ПУСЕВ Р. С., ТОЛСТОГАНОВ И. Н.

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ В КВАДРАТИЧНОЙ НОРМЕ С ВЫРОЖДАЮЩИМСЯ ВЕСОМ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ ГАУССОВСКИХ ПРОЦЕССОВ[1]

Аннотация

В работе получена точная асимптотика малых уклонений для винеровского процесса, броуновского моста и процесса Орнштейна–Уленбека в квадратичной норме с вырожденным на одном конце весом.

1. Введение

Теория малых уклонений гауссовских процессов в последние десятилетия получила интенсивное развитие (см., к примеру, обзоры [13] и [14]). Этому способствовала возможность применения теории к решению таких важных математических задач, как оценка точности дискретной аппроксимации случайных процессов, вычисление метрической энтропии функциональных множеств и закон повторного логарифма в форме Чжуна. Теория малых уклонений связана также с функциональным анализом данных [11] и непараметрическим байесовским оцениванием [1].

Пусть $X(t)$, $a \le t \le b$ — гауссовский процесс с нулевым средним и ковариацией $G(t,s)$, а $\psi(t)$ — неотрицательная функция на $[a,b]$. Возьмем

$$\|X\|_\psi = \left(\int_a^b X^2(t)\psi(t)dt \right)^{1/2}.$$

Задача о малых уклонениях случайного процесса X в L_2-норме состоит в описании поведения вероятности $\mathbb{P}\{\|X\|_\psi \le \varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$. Точной асимптотикой малых уклонений называется соотношение вида

$$\mathsf{P}\{\|X\|_\psi \le \varepsilon\} \sim C\varepsilon^\beta \exp(-d\varepsilon^{-\alpha}),\ \varepsilon \to 0.$$

В силу разложения Кархунена-Лоэва [10] имеет место следующее равенство по распределению:

$$\|X\|_\psi^2 = \int_a^b X^2(t)\psi(t)dt = \sum_{k=1}^\infty \lambda_k \xi_k^2,$$

[1]Работа первого автора была поддержана грантом РФФИ № 16-01-00258.

где ξ_k — независимые стандартные гауссовские с.в., а $\lambda_k > 0$, $\sum\limits_k \lambda_k < \infty$ представляют собой собственные значения интегрального уравнения

$$\lambda f(t) = \int\limits_a^b G(t,s)\sqrt{\psi(t)\psi(s)}f(s)ds.$$

Таким образом, исходная задача сводится к нахождению при $\varepsilon \to 0$ точной асимптотики вероятности $\mathsf{P}\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\}$.

В статьях [15] и [16] был разработан подход, позволяющий получить с точностью до константы асимптотику малых уклонений в L_2-норме для процессов Грина — гауссовских процессов, ковариация которых является функцией Грина самосопряженного дифференциального оператора из некоторого довольно широкого класса. В работе [4] Назаровым и Пусевым была найдена асимптотика малых уклонений взвешенных процессов Грина с точностью до константы "расхождения"для достаточно гладких весов. Эта константа выражается через собственные числа ковариационной функции. В статье [5] показан метод нахождения константы расхождения некоторых для гауссовских процессов, обладающих невырожденными весами, не использующий собственные числа коварицонной функции.

Целью настоящей работы является получение точных асимптотик и асимптотик с точностью до константы вероятности малых уклонений некоторых случайных процессов с вырожденными весами вида $t^\alpha\psi(t)$, где $\psi(t)$ — дважды дифференцируемая на $[0,1]$ положительная функция.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть L — самосопряженный дифференциальный оператор порядка $2l$, определенный на пространстве $\mathcal{D}(L)$ функций, удовлетворяющих $2l$ граничным условиям. Пространство $(m-1)$ раз непрерывно дифференцируемых функций y, у которых $y^{(m-1)}$ абсолютно непрерывна на отрезке [0,1] и $y^{(m)} \in L_p(0,1)$, как обычно, обозначим за $W_p^m(0,1)$. В статье [4] была доказана следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть функция $\psi \in W_\infty^l(0,1)$ и $\psi > 0$ на $(0,1)$. Пусть $G(t,s)$ — функция Грина краевой задачи*

$$Lv = \mu v \quad \textit{на} \quad [0,1], \quad v \in \mathcal{D}(L). \tag{1}$$

