^2} \right). \tag{4.8}$$

Заметим, что формулы (4.5), (4.6) локально применимы к любой C^k-гладкой, $k \geqslant 2$, гиперповерхности $\Gamma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ за счет выбора подходящей системы координат в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

4.3. Нормальные и главные кривизны

В классической геометрии в качестве старта для исследования кривизны ориентированных гиперповерхностей вводится геометрически инвариантное отношение второй и первой квадратичных форм.

Пусть $X(\theta)$ – допустимая локальная параметризация поверхности Γ^n. В какой-либо точке на поверхности рассмотрим дифференциал вектор-функции $X(\theta)$:

$$dX = X_i d\theta^i \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad d\theta = \in \mathbb{R}^n.$$

Вектор dX принадлежит касательной n-плоскости и задает направление на поверхности. Вектор $d\theta$ является координатной записью этого направления в базисе $\{X_i\}_{i=1}^n$. Тогда

$$(dX, dX) = (gd\theta, d\theta) \text{ – первая квадратичная форма,}$$

$$(d^2X, \mathbf{n}^+) = (bd\theta, d\theta) \text{ – вторая квадратичная форма.}$$

Матрицей коэффициентов первой квадратичной формы является метрический тензор $g = X_\theta^T X_\theta$. Матрица второй квадратичной формы имеет вид $b = (X_{\theta\theta}, \mathbf{n}^+)$.

Нормальной кривизной гиперповерхности Γ^n в направлении dX в данной точке называется кривизна сечения Γ^n двумерной плоскостью, натянутой на вектор нормали $\mathbf{n}^+$ и касательный вектор dX. Формула

$$\mathbf{k}(d\theta) = \frac{(bd\theta, d\theta)}{(gd\theta, d\theta)}, \quad d\theta \in \mathbb{R}^n, \tag{4.9}$$

выражает нормальную кривизну гиперповерхности Γ^n в направлении $dX = X_i d\theta^i$.

Теперь рассмотрим в касательной n-плоскости вместо классического базиса $\{X_i\}_{i=1}^n$ ортонормированный сопровождающий базис $\{X_{(j)}\}_{j=1}^n$, состоящий из инвариантных производных вектор-функции $X(\theta)$ (см. определение 3.3). После преобразования координат в формуле (4.9) получаем формулу

$$\mathbf{k}(\delta\theta) = \frac{(\mathcal{K}\delta\theta, \delta\theta)}{|\delta\theta|^2}, \quad \delta\theta \in \mathbb{R}^n, \tag{4.10}$$

которая выражает нормальную кривизну гиперповерхности в направлении $dX = X_{(j)}\delta\theta^j$. Здесь использованы подстановка $d\theta = \tau\delta\theta$, свойство (3.3) матрицы τ и очевидная связь матрицы кривизны (4.2) с матрицей второй квадратичной формы: $\mathcal{K} = \tau^T b \tau$.

Итак, инвариантное дифференцирование позволило заменить представление (4.9) на эквивалентное (4.10).

Основными инвариантами классической геометрии поверхностей являются *главные кривизны*. Так называются стационарные значения нормальной кривизны (4.9) или, что то же самое, собственные значения несимметричной неинвариантной матрицы $g^{-1}b$ (тензор Вейнгартена). Из альтернативного представления (4.10) вытекает, что главные кривизны можно также вычислить как собственные значения матрицы $\mathcal{K}$, которая является инвариантным симметричным аналогом $g^{-1}b$.

Замечание 4.4. Как известно, направления $dX \in \mathbb{R}^{n+1}$, реализующие главные кривизны, называются *главными направлениями* гиперповерхности в данной точке. Они ортогональны и геометрически инвариантны. Собственные векторы $d\theta \in \mathbb{R}^n$ матрицы $g^{-1}b$ задают координаты главных направлений в базисе $\{X_i\}_{i=1}^n$, поэтому они ортогональны только в смысле внутренней геометрии поверхности (с весом g) и не инварианты. Собственные векторы $\delta\theta \in \mathbb{R}^n$ симметричной матрицы $\mathcal{K}$ задают координаты главных направлений в инвариантном ортонормированном базисе $\{X_{(j)}\}_{j=1}^n$, поэтому они ортогональны в классическом смысле и геометрически инварианты.

5. Понятие p-кривизны

5.1. Конус m-положительных матриц

В предыдущем параграфе матрица кривизны представлена как альтернативный источник для получения нормальных и главных кривизн гиперповерхности, имеющий некоторые преимущества по сравнению с традиционными инструментами. Другое оправдание матрицы кривизны заключается в том, что она устанавливает плодотворную связь между дифференциальной геометрией и алгебраической теорией конусов Гординга (см. замечание 1.2). Для описания этой связи нам понадобится частный случай конусов Гординга – конус m-положительных матриц.

Обозначим символом $\mathrm{Sym}(n)$ линейное пространство симметричных $n \times n$-матриц и символом $\lambda(S) = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ набор собственных значений матрицы S. Согласно определению 3.2 *p-следом* матрицы S называется сумма всех главных миноров порядка p матрицы S и обозначается $T_p(S)$, $p = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим характеристический многочлен матрицы S в виде $\det(S+tI)$, $t \in \mathbb{R}$. Из разложения

$$\det(S+tI) = \sum_{p=0}^{n} T_p(S) \cdot t^{n-p} = \prod_{i=1}^{n} (t+\lambda_i), \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \tag{5.1}$$

и теоремы Виета следует, что p-след можно выразить как элементарную симметрическую функцию от собственных значений матрицы S:

$$T_p(S) = \sigma_p(\lambda(S)) = \sum_{i_1<i_2<\ldots<i_p} \lambda_{i_1}\lambda_{i_2}\ldots\lambda_{i_p}. \tag{5.2}$$

Представление (5.2) делает очевидной *ортогональную инвариантность* p-следов:

$$T_p(B^T SB) = T_p(S), \quad B \in \mathrm{O}(n). \tag{5.3}$$

Функция $T_p(S)$ порождает обобщение для понятия положительно определенной матрицы.

Определение 5.1. Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$. Симметричную $n \times n$-матрицу S называем *m-положительной*, если все ее p-следы положительны при $p = 1, 2, \ldots, m$.

Так как $T_0(S) \equiv 1$, то любая симметричная матрица по умолчанию является 0-положительной. При $m > 1$ множество всех m-положительных матриц образует односторонний конус в пространстве $\mathrm{Sym}(n)$:

$$K_m = K_m(n) = \{S \in \mathrm{Sym}(n) : \ T_p(S) > 0, \ p = 1, 2, \ldots, m\}. \tag{5.4}$$

Из разложения (5.1) вытекает, что K_n – это в точности конус положительно определённых матриц в пространстве $\mathrm{Sym}(n)$. Действительно, все коэффициенты многочлена (5.1) положительны тогда и только тогда, когда все его корни отрицательны, а корнями многочлена (5.1) являются собственные значения матрицы S, взятые с обратными знаками.

Итак, получаем следующую иерархию конусов (5.4):

$$\mathrm{Sym}(n) = K_0 \supset K_1 \supset K_2 \supset \ldots \supset K_n. \tag{5.5}$$

Конусы (5.4) впервые определила и исследовала Н. М. Ивочкина в работе [3], еще до знакомства с теорией Гординга. Широкую известность среди специалистов эти конусы приобрели после публикации работы [15], в которой L. Caffarelly, L. Nirenberg и J. Spruck представили (5.4) как частный случай конусов Гординга. Сам термин “m-положительная матрица” для наименования элементов из K_m введен недавно в работах [25] и [6].

