Общая формула следов для дифференциального оператора на отрезке при возмущении младшего коэффициента конечным зарядом

Е.Д. Гальковский*, А.И. Назаров†

Памяти Михаила Захаровича Соломяка

Аннотация

В работе получена формула следа первого порядка для дифференциального оператора на отрезке, возмущенного оператором умножения на заряд.

1 Введение

Рассмотрим оператор $\mathbb{L}$ на отрезке $[a,b]$, порождаемый дифференциальным выражением порядка $n \geqslant 2$

$$\ell = (-i)^n D^n + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(x) D^k, \tag{1}$$

(здесь $p_k \in L_1(a,b)$ – комплекснозначные функции) и граничными условиями

$$(P_j(D)y)(a) + (Q_j(D)y)(b) = 0, \qquad j = 0, \ldots, n-1, \tag{2}$$

(здесь P_j и Q_j – полиномы степени меньше n с комплексными коэффициентами). Обозначим d_j наибольшую из степеней P_j и Q_j, a_j и b_j – коэффициенты при степени d_j у полиномов P_j и Q_j соответственно (таким образом, a_j и b_j не могут одновременно обращаться в нуль).

Будем считать систему граничных условий (2) нормированной (это означает, что $\sum\limits_{j=0}^{n-1} d_j$ является минимальной среди всех систем граничных условий, которые могут быть получены из (2) невырожденными линейными преобразованиями; см. [2, гл. II, §4], а также [9] в случае более общей постановки).

*Лаборатория им. П.Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет, 14 линия В.О., 29Б, СПб, 199178, Россия. E-mail: egor_maths@list.ru.

†Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН; Санкт-Петербургский госуниверситет. E-mail: al.il.nazarov@gmail.com.

Предположим, далее, что система (2) регулярна по Биркгофу (см. [2, гл. II, §4]). Тогда оператор $\mathbb{L}$ имеет дискретный спектр[1], который мы будем обозначать $\{\lambda_N\}_{N=1}^{\infty}$. В дальнейшем мы всегда будем нумеровать собственные числа в порядке возрастания модулей с учетом кратности (т.е. $|\lambda_N| \leqslant |\lambda_{N+1}|$).

Обозначим $\mathbb{Q}$ оператор умножения на конечный (комплексный) заряд $\mathfrak{q}$ (пространство таких зарядов будем обозначать $\mathfrak{M}[a,b]$). Тогда оператор $\mathbb{L}_{\mathfrak{q}} = \mathbb{L} + \mathbb{Q}$ также имеет дискретный спектр, который мы будем обозначать $\{\lambda_N(\mathfrak{q})\}_{N=1}^{\infty}$.

Нас будет интересовать регуляризованный след

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) := \sum_{N=1}^{\infty} \left[\lambda_N(\mathfrak{q}) - \lambda_N - \frac{1}{b-a} \int\limits_{[a,b]} \mathfrak{q}(dx) \right].$$

Не умаляя общности, в дальнейшем будем считать, что $\int\limits_{[a,b]} \mathfrak{q}(dx) = 0$.

Впервые формула регуляризованного следа была получена в 1953 году И. М. Гельфандом и Б. М. Левитаном для задачи

$$-y'' + \mathfrak{q}(x)y = \lambda y; \qquad y(0) = y(\pi) = 0. \tag{3}$$

Именно, в работе [1] было показано, что при вещественной $\mathfrak{q}(x) \in \mathcal{C}^1[0,\pi]$ справедливо соотношение

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = -\frac{\mathfrak{q}(0) + \mathfrak{q}(\pi)}{4}.$$

Статья [1] породила многочисленные усиления и обобщения. Обзор результатов в задаче о вычислении регуляризированного следа можно найти в статье В. А. Садовничего и В. Е. Подольского [7].

В недавней работе А. И. Назарова, Д. М. Столярова и П. Б. Затицкого [3] для произвольного $n \geqslant 2$ и регулярных граничных условий была получена формула

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \frac{\psi_a(a+)}{2n} \cdot \mathbf{tr}\,(\mathbb{A}) + \frac{\psi_b(b-)}{2n} \cdot \mathbf{tr}\,(\mathbb{B}), \tag{4}$$

в предположениях, являющихся сейчас стандартными[2]: $\mathfrak{q} \in L_1(a,b)$, и функции

$$\psi_a(x) = \frac{1}{x-a} \int\limits_a^x \mathfrak{q}(t)dt, \qquad \psi_b(x) = \frac{1}{b-x} \int\limits_x^b \mathfrak{q}(t)dt$$

имеют ограниченную вариацию в точках a и b соответственно. В формуле (4) $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ – матрицы, элементы которых выражаются через коэффициенты a_j и b_j, $j = 0, \ldots, n-1$. Более того, в [3] было показано, что в важном частном случае **почти разделенных** граничных условий множители $\mathbf{tr}\,(\mathbb{A})$ и $\mathbf{tr}\,(\mathbb{B})$ в (4) упрощаются и выражаются через суммы степеней полиномов P_j и Q_j.

[1] Заметим, что мы не предполагаем самосопряженности $\mathbb{L}$.

[2] Для оператора $\mathbb{L}$ без младших членов и гладкой функции $\mathfrak{q}$ формула (4) была установлена ранее Р. Ф. Шевченко [10].

Принципиально новый эффект был обнаружен уже в нашем веке А. М. Савчуком и А. А. Шкаликовым [5, 6]. Именно, оказалось, что если в задаче (3) $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[0,\pi]$ – заряд, локально непрерывный в точках 0 и π, то

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = -\frac{\mathfrak{q}(0) + \mathfrak{q}(\pi)}{4} - \frac{1}{8}\sum_j h_j^2, \tag{5}$$

где h_j – скачки функции распределения заряда $\mathfrak{q}$ (ряд $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ в этом случае суммируется методом средних). Таким образом, при $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ регуляризованный след перестает быть линейным функционалом от $\mathfrak{q}$.

В настоящей статье мы обобщаем формулу (5) на случай оператора $\mathbb{L}$ с произвольными регулярными граничными условиями.

Статья организована следующим образом. В §2 сформулированы основной результат и несколько промежуточных утверждений. Эти утверждения доказываются в §§3 – 5. В Приложение вынесены асимптотики собственных чисел и собственных функций операторов Штурма–Лиувилля, необходимые для доказательства Теоремы 2.5.

Введем некоторые обозначения. Любой заряд $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ можно разбить на непрерывную и дискретную составляющие, которые мы обозначим $\mathfrak{c}$ и $\mathfrak{d}$ соответственно, так что

$$\mathfrak{q} = \mathfrak{c} + \mathfrak{d} = \mathfrak{c} + \sum_j h_j \delta(x - x_j), \qquad \sum_j |h_j| < \infty.$$

Полную вариацию заряда $\mathfrak{q}$ обозначим $\|\mathfrak{q}\|$. Определим также функцию распределения

$$\mathcal{Q}(x) = \int_{[a,x]} \mathfrak{q}(dt).$$

Таким образом, h_j – скачок функции $\mathcal{Q}$ в точке x_j.

Оператор, порожденный дифференциальным выражением $\ell_0 = (-i)^n D^n$ и регулярными условиями (2), обозначим $\mathbb{L}_0$, а его собственные числа – $\{\lambda_N^0\}_{N=1}^{\infty}$.

Далее, $G(x,y,\lambda)$, $G_{\mathfrak{q}}(x,y,\lambda)$, и $G_0(x,y,\lambda)$ – функции Грина операторов $\mathbb{L} - \lambda$, $\mathbb{L}_{\mathfrak{q}} - \lambda$ и $\mathbb{L}_0 - \lambda$ соответственно (см. [2], гл. I, §3)).