Тогда функция

$$\mathcal{G}(t,s) = \sqrt{\psi(t)\psi(s)}G(t,s)$$

является функцией Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}v \equiv \psi^{-1/2}L(\psi^{-1/2}v) = \mu v \quad \text{на} \quad [0,1], \quad v \in \mathcal{D}(L), \tag{2}$$

где пространство $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ состоит из функций v, удовлетворяющих условию

$$\psi^{-1/2}v \in \mathcal{D}(L). \tag{3}$$

Замечание. Задача (2) – (3) с помощью замены $y = \psi^{-1/2}v$ переписывается так:

$$Ly = \mu\psi y \quad \text{на} \quad [0,1], \quad v \in \mathcal{D}(L).$$

В статье [16, Теорема 6.2] была доказана теорема

Теорема 2.1. *Пусть*

$$\Lambda_j = (\vartheta(j+\delta))^{-d},$$

где $\vartheta > 0$, $\delta > -1$ и $d > 1$ — некоторые константы. Тогда при $\varepsilon \to 0$

$$\mathsf{P}\{\sum_{j=1}^{\infty} \Lambda_j \xi_j^2 \le \varepsilon^2\} \sim \mathcal{C}(\vartheta, d, \delta) \cdot \varepsilon^{\gamma} \exp\left(-\frac{d-1}{2}\left(\frac{\pi/d}{\vartheta \sin(\pi/d)}\right)^{\frac{d}{d-1}} \varepsilon^{-\frac{2}{d-1}}\right),$$

где

$$\gamma = \frac{2-d-2\delta d}{2(d-1)},$$

а $\mathcal{C}(\vartheta, d, \delta)$ представляет собой

$$\mathcal{C}(\vartheta, d, \delta) = \frac{(2\pi)^{d/4}\vartheta^{d\gamma/2}(\sin(\pi/d))^{\frac{1+\gamma}{2}}}{(d-1)^{1/2}(\pi/d)^{1+\frac{\gamma}{2}}\Gamma^{d/2}(1+\delta)}.$$

3. Асимптотика с точностью до константы для процессов с весом $\psi(t)t^{\alpha}$

Теорема 3.1. *Для броуновского моста B при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\|B\|_{\psi t^{\alpha}} \le \varepsilon\right\} \sim C\frac{2^{(\gamma+3)/2}\pi^{(\gamma-1)/2}}{\Gamma(1+\delta)}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^{\gamma} \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8\varepsilon^2}\right),$$

где

$$C = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi(n-\frac{\alpha}{4(\alpha+2)})/\vartheta)^{-1}}{\lambda_n^{1/2}}, \quad \vartheta = \int_0^1 \sqrt{\psi(t)t^{\alpha}}dt,$$

$$\gamma = \frac{\alpha}{2(\alpha+2)}, \quad \delta = -\frac{\alpha}{4(\alpha+2)}.$$

Доказательство. Собственные числа λ_n в разложении Кархунена–Лоэва равны $\lambda_n = \mu_n^{-1}$, где μ_n — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' = \mu\psi t^\alpha y \quad & \text{на} \quad [0,1], \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Согласно [2, §6], числа μ_n имеют следующую асимптотику

$$\mu_n = \left(\frac{\pi(n+\delta+O(n^{-c}))}{\vartheta}\right)^2.$$

Используя теорему сравнения Ли [12] и теорему 2.1, непосредственным вычислением получаем утверждение теоремы. □

Следующие утверждения доказываются аналогично.

Теорема 3.2. *Пусть $W_{(u)}(t) = W(t) - utW(1)$, $u < 1$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\|W_{(u)}\|_{\psi t^\alpha} \le \varepsilon\right\} \sim C\frac{2^{(\gamma+3)/2}\pi^{(\gamma-1)/2}}{\Gamma(1+\delta)}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^\gamma \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8\varepsilon^2}\right),$$

где

$$C = \prod_{n=1}^\infty \frac{(\pi(n-\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4(\alpha+2)})/\vartheta)^{-1}}{\lambda_n^{1/2}}, \quad \vartheta = \int_0^1 \sqrt{\psi(t)t^\alpha}dt,$$

$$\gamma = \frac{3\alpha+4}{2(\alpha+2)}, \quad \delta = -\frac{3\alpha+4}{4(\alpha+2)}.$$

Замечание. То же соотношение верно и для процесса Орнштейна–Уленбека с началом в нуле, то есть гауссовского процесса с нулевым средним и ковариационной функцией $(e^{-\beta|t-s|} - e^{-\beta(t+s)})/(2\beta)$.