В любом конусе Гординга (см. [14]) справедливо свойство монотонности, которое для K_m выглядит следующим образом:

$$T_m(S+\tilde{S}) > T_m(S), \quad S \in K_m, \ \tilde{S} \in \overline{K}_m. \tag{5.6}$$

Отсюда следует, что если $S \in K_m$, $\tilde{S} \in \overline{K}_m$, то $(S+\tilde{S}) \in K_m$. Из кососимметричности миноров вытекает равенство

$$T_m(S+\xi\times\xi) = T_m(S) + T_m^{ij}(S)\xi_i\xi_j, \quad T_m^{ij}(S) = \frac{\partial T_m(S)}{\partial s_{ij}}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{5.7}$$

Поскольку $\xi\times\xi \in \overline{K}_n \subset \overline{K}_m$, то (5.6) и (5.7) означают, что $T_m^{ij}(S)\xi_i\xi_j > 0$ в K_m.

Согласно общей теории Гординга конус K_m выпуклый и функция $F_m = T_m^{\frac{1}{m}}$ вогнута в K_m. Вместе с 1-однородностью функции F_m это приводит к соотношению

$$F_m(S) \leqslant F_m^{ij}(\tilde{S})s_{ij}, \quad S,\tilde{S} \in K_m, \quad F_m^{ij}(\tilde{S}) = \frac{\partial F_m(\tilde{S})}{\partial \tilde{s}_{ij}}. \tag{5.8}$$

В дальнейшем нам понадобится следующее альтернативное описание конуса m-положительных матриц.

Лемма 5.2. Пусть матрица $S_0 \in \mathrm{Sym}(n)$ является m-положительной. Конус K_m совпадает с той компонентой связности множества $\{S \in \mathrm{Sym}(n) : T_m(S) > 0\}$, которая содержит матрицу S_0.

Простое доказательство этой леммы можно найти в статье [7] (лемма 2.2).

Для положительно определенных, или n-положительных, матриц широко известен критерий Сильвестра: матрица положительно определена тогда и только тогда, когда все ее главные угловые миноры положительны. В работах [13], [7] доказан аналог критерия Сильвестра для m-положительных матриц.

Лемма 5.3. (Критерий Сильвестра) Пусть $S \in \mathrm{Sym}(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$.

(i) Выберем некоторый номер i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Обозначим символом $S^{\langle i\rangle} \in \mathrm{Sym}(n-1)$ матрицу, полученную из S вычеркиванием строки и столбца с номером i. Тогда

$$S \in K_m(n) \quad \Leftrightarrow \quad T_m(S) > 0,\ S^{\langle i\rangle} \in K_{m-1}(n-1).$$

(ii) Выберем некоторый набор попарно различных номеров $1 \leqslant i_1, i_2, \ldots, i_{m-1} \leqslant n$. Обозначим символом $S^{\langle i_1,i_2,\ldots,i_k\rangle} \in \mathrm{Sym}(n-k)$ матрицу, полученную из матрицы S вычеркиванием k строк и k столбцов с указанными номерами. Чтобы матрица S была m-положительной, необходимо и достаточно выполнения следующих условий:

$$T_m(S) > 0,\ T_{m-1}(S^{\langle i_1\rangle}) > 0,\ T_{m-2}(S^{\langle i_1,i_2\rangle}) > 0, \ldots, T_1(S^{\langle i_1,i_2,\ldots,i_{m-1}\rangle}) > 0.$$

Замечание 5.4. Из произвольности выбора номеров $i_1, i_2, \ldots, i_{m-1}$ следует, что m-положительная матрица имеет по крайней мере m положительных собственных значений (обратное верно только при $m = n$).

5.2. Конус m-выпуклых гиперповерхностей

Возвращаясь к обзору новых геометрических инвариантов, введем квалифицированное определение p-кривизны гиперповерхности. Допустим, для ориентированной гиперповерхности $\Gamma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ выбрана матрица τ из семейства (3.5) и построена матрица кривизны $\mathcal{K}$ по формуле (4.2).

Определение 5.5. Пусть $M \in \Gamma^n$, *p-кривизнами* гиперповерхности Γ^n в точке M называем числа

$$\mathbf{k}_p(M) = T_p(\mathcal{K}[\Gamma^n])(M), \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.9}$$

По определению положим $\mathbf{k}_0 \equiv 1$.

Свойство (5.3) p-следов делает p-кривизны не зависящими от того, какой выбрана матрица τ из семейства (3.5). С учетом замечания 4.2 это значит, что p-кривизны являются C^{k-2}-гладкими функциями точки на C^k-гладкой поверхности, $k \geqslant 2$.

Выражение p-кривизны через набор $\{\kappa_i\}_{i=1}^n$ главных кривизн гиперповерхности обусловлено равенством (5.2) и тем, что главные кривизны составляют спектр матрицы кривизны:

$$\mathbf{k}_p = \sigma_p(\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_n) = \sum_{i_1 < i_2 < \ldots < i_p} \kappa_{i_1} \kappa_{i_2} \ldots \kappa_{i_p}, \quad p = 1, 2, \ldots, n. \tag{5.10}$$

Следовательно, средняя кривизна и гауссова кривизна включены в определение 5.5 как 1-кривизна и n-кривизна. Геометрический инвариант (1.2), который встречается в теореме 1.1, в наших терминах называется $(m-1)$-кривизной гиперповерхности $\partial\Omega$.

Все p-кривизны, как и главные кривизны, инвариантны не только относительно выбора допустимой локальной параметризации гиперповерхности Γ^n, но и относительно выбора декартовой системы координат в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

Равенство (5.10) показывает, что наборы $\{\kappa_i\}_{i=1}^n$ и $\{\mathbf{k}_p\}_{p=1}^n$ полностью определяют друг друга, как корни и коэффициенты многочлена. Однако главные кривизны, в отличие от p-кривизн, не обладают глобальной нумерацией, являются, вообще говоря, трудно вычислимыми инвариантами, и какой бы гладкой ни была поверхность, можно гарантировать не более, чем их липшицеву гладкость как функций точки на поверхности. Поэтому методологически важно, что для вычисления p-кривизны по определению 5.5 вообще не требуется обращение к главным кривизнам гиперповерхности.

Понятно, что исключить главные кривизны из определения величины $\mathbf{k}_p$ можно разными способами: не только при помощи матрицы кривизны, но и, например, при помощи тензора Вейнгартена, так как $T_p(\mathcal{K}) = T_p(g^{-1}b)$. Однако именно матрица кривизны $\mathcal{K}$, будучи симметричной, является для геометрии поверхностей прямым проводником структуры алгебраических конусов (5.4), что и будет далее продемонстрировано. Заметим, теория конусов (5.4) обоснованно строится в пространстве симметричных матриц и ее нельзя без изощрений распространить на множество матриц с вещественным спектром, которые могут быть несимметричными. Во всяком случае, множество матриц с вещественным спектром не является линейным пространством.

Связующим звеном между алгебраическими конусами (5.4) и дифференциальной геометрией является следующая классификация гладких гиперповерхностей.

Определение 5.6. Пусть $0 \leqslant m \leqslant n$ и Γ^n – C^k-гладкая ориентированная гиперповерхность, $k \geqslant 2$. Гиперповерхность Γ^n называем *m-выпуклой* в точке $M \in \Gamma^n$, если матрица $\mathcal{K}[\Gamma](M)$ является m-положительной.

Гиперповерхность Γ^n называется m-выпуклой, если она m-выпукла в каждой точке $M \in \Gamma^n$.

В соответствии с определением 5.1 m-положительных матриц и определением 5.5 p-кривизны множество всех m-выпуклых гиперповерхностей можно описать следующим образом:
$$\mathbf{K}_m = \{\Gamma^n \subset \mathbb{R}^{n+1} : \mathbf{k}_p(M) > 0,\ p = 1, 2, \ldots, m,\ M \in \Gamma^n\}.$$

Это множество является конусом относительно умножения радиус-вектора поверхности на положительный коэффициент. Для этих конусов справедлива цепочка включений, аналогичная (5.5).