Для произвольной функции $\Phi(\lambda)$, определенной на комплексной плоскости $\mathbb{C}$, введем функцию $\tilde{\Phi}(z)$ следующим образом:

$$\tilde{\Phi}(z) = \Phi(\lambda), \ \text{где } z = \lambda^{\frac{1}{n}}, \ Arg(z) \in [0, \frac{2\pi}{n}).$$

Заметим, что резольвента $\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}$ – интегральный оператор с ядром $G(x,y,\lambda)$, и определим его след

$$\mathbf{Sp}\,\frac{1}{\mathbb{L} - \lambda} = \int_a^b G(x,x,\lambda)\,dx.$$

Напомним определение суммирования ряда методом средних (методом Чезаро порядка 1). Пусть I_ℓ – последовательность частных сумм ряда $\sum\limits_j a_j$. Ряд называется суммируемым методом средних, если существует предел

$$(\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{\ell\to\infty} I_\ell := (\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{j=1}^{\infty} a_j := \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\sum_{\ell=1}^{k} I_\ell.$$

Все положительные константы, значения которых нам не важны, обозначаются буквой C.

2 Формулировка результатов

Наш основной результат для операторов второго порядка выглядит так:

Теорема 2.1. *Пусть $n = 2$, и функция распределения заряда $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a, b]$ дифференцируема в точках a и b. Тогда для любых регулярных граничных условий (2) справедлива формула*

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \mathcal{A}\mathcal{Q}'(a) + \mathcal{B}\mathcal{Q}'(b) - \frac{1}{8}\sum_j h_j^2. \tag{6}$$

где ряд $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ суммируется методом средних, и

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = -\frac{1}{4} \quad \text{при} \quad d_0 = d_1 = 0;$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{B} = \frac{1}{4} \quad \text{при} \quad d_0 = d_1 = 1;$$

$$\mathcal{A} = -\mathcal{B} = \frac{1}{4}\,\frac{a_1 b_0 - a_0 b_1}{a_1 b_0 + a_0 b_1} \quad \text{при} \quad d_0 = 0,\ d_1 = 1.$$

Таким образом, нелинейное слагаемое в (6) **не зависит** от граничных условий, в то время как коэффициенты линейной части полностью определяются граничными условиями.

Для операторов высокого порядка рассматриваемое возмущение является слишком слабым, и зависимость следа от $\mathfrak{q}$ остается линейной.

Утверждение 2.2. *Пусть $n \geq 3$, $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a, b]$ – заряд, удовлетворяющий условиям теоремы 2.1. Тогда для любых регулярных граничных условий (2) справедлива формула*

$$\mathcal{S}(\mathfrak{q}) = \frac{\mathcal{Q}'(a)}{2n} \cdot \boldsymbol{tr}\,(\mathbb{A}) + \frac{\mathcal{Q}'(b)}{2n} \cdot \boldsymbol{tr}\,(\mathbb{B}),$$

где ряд $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ суммируется методом средних, а матрицы $\mathbb{A}$ и $\mathbb{B}$ такие же, как в (4) (см. [3, Theorem 2]).

В полном объеме это утверждение будет доказано в другой статье. Здесь мы докажем теорему 2.1 и несколько вспомогательных утверждений.

Теорема 2.3. *Для любой последовательности $R = R_\ell \to \infty$, отделенной от $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$, справедливы следующие соотношения:*

1. *при $n \geqslant 3$*

$$\sum_{\lambda_N(\mathfrak{q}),\lambda_N<R} \Big[\lambda_N(\mathfrak{q}) - \lambda_N\Big] = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=R^n} \int\limits_{[a,b]} G_0(x, x, \lambda)\,\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda + o(1);$$

2. при $n = 2$

$$\sum_{\lambda_N(\mathfrak{q}),\lambda_N<R} \Big[\lambda_N(\mathfrak{q}) - \lambda_N\Big] = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=R^2} \int\limits_{[a,b]} G_0(x,x,\lambda)\,\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda + \frac{1}{4\pi i} \sum_j h_j^2 \int\limits_{|\lambda|=R^2} G_0(x_j,x_j,\lambda)^2\,d\lambda + o(1). \qquad (7)$$

Теорема 2.4. *Пусть $n = 2$, и $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[a,b]$ – заряд, удовлетворяющий условиям теоремы 2.1. Пусть последовательность $R = R_\ell \to \infty$, отделенная от $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{2}}$, обладает следующим свойством:*

1. *если граничные условия (2) сильно регулярны (см., напр., [9]), то при достаточно больших ℓ между R_ℓ и $R_{\ell+1}$ находится ровно одно число $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{2}}$;*
2. *если же условия (2) регулярны, но не сильно регулярны, то при достаточно больших ℓ между R_ℓ и $R_{\ell+1}$ находится ровно одна пара чисел $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{2}}$.*

Тогда

$$-\frac{1}{2\pi i} \cdot (\mathcal{C},1)\text{-}\lim \int\limits_{|\lambda|=R^n} \int\limits_{[a,b]} G_0(x,x,\lambda)\,\mathfrak{q}(dx)\,d\lambda = \mathcal{A}\mathcal{Q}'(a) + \mathcal{B}\mathcal{Q}'(b), \qquad (8)$$

где $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ такие же, как в Теореме 2.1.

Теорема 2.5. *Пусть $n = 2$. Тогда для любой последовательности $R = R_\ell \to \infty$, отделенной от $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{2}}$, при $x \neq a, b$ имеем*

$$\lim_{R\to\infty} \int\limits_{|\lambda|=R^2} G_0(x,x,\lambda)^2\,d\lambda = -\frac{\pi i}{2}.$$

3 Доказательство Теоремы 2.3

Нам понадобятся некоторые утверждения из [3]. Первое из них обобщает теорему Я. Д. Тамаркина [8] о равносходимости, второе дает оценки функций Грина.

Предложение 3.1. *([3, Theorem 1]) Для любой последовательности $R = R_\ell \to \infty$, отделенной от $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$, имеем*

$$\int\limits_{|\lambda|=R^n} |(G_0 - G)(x,y,\lambda)|\,|d\lambda| \to 0$$

равномерно по $x, y \in [a,b]$.

Предложение 3.2. *([3, Lemma 1 и (22)]) Положим*

$$\Gamma_1 = \Big\{w = e^{i\phi} : \phi \in \Big(0, \frac{\pi}{n}\Big)\Big\}; \qquad \Gamma_2 = \Big\{w = e^{i\phi} : \phi \in \Big(\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}\Big)\Big\}.$$

Тогда для любого $x \in [a,b]$

$$R^{n-1} \cdot |\tilde{G}_0(x,y,Rw)| \to 0 \tag{9}$$

для почти всех $y \in [a,b]$ и почти всех $w \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Более того, сходимость равномерная на $\mathcal{K} \times \mathcal{J}$ для любого компактного множества $\mathcal{K} \subset [a,b]^2$, отделенного от углов и диагонали $\{x=y\}$ и любого компактного множества $\mathcal{J} \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2$.

Далее, предположим, что в дифференциальном выражении (1) все коэффиценты $p_k \in \mathfrak{M}[a,b]$, $k = 0, \ldots, n-2$. Тогда для любой последовательности $R = R_\ell \to \infty$, отделенной от $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{n}}$, и для всех $j = 0, \ldots, n-1$ функции

$$R^{n-1-j} \cdot |(\tilde{G})_x^{(j)}(x,y,Rw)|$$

равномерно ограничены на $[a,b]^2 \times (\Gamma_1 \cup \Gamma_2)$.