Обозначим $U_{(\beta)}(t)$ стационарный процесс Орнштейна–Уленбека, то есть гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией $e^{-\beta|t-s|}/(2\beta)$.

Теорема 3.3. *При $\varepsilon \to 0$ имеет место соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\|U_{(\beta)}\|_{\psi t^\alpha} \le \varepsilon\right\} \sim C\frac{2^{(\gamma+3)/2}\pi^{(\gamma-1)/2}}{\Gamma(1+\delta)}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^\gamma \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8\varepsilon^2}\right),$$

где

$$C = \prod_{n=1}^\infty \frac{(\pi(n-1+\frac{\alpha}{4(\alpha+2)})/\vartheta)^{-1}}{\lambda_n^{1/2}}, \quad \vartheta = \int_0^1 \sqrt{\psi(t)t^\alpha}dt,$$

$$\gamma = \frac{3\alpha+8}{2(\alpha+2)}, \quad \delta = -\frac{3\alpha+8}{4(\alpha+2)}.$$

4. Точная асимптотика для процессов с весом $\psi(t)t^\alpha$

Теорема 4.1. *Пусть $W_{(u)}(t) = W(t) - utW(1)$, где $W(t)$ — винеровский процесс, $u < 1$. Тогда при $\varepsilon \to 0$ имеет место следующее асимптотическое соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\|W_{(u)}\|_{\psi t^\alpha} \le \varepsilon\right\} \sim \frac{2^{2+\frac{\alpha}{4\alpha+8}}(\vartheta(\alpha+2))^{\frac{\alpha}{4\alpha+8}}}{(1-u)\pi^{1/4}\Gamma^{1/2}(\frac{1}{\alpha+2})} \frac{\psi^{\frac{1}{4\alpha+8}}(0)}{\psi^{\frac{1}{8}}(1)} \left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^{\frac{3\alpha+4}{2\alpha+4}} \exp\left(\frac{-\vartheta^2}{8\varepsilon^2}\right),$$

где

$$\vartheta = \int_0^1 \sqrt{\psi(t)t^\alpha}dt. \tag{4}$$

Доказательство. По лемме 2.1 собственные числа в разложении Кархунена-Лоэва $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' = \mu\psi(t)t^\alpha y \text{ на } [0,1] \\ y(0) = 0 \\ (y' + \tau y)(1) = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где $\tau = (1-u)^{-2} - 1$

Пусть $\varphi_1(t,\zeta)$, $\varphi_2(t,\zeta)$ — решения уравнения $-y'' = \zeta^2\psi(t)t^\alpha y$, удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_1(0,\zeta) = 1 \qquad \varphi_1'(0,\zeta) = 0 \tag{6}$$

$$\varphi_2(0,\zeta) = 0 \qquad \varphi_2'(0,\zeta) = 1. \tag{7}$$

Подставив общее решение $y(t) = c_1\varphi_1(t,\zeta) + c_2\varphi_2(t,\zeta)$ в граничные условия (36), получаем, что собственные числа μ_k краевой задачи (5) равны x_k^2, где x_k — положительные корни функции

$$F(\zeta) = \begin{vmatrix} \varphi_1(0,\zeta) & \varphi_2(0,\zeta) \\ \varphi_1'(1,\zeta) + \tau\varphi_1(1,\zeta) & \varphi_2'(1,\zeta) + \tau\varphi_2(1,\zeta) \end{vmatrix} = \varphi_2'(1,\zeta) + \tau\varphi_2(1,\zeta)$$

Найдем асимптотику $F(\zeta)$ при $|\zeta| \to \infty$. Для этого воспользуемся асимптотическими формулами, выведенными А. Дородницыным.

В соответствии с обозначениями из [2, §5]

$$\omega(x) = \left(\frac{\alpha+2}{2}\int_0^x \sqrt{\psi(t)t^\alpha}dt\right)^{\frac{2}{\alpha+2}} \tag{8}$$

$$U_1(t) = (\alpha+2)^{-\frac{1}{\alpha+2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)\sqrt{t}J_{-\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}t^{\frac{\alpha+2}{2}}\right) \tag{9}$$

$$U_2(t) = (\alpha+2)^{\frac{1}{\alpha+2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right)\sqrt{t}J_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}t^{\frac{\alpha+2}{2}}\right) \tag{10}$$

$$Y_i(x) = \frac{1}{\sqrt{\omega'(x)}}U_i\left(\zeta^{\frac{2}{\alpha+2}}\omega(x)\right) \tag{11}$$