Все гладкие поверхности считаются 0-выпуклыми. Из замечания 5.4 следует, что m-выпуклая поверхность имеет по крайней мере m положительных главных кривизн. Значит, n-выпуклая поверхность является строго выпуклой в классическом смысле. Однако понятие n-выпуклой поверхности исключает из рассмотрения границы строго выпуклых областей, которые вообще не являются гладкими или имеют изолированные точки нулевой гауссовой кривизны. В определении 5.5 n-выпуклым поверхностям предписана положительная гауссова кривизна $\mathbf{k}_n$.

Определения 5.5, 5.6 являются однозначными только для замкнутых гиперповерхностей Γ^n, поскольку в этом случае при построении матрицы кривизны делается однозначный выбор в пользу внутренней нормали (см. раздел 4.1). Если поверхность Γ^n незамкнутая, то как знаки главных кривизн, так и знак p-кривизны при нечетном значении p, зависят от выбора направления нормали. Поэтому и называть такую поверхность m-выпуклой можно с точностью до ориентации. Приведем примеры.

1. Сфера $x^{n+1} = \sqrt{R^2 - \tilde{x}^2}$, $\tilde{x} = (x^1, x^2, \ldots, x^n)$, является n-выпуклой поверхностью, что очевидно по ее матрице кривизны (4.7).

2. Гиперболоид $x^{n+1} = \sqrt{\tilde{x}^2 - R^2}$, ориентированный нормалью, которая образует острый угол с координатной осью осью x^{n+1}, имеет матрицу кривизны (4.8) со знаком “$+$”. Такой гиперболоид является всюду m-выпуклой поверхностью, если $m < n/2$. Если $n/2 \leqslant m < n$, то гиперболоид является m-выпуклым в точках, расположенных выше n-плоскости $x^{n+1} = \sqrt{(2m - n)/(2n - 2m)}R$.

Простой критерий m-выпуклости вытекает из леммы 5.2.

Лемма 5.7. Для того чтобы гиперповерхность Γ^n была m-выпуклой, необходимо и достаточно существования хотя бы одной точки $M_0 \in \Gamma^n$, в которой поверхность Γ^n m-выпукла, и выполнения условия $\mathbf{k}_m(M) > 0$ во всех точках $M \in \Gamma^n$.

Для того чтобы замкнутая гиперповерхность Γ^n была m-выпуклой, необходимо и достаточно выполнения условия $\mathbf{k}_m(M) > 0$ во всех точках $M \in \Gamma^n$.

Необходимость очевидна из определения 5.6, по существу важна достаточность. Первое утверждение леммы 5.7 есть прямой аналог леммы 5.2. Второе утверждение леммы 5.7 следует из первого потому, что на замкнутой поверхности обязательно есть точка n-выпуклости.

Таким образом, для замкнутой поверхности m-выпуклость равносильна положительности её m-кривизны. Следовательно, в теореме 1.1, которая приведена в §1, утверждается разрешимость задачи Дирихле (1.1) в области с $(m-1)$-выпуклой границей.

5.3. Секционная матрица кривизны и критерий Сильвестра

В этом разделе доказан новый критерий m-выпуклости для гиперповерхностей, который опирается на критерий Сильвестра для m-положительных матриц (лемма 5.3). Для начала требуется вывести подходящую модификацию критерия Сильвестра.

Лемма 5.8. Пусть $S \in \mathrm{Sym}(n)$, $1 \leqslant m \leqslant n$.

(i) Пусть A – некоторая $n \times (n-1)$-матрица, причем $A^T A = I$. Тогда

$$S \in K_m(n) \quad \Leftrightarrow \quad T_m(S) > 0,\ A^T S A \in K_{m-1}(n-1).$$

(ii) Пусть $\{A_k\}_{k=1}^{m-1}$ – некоторый набор $(n-k+1) \times (n-k)$-матриц, причем $A_k^T A_k = I$. Обозначим $S_0 = S$, $S_k = A_k^T S_{k-1} A_k \in \mathrm{Sym}(n-k)$. Тогда

$$S \in K_m(n) \quad \Leftrightarrow \quad T_m(S) > 0,\ T_{m-1}(S_1) > 0,\ T_{m-2}(S_2) > 0, \dots, T_1(S_{m-1}) > 0.$$

Доказательство. Идея доказательства заключается в том, что операция $A^T S A$ с точностью до ортогонального преобразования равносильна вычеркиванию из матрицы S строки и столбца с некоторым номером i. Покажем это на примере $i = n$. Легко убедиться, что для любой $n \times (n-1)$-матрицы A, удовлетворяющей условию $A^T A = I$, существует ортогональная $n \times n$-матрица B, такая что

$$(BA)^i_j = \delta^i_j,\ i, j = 1, 2, \dots, n-1, \quad (BA)^n_j = 0.$$

Обозначим $\hat{S} = BSB^T \in \mathrm{Sym}(n)$. Тогда $A^T S A = (AB)^T \hat{S}(AB) = \hat{S}^{\langle n \rangle}$ (в обозначениях леммы 5.3). Пункт (i) леммы 5.8 следует из пункта (i) леммы 5.3 и ортогональной инвариантности p-следа, (5.3):

$$S \in K_m(n) \quad \Leftrightarrow \quad \hat{S} \in K_m(n) \quad \Leftrightarrow \quad T_m(\hat{S}) = T_m(S) > 0,\ \hat{S}^{\langle n \rangle} = A^T S A \in K_{m-1}(n-1).$$

Утверждение (ii) является результатом нескольких итераций утверждения (i). $\square$

Чтобы применить лемму 5.8 к гиперповерхностям, введем понятие нормального p-сечения и дополним определение 4.1 матрицы кривизны понятиями p-секционных матриц кривизны.

Определение 5.9. Пусть $1 \leqslant p \leqslant n$ и $M_0 \in \Gamma^n$. Рассмотрим поверхность $\Gamma^p \subset \Gamma^n$, которая получается в результате сечения поверхности Γ^n какой-либо $(p+1)$-плоскостью, содержащей точку M_0 и вектор $\mathbf{n}[\Gamma^n](M_0)$. Назовём такую поверхность $\Gamma^p = \Gamma^p_{M_0}$ *нормальным p-сечением* поверхности Γ^n в точке M_0.

В частности, нормальное n-сечение совпадает с гиперповерхностью Γ^n, а нормальное 1-сечение – это плоская кривая, называемая в разделе 4.3 просто нормальным сечением. Понятно, что при $1 \leqslant p < n$ в точке M_0 существует бесконечное множество нормальных p-сечений. Считаем далее, что среди них зафиксировано одно конкретное нормальное p-сечение Γ^p. Если рассматривать Γ^p как гиперповерхность в пространстве $\mathbb{R}^{p+1}$, то для нее можно построить $p \times p$-матрицу кривизны $\mathcal{K}[\Gamma^p]$.

Определение 5.10. Матрицу $\mathcal{K}[\Gamma^p](M_0)$ назовём *p-секционной матрицей кривизны* поверхности Γ^n в точке M_0, соответствующей нормальному p-сечению $\Gamma^p = \Gamma^p_{M_0}$.

Напомним, что матрица кривизны подразумевает выбор направления нормали. Очевидно, в точке M_0 вектор $\mathbf{n}^+[\Gamma^p]$ можно выбрать геометрически совпадающим с $\mathbf{n}^+[\Gamma^n]$. Покажем, что $p\times p$-матрицу $\mathcal{K}[\Gamma^p](M_0)$ можно выразить через $n\times n$-матрицу $\mathcal{K}[\Gamma^n](M_0)$.