Замечание 1. *В [3] вторая часть этого утверждения доказана для $p_k \in L_1(a,b)$. Однако доказательство без изменений проходит при $p_k \in \mathfrak{M}[a,b]$.*

Доказательство Теоремы 2.3. Мы начнем с соотношения (см. [3, (24), (25)]):

$$\begin{aligned}
&4\pi i \sum_{\lambda_N(\mathfrak{q}),\lambda_N<R} \Big[\lambda_N(\mathfrak{q}) - \lambda_N\Big] \\
&= - \int\limits_{|\lambda|=R^n} \lambda\, \mathbf{Sp}\left(\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\,\frac{1}{\mathbb{L}_\mathfrak{q}-\lambda}\right)\mathbb{Q}\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\,\frac{1}{\mathbb{L}_\mathfrak{q}-\lambda}\right)\right) d\lambda \\
&+ \int\limits_{|\lambda|=R^n} \lambda\, \mathbf{Sp}\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\,\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda} + \frac{1}{\mathbb{L}_\mathfrak{q}-\lambda}\,\mathbb{Q}\,\frac{1}{\mathbb{L}_\mathfrak{q}-\lambda}\right) d\lambda =: -I_1(R) + I_2(R).
\end{aligned}$$

Лемма 3.1. *В условиях Теоремы 2.3 $I_1(R) = o(1)$ при $R \to \infty$.*

Доказательство. Запишем $I_1(R)$ через функции Грина:

$$\begin{aligned}
I_1(R) = \int\limits_{|\lambda|=R^n} \int\limits_a^b \int\limits_{[a,b]} \lambda\, G(x,y,\lambda) \\
\times \int\limits_{[a,b]} \int\limits_{[a,b]} G_\mathfrak{q}(y,s,\lambda)\, G(s,t,\lambda)\, G_\mathfrak{q}(t,x,\lambda) \mathfrak{q}(dt)\mathfrak{q}(ds)\mathfrak{q}(dy)\, dx\, d\lambda.
\end{aligned}$$

При $n \geqslant 3$, воспользовавшись оценкой из Предложения 3.2, получим

$$|I_1(R)| \leqslant R^{2n} \|\mathfrak{q}\|^3 \frac{C}{R^{4(n-1)}} = o(1).$$

При $n = 2$ доказательство усложняется. Из той же оценки получаем при $x, y \in [a,b]$

$$\left|\lambda \int\limits_{[a,b]} \int\limits_{[a,b]} G_\mathfrak{q}(y,s,\lambda)\, G(s,t,\lambda)\, G_\mathfrak{q}(t,x,\lambda) \mathfrak{q}(dt)\mathfrak{q}(ds)\right| \leqslant \|\mathfrak{q}\|^2 \frac{C}{R},$$

откуда

$$
\begin{aligned}
|I_1(R)| \quad &\leqslant \quad \|\mathfrak{q}\|^2 \frac{C}{R} \int\limits_{|\lambda|=R^2} \int\limits_a^b \int\limits_{[a,b]} |G(x,y,\lambda)|\, |\mathfrak{q}|(dy)\, dx\, |d\lambda| \\
&\stackrel{*}{=} \quad \|\mathfrak{q}\|^2 \frac{C}{R} \int\limits_{|\lambda|=R^2} \int\limits_a^b \int\limits_{[a,b]} |G_0(x,y,\lambda)|\, |\mathfrak{q}|(dy)\, dx\, |d\lambda| + o(1) \\
&\leqslant \quad \|\mathfrak{q}\|^2\, C \int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} \int\limits_a^b \int\limits_{[a,b]} R\cdot |\tilde{G}_0(x,y,Rw)|\, |\mathfrak{c}|(dy)\, dx\, |dw| \\
&+ \quad \sum_j \|\mathfrak{q}\|^2\, C\, |h_j| \int\limits_{\Gamma_1\cup\Gamma_2} \int\limits_a^b R\cdot |\tilde{G}_0(x,x_j,Rw)|\, dx\, |dw| + o(1) \\
&=: \quad I_{11}(R) + I_{12}(R) + o(1)
\end{aligned}
$$

(равенство $*$ следует из Предложения 3.1).

В силу оценки из Предложения 3.2 подынтегральное выражение в $I_{12}(R)$ ограничено равномерно по j. Кроме того, в условиях Теоремы 2.3 заряд $\mathfrak{q}$ не имеет атомов на концах отрезка, т.е. все $x_j \in (a,b)$. Поэтому соотношение (9) и теорема Лебега дают $I_{12}(R) = o(1)$.

Оценим теперь $I_{11}(R)$. В силу непрерывности заряда $\mathfrak{c}$ для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для любого отрезка длины не более δ полная вариация $\mathfrak{c}$ на этом отрезке не превосходит ε. Выберем компактное множество $\mathcal{K} \subset [a,b]^2$, отделенное от углов и диагонали $\{x=y\}$, так, что при всех $x \in [a,b]$ множество $\mathcal{K}_x = \{y \in [a,b] : (x,y) \notin \mathcal{K}\}$ состоит не более чем из трех интервалов длины не более δ каждый. Также выберем компакт $\mathcal{J} \subset \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, так, что мера множества $(\Gamma_1\cup\Gamma_2)\setminus\mathcal{J}$ не превосходит ε.

Интеграл по множеству $\mathcal{K}\times\mathcal{J}$ стремится к нулю при $R\to\infty$ в силу Предложения 3.2. Интеграл по оставшемуся множеству оценивается через $C\varepsilon$.

Таким образом, $|I_1(R)| \leqslant C\varepsilon + o(1)$. Ввиду произвольности ε лемма доказана. $\square$

Продолжим доказательство теоремы. В интеграле $I_2(R)$ воспользуемся тождеством $\mathbf{Sp}(ABC) = \mathbf{Sp}(BCA)$ и проинтегрируем по частям:

$$
\begin{aligned}
I_2(R) \quad &= \quad \int\limits_{|\lambda|=R^n} \lambda\, \mathbf{Sp}\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\,\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda} + \frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda}\,\mathbb{Q}\,\frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda}\right) d\lambda \\
&= \quad \int\limits_{|\lambda|=R^n} \mathbf{Sp}\left(\left(\frac{\lambda}{(\mathbb{L}-\lambda)^2} + \frac{\lambda}{(\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda)^2}\right)\mathbb{Q}\right) d\lambda \\
&= \quad -\int\limits_{|\lambda|=R^n} \mathbf{Sp}\left(\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda} + \frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda}\right)\mathbb{Q}\right) d\lambda.
\end{aligned}
$$

Ко второму слагаемому применим тождество Гильберта. Это дает

$$I_2(R) = -2 \int\limits_{|\lambda|=R^n} \mathbf{Sp}\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\right) d\lambda + \int\limits_{|\lambda|=R^n} \mathbf{Sp}\left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\,\frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda}\,\mathbb{Q}\right) d\lambda. \qquad (10)$$

При $n \geqslant 3$ второе слагаемое в (10) ограничено величиной $CR^{2-n} = o(1)$ ввиду оценки из Предложения 3.2. Выражая первое слагаемое через функцию Грина, получим

$$I_2(R) = -2 \int\limits_{|\lambda|=R^n} \int\limits_{[a,b]} G(x,x,\lambda)\mathfrak{q}(dx)\, d\lambda + o(1) = -2 \int\limits_{|\lambda|=R^n} \int\limits_{[a,b]} G_0(x,x,\lambda)\mathfrak{q}(dx)\, d\lambda + o(1)$$

(последнее равенство следует из Предложения 3.1). Объединяя это равенство с Леммой 3.1, получим первое утверждение теоремы.

При $n = 2$ ко второму слагаемому в (10) еще раз применим тождество Гильберта. Это дает

$$I_2(R) = \int\limits_{|\lambda|=R^2} \mathbf{Sp}\left(\frac{-2}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q} + \left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\right)^2 - \left(\frac{1}{\mathbb{L}-\lambda}\,\mathbb{Q}\right)^2 \frac{1}{\mathbb{L}_{\mathfrak{q}}-\lambda}\,\mathbb{Q}\right) d\lambda.$$

Последнее слагаемое здесь допускает оценку $CR^{-\frac{1}{2}} = o(1)$ ввиду оценки из Предложения 3.2. Оставшиеся слагаемые мы выразим через функцию Грина и заменим G на G_0 аналогично случаю $n \geqslant 3$. Получим

$$\begin{aligned} I_2(R) &= -2 \int\limits_{|\lambda|=R^2} \int\limits_{[a,b]} G_0(x,x,\lambda)\mathfrak{q}(dx)\, d\lambda \\ &+ \int\limits_{|\lambda|=R^2} \int\limits_{[a,b]} \int\limits_{[a,b]} G_0(x,y,\lambda)\, G_0(y,x,\lambda)\mathfrak{q}(dy)\mathfrak{q}(dx)\, d\lambda + o(1). \end{aligned} \qquad (11)$$

Осталось преобразовать второе слагаемое в (11). Обозначим его $I_3(R)$ и перепишем в виде

$$\begin{aligned} I_3(R) &= \int\limits_{|\lambda|=R^2} \int\limits_{[a,b]} \int\limits_{[a,b]} G_0(x,y,\lambda)\, G_0(y,x,\lambda)\mathfrak{c}(dy)(\mathfrak{c}(dx) + 2\mathfrak{d}(dx))\, d\lambda \\ &+ \int\limits_{|\lambda|=R^2} \int\limits_{[a,b]} \int\limits_{[a,b]} G_0(x,y,\lambda)\, G_0(y,x,\lambda)\mathfrak{d}(dy)\mathfrak{d}(dx)\, d\lambda =: I_{31}(R) + I_{32}(R). \end{aligned}$$

Интеграл $I_{31}(R)$ оценивается аналогично $I_{11}(R)$, что дает $|I_{31}(R)| \leqslant C\varepsilon + o(1)$ для любого $\varepsilon > 0$.