Как видно из [2, с.37],

$$\omega'(x) = x^{\frac{\alpha}{2}}\cdot\sqrt{\psi(x)}\cdot\omega^{-\frac{\alpha}{2}}(x) \tag{12}$$

$$\omega(x) = \psi(0)^{\frac{1}{\alpha+2}}\cdot x(1+o(1)), \quad x\to 0 \tag{13}$$

$$\omega'(x) = \psi(0)^{\frac{1}{\alpha+2}}\cdot(1+o(1)), \quad x\to 0 \tag{14}$$

В [2, §5] показано, что можно найти линейно независимые решения уравнения $-y'' = \mu\psi(t)t^{\alpha}y$ в виде

$$Y_1(t)\cdot(1+u_1(t))) = Y_1(t)\cdot(1+O(t))), \quad t\to 0. \tag{15}$$

$$Y_2(t)\cdot(1+u_2(t))) = Y_2(t)\cdot(1+O(t))), \quad t\to 0. \tag{16}$$

С помощью асимптотических приближений функций Бесселя первого рода в нуле [9]

$$J_\nu(z)\sim\left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu}\Gamma^{-1}(\nu+1), \tag{17}$$

Найдем пределы $U_2(t)$, $U_2'(t)$ при $t\to 0$

$$\lim_{t\to 0}U_2(t) = (\alpha+2)^{\frac{1}{\alpha+2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right)\sqrt{t}J_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}t^{\frac{\alpha+2}{2}}\right) = \lim_{t\to 0}t = 0 \tag{18}$$

$$\lim_{t\to 0}U_2'(t) = \lim_{t\to 0}(\alpha+2)^{\frac{1}{\alpha+2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}J_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}t^{\frac{\alpha+2}{2}}\right) - t^{\frac{\alpha}{2}}J_{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}t^{\frac{\alpha+2}{2}}\right)\right)+$$
$$+\frac{1}{2}(\alpha+2)^{\frac{1}{\alpha+2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right)t^{\frac{\alpha}{2}+\frac{2}{\alpha+2}}J_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}t^{\frac{\alpha+2}{2}}\right) = \frac{1}{2}+0+\frac{1}{2} = 1$$

Теперь найдем пределы $Y_2(t), Y_2'(t)$ при $t\to 0$

$$\lim_{t\to 0}Y_2(t) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{\sqrt{\omega'(t)}}U_2\left(\zeta^{\frac{2}{\alpha+2}}\omega(t)\right) = \lim_{t\to 0}\psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\zeta^{\frac{2}{\alpha+2}}t = 0 \tag{19}$$

$$\lim_{t\to 0} Y_2'(t) = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\alpha}{4}t^{-\frac{\alpha}{4}}\psi^{-\frac{1}{4}}(0)\omega^{\frac{\alpha-4}{4}}(t) - \frac{\alpha}{4}t^{\frac{-\alpha-4}{4}}\psi^{-\frac{1}{4}}(0)\omega^{\frac{\alpha}{4}}(t)\omega'(t) + o(t^{-1})\right) U_2\left(\zeta^{\frac{2}{\alpha+2}}\omega(t)\right) + \\ + \psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\zeta^{\frac{2}{\alpha+2}} = \psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\zeta^{\frac{2}{\alpha+2}}$$

Аналогично

$$\lim_{t\to 0} Y_1(t) = \psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0) \tag{20}$$

$$\lim_{t\to 0} Y_1'(t) = 0 \tag{21}$$

Таким образом, линейно независимые решения φ_1, φ_2 можно найти как

$$\varphi_2(t,\zeta) = (Y_1(t) + u_1(t))\cdot\psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0) \tag{22}$$

$$\varphi_2(t,\zeta) = (Y_2(t) + u_2(t))\cdot\psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\zeta^{-\frac{2}{\alpha+2}} \tag{23}$$