Пусть $X(\theta)$, $\theta\in\Theta\subset\mathbb{R}^n$, – какая-либо допустимая параметризация Γ^n в окрестности точки M_0 и пусть локальная параметризация Γ^p получена подстановкой $\theta=\theta(\xi)$, $\xi\in\Xi\subset\mathbb{R}^p$, $\det\theta_\xi^T\theta_\xi\neq 0$. Метрический тензор $g(\theta)$ и отображение $\Xi\to\Theta$ однозначно определяют по формуле (3.2) метрический тензор $g(\xi)$. А он, в свою очередь, определяет семейство (3.5), из которого выбирается $p\times p$-матрица $\tau(\xi)$. По формуле (4.2) вычисляем секционную матрицу кривизны в точке M_0:

$$\mathcal{K}[\Gamma^p](M_0)=\tau^T(\xi)\left(X_{\xi\xi},\mathbf{n}^+[\Gamma^p]\right)\tau(\xi)=\tau^T(\xi)\theta_\xi^T\left(X_{\theta\theta},\mathbf{n}^+[\Gamma^n]\right)\theta_\xi\tau(\xi)=$$

$$=\left(\tau^{-1}(\theta)\theta_\xi\tau(\xi)\right)^T\tau^T(\theta)\left(X_{\theta\theta},\mathbf{n}^+[\Gamma^n]\right)\tau(\theta)\left(\tau^{-1}(\theta)\theta_\xi\tau(\xi)\right)=$$
$$=\left(\zeta^T\mathcal{K}[\Gamma^n]\zeta\right)|_{M_0},\quad \zeta=\tau^{-1}(\theta)\theta_\xi\tau(\xi). \tag{5.11}$$

В (5.11) введена прямоугольная $n\times p$-матрица $\zeta=\zeta(M)$, $M\in\Gamma^p\subset\Gamma^n$. Из формулы (3.2) и свойства (3.3) матрицы τ следует, что

$$\zeta^T\zeta=\tau^T(\xi)\theta_\xi^T g(\theta)\theta_\xi\tau(\xi)=\tau^T(\xi)g(\xi)\tau(\xi)=I. \tag{5.12}$$

Укажем геометрический смысл этой матрицы. Нетрудно проверить, что матрица $\zeta=(\zeta_j^i)$ задает коэффициенты разложения сопровождающего базиса (3.6) поверхности Γ^p по сопровождающему базису поверхности Γ^n:

$$X_{(j)}[\Gamma^p]=X_{(i)}[\Gamma^n]\zeta_j^i,\quad j=1,2,\ldots,p. \tag{5.13}$$

Поскольку сопровождающий базис поверхности состоит из инвариантных производных, то матрица ζ является абсолютным геометрическим инвариантом как для поверхности Γ^p, так и для поверхности Γ^n. Этот факт можно также проверить прямыми преобразованиями формулы (5.11).

Матрица $\zeta(M_0)$ несет информацию о "направлении" данного нормального p-сечения в точке M_0: поверхность Γ^p получена сечением поверхности Γ^n $(p+1)$-плоскостью, натянутой на нормаль и касательные векторы (5.13) в точке M_0.

В частности, если $p=1$, то матрица ζ содержит только один столбец: $\zeta\in\mathbb{R}^n$, $|\zeta|=1$. Получается нормальное 1-сечение поверхности Γ^n двумерной плоскостью в направлении касательного вектора $X_{(i)}\zeta^i(M_0)$. Матрица кривизны или, что то же самое, кривизна этого 1-сечения является числом. В точке M_0 это число можно вычислить по формуле (5.11), которая в этом случае с точностью до обозначений совпадает с выведенной ранее формулой нормальной кривизны (4.10).

Представление (5.11) для секционной матрицы кривизны, свойство (5.12) матрицы ζ, леммы 5.7 и 5.8 приводят к следующему критерию.

Теорема 5.11. *Пусть $\mathbf{k}_m[\Gamma^n]=T_m(\mathcal{K}[\Gamma^n])>0$ во всех точках $M\in\Gamma^n\subset\mathbb{R}^{n+1}$.*

(i) Чтобы поверхность Γ^n была m-выпуклой, необходимо и достаточно существования хотя бы одной точки M_0 и хотя бы одного нормального $(n-1)$-сечения $\Gamma_{M_0}^{n-1}\subset\Gamma^n$, такого что M_0 – точка его $(m-1)$-выпуклости.

(ii) Чтобы поверхность Γ^n была m-выпуклой, необходимо и достаточно существование хотя бы одной точки M_0 и хотя бы одной последовательности нормальных сечений $\Gamma^1 \subset \Gamma^2 \ldots \subset \Gamma^{n-1} \subset \Gamma^n$ в точке M_0, для которых

$$\mathbf{k}_{m-1}[\Gamma^{n-1}](M_0) > 0,\ \mathbf{k}_{m-2}[\Gamma^{n-2}](M_0) > 0, \ldots, \mathbf{k}_1[\Gamma^{n-m+1}](M_0) > 0.$$

Сформулируем, наконец, признак отсутствия точек m-выпуклости.

Следствие 5.12. Пусть $\mathbf{k}_m[\Gamma^n] = T_m(\mathcal{K}[\Gamma^n]) > 0$ во всех точках $M \in \Gamma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Предположим, что имеется точка $M_0 \in \Gamma^n$ и число p, $1 \leqslant p \leqslant m-1$, такие, что хотя бы для одного из нормальных сечений $\Gamma^{n-p} = \Gamma^{n-p}_{M_0} \subset \Gamma^n$ выполнено равенство

$$\mathbf{k}_{m-p}[\Gamma^{n-p}](M_0) = 0. \tag{5.14}$$

Тогда на гиперповерхности Γ^n нет точек m-выпуклости (независимо от ориентации).

Следствие 5.12 остаётся справедливым для нечётных m, если равенство (5.14) заменить на неравенство $\mathbf{k}_{m-p}[\Gamma^{n-p}](M_0) \leqslant 0$.

Условия следствия 5.12 могут быть выполнены только для незамкнутых гиперповерхностей Γ^n размерности $n \geqslant 3$. Для гиперповерхностей $\Gamma^2 \subset \mathbb{R}^3$ из неравенства $\mathbf{k}_2[\Gamma^2] = T_2(\mathcal{K}[\Gamma^2]) > 0$ следует, что главные кривизны имеют одинаковые знаки и равенство $\mathbf{k}_1[\Gamma^1](M_0) = 0$ невозможно. Замкнутые гиперповерхности исключаются леммой 5.7.

6. Приложение новых инвариантов к FNPDE

6.1. Конус m-допустимых функций

В этом параграфе рассматриваются функции $u \in C^2(\bar{\Omega})$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – ограниченная область. Символом u_x обозначен градиент функции u, символом u_{xx} – матрица её частных производных второго порядка (матрица Гессе). Пусть $1 \leqslant m \leqslant n$. Рассмотрим задачу Дирихле для стационарного m-гессиановского уравнения:

$$T_m[u] = T_m(u_{xx}) = f > 0 \quad \text{в} \quad \Omega, \tag{6.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi.$$

Как уже было замечено в §1, в большинстве англоязычных публикаций для определения m-гессиановского оператора вместо функции $T_m(S)$ используется $\sigma_m(\lambda(S))$ (см. формулу (5.2), теорему 1.1). Помимо неудобства, такая форма записи не содержит информации о косой симметрии гессиановских следов. Симметрия такого типа позволяет, например, распространить классические идеи вариационного исчисления на функционалы с полностью нелинейным лагранжианом.

Очевидно, что решение задачи (6.1) для 1-гессиановского уравнения (уравнения Пуассона) надо искать среди функций u, у которых матрица Гессе обладает в области Ω положительным 1-следом. Как известно, задачу (6.1) для n-гессиановского уравнения (уравнения Монжа – Ампера) целесообразно рассматривать на множестве строго выпуклых функций. В поисках естественного множества разрешимости для задачи (6.1) при $1 < m < n$ Н. М. Ивочкина в статье [3] 1983 года построила матричный конус K_m (см. определение 5.1, формулу (5.4)) и его функциональный аналог:

$$\mathbb{K}_m(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) : T_p[u](x) > 0,\ p = 1, 2, \ldots, m,\ x \in \Omega\}.$$

После публикации [15] 1985 года, в которой L. Caffarelly, L. Nirenberg, J. Spruck ввели термин "допустимая функция" для широкого класса FNPDE, элементы функционального конуса $\mathbb{K}_m(\Omega)$ мы называем m-допустимыми функциями.