Далее,

$$I_{32}(R) = \sum_{j,k} h_k h_j \int\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} 2R^2 \cdot \tilde{G}_0(x_j, x_k, Rw)\, \tilde{G}_0(x_k, x_j, Rw)\, dw.$$

Все слагаемые с $j \neq k$ стремятся к нулю при $R \to \infty$ ввиду (9). По теореме Лебега

$$I_{32}(R) = \sum_j h_j^2 \int\limits_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} 2R^2 \cdot \tilde{G}_0(x_j, x_j, Rw)^2 \, dw + o(1) = \sum_j h_j^2 \int\limits_{|\lambda|=R^2} G_0(x_j, x_j, \lambda)^2 \, d\lambda + o(1),$$

что вместе с формулой (11) и оценками интегралов I_1 и I_{31} дает (7). $\square$

4 Доказательство Теоремы 2.4

Сделав линейную замену переменной, можно считать, что $a = 0$, $b = 1$. Далее, поскольку для гладких функций $\mathfrak{q}$ формула (8) уже известна, достаточно доказать теорему в случае $\mathcal{Q}'(0) = \mathcal{Q}'(1) = 0$. Более того, можно дополнительно подчинить $\mathfrak{q}$ нескольким условиям ортогональности, что будет использовано ниже.

Нам понадобится следующее утверждение, являющееся частным случаем [6, Лемма 1].

Предложение 4.1. *Пусть $\mathfrak{q} \in \mathfrak{M}[0,1]$ – заряд, удовлетворяющий условиям теоремы 2.1, причем $\mathcal{Q}'(0) = \mathcal{Q}'(1) = 0$. Тогда*

$$(\mathcal{C}, 1)\text{-}\sum_{\ell=1}^{\infty} \int\limits_{[0,1]} \cos(2\pi \ell x) \, \mathfrak{q}(dx) = 0.$$

Доказательство Теоремы 2.4. Используя разложение функции Грина в окрестности полюса [2, гл. I, §3] и теорему о вычетах, перепишем интеграл из (8) так:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=R^n} \int\limits_{[0,1]} G_0(x, x, \lambda) \, \mathfrak{q}(dx) \, d\lambda = \sum_{|\lambda_N^0|<R^2} \int\limits_{[0,1]} y_N(x) \overline{z_N(x)} \, \mathfrak{q}(dx), \tag{12}$$

где y_N и z_N – собственные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$, отвечающие собственным числам λ_N^0 и $\overline{\lambda_N^0}$ соответственно и нормированные условием

$$\langle y_N, z_N \rangle := \int\limits_0^1 y_N(x) \overline{z_N(x)} \, dx = 1.$$

Если собственному числу $\lambda_N^0 = \lambda_{N+1}^0$ (а тогда и $\overline{\lambda_N^0} = \overline{\lambda_{N+1}^0}$) соответствует жорданова клетка размерности 2, то в правой части (12) слагаемое $y_N(x)\overline{z_N(x)}$ нужно заменить на

$$y_N(x)\overline{\widehat{z}_{N+1}(x)} + \widehat{y}_{N+1}(x)\overline{z_N(x)},$$

где $\widehat{y}_{N+1}$ и $\widehat{z}_{N+1}$ – присоединенные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ из этих жордановых клеток, а условие нормировки имеет вид

$$\langle y_N, z_N \rangle = \langle \widehat{y}_{N+1}, \widehat{z}_{N+1} \rangle = 0; \qquad \langle y_N, \widehat{z}_{N+1} \rangle = \langle \widehat{y}_{N+1}, z_N \rangle = 1. \tag{13}$$

Таким образом, нам нужно обосновать переход к пределу в смысле средних в правой части (12). Рассмотрим различные случаи.

Случай $d_0 = d_1 = 0$ (условия Дирихле)[3]

Этот случай технически наиболее прост. Система (2) приводится к виду

$$y(0) = 0, \qquad y(1) = 0.$$

Оператор $-D^2$ с этими граничными условиями самосопряжен, его собственные числа и собственные функции имеют вид

$$\lambda_N^0 = (\pi N)^2, \qquad y_N(x) = z_N(x) = C\sin(\pi N x), \qquad N \in \mathbb{N}.$$

С учетом условия нормировки имеем

$$y_N(x)\overline{z_N(x)} = 1 - \cos(2\pi N x).$$

Константа обнуляется при интегрировании ввиду условия $\int\limits_{[a,b]} \mathfrak{q}(dx) = 0$, а косинус – при переходе к пределу ввиду Предложения 4.1. Таким образом, формула (8) доказана.

Случай $d_0 = d_1 = 1$

В данном случае система (2) приводится к виду

$$\begin{cases} y'(0) + c_0 y(0) + f_0 y(1) = 0, \\ y'(1) + c_1 y(0) + f_1 y(1) = 0, \end{cases}$$

а граничные условия для сопряженного оператора – к виду

$$\begin{cases} z'(0) + \overline{c}_0 z(0) - \overline{c}_1 z(1) = 0, \\ z'(1) - \overline{f}_0 z(0) + \overline{f}_1 z(1) = 0. \end{cases}$$

Используя алгоритм из [2, гл. II, §4], выпишем асимптотики собственных чисел и собственных функций с точностью до $O(N^{-2})$ (см. Приложение, п.1) и учтем условие нормировки. Получим

$$\begin{aligned} y_{N+1}(x)\overline{z_{N+1}(x)} &= 1 + \cos(2\pi N x) - 2\,\frac{\sin(2\pi N x)}{\pi N}\,(c_0(1-x) + f_1 x) \\ &+ (-1)^N\,\frac{\sin(2\pi N x)}{\pi N}\,(c_1 - f_0)(1-2x) + O(N^{-2}). \end{aligned} \tag{14}$$

Как и в задаче Дирихле, первые два члена в этом разложении обнуляются при интегрировании и переходе к пределу в (12). Остальные члены в (14) порождают ряд, сходящийся в каждой точке отрезка $[0,1]$, причем частные суммы этого ряда равномерно ограничены. Обозначим сумму этого ряда $g(x)$. По теореме Лебега имеем

$$(\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{N=1}^{\infty} \int\limits_{[0,1]} y_N(x)\overline{z_N(x)}\,\mathfrak{q}(dx) = \int\limits_{[0,1]} g(x)\,\mathfrak{q}(dx).$$

[3] Как указывалось во введении, этот случай рассмотрен в работе [6].

Но мы уже знаем, что для гладких функций $\mathfrak{q}$ левая часть этого равенства обращается в нуль. Поэтому $g(x) = 0$ для п.в. $x \in [0, 1]$.

Осталось заметить, что, согласно известным формулам [4, 5.4.2.9 и 5.4.2.10], третий член в (14) дает при суммировании функцию, имеющую разрывы разве что на концах отрезка, четвертый член – непрерывную функцию (за счет множителя $1 - 2x$, уничтожающего разрыв в точке $\frac{1}{2}$), и остаток – непрерывную функцию. Поэтому g может отличаться от нуля разве что в точках 0 и 1. Однако в силу условия на $\mathfrak{q}$ эти точки не дают вклада в интеграл, и формула (8) доказана.