Введем обозначения

$$B_1 = (\alpha+2)^{-\frac{1}{\alpha+2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right)$$

$$B_2 = (\alpha+2)^{\frac{1}{\alpha+2}}\,\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right)$$

$$T(x) = \omega^{\frac{\alpha+2}{4}}(x)x^{-\frac{\alpha}{4}}\psi^{-1/4}(x)$$

$$\vartheta = \frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(1)$$

Тогда, согласно [2, §5.1, 5.2] при $|\zeta|\to\infty$

$$Y_1(x) + u_1(x) = B_1\cdot T(x)\cdot\zeta^{\frac{1}{\alpha+2}}J_{-\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(x)\zeta\right)\left(1+O(|\zeta^{-1}|)\right)$$

$$Y_2(x) + u_2(x) = B_2\cdot T(x)\cdot\zeta^{\frac{1}{\alpha+2}}J_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(x)\zeta\right)\left(1+O(|\zeta^{-1}|)\right)$$

$$Y_1'(x)+u_1'(x) = B_1\zeta^{\frac{1}{\alpha+2}}\left(T'(x)J_{-\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(x)\zeta\right) + T(x)\cdot\left(J_{-\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(x)\zeta\right)\right)'\right) = \\ = -B_1\zeta^{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}}\left(T(x)\psi^{1/2}(x)x^{\frac{\alpha}{2}}J_{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(x)\zeta\right)\right)(1+O(|\zeta|^{-1})) \tag{24}$$

$$Y_2'(x)+u_2'(x) = B_2\zeta^{\frac{1}{\alpha+2}}\left(T'(x)J_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(x)\zeta\right)+T(x)\cdot\left(J_{\frac{1}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(x)\zeta\right)\right)'\right) =$$

$$= B_2\zeta^{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}}\left(T(x)\psi^{1/2}(x)x^{\frac{\alpha}{2}}J_{\frac{\alpha+3}{\alpha+2}}\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(x)\zeta\right)\right)(1+O(|\zeta|^{-1})) \quad (25)$$

Так как

$$J_\nu(\zeta) = \sqrt{\frac{2}{\pi\zeta}}\cos\left(\zeta-\frac{\pi\nu}{2}-\frac{\pi}{4}\right)(1+O(|\zeta|^1))$$

при $|\zeta|\to\infty$, $\Re(\zeta)\geq 0$, получаем

$$Y_1(1) = B_1\cdot\zeta^{-\frac{\alpha}{2\alpha+4}}\left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{-1/4}(1)\cos\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(1)\zeta-\frac{\alpha\pi}{4\alpha+8}\right)\right)\left(1+O(|\zeta^{-1}|)\right) \quad (26)$$

$$Y_1'(1) = B_1\cdot\zeta^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}\left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{1/4}(1)\cos\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(1)\zeta-\frac{(3\alpha+4)\pi}{4\alpha+8}\right)\right)(1+O(|\zeta|^{-1})). \quad (27)$$

$$Y_2(1) = B_2\cdot\zeta^{-\frac{\alpha}{2\alpha+4}}\left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{-1/4}(1)\cos\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(1)\zeta-\frac{(\alpha+4)\pi}{4\alpha+8}\right)\right)\left(1+O(|\zeta^{-1}|)\right) \quad (28)$$

$$Y_2'(1) = -B_2\cdot\zeta^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}\left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{1/4}(1)\cos\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(1)\zeta-\frac{(3\alpha+8)\pi}{4\alpha+8}\right)\right)(1+O(|\zeta|^{-1})). \quad (29)$$

Соответственно

$$\varphi_1(1,\zeta) = B_1\cdot\psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\cdot\zeta^{-\frac{\alpha}{2\alpha+4}}\left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{-1/4}(1)\cos\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(1)\zeta-\frac{\alpha\pi}{4\alpha+8}\right)\right)\left(1+O(|\zeta^{-1}|)\right) \quad (30)$$

$$\varphi_1'(1,\zeta) = B_1\cdot\psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\cdot\zeta^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}\left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{1/4}(1)\cos\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(1)\zeta-\frac{(3\alpha+4)\pi}{4\alpha+8}\right)\right)\left(1+O(|\zeta^{-1}|)\right) \quad (31)$$

$$\varphi_2(1,\zeta) = B_2\cdot\psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\cdot\zeta^{-\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}\left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{-1/4}(1)\cos\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(1)\zeta-\frac{(\alpha+4)\pi}{4\alpha+8}\right)\right)\left(1+O(|\zeta^{-1}|)\right) \quad (32)$$

$$\varphi_2'(1,\zeta) = -B_2\cdot\psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\cdot\zeta^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}}\left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{-1/4}(1)\cos\left(\frac{2}{\alpha+2}\omega^{\frac{\alpha+2}{2}}(1)\zeta-\frac{(3\alpha+8)\pi}{4\alpha+8}\right)\right)\left(1+O(|\zeta^{-1}|\right) \quad (33)$$