Определение 6.1. Функция $u \in C^2(\Omega)$ называется *m-допустимой* в точке $x \in \Omega$, если матрица u_{xx} является m-положительной в этой точке. Функция u называется m-допустимой в области Ω, если она m-допустима в каждой точке $x \in \Omega$.

Все C^2-гладкие функции считаются 0-допустимыми и образуют конус $\mathbb{K}_0(\Omega)$. Любая n-допустимая функция является строго выпуклой в классическом смысле, поскольку ее матрица Гессе положительно определена. Обратное может быть неверно, поскольку классическое определение строгой выпуклости распространяется на негладкие функции, и на функции, имеющие точки вырождения матрицы Гессе. Для конусов $\mathbb{K}_m(\Omega)$ справедлива цепочка включений, аналогичная (5.5).

Заметим, что согласно определению 6.1 функция u не может иметь точек максимума в области m-допустимости.

Сформулируем простое следствие леммы 5.2.

Лемма 6.2. Пусть $u \in C^2(\Omega)$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Для того чтобы функция u была m-допустимой в области Ω, необходимо и достаточно существования хотя бы одной точки $x_0 \in \Omega$, в которой $u_{xx}(x_0) \in K_m$, и выполнения условия $T_m[u] > 0$ во всех точках $x \in \Omega$.

В частности, условие $T_m[u] > 0$ гарантирует m-допустимость функции u, достигающей минимума в Ω.

Заметим, что определение 6.1 и лемма 6.2, сформулированные для открытой области Ω, дословно переносятся на замкнутую область $\overline{\Omega}$.

Нельзя не заметить аналогию между конусом m-допустимых функций $\mathbb{K}_m(\Omega)$ (определение 6.1) и конусом m-выпуклых гиперповерхностей $\mathbf{K}_m$ (определение 5.6). И тот, и другой определяются на основе конуса m-положительных матриц K_m (определение 5.1) и при $m = n$ приводят к строго выпуклым функциям и поверхностям соответственно.

Поясним, почему функции $u \in \mathbb{K}_m(\Omega)$ называются m-допустимыми, а не, скажем, m-выпуклыми. Дело в том, что m-выпуклыми целесообразно было бы называть функции, график которых является m-выпуклой гиперповерхностью в смысле определения 5.6. Для функций из конуса $\mathbb{K}_m(\Omega)$ при $m < n$ это не так. Действительно, в разделе 4.2 показано, как вычисляется матрица кривизны для гиперповерхности Γ_u, являющейся графиком функции u. Несложный анализ формулы (4.6) приводит к выводу, что m-положительность матрицы u_{xx} и m-положительность матрицы $\mathcal{K}[\Gamma_u]$ равносильны при $m = n$, но при $m < n$ не контролируют друг от друга. Кроме того, в случае $m < n$ множество всех функций, чей график является m-выпуклой поверхностью, не образует конус. Таким образом, термины "m-допустимая функция" и "m-выпуклая функция" следует наполнять разным содержанием (подробнее на эту тему см. [20]).

Итак, при $m < n$ график m-допустимой функции не обязательно является m-выпуклой поверхностью. Однако верно следующее.

Лемма 6.3. Пусть $u \in C^2(\overline{\Omega})$, $1 \leqslant m \leqslant n$. Предположим, что

$$T_m[u] > 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \quad u|_{\partial\Omega} = \text{const}. \tag{6.2}$$

Тогда

$$u_x|_{\partial\Omega} \neq \mathbf{0}, \quad \partial\Omega \in \mathbf{K}_{m-1}. \tag{6.3}$$

В частности, невырожденная поверхность уровня m-допустимой функции является $(m-1)$-выпуклой гиперповерхностью.

Доказательство этой леммы приведено в работе [7] (теорема 4.1). Другие свойства m-допустимых функций: устойчивость m-допустимости относительно усреднения, слабый аналог m-допустимости для непрерывных функций, нулевая мера множества критических точек m-допустимой функции и аналог леммы Сарда – разбираются в работе [20]. Понятие m-допустимой функции для эволюционного m-гессиановского оператора введено в работах [7] и [22].

В статье [12] проведено полное исследование классической и слабой (аппроксимативной) разрешимости задачи (6.1) в конусе m-допустимых функций, построена шкала зависимости гладкости решения от гладкости данных задачи. В частности, получена уточненная версия теоремы 1.1:

Теорема 6.4. *Пусть* $\varphi \in C^{l+\alpha}(\partial\Omega)$, $f \in C^{l-2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\partial\Omega \in C^{l+\alpha}$, $f > 0$ *в* $\overline{\Omega}$, $l \geqslant 4$, $0 < \alpha < 1$. *Пусть, кроме того,*

$$\mathbf{k}_{m-1}[\partial\Omega] > 0. \tag{6.4}$$

Тогда существует единственное m-допустимое решение $u \in C^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ задачи (6.1).

Напомним, что согласно лемме 5.7 условие (6.4) равносильно тому, что замкнутая гиперповерхность $\partial\Omega$ является $(m-1)$-выпуклой.

Рассмотрим теорему 6.4 для $\varphi \equiv c$, $c \in \mathbb{R}$. Из лемм 6.2 и 6.3 следует, что в этом случае требование (6.4) необходимо для существования не только m-допустимого решения, но и любого C^2-гладкого решения задачи Дирихле (6.1). При этом, если $c \neq 0$ или число m нечётное, существует только одно C^2-гладкое решение задачи (6.1) и оно m-допустимо. Если же $c = 0$ и m чётно, то задача (6.1) имеет два C^2-гладких решения: u и $-u$, и одно из них m-допустимо.

Кроме того, теорема 6.4 дополняет лемму 6.3 следующей информацией: для любой C^4-гладкой замкнутой $(m-1)$-выпуклой гиперповерхности $\partial\Omega \in \mathbb{R}^n$ найдутся m-допустимые функции $u(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$, с поверхностью уровня $\partial\Omega$. К сожалению, ослабить требование гладкости $\partial\Omega$ в теореме 6.4 пока не удалось.

Одна из основных причин, по которой теория разрешимости FNPDE с m-гессиановскими операторами строится в функциональном конусе $\mathbb{K}_m(\Omega)$, заключена в универсальных свойствах гиперболических многочленов и конусов Гординга (см. замечание 1.2), к которым относится многочлен $T_m(S)$ и матричный конус K_m. Например, соотношения (5.6), (5.7) гарантируют эллиптичность оператора $T_m[u]$ на каждой функции $u \in \mathbb{K}_m(\Omega)$ и равномерную эллиптичность на решении (6.1) при условии $f > 0$ в $\overline{\Omega}$ и при наличии априорной C^2-оценки решения в области $\overline{\Omega}$. Другая причина заключается в уникальных особенностях конуса $\mathbb{K}_m(\Omega)$. Среди них – принцип максимума

Александрова, который “вытесняет” C^2-оценки решения на границу области Ω. Таким образом, ключевой и наиболее трудоемкой частью доказательства теоремы 6.4 является получение априорных C^2-оценок решения вблизи $\partial\Omega$.

6.2. Построение барьеров

В заключительном разделе предлагаемой работы описан способ построения m-гессиановских приграничных нижних барьеров. Он отличается от техники, которую использовали L. Caffarelly, L. Nirenberg и J. Spruck для задачи (1.1) в работе [15]. Предпосылки данных барьеров можно найти в работе [4]. В развитом виде они используются в работах последних лет Н. М. Ивочкиной и Н. В. Филимоненковой: например, в работе [12] они применяются для доказательства теоремы 6.4, конкретно – для получения априорных оценок решения задачи (6.1) вблизи $\partial\Omega$.

Второстепенные технические выкладки в данном разделе сокращены до минимума, чтобы не отвлекаться от стратегически важных маневров. Детализация расчетов имеется в работе [12].