Случай $d_0 = 0$, $d_1 = 1$

Общий вид граничных условий в этом случае следующий:

$$\begin{cases} a_0 y(0) + b_0 y(1) = 0, \\ a_1 y'(0) + b_1 y'(1) + c_1 y(0) + f_1 y(1) = 0. \end{cases}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $a_1 \neq 0$. Тогда граничные условия для сопряженного оператора имеют вид

$$\begin{cases} \bar{b}_0 y'(0) + \bar{a}_0 y'(1) + \dfrac{1}{\bar{a}_1}\,(\overline{c_1 b_0} - \overline{f_1 a_0}) y(0) = 0, \\ \bar{b}_1 y(0) + \bar{a}_1 y(1) = 0. \end{cases}$$

Для упрощения записи введем следующие обозначения:

$$\mathfrak{A} = b_1 a_0 + a_1 b_0; \qquad \mathfrak{B} = f_1 a_0 - c_1 b_0; \qquad \mathfrak{C} = a_1 a_0 + b_1 b_0$$

(напомним, что $\mathfrak{A} \neq 0$ ввиду регулярности граничных условий).

Случай $\mathfrak{C} = \pm\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B} = 0$: двукратные собственные числа

В этом случае систему граничных условий оператора $\mathbb{L}_0$ можно упростить:

$$a_0 y(0) + b_0 y(1) = 0, \qquad a_1 y'(0) + b_1 y'(1) = 0.$$

Будем считать, что[4] $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$. Тогда имеется три варианта:

1. $a_1 + b_1 = 0$, $a_0 + b_0 = 0$;

2. $a_1 + b_1 = 0$, $a_0 + b_0 \neq 0$;

3. $a_1 + b_1 \neq 0$, $a_0 + b_0 = 0$.

Легко видеть, что третий вариант получается из второго заменой $\mathbb{L}_0$ на $\mathbb{L}_0^*$.

[4] В случае $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$ формулы вполне аналогичны, если выписать асимптотики по степеням $N - \frac{1}{2}$.

Вариант $a_1+b_1=0$, $a_0+b_0=0$: жордановых клеток нет. Этот вариант наиболее прост. Граничные условия сводятся к периодическим:

$$y'(0)-y'(1)=0, \qquad y(0)-y(1)=0.$$

Оператор $\mathbb{L}_0$ с этими граничными условиями самосопряжен, его собственные числа и собственные функции имеют вид

$$\begin{aligned} \lambda_1^0=0, &\quad y_1(x)=z_1(x)\equiv 1;\\ \lambda_{2N}^0=\lambda_{2N+1}^0=(2\pi N)^2, &\quad y_{2N}(x)=z_{2N}(x)=C\sin(2\pi Nx),\\ &\quad y_{2N+1}(x)=z_{2N+1}(x)=C\cos(2\pi Nx), \qquad N\in\mathbb{N}. \end{aligned}$$

С учетом условия нормировки имеем

$$y_{2N}(x)\overline{z_{2N}(x)}=1-\cos(4\pi Nx); \qquad y_{2N+1}(x)\overline{z_{2N+1}(x)}=1+\cos(4\pi Nx).$$

Попарное суммирование дает константу, исчезающую при интегрировании. Формула (8) очевидна.

Вариант $a_1+b_1=0$, $a_0+b_0\neq 0$: жордановы клетки. Граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbb{L}_0: &\quad a_0y(0)+b_0y(1)=0, \quad y'(0)-y'(1)=0;\\ \mathbb{L}_0^*: &\quad \overline{b}_0z'(0)+\overline{a}_0z'(1)=0, \quad z(0)-z(1)=0. \end{aligned}$$

Выпишем собственные и присоединенные функции (см. Приложение, п.2) и учтем условие (13). Получим

$$y_{2N}(x)\overline{\widehat{z}_{2N+1}(x)}+\widehat{y}_{2N+1}(x)\overline{z_{2N}(x)}=2+2\cos(4\pi Nx)\,\frac{(a_0+b_0)(2x-1)}{a_0-b_0}. \tag{15}$$

Вычитая при необходимости подходящую гладкую функцию, подчиним $\mathfrak{q}$ дополнительным условиям

$$\int\limits_{[0,\frac12]}(2x-1)\,\mathfrak{q}(dx)=\int\limits_{[\frac12,1]}(2x-1)\,\mathfrak{q}(dx)=0. \tag{16}$$

Тогда заряд $\widetilde{\mathfrak{q}}(dx)=(2x-1)\,\mathfrak{q}(dx)$ удовлетворяет условиям Предложения 4.1 на отрезках $[0,\frac12]$ и $[\frac12,1]$, и потому правая часть (15) обнуляется при интегрировании и переходе к пределу в (12). Поскольку (16) влечет $\int\limits_{[0,1]} y_1(x)\overline{z_1(x)}\,\mathfrak{q}(dx)=0$, формула (8) доказана.

Случай $\mathfrak{C}=\pm\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}\neq 0$: асимптотически близкие собственные числа

Как и в предыдущем случае, будем считать, что $\mathfrak{C}=-\mathfrak{A}$ (случай $\mathfrak{C}=\mathfrak{A}$ разбирается аналогично). Перепишем условия на $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ в следующем виде:

$$(a_1+b_1)(a_0+b_0)=0; \qquad f_1a_0-c_1b_0\neq 0.$$

Мы вновь имеем три варианта:

- $a_0 + b_0 = 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$, при этом $c_1 + f_1 \neq 0$;
- $a_0 + b_0 \neq 0$, $a_1 + b_1 = 0$;
- $a_0 + b_0 = 0$, $a_1 + b_1 = 0$, при этом $c_1 + f_1 \neq 0$.

Легко видеть, что второй вариант получается из первого заменой $\mathbb{L}_0$ на $\mathbb{L}_0^*$.

Первый вариант Выпишем асимптотики собственных чисел и собственных функций с точностью до $O(N^{-4})$ (см. Приложение, п.3.1) и учтем условие нормировки. Складывая члены, соответствующие асимптотически близким собственным числам, попарно, получим

$$\begin{aligned} y_{2N}(x)\overline{z_{2N}(x)} &+ y_{2N+1}(x)\overline{z_{2N+1}(x)} = \eta_N^+(x)\overline{\zeta_N^+(x)} + \eta_N^-(x)\overline{\zeta_N^-(x)} \\ = 2 &+ 2\cos(4\pi Nx)\,\frac{(a_1+b_1)(1-2x)}{a_1-b_1} \\ &+ 2\sin(4\pi Nx)\,\frac{(c_1+f_1)(1-2x)(b_1x-a_1(1-x))}{(a_1-b_1)^2\pi N} + O(N^{-2}). \end{aligned}$$

Первые два члена здесь суммируются, как в формуле (15), а последние – как в (14). Формула (8) доказана.

Третий вариант В этом варианте систему граничных условий оператора $\mathbb{L}_0$ можно упростить:

$$y(0) - y(1) = 0, \qquad y'(0) - y'(1) + c_1 y(0) = 0.$$

Выпишем асимптотики собственных чисел и собственных функций с точностью до $O(N^{-6})$ (см. Приложение, п.3.2) и учтем условие нормировки. Складывая члены, соответствующие асимптотически близким собственным числам, попарно, получим

$$\begin{aligned} y_{2N}(x)\overline{z_{2N}(x)} + y_{2N+1}(x)\overline{z_{2N+1}(x)} &= \eta_N^+(x)\overline{\zeta_N^+(x)} + \eta_N^-(x)\overline{\zeta_N^-(x)} \\ &= 2 + \sin(4\pi Nx)\,\frac{c_1(2x-1)}{2\pi N} + O(N^{-2}). \end{aligned}$$

Этот ряд суммируются, как в формуле (14). Формула (8) доказана.

Сильно регулярный случай $\mathfrak{C} \neq \pm\mathfrak{A}$

Для упрощения рассуждений мы воспользуемся следующей очевидной леммой.

Лемма 4.1. *Пусть* $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_k}{k} = 0$. *Тогда*

$$\begin{aligned} (\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{k=1}^{\infty} a_k &= (\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k-1}+a_{2k}) - \frac{1}{2}\cdot(\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{k\to\infty} a_{2k} \\ &= (\mathcal{C},1)\text{-}\sum_{k=1}^{\infty}(a_{2k}+a_{2k+1}) + a_1 - \frac{1}{2}\cdot(\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{k\to\infty} a_{2k+1}, \end{aligned} \tag{17}$$

т.е. сумма в левой части (17) сходится, если сходится одно из выражений в правой части.