Обозначим

$$\tilde{\delta} = -\frac{\alpha}{4\alpha+8} \in \left(-\frac{1}{4}, 0\right]$$

Таким образом,

$$F(\zeta) = B_2 \cdot \psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0) \cdot \zeta^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}} \left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{1/4}(1)\cos\left(\vartheta\zeta - \tilde{\delta}\pi\right)\right)(1 + O(|\zeta|^{-1})). \quad (34)$$

при $|\zeta| \to \infty$. Возьмем функцию

$$\Psi(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta^2}{(\pi(n+\delta))^2}\right), \quad \delta = -\frac{3\alpha+4}{4(\alpha+2)}.$$

Согласно [3, Лемма 1.3], при $|\zeta| = \pi(N + \delta + 1/2)$ и $N \to \infty$

$$\Psi(\zeta) \sim \Gamma^2(1+\delta)\pi^{2\delta}\zeta^{-2\delta-1}\cos(\zeta - \pi(\delta + 1/2))$$

то есть

$$\Psi(\zeta) \sim \Gamma^2\left(\frac{\alpha+4}{4(\alpha+2)}\right)\pi^{-\frac{3\alpha+4}{2\alpha+4}}\zeta^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}}\cos\left(\zeta + \frac{\pi\alpha}{4\alpha+8}\right).$$

Заметим, что

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\Psi(\vartheta\zeta)|} \rightrightarrows B_2 \cdot \psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{1/4}(1)\Gamma^{-2}\left(\frac{\alpha+4}{4(\alpha+2)}\right)\pi^{\frac{3\alpha+4}{2\alpha+4}}\vartheta^{-\frac{\alpha}{2\alpha+4}}$$

По теореме Йенсена([6, §3.6.1]) для функции F и $x_k < r < x_{k+1}$ верно соотношение

$$\ln\left(\frac{r^k\,|F(0)|}{x_1x_2\dots x_k}\right) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|F(re^{i\theta})\right|d\theta$$

Аналогичное равенство верно для функции Ψ. Следовательно

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi(n+\delta)/\vartheta)^{-2}}{\lambda_n} = \left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{\pi(n+\delta)/\vartheta}\right)^2 = \frac{|F(0)|\Gamma^2\left(\frac{\alpha+4}{4(\alpha+2)}\right)\vartheta^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}}}{B_2 \cdot \psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\sqrt{\alpha+2}\,\pi^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}\psi^{1/4}(1)}$$

Осталость вычислить $F(0)$. Заметим, что по теореме о непрерывной зависимости решения от параметра

$$\lim_{\zeta\to 0}\varphi_2'(1,\zeta) + \tau\varphi_2(1,\zeta) = \lim_{t\to 1}\varphi_2'(t,0) + \tau\varphi_2(t,0) = 1 + \tau t.$$

То есть

$$F(0) = 1 + \tau = (1-u)^{-2}$$

Окончательно получаем

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi(n+\delta)/\vartheta)^{-2}}{\lambda_n} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+4}{4(\alpha+2)}\right) \vartheta^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}} \psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0)}{(1-u)^2(\alpha+2)^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}} \Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right) \pi^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}} \psi^{1/4}(1)}$$

Осталось применить теорему 3.2

□

Замечание. При $\alpha = 0$ асимптотическое выражение принимает вид, описанный в [5] для $W_{(u)}$ с невырожденным весом

$$\mathsf{P}\left\{\|W_{(u)}\|_\psi \le \varepsilon\right\} \sim \frac{4\psi^{1/8}(0)}{(1-u)\sqrt{\pi}\vartheta\psi^{1/8}(1)} \varepsilon \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8}\varepsilon^{-2}\right).$$

При $\psi \equiv 1$ получаем результат [3, Теорема 3.3, п. 2]

Теорема 4.2. *Пусть $\mathring{U}_a(t)$ — процесс Орнштейна-Уленбека с началом в нуле. Тогда имеет место следующее асимптотическое соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\|\mathring{U}_a\|_{\psi t^\alpha} \le \varepsilon\right\} \sim \frac{2^{2+\frac{\alpha}{4\alpha+8}} (\vartheta(\alpha+2))^{\frac{\alpha}{4\alpha+8}} e^{a/2}}{\pi^{1/4}\Gamma^{1/2}(\frac{1}{\alpha+2})} \frac{\psi^{\frac{1}{4\alpha+8}}(0)}{\psi^{\frac{1}{8}}(1)} \left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^{\frac{3\alpha+4}{2\alpha+4}} \exp\left(\frac{-\vartheta^2}{8\varepsilon^2}\right),$$