Опишем сначала принцип сравнения для 1-однородной модификации m-гессиановского оператора:

$$F_m[u] = (T_m[u])^{\frac{1}{m}} .$$

Точнее, будем рассматривать оператор F_m в рамках более широкого класса псевдолинейных эллиптических операторов:

$$F_m^{ij}[u]v_{ij}, \quad F_m^{ij}[u] = \frac{\partial F_m(u_{xx})}{\partial u_{ij}},$$

где u – m-допустимая функция, v – произвольная функция. В том числе может быть $v = u$ и тогда $F_m^{ij}[u]u_{ij} = F_m[u]$.

Лемма 6.5. Пусть $u \in \mathbb{K}_m(\Omega)$, $v \in C^2(\Omega)$, $\mu > 0$ и в каждой точке $x \in \Omega$

$$F_m^{ij}[u]v_{ij} \leqslant \mu. \tag{6.5}$$

Пусть имеется такая функция $w \in \mathbb{K}_m(\Omega)$, что в каждой точке $x \in \Omega$

$$F_m[w] \geqslant \mu. \tag{6.6}$$

Тогда

$$v(x) - w(x) \geqslant \min_{\partial\Omega}(v - w), \quad x \in \Omega.$$

Доказательство. Допустим, функция $(v-w)$ достигает минимума в точке $x_0 \in \Omega$. Тогда в точке x_0 матрица $(v_{xx} - w_{xx})$ неотрицательно определена, т. е. $(v_{xx} - w_{xx})(x_0) \in \overline{K}_n$. По условию имеем $w_{xx} \in K_m$. Из монотонности (5.6) вытекает, что $v_{xx}(x_0) \in K_m$. Пользуясь вогнутостью функции F_m в конусе K_m (неравенство (5.8)) и еще раз монотонностью (5.6), получаем в точке x_0

$$F_m^{ij}[u]v_{ij} \geqslant F_m[v] = F_m[w + v - w] > F_m[w].$$

Это противоречит условиям (6.5), (6.6). $\square$

Поскольку в конусе $\mathbb{K}_m(\Omega)$ справедливо неравенство вогнутости (5.8), то $F_m^{ij}[u]w_{ij} \geqslant F_m[w]$ и лемма 6.5 является m-гессиановской версией классического принципа максимума для линейных эллиптических уравнений в частных производных второго порядка.

Функцию w принято называть *нижним барьером* для функции v.

При $v = u$ условия (6.5), (6.6) можно записать проще:

$$T_m[u] \leqslant \mu \leqslant T_m[w].$$

В этом случае функция w служит нижним барьером для функции u, которая может быть, в частности, решением уравнения (6.1) с ограниченной правой частью. В более общем неравенстве (6.5) на роль v подходит не только решение задачи (6.1), но и, скажем, его производные.

Нижний барьер w, специальным образом локализованный в окрестности точки $M_0 \in \partial\Omega$, дает оценку снизу для производной по нормали функции v.

Свяжем с точкой $M_0 \in \partial\Omega$ приграничную область:

$$\Omega_r \subset \Omega \cap B_r(M_0), \quad \partial\Omega_r \cap \partial\Omega = B_r(M_0) \cap \partial\Omega, \quad 0 < r \ll 1. \tag{6.7}$$

Следствие 6.6. Предположим, что найдется область Ω_r вида (6.7), в которой выполнены все условия леммы 6.5 и, кроме того,

$$v(M_0) = w(M_0), \quad (v - w)|_{\partial\Omega_r} \geqslant 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}(M_0) \geqslant \frac{\partial w}{\partial \mathbf{n}}(M_0),$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{n}^+[\partial\Omega]$ – внутренняя нормаль.

Функцию w из следствия 6.6 назовём *приграничным нижним барьером* для v. Недавно нам удалось выделить смысловое и конструктивное ядро этого барьера.

Определение 6.7. Назовём функцию W *m-гессиановским ядром* приграничного нижнего барьера в точке $M_0 \in \partial\Omega$, если найдутся область Ω_r вида (6.7) и число $\nu > 0$ такие, что $W \in \mathbb{K}_m(\overline{\Omega}_r)$, причём

$$W(M_0) = 0, \quad W|_{\partial\Omega_r} \leqslant 0, \quad W|_{\partial\Omega_r \cap \Omega} \leqslant -\nu. \tag{6.8}$$

Замечание 6.8. Поскольку m-допустимая функция W не может иметь максимум в области Ω_r, то условие $W|_{\partial\Omega_r} \leqslant 0$ равносильно тому, что $W(x) \leqslant 0$, $x \in \overline{\Omega}_r$ (рис. 2).

Легко убедиться, что если имеется m-гессиановское ядро W, то при достаточно большом $A > 0$ условия следствия 6.6 будут выполнены для

$$w = AW + \varphi,$$

где $\varphi \in C^2(\Omega_r)$, $v = \varphi$ на $\partial\Omega$.

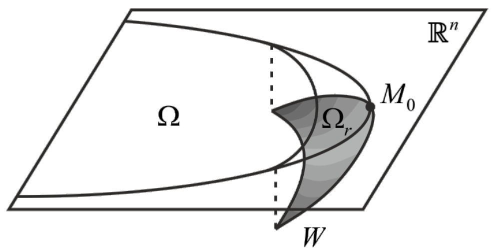

Рис. 2

Таким образом, оценка снизу производной по нормали для функции v, удовлетворяющей условию (6.5), сводится к проблеме существования m-гессиановских ядер приграничных нижних барьеров. Именно эту проблему можно считать генератором новых геометрических структур, которым посвящена данная работа. Почти весь дифференциально-геометрический аппарат, введенный в предыдущих параграфах, концентрированно применяется при доказательстве следующей теоремы.

Теорема 6.9. *Пусть $\partial\Omega$ – C^2-гладкая гиперповерхность. Для того, чтобы в точке $M_0 \in \partial\Omega$ существовало хотя бы одно m-гессиановское ядро приграничного нижнего барьера, необходимо и достаточно, чтобы поверхность $\partial\Omega$ была $(m-1)$-выпукла в этой точке.*

Доказательство. Для начала создадим ситуацию, которая упрощает вычисление матрицы кривизны гиперповерхности $\partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ (см. раздел 4.2).

Свяжем с точкой M_0 декартов базис $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$, где $e_n = \mathbf{n}^+[\partial\Omega](M_0)$ – внутренняя нормаль к $\partial\Omega$ в точке M_0. Тогда для поверхности $\partial\Omega$ имеется локальная параметризация

$$X[\partial\Omega] = \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \omega(\tilde{x}) \end{pmatrix}, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^{n-1} \end{pmatrix}, \tag{6.9}$$

с некоторой C^2-гладкой функцией $\omega(\tilde{x})$. Причем $X(M_0) = \mathbf{0}$. Согласно лемме 4.3 в окрестности точки M_0 справедливы следующие формулы

$$\tau[\partial\Omega] = I - \frac{\omega_{\tilde{x}} \times \omega_{\tilde{x}}}{\sqrt{1+\omega_{\tilde{x}}^2}(1+\sqrt{1+\omega_{\tilde{x}}^2})}, \quad \mathcal{K}[\partial\Omega] = \frac{\tau^T \omega_{\tilde{x}\tilde{x}} \tau}{\sqrt{1+\omega_{\tilde{x}}^2}}, \tag{6.10}$$

Поскольку $\omega_{\tilde{x}}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, то $\mathcal{K}[\partial\Omega](M_0) = \omega_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0})$.