Выпишем асимптотики собственных чисел и собственных функций с точностью до $O(N^{-2})$ (см. Приложение, п.4). Очевидно, что $\lim\limits_{N\to\infty}\frac{1}{N}\,y_N(x)\overline{z_N(x)}=0$, поэтому можно применить вторую часть формулы (17). Рассмотрим сначала попарные суммы

$$\begin{aligned} y_{2N}(x)\overline{z_{2N}(x)} &+ y_{2N+1}(x)\overline{z_{2N+1}(x)}=\eta_N^+(x)\overline{\zeta_N^+(x)}+\eta_N^-(x)\overline{\zeta_N^-(x)} \\ =2 &+ 2\cos(4\pi Nx)V_0(x,\alpha)+\frac{2}{N}\sin(4\pi Nx)W_1(x,\alpha)+O(N^{-2}). \end{aligned}$$

Первые два члена здесь суммируются, как в формуле (15), а последние – как в (14), с учетом соотношений (18).

Теперь рассмотрим последний предел в формуле (17). В зависимости от α он может быть переписан одним из двух способов:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{C},1)\text{-}\lim_{N\to\infty}y_{2N+1}(x)\overline{z_{2N+1}(x)} \\ &\quad=1+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{N=1}^{k}\cos(4\pi Nx)V_0(x,\pm\alpha)+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{N=1}^{k}\sin(4\pi Nx)V_1(x,\pm\alpha) \\ &\qquad+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{N=1}^{k}\frac{1}{N}\cos(4\pi Nx)W_0(x,\pm\alpha)+\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{N=1}^{k}\frac{1}{N}\sin(4\pi Nx)W_1(x,\pm\alpha). \end{aligned}$$

Как и ранее, константа обнуляется при интегрировании. Второй и третий член равномерно ограничены и сходятся поточечно всюду, причем предел равен нулю всюду, кроме точек 0 и 1 (здесь мы вновь учли соотношения (18)). Оставшиеся члены сходятся к нулю равномерно. По теореме Лебега можно перейти к пределу под знаком интеграла. В силу условия на $\mathfrak{q}$ концы промежутка не дают вклада в интеграл, и формула (8) доказана. $\square$

5 Доказательство основного результата

Доказательство Теоремы 2.5. Мы начнем с формулы (12) из работы [3], которая при $n=2$ и $x=y$ дает (напомним, что $z=\lambda^{\frac{1}{2}}$)

$$G_0(x,x,\lambda)=\tilde{G}_0(x,x,z)=\frac{\Delta_{1,1}(z)+e^{-2izx}\Delta_{1,2}(z)-e^{2izx}\Delta_{2,1}(z)-\Delta_{2,2}(z)}{2iz\Delta(z)}.$$

Здесь $\Delta(z)$ и $\Delta_{\alpha,\beta}(z)$ – определители матриц порядка n, определенных в [3, Sec. 2.1]. В нашем случае они имеют следующую асимптотику при $z\to\infty$:

$$\begin{aligned} &\Delta(z)=\hat{\Delta}(z)e^{iz(a-b)}(iz)^{d_0+d_1}\cdot(1+O(z^{-1})), \\ &\qquad\qquad\hat{\Delta}(z)=\begin{vmatrix} a_0+b_0e^{iz(b-a)} & (-1)^{d_0}(a_0e^{iz(b-a)}+b_0) \\ a_1+b_1e^{iz(b-a)} & (-1)^{d_1}(a_1e^{iz(b-a)}+b_1)\end{vmatrix}; \end{aligned}$$

$$\Delta_{1,1}(z)=\hat{\Delta}_{1,1}(z)(iz)^{d_0+d_1}\cdot(1+O(z^{-1})),\qquad \hat{\Delta}_{1,1}(z)=\begin{vmatrix} b_0 & (-1)^{d_0}(a_0e^{iz(b-a)}+b_0) \\ b_1 & (-1)^{d_1}(a_1e^{iz(b-a)}+b_1)\end{vmatrix};$$

$$\Delta_{1,2}(z)=\hat\Delta_{1,2}e^{iz(a+b)}(iz)^{d_0+d_1}\cdot(1+O(z^{-1})),\qquad \hat\Delta_{1,2}=\begin{vmatrix}a_0 & b_0\\ a_1 & b_1\end{vmatrix};$$

$$\Delta_{2,1}(z)=\hat\Delta_{2,1}e^{-iz(a+b)}(iz)^{d_0+d_1}\cdot(1+O(z^{-1})),\qquad \hat\Delta_{2,1}=(-1)^{d_0+d_1+1}\cdot\hat\Delta_{1,2};$$

$$\Delta_{2,2}(z)=\hat\Delta_{2,2}(z)e^{iz(a-b)}(iz)^{d_0+d_1}\cdot(1+O(z^{-1})),$$
$$\hat\Delta_{2,2}(z)=\begin{vmatrix}a_0+b_0e^{iz(b-a)} & (-1)^{d_0}b_0\\ a_0+b_0e^{iz(b-a)} & (-1)^{d_1}b_1\end{vmatrix}.$$

По условию, $|z|=R$ отделено от $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{2}}$, и вследствие регулярности граничных условий (2) определитель $\hat\Delta(z)$ отделен от нуля. Таким образом,

$$\tilde G_0(x,x,z)=\frac{\hat\Delta_{1,1}(z)e^{2iz(b-a)}+\hat\Delta_{1,2}e^{2iz(b-x)}-\hat\Delta_{2,1}e^{2iz(x-a)}-\hat\Delta_{2,2}(z)}{2iz\hat\Delta(z)}\cdot(1+O(z^{-1})).$$

Поскольку $z=Rw\in R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)$ лежит в верхней полуплоскости, все экспоненты в этом выражении равномерно ограничены и стремятся к нулю при $R\to\infty$ для каждого $x\in(a,b)$ и $w\in\Gamma_1\cup\Gamma_2$. По теореме Лебега получаем

$$\lim_{R\to\infty}\int\limits_{|\lambda|=R^2}G_0(x,x,\lambda)^2\,d\lambda=\lim_{R\to\infty}\int\limits_{z=R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}\tilde G_0(x,x,z)^2\,2z\,dz$$
$$=-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{z=R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}\Big(\frac{\hat\Delta_{2,2}(z)}{\hat\Delta(z)}\Big)^2\frac{dz}{2z}=-\lim_{R\to\infty}\int\limits_{z=R(\Gamma_1\cup\Gamma_2)}\frac{dz}{2z}=-\frac{\pi i}{2}.$$

□

Доказательство Теоремы 2.1. Рассмотрим формулу (7) и перейдем к пределу при $R\to\infty$ указанным в условии Теоремы 2.4 способом.

Теорема 2.4 показывает, что первое слагаемое в (7) сходится к сумме первых двух слагаемых в (6). Далее, подынтегральное выражение во втором слагаемом из (7) имеет суммируемую мажоранту ввиду оценки из Предложения 3.2. Теорема 2.5 и теорема Лебега дают последнее слагаемое в (6).

Как известно (см., напр., [9], а также доказательство Теоремы 2.4), если граничные условия (2) сильно регулярны, то числа $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{2}}$ асимптотически разделены. Таким образом, предельный переход в Теореме 2.4 соответствует суммированию ряда $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ методом средних, и утверждение теоремы в этом случае доказано.

Если условия (2) регулярны, но не сильно регулярны, то числа $|\lambda_N^0|^{\frac{1}{2}}$ асимптотически либо попарно сближаются, либо попарно совпадают. Таким образом, предельный переход в Теореме 2.4 соответствует суммированию ряда $\mathcal{S}(\mathfrak{q})$ в таком порядке: сначала члены ряда, отвечающие асимптотически близким или совпадающим собственным числам, складываются попарно, а затем полученный ряд суммируется методом средних.