где

$$\vartheta = \int_0^1 \sqrt{\psi(t)t^\alpha} dt. \tag{35}$$

Доказательство. По лемме 2.1 собственные числа в разложении Кархунена-Лоэва $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' = (\mu\psi(t)t^\alpha - a^2)y \text{ на } [0,1] \\ y(0) = 0 \\ (y' + ay)(1) = 0 \end{cases} \tag{36}$$

Подставив общее решение $y(t) = c_1\varphi_1(t,\zeta) + c_2\varphi_2(t,\zeta)$ в граничные условия (36), получаем, что собственные числа μ_k связанной с процессом краевой задачи равны x_k^2, где x_k — положительные корни функции

$$F(\zeta) = \begin{vmatrix} \varphi_1(0,\zeta) & \varphi_2(0,\zeta) \\ \varphi_1'(1,\zeta) + \alpha\varphi_1(1,\zeta) & \varphi_2'(1,\zeta) + \alpha\varphi_2(1,\zeta) \end{vmatrix} = \varphi_2'(1,\zeta) + \alpha\varphi_2(1,\zeta)$$

Заметим([2]), что слагаемое $-a^2y$ в уравнении 36 не влияет на главный член Y_i, поэтому асимптотические выражения из прошлой теоремы верны и для решений данной задачи. Таким образом

$$F(\zeta) = B_2 \cdot \psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0) \cdot \zeta^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}} \left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}} \psi^{1/4}(1) \cos\left(\vartheta\zeta - \tilde{\delta}\pi\right) \right) (1 + O(|\zeta|^{-1})). \tag{37}$$

при $|\zeta| \to \infty$. Здесь используются те же обозначения, что и в доказательстве предыдущей теоремы.

Как и в прошлый раз, возьмем функцию

$$\Psi(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta^2}{(\pi(n+\delta))^2} \right), \quad \delta = -\frac{3\alpha+4}{4(\alpha+2)}.$$

Как мы выяснили в доказательстве предыдущей теоремы,

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi(n+\delta)/\vartheta)^{-2}}{\lambda_n} = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{\pi(n+\delta)/\vartheta} \right)^2 = \frac{|F(0)|\Gamma^2\left(\frac{\alpha+4}{4(\alpha+2)}\right)\vartheta^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}}}{B_2 \cdot \psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\sqrt{\alpha+2}\pi^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}\psi^{1/4}(1)}$$

Остается найти $F(0)$. По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра

$$\lim_{\zeta \to 0} \phi_2'(1,\zeta) + \tau\phi_2(1,\zeta) = \lim_{t \to 1} \phi_2'(t,0) + \tau\phi_2(t,0)$$

где $\phi(t,0)$ — решение уравнения

$$\begin{cases} y'' = a^2 y \text{ на } [0,1] \\ y(0) = 0 \\ (y' + ay)(1) = 0 \end{cases} \tag{38}$$

Такая задача имеет решение $\phi(t,0) = \frac{1}{a}\operatorname{sh}(at)$, то есть $F(0) = \operatorname{ch}(a) + \operatorname{sh}(a) = e^a$

Окончательно получаем

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi(n+\delta)/\vartheta)^{-2}}{\lambda_n} = \frac{\Gamma^2\left(\frac{\alpha+4}{4(\alpha+2)}\right)\vartheta^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}}\psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0)e^a}{(\alpha+2)^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right)\pi^{\frac{\alpha+1}{\alpha+2}}\psi^{1/4}(1)}$$

□

Замечание. При $\alpha = 0$ асимптотическое выражение принимает вид, описанный в [5] для $\mathring{U}_{(a)}(t)$ с невырожденным весом

$$\mathsf{P}\left\{\|\mathring{U}_a\|_\psi \le \varepsilon\right\} \sim \frac{4\psi^{1/8}(0)e^{\alpha/2}}{\sqrt{\pi}\vartheta\psi^{1/8}(1)}\varepsilon \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8}\varepsilon^{-2}\right).$$

Теорема 4.3. *Пусть $B(t)$ — броуновский мост. Тогда имеет место следующее асимптотическое соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\|B\|_{\psi t^\alpha} \le \varepsilon\right\} \sim \frac{2^{1+\frac{3\alpha+4}{4\alpha+8}}(\vartheta(\alpha+2))^{-\frac{\alpha+4}{4\alpha+8}} \cdot \psi^{\frac{1}{4\alpha+8}}(0)\psi^{\frac{1}{8}}(1)}{\pi^{1/4}\Gamma^{1/2}(\frac{\alpha+3}{\alpha+2})} \left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}} \exp\left(\frac{-\vartheta^2}{8\varepsilon^2}\right),$$