I. Необходимость. Предположим, что m-гессиановское ядро W существует. По определению 6.7 функция $-W|_{\partial\Omega} = -W(\tilde{x}, \omega(\tilde{x}))$ имеет локальный минимум в точке M_0. Следовательно, ее матрица Гессе неотрицательно определена в точке M_0:

$$-W_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0}) - W_n(\mathbf{0})\mathcal{K}[\partial\Omega](M_0) \in \overline{K}_n.$$

Поскольку $W_{xx} \in K_m$, то по критерию Сильвестра (лемма 5.3) получаем, что $W_{\tilde{x}\tilde{x}} \in K_{m-1}$. Воспользуемся в точке M_0 монотонностью (5.6) функции T_m:

$$-W_n(\mathbf{0})\mathcal{K}[\partial\Omega](M_0) \in K_{m-1}.$$

Из замечания 6.8 следует, что $W_n(\mathbf{0}) \leqslant 0$. Отсюда заключаем, что $\mathcal{K}[\partial\Omega](M_0) \in K_{m-1}$ (и, кстати, $W_n(\mathbf{0}) < 0$).

II. Достаточность. Для доказательства достаточности мы предъявим m-гессиановское ядро W в явном виде.

Сначала сконструируем область (6.7).

По условию теоремы матрица кривизны $\mathcal{K}[\partial\Omega](M_0)$ является $(m-1)$-положительной, следовательно, имеется число $\varepsilon > 0$ такое, что $\mathbf{k}_{m-1}[\partial\Omega](M_0) \geqslant 3\varepsilon$. В силу непрерывности найдётся достаточно малое число $r > 0$, для которого гиперповерхность

$$\Gamma_r^0 = \{|\tilde{x}| \leqslant r, x^n = \omega(\tilde{x})\} \subset \partial\Omega$$

является $(m-1)$-выпуклой и $\mathbf{k}_{m-1}[\Gamma_r^0] \geqslant 2\varepsilon$.

Введём гиперповерхность

$$\Gamma_r^\beta = \{|\tilde{x}| \leqslant r, x^n = \hat{\omega}(\tilde{x})\}, \quad \hat{\omega}(\tilde{x}) = \omega(\tilde{x}) + \frac{\beta}{2}(r^2 - \tilde{x}^2), \quad \beta > 0.$$

Поверхность Γ_r^β располагается внутри области Ω (рис. 3), кроме края, который совпадает с краем Γ_r^0.

Заметим, что поверхность Γ_r^0, будучи частью замкнутой поверхности $\partial\Omega$, ориентирована внутренней нормалью. Ориентируем так же и поверхность Γ_r^β, т. е. выбираем для нее направление нормали, образующее острый угол с ортом e_n.

Поскольку Γ_r^β отличается от Γ_r^0 на незначительное квадратичное слагаемое, то существует число $\beta_0 > 0$ такое, что для всех $0 < \beta \leqslant \beta_0$ поверхность Γ_r^β оказывается также $(m-1)$-выпуклой и $\mathbf{k}_{m-1}[\Gamma_r^\beta] \geqslant \varepsilon$. Действительно, матрица $\mathcal{K}[\Gamma_r^\beta]$, как и $\mathcal{K}[\Gamma_r^0]$, вычисляется по формулам (6.9), (6.10) с подстановкой $\hat{\omega}$ вместо ω. Прямой расчет приводит к выводу, что $\mathbf{k}_{m-1}[\Gamma_r^\beta] = \mathbf{k}_{m-1}[\Gamma_r^0] + O(\beta)$.

В качестве приграничной области (6.7) рассмотрим область, ограниченную поверхностями Γ_r^0 и Γ_r^β и запишем ее при помощи вспомогательной функции $y(x)$:

$$\Omega_r^\beta = \left\{x \in \Omega : \ \frac{\beta}{2}\tilde{x}^2 < y(x) < \frac{\beta}{2}r^2, \ y = x^n - \omega(\tilde{x}) + \frac{\beta}{2}\tilde{x}^2\right\}. \tag{6.11}$$

Параметр $\beta \leqslant \beta_0$ будет еще раз уточняться далее.

Отметим, что несмотря на $(m-1)$-выпуклость Γ_r^0 и Γ_r^β, замкнутая поверхность $\partial\Omega_r^\beta = \Gamma_r^0 \cup \Gamma_r^\beta$ не является $(m-1)$-выпуклой, так Γ_r^β ориентирована не внутренней по отношению к Ω_r^β, а внешней нормалью.

Рассмотрим в области (6.11) функцию

$$W = \frac{y}{\beta r^2}\left(\frac{y}{2\beta r^2} - 1\right). \tag{6.12}$$

Легко видеть, что для этой функции выполнены все условия (6.8) с $\nu = 3/8$.

Осталось проверить, что $W \in \mathbb{K}_m(\overline{\Omega}_r^\beta)$. Фиксируем произвольно выбранную точку $x \in \Omega_r^\beta$ и вычисляем:

$$W_x = \frac{y - \beta r^2}{\beta^2 r^4} y_x, \quad W_{xx} = \frac{1}{\beta^2 r^4}\left((\beta r^2 - y)(-y_{xx}) + y_x \times y_x\right). \tag{6.13}$$

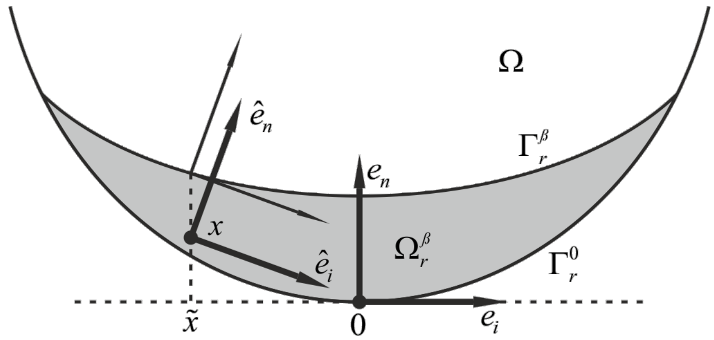

Рис. 3

Учитывая неравенство $\beta r^2 - y \geqslant 0$ в Ω_r^β, m-однородность функций T_m и соотношение (5.7), вычислим значение оператора $T_m[W] = T_m(W_{xx})$:

$$T_m[W] = \frac{(\beta r^2 - y)^{m-1}}{(\beta^2 r^4)^m}\left((\beta r^2 - y)T_m[-y] + T_m^{ij}(-y_{xx})y_i y_j\right). \tag{6.14}$$

Благодаря ортогональной инвариантности m-следа (свойство (5.3)), левая часть равенства (6.14) и первое слагаемое в правой части не зависят от выбора декартовой системы координат в пространстве $\mathbb{R}^n$. Следовательно, и второе слагаемое не зависит – именно оно играет ключевую роль. Для удобства его вычисления введем в данной точке $x = (\tilde{x}, x^n) \in \Omega_r^\beta$ новый декартов базис, порожденный сопровождающим базисом (3.6) к поверхности Γ_r^β в точке $\tilde{x}$. Именно, положим $\hat{e}_i(x) = X_{(i)}[\Gamma_r^\beta](\tilde{x}), i = 1, 2, \ldots, n-1$, $\hat{e}_n(x) = \mathbf{n}[\Gamma_r^\beta](\tilde{x})$ (рис. 3).