Осталось заметить, что $\lambda_N(\mathfrak{q})-\lambda_N\to 0$ при $N\to\infty$. Поэтому Лемма 4.1 дает утверждение теоремы и в этом случае. □

Приложение

1. Случай $d_0 = d_1 = 1$

Корни из собственных чисел оператора $\mathbb{L}_0$ имеют следующую асимптотику:

$$\rho_{N+1} := (\lambda^0_{N+1})^{\frac{1}{2}} = \pi N + \frac{f_1 - c_0}{\pi N} + (-1)^N \frac{c_1 - f_0}{\pi N} + O(N^{-2}).$$

Собственные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ при $\rho_N \neq 0$ имеют вид

$$\begin{aligned} y_N(x) &= C_1 \Big(\cos(\rho_N x) - c_0 \frac{\sin(\rho_N x)}{\rho_N} + f_0 \frac{\sin(\rho_N(1-x))}{\rho_N} \Big); \\ \overline{z_N(x)} &= C_2 \Big(\cos(\rho_N x) - c_0 \frac{\sin(\rho_N x)}{\rho_N} - c_1 \frac{\sin(\rho_N(1-x))}{\rho_N} \Big). \end{aligned}$$

Асимптотика собственных функций имеет вид

$$\begin{aligned} y_{N+1}(x) &= C_1 \Big(\cos(\pi N x) - \sin(\pi N x) \frac{c_0(1-x) + f_1 x}{\pi N} \\ &\quad -(-1)^N \sin(\pi N x) \frac{f_0(1-x) + c_1 x}{\pi N} \Big) + O(N^{-2}); \\ \overline{z_{N+1}(x)} &= C_2 \Big(\cos(\pi N x) - \sin(\pi N x) \frac{c_0(1-x) + f_1 x}{\pi N} \\ &\quad +(-1)^N \sin(\pi N x) \frac{c_1(1-x) + f_0 x}{\pi N} \Big) + O(N^{-2}). \end{aligned}$$

Асимптотика скалярных произведений:

$$\langle y_{N+1}, z_{N+1} \rangle = \frac{C_1 C_2}{2} + O(N^{-2}).$$

2. Случай $d_0 = 0$, $d_1 = 1$. Жордановы клетки

Напомним, что мы рассматриваем случай $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$. В этом случае у операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ имеется собственное число $\lambda_1^0 = 0$, которому соответствуют собственные функции $y_1(x) = x - \frac{a_0}{a_0+b_0}$ и $z_1(x) \equiv const$, где константа подбирается из условия нормировки. Остальные собственные числа имеют вид $\lambda^0_{2N} = \lambda^0_{2N+1} = (2\pi N)^2$, $N \in \mathbb{N}$.

Соответствующие собственные и присоединенные функции, удовлетворяющие первой паре условий (13):

$$\begin{aligned} y_{2N}(x) &= C_1 \sin(2\pi N x), \\ \widehat{y}_{2N+1}(x) &= C_1 \Big(\frac{x\cos(2\pi N x)}{4\pi N} + \frac{\sin(2\pi N x)}{16\pi^2 N^2} - \frac{b_0 \cos(2\pi N x)}{4\pi N(a_0+b_0)} \Big); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{z_{2N}(x)} &= C_2 \cos(2\pi N x), \\ \overline{\widehat{z}_{2N+1}(x)} &= C_2 \Big(-\frac{x\sin(2\pi N x)}{4\pi N} - \frac{\cos(2\pi N x)}{16\pi^2 N^2} + \frac{a_0 \sin(2\pi N x)}{4\pi N(a_0+b_0)} \Big). \end{aligned}$$

Скалярные произведения:

$$\langle y_{2N}, \widehat{z}_{2N+1}\rangle = \langle \widehat{y}_{2N+1}, z_{2N}\rangle = \frac{C_1C_2(a_0-b_0)}{16\pi N(a_0+b_0)}$$

(заметим, что $a_0 \neq b_0$, так как $\mathfrak{A} \neq 0$).

3. Случай $d_0 = 0$, $d_1 = 1$. Асимптотически близкие собственные числа

Напомним, что мы вновь рассматриваем случай $\mathfrak{C} = -\mathfrak{A}$. В этом случае все собственные числа оператора $\mathbb{L}_0$, кроме λ_1^0, объединяются в пары λ_{2N} и λ_{2N+1}, $N \in \mathbb{N}$, сближающиеся при $N \to \infty$. Корни из собственных чисел этих пар обозначим $\rho_N^{\pm}$. При этом один из них (не умаляя общности, ρ_N^+) равен $2\pi N$. В связи с тем, что скалярные произведения соответствующих собственных функций (будем обозначать их $\eta_N^{\pm}$ и $\zeta_N^{\pm}$) стремятся к нулю при $N \to \infty$, асимптотики собственных чисел ρ_N^- и собственных функций η_N^-, ζ_N^- выпишем с точностью до $O(N^{-4})$ в варианте 3.1 и с точностью до $O(N^{-6})$ в варианте 3.2.

3.1. Вариант $a_0 + b_0 = 0$, $a_1 + b_1 \neq 0$

В этом варианте получаем

$$\rho_N^- = 2\pi N + \frac{\mathfrak{B}}{\pi N\mathfrak{A}} - \frac{6\mathfrak{A}\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{B}^3}{12\mathfrak{A}^3N^3\pi^3} + O(N^{-4}).$$

Собственные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ имеют вид

$$\begin{aligned}
\eta_N^+(x) &= C_1\Big((a_1+b_1)\cos(2\pi Nx) - (c_1+f_1)\,\frac{\sin(2\pi Nx)}{2\pi N}\Big),\\
\overline{\zeta_N^+(x)} &= C_2\sin(2\pi Nx);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\eta_N^-(x) &= C_1\Big(a_1\cos(\rho_N^-x) + b_1\cos(\rho_N^-(1-x)) - c_1\,\frac{\sin(\rho_N^-x)}{\rho_N^-} + f_1\,\frac{\sin(\rho_N^-(1-x))}{\rho_N^-}\Big),\\
\overline{\zeta_N^-(x)} &= C_2\Big(b_1\sin(\rho_N^-x) - a_1\sin(\rho_N^-(1-x))\Big).
\end{aligned}$$

Асимптотика скалярных произведений:

$$\begin{aligned}
\langle \eta_N^+, \zeta_N^+\rangle &= -\frac{C_1C_2(c_1+f_1)}{4\pi N};\\
\langle \eta_N^-, \zeta_N^-\rangle &= C_1C_2\Big(\frac{(c_1+f_1)(a_1+b_1)}{4\pi N} - \frac{(c_1+f_1)^2(a_1f_1+c_1b_1)}{8(a_1-b_1)^2\pi^3N^3}\Big) + O(N^{-4})
\end{aligned}$$

(заметим, что $a_0 \neq b_0$, так как $\mathfrak{A} \neq 0$).

3.2. Вариант $a_0 + b_0 = 0$, $a_1 + b_1 = 0$

В этом варианте получаем

$$\rho_N^- = 2\pi N - \frac{c_1}{2\pi N} + \frac{c_1^3 - 12c_1^2}{96\pi^3 N^3} + \frac{c_1^4 - 6c_1^3}{96\pi^5 N^5} + O(N^{-6}).$$

Собственные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ имеют вид

$$\eta_N^+(x) = C_1 \sin(2\pi N x), \qquad \overline{\zeta_N^+(x)} = C_2 \sin(2\pi N x);$$

$$\begin{aligned} \eta_N^-(x) &= C_1\Big(\sin(\rho^- x) + \sin(\rho^-(1-x))\Big), \\ \overline{\zeta_N^-(x)} &= C_2\Big(\sin(\rho^- x) + \sin(\rho^(1-x))\Big). \end{aligned}$$

Асимптотика скалярных произведений:

$$\begin{aligned} \langle \eta_N^+, \zeta_N^+ \rangle &= \frac{C_1 C_2}{2}; \\ \langle \eta_N^-, \zeta_N^- \rangle &= C_1 C_2 \Big(\frac{c_1^2}{8\pi^2 N^2} - \frac{c_1^4 - 4c_1^3}{128\pi^4 N^4}\Big) + O(N^{-6}). \end{aligned}$$

4. Случай $d_0 = 0$, $d_1 = 1$. Разделенные собственные числа

В этом случае корни из собственных чисел λ_{2N}, λ_{2N+1}, $N \in \mathbb{N}$, оператора $\mathbb{L}_0$ образуют две последовательности, сходящиеся к двум различным арифметическим прогрессиям с разностью 2π. Обозначим эти корни $\rho_N^\pm$. Тогда при $N \to \infty$ имеем

$$\rho_N^\pm = 2\pi N \pm \alpha + \frac{\mathfrak{B}}{2\pi N \mathfrak{A}} + O(N^{-2}),$$

где

$$\alpha = i \log\left(-\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}} - \sqrt{\left(\frac{\mathfrak{C}}{\mathfrak{A}}\right)^2 - 1}\right),$$

а ветвь логарифма выбирается так, что $|\Re(\alpha)| < \pi$ (выбор другой ветви логарифма приводит к перенумерации собственных чисел). Отметим, что из условия $\mathfrak{C} \neq \pm\mathfrak{A}$ вытекает $\sin(\alpha) \neq 0$.