где

$$\vartheta = \int_0^1 \sqrt{\psi(t)t^\alpha}dt. \tag{39}$$

Доказательство. По лемме 2.1 собственные числа в разложении Кархунена-Лоэва $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' = \mu\psi(t)t^\alpha y \text{ на } [0,1] \\ y(0) = 0 \\ y(1) = 0 \end{cases} \tag{40}$$

Подставив общее решение $y(t) = c_1\varphi_1(t,\zeta) + c_2\varphi_2(t,\zeta)$ в граничные условия (40), получаем, что собственные числа μ_k связанной с процессом краевой задачи равны x_k^2, где x_k — положительные корни функции

$$F(\zeta) = \begin{vmatrix} \varphi_1(0,\zeta) & \varphi_2(0,\zeta) \\ \varphi_1(1,\zeta) & \varphi_2(1,\zeta) \end{vmatrix} = \varphi_2(1,\zeta)$$

Возьмем $\tilde{\delta} = -\frac{(\alpha+4)\pi}{4\alpha+8}$. Тогда, применяя полученные асимптотики решений, получаем

$$F(\zeta) = B_2 \cdot \psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0) \cdot \zeta^{-\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}} \left(\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{-1/4}(1)\cos\left(\vartheta\zeta - \tilde{\delta}\pi\right)\right)(1 + O(|\zeta|^{-1})), \tag{41}$$

при $|\zeta| \to \infty$.

Возьмем функцию

$$\Psi(\zeta) = \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{\zeta^2}{(\pi(n+\delta))^2}\right), \quad \delta = -\frac{\alpha}{4(\alpha+2)}.$$

Тогда по [3, Лемма 1.3], при $|\zeta| = \pi(N + \delta + 1/2)$ и $N \to \infty$

$$\Psi(\zeta) \sim \Gamma^2\left(\frac{3\alpha+8}{4(\alpha+2)}\right)\pi^{-\frac{\alpha}{2\alpha+4}}\zeta^{-\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}\cos\left(\zeta - \frac{\pi(\alpha+4)}{4\alpha+8}\right).$$

Соответственно

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\Psi(\vartheta\zeta)|} \rightrightarrows B_2 \cdot \psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{-1/4}(1)\left(\Gamma\left(\frac{3\alpha+8}{4(\alpha+2)}\right)\right)^{-2}\pi^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}}\vartheta^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}$$

Применяя теорему Йенсена, получаем

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi(n+\delta)/\vartheta)^{-2}}{\lambda_n}=\left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{\pi(n+\delta)/\vartheta}\right)^2=\frac{|F(0)|\Gamma^2\left(\frac{3\alpha+8}{4(\alpha+2)}\right)\vartheta^{-\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}\pi^{\frac{1}{\alpha+2}}}{B_2\cdot\psi^{-\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\sqrt{\alpha+2}\psi^{-1/4}(1)}$$

Остается найти $F(0)$. По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра

$$\lim_{\zeta\to 0}\phi_2(1,\zeta)=\lim_{t\to 1}\phi_2(t,0).$$

Ясно, что $\phi_2(t,0)=t$, таким образом, $F(0)=1$. Окончательно получаем

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi(n+\delta)/\vartheta)^{-2}}{\lambda_n}=\frac{\Gamma^2\left(\frac{3\alpha+8}{4(\alpha+2)}\right)\pi^{\frac{1}{\alpha+2}}\cdot\psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\cdot\psi^{1/4}(1)}{(\alpha+2)^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}\Gamma\left(\frac{\alpha+3}{\alpha+2}\right)\cdot\vartheta^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}}$$

Осталось применить теорему 3.1

$\square$

Замечание. При $\alpha=0$ асимптотическое выражение принимает вид, описанный в [5] для $B(t)$ с невырожденным весом

$$\mathsf{P}\left\{\|B\|_\psi\le\varepsilon\right\}\sim\frac{2\sqrt{2}\psi^{1/8}(1)\psi^{1/8}(0)}{\sqrt{\pi\vartheta}}\exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8}\varepsilon^{-2}\right).$$

При $\psi\equiv 1$ получаем результат [