Поскольку Γ_r^β является поверхностью уровня функции y, то в данной точке x имеем

$$\frac{\partial y}{\partial \hat{x}^n}(x) = |y_x| = \sqrt{1 + \hat{\omega}_x^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial \hat{x}^k}(x) = 0, \quad k = 1, 2, ..., n-1.$$

Поэтому

$$T_m^{ij}(-y_{xx})y_i y_j = (1 + \hat{\omega}_x^2)T_m^{nn}(-y_{\hat{x}\hat{x}}).$$

Легко проверить, что $T_m^{nn}(-y_{\hat{x}\hat{x}}) = T_{m-1}(-y_{\hat{x}\hat{x}}^{\langle n\rangle})$, где символом $-y_{\hat{x}\hat{x}}^{\langle n\rangle} \in \mathrm{Sym}(n-1)$ обозначена матрица, полученная из матрицы $-y_{\hat{x}\hat{x}} \in \mathrm{Sym}(n)$ вычеркиванием строки и столбца с номером n. Вычисляем в данной точке x:

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial \hat{x}^k \partial \hat{x}^l} = -\left(y_{xx}\hat{e}_k, \hat{e}_k\right) = \tau^T \hat{\omega}_{\tilde{x}\tilde{x}}\tau, \quad k, l = 1, 2, \ldots, n-1, \quad \tau = \tau[\Gamma_r^\beta](\tilde{x}).$$

По формуле (6.10), переписанной для поверхности Γ_r^β, получаем

$$-y_{\hat{x}\hat{x}}^{\langle n\rangle} = \sqrt{1 + \hat{\omega}_x^2}\,\mathcal{K}[\Gamma_r^\beta](\tilde{x}).$$

По ранее гарантированным свойствам поверхности Γ_r^β имеем окончательную оценку в точке x:

$$T_m^{ij}(-y_{xx})y_i y_j = (1 + \hat{\omega}_x^2)^{\frac{m+1}{2}}\mathbf{k}_{m-1}[\Gamma_r^\beta](\tilde{x}) \geqslant \varepsilon. \tag{6.15}$$

Теперь рассмотрим соотношение (6.14), учитывая (6.15) и $|\beta r^2 - y| \leqslant \beta r^2$ в $\overline{\Omega}_r^\beta$. Приходим к выводу, что существует такое число $\beta_1 > 0$, что $T_m[W] > 0$ в области $\overline{\Omega}_r^\beta$ для всех $\beta \leqslant \beta_1 \leqslant \beta_0$.

Наконец, рассмотрим матрицу W_{xx} в точке $M_0 \in \partial\Omega$. Напомним, что в исходной системе координат ей соответствует точка $\mathbf{0}$. Вычисляем

$$W_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0}) = \frac{\beta r^2 - y}{\beta^2 r^4} \hat{\omega}_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0}) = \frac{\beta r^2 - y}{\beta^2 r^4} \mathcal{K}[\Gamma_r^\beta](\mathbf{0}).$$

Следовательно, $W_{\tilde{x}\tilde{x}}(\mathbf{0}) \in K_{m-1}$, что вместе с $T_m(W_{xx}) > 0$ означает $W_{xx}(\mathbf{0}) \in K_m$ (критерий Сильвестра, лемма 5.3). Поскольку $T_m[W] > 0$ в области $\overline{\Omega}_r^\beta$, то с учетом леммы 6.2 приходим к выводу, что $W \in \mathbb{K}_m(\overline{\Omega}_r^\beta)$. Таким образом, искомое ядро барьера построено. $\square$

В заключение отметим, что наше внимание было сконцентрировано на построении m-гессиановских нижних барьеров по той причине, что верхний барьер достается гораздо проще. Например, для функции $u \in \mathbb{K}_m(\Omega)$ верхним барьером является любая гармоническая функция w, совпадающая с u на границе области Ω. Действительно, в этом случае $(u - w) \in \mathbb{K}_1(\Omega)$, а значит, функция $(u - w)$ не может достигать максимума внутри Ω.

Список литературы

[1] Зорич В. А. Математический анализ. Часть II. – изд. 7-е., доп. – М: МЦНМО, 2015. – 688 с.

[2] Ивочкина Н. М. Интегральный метод барьерных функций и задача Дирихле для уравнений с операторами типа Монжа–Ампера // Матем. сб. – 1980. – том 112(154), номер 2(6). – С. 193–206.

[3] Ивочкина Н. М. Описание конусов устойчивости, порождаемых дифференциальными операторами типа Монжа-Ампера// Математический сборник. – 1983. – Вып. 22. – С. 265–275.

[4] Ивочкина Н. М. Задача Дирихле для уравнения кривизны порядка m// Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2. – Вып. 3. – С. 192–217.

[5] Ивочкина Н. М., Ладыженская О. А. Оценка вторых производных на границе для поверхностей, эволюционирующих под действием главных кривизн // Алгебра и анализ. – 1997. – Т. 9, вып. 2. – С. 30–50.

[6] Ивочкина Н. М. От конусов Гординга к p-выпуклым гиперповерхностям// Современная математика. Фундаментальные направления. – 2012. – Т. 45. – С. 94–104.

[7] Ивочкина Н. М., Филимоненкова Н. В. О новых структурах в теории полностью нелинейных уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2015. – Т. 58. – С. 82–95.

[8] Крылов Н. В. Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области.// Изв. АН СССР, Сер. мат.– 1983. – 47.– №1.– С. 75–108.

[9] Крылов Н. В. Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. – Наука, 1985. – 376 с.

[10] Погорелов А.В. Многомерная проблема Минковского. – Наука, 1975, – 95 с.

[11] Сафонов М.В. Неравенство Харнака для эллиптических уравнений и гельдеровость их решений.//Зап. науч. семин. ЛОМИ. – 1983. – Вып. 12. – С. 272–287.

[12] Филимоненкова Н. В. О классической разрешимости задачи Дирихле для невырожденных m-гессиановских уравнений // Проблемы математического анализа. – 2011. – Вып. 60. – С. 89–111.

[13] Филимоненкова Н. В. Критерий Сильвестра для m-положительных матриц// Препринт Санкт-Петербургского математического общества. – 2014. – 7.

[14] Филимоненкова Н. В., Бакусов П. А. Гиперболические многочлены и конусы Гординга // Математическое просвещение. Третья серия. – 2016. – вып. 20. – С. 143–166.

[15] Caffarelly L., Nirenberg L., Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian// Acta Math. – 1985. – Vol. 155. – P. 261–301.

[16] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., Nonlinear second-order elliptic equations V. The Dirichlet problem for Weingarten hypersurfaces // Comm. Pure Appl. Math. – 41 (1988). – P. 47–70.

[17] Evans L. C. Classical solutions of fully nonlinear convex second order elliptic equations// Comm. Pure Appl. Math. – 1982. – 25. – P. 333–363.

[18] Ivochkina N. M. Geometric evolution equations preserving convexity// AMS Transl. — Ser. 2. Adv. Math. Sci., 220, 191–121 (2007).

[19] Ivochkina N. M. Symmetry and geometric evolution equations // Записки науч. сем. ПОМИ. – 2004. – Т. 318. – С. 135–146.

[20] Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V. On the bakgrounds of the theory of m-Hessian equations// Communications on Pure and Applied Analysis. – 2013. – Vol. 12. – № 4. – P. 1687–1703.

[21] Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V. On algebraic and geometric conditions in the theory of Hessian equations// Journal of Fixed Point Theory and Applications., JFPTA. – 2015. – v.16, no.1. – P. 11–25.

[22] Ivochkina N. M., Filimonenkova N.V. Attractors of m-Hessian evolutions// Journal of Mathematical Sciences.– 2015. – Vol. 207.– Issue 2.– P. 226–235.

[23] Ivochkina N. M., Nehring Th., Tomi F. Evolution of starshaped hypersurfaces by nonhomogeneous curvature functions // Алгебра и анализ. – 2000. – Т.12, вып.1. – 185–203.

[24] Ivochkina N. M., Trudinger N., Wang X.-J. The Dirichlet problem for degenerate Hessian equations// Comm.Partial Differ. Equations. – 2004. – Vol. 29. – P. 219–235.

[25] Ivochkina N. M., Yakunina G. V., Prokof'eva S. I. The Garding cones in the modern theory of fully nonlin-ear second order differential equations// Journal of Mathematical Sciences. – 2012. – Vol. 184, Issue 3. – P. 295–315.

[26] Garding L. An inequality for hyperbolic polynomials // J. Math. Mech. – 1959. – 8. – P. 957–965.

[27] Trudinger N. S. The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations // Arch. Rat. Mech. Anal. – 111(1990). – P. 153–179.

[28] Trudinger N. S. On the Dirichlet problem for Hessian equations// Acta. Math. – 1995. – 175. – P. 151–164.

[29] Wang X.-J. The k-hessian equation // Lecture Notes in Mathematics. – 2009. – Vol. 1977. – P. 177–252.

[30] Urbas J. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures // Math. Z. – 1990.– 205. – P. 355–372.