Собственные функции операторов $\mathbb{L}_0$ и $\mathbb{L}_0^*$ имеют вид

$$\begin{aligned} \eta_N^\pm(x) &= a_0 \sin(\rho_N^\pm x) - b_0 \sin(\rho_N^\pm(1-x)), \\ \overline{\zeta_N^\pm(x)} &= b_0 \cos(\rho_N^\pm x) + a_0 \cos(\rho_N^\pm(1-x)) + \mathfrak{B}\,\frac{\sin(\rho_N^\pm x)}{a_1 \rho_N^\pm}. \end{aligned}$$

Асимптотика скалярных произведений:

$$\langle \eta_N^\pm, \zeta_N^\pm \rangle = \pm \sin(\alpha)\frac{a_0^2 - b_0^2}{2} + \mathfrak{B}\,\frac{\mathfrak{A} a_0 + (\mathfrak{A} b_0 + a_1(a_0^2 - b_0^2))\cos(\alpha)}{4\pi \mathfrak{A} a_1 N} + O(N^{-2})$$

(заметим, что $a_0 \neq \pm b_0$, так как $\mathfrak{C} \neq \pm\mathfrak{A}$).

Нормированные произведения имеют следующую асимптотику:

$$\begin{aligned}\eta_N^{\pm}(x)\overline{\zeta_N^{\pm}(x)} = 1 \quad &+ \quad \cos(4\pi Nx)V_0(x,\pm\alpha) + \sin(4\pi Nx)V_1(x,\pm\alpha) \\ &+ \quad \frac{1}{N}\cos(4\pi Nx)W_0(x,\pm\alpha) + \frac{1}{N}\sin(4\pi Nx)W_1(x,\pm\alpha) + O(N^{-2}),\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} V_0(x,\alpha) &= \frac{\sin(\alpha(2x-1))}{(a_0^2-b_0^2)\sin(\alpha)}\,(a_0^2+b_0^2+2a_0b_0\cos(\alpha)); \\ V_1(x,\alpha) &= \frac{\cos(\alpha(2x-1))}{(a_0^2-b_0^2)\sin(\alpha)}\,(a_0^2+b_0^2+2a_0b_0\cos(\alpha)); \\ W_0(x,\alpha) &= \frac{\mathfrak{B}(2\mathcal{R}_1\sin(\alpha)\cos(2\alpha x)-\mathcal{R}_2\sin(2\alpha x))}{4\mathfrak{A}a_1(a_0^2-b_0^2)^2\pi\sin^2(\alpha)}; \\ W_1(x,\alpha) &= -\frac{\mathfrak{B}(2\mathcal{R}_1\sin(\alpha)\sin(2\alpha x)+\mathcal{R}_2\cos(2\alpha x))}{4\mathfrak{A}a_1(a_0^2-b_0^2)^2\pi\sin^2(\alpha)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 \quad &= \quad a_0b_0(3\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2-b_0^2)(1+2x)) + 2(a_0^2+b_0^2)(\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2-b_0^2)x)\cos(\alpha) \\ &+ \quad a_0b_0(\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2-b_0^2)(2x-1))\cos(2\alpha);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2 = 4\mathfrak{A}a_0^2b_0 &+ 2a_1(a_0^4-b_0^4)(1-x) \\ &+ a_0(\mathfrak{A}(2a_0^2+5b_0^2) + a_1b_0(a_0^2-b_0^2)(5-2x))\cos(\alpha) \\ &+ 2(a_0^2+b_0^2)(\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2-b_0^2)x)\cos(2\alpha) \\ &+ a_0b_0(\mathfrak{A}b_0 + a_1(a_0^2-b_0^2)(2x-1))\cos(3\alpha).\end{aligned}$$

Лемма 5.1. *Функции $V_0(x,\alpha)$, $V_1(x,\alpha)$, $W_0(x,\alpha)$ и $W_1(x,\alpha)$ непрерывны по обеим переменным при $\sin(\alpha) \neq 0$ и удовлетворяют следующим тождествам:*

$$\begin{aligned} V_0(x,\alpha) \equiv V_0(x,-\alpha), &\qquad V_1(x,\alpha) \equiv -V_1(x,-\alpha); \\ W_1(x,\alpha) \equiv W_1(x,-\alpha), &\qquad W_0(x,\alpha) \equiv -W_0(x,-\alpha); \\ V_0(\tfrac{1}{2},\alpha) \equiv 0, &\qquad W_1(\tfrac{1}{2},\alpha) \equiv 0. \end{aligned} \tag{18}$$

Доказательство. Поскольку $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ – четные функции α, все утверждения леммы очевидны, кроме последнего. Но, учитывая соотношение $\mathfrak{A}\cos(\alpha) + \mathfrak{C} = 0$, числитель в выражении для W_1 можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} 2\mathcal{R}_1\sin(\alpha)\sin(2\alpha x) \quad &+ \quad \mathcal{R}_2\cos(2\alpha x) = 2\sin(\alpha(x-\tfrac{1}{2})) \\ &\times \quad \Big(\big(a_0a_1b_0(a_0^2-b_0^2)(2x-1) + a_0b_0^2\mathfrak{A}\big)\sin(\alpha(\tfrac{5}{2}-x)) \\ &+ \quad \big(2a_1(a_0^4-b_0^4)x + 2b_0(a_0^2+b_0^2)\mathfrak{A}\big)\sin(\alpha(\tfrac{3}{2}-x)) \\ &- \quad \big(5a_0^3a_1b_0 + a_0a_1b_0^3 + a_0^4b_1 + 5a_0^2b_0^2b_1\big)\sin(\alpha(x-\tfrac{1}{2})) \\ &- \quad \big(2a_1(a_0^4-b_0^4)(1-x) + 4a_0^2b_0\mathfrak{A}\big)\sin(\alpha(\tfrac{1}{2}+x)) \\ &+ \quad \big(a_0a_1b_0(a_0^2-b_0^2)(2x-1) - a_0^3\mathfrak{A}\big)\sin(\alpha(\tfrac{3}{2}+x))\Big), \end{aligned}$$

и последнее равенство в (18) доказано. □

Благодарности

Основные результаты статьи, Теоремы 2.4 и 2.5, получены при поддержке Российского научного фонда, грант 14-21-00035. Теорема 2.3 получена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00258a.

Список литературы

[1] И. М. Гельфанд, Б. М. Левитан, *Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка*, ДАН СССР, **88** (1953), N4, 593–596.

[2] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, 2-е изд., М., Наука, 1969.

[3] A. I. Nazarov, D. M. Stolyarov, P. B. Zatitskiy, *Tamarkin equiconvergence theorem and trace formula revisited*, J. Spectral Theory, **4** (2014), N2, 365–389.

[4] А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев, *Интегралы и ряды. Элементарные функции*, М., Наука, 1981.

[5] А. М. Савчук, *Регуляризованный след первого порядка оператора Штурма–Лиувилля с δ-потенциалом*, УМН, **55** (2000), N6, 155–156.

[6] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, *Формула следа для операторов Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами*, Мат. заметки, **69** (2001), N3, 427–442.

[7] В. А. Садовничий, В. Е. Подольский, *Следы операторов*, УМН, **61** (2006), N5, 89–156.

[8] Я.Д. Тамаркин, *О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды*, Петроград, 1917.

[9] А. А. Шкаликов, *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях*, Труды сем. им. И.Г. Петровского, **9** (1983), 140–179.

[10] Р. Ф. Шевченко, *О следе дифференциального оператора*, ДАН СССР, **164** (1965), 62–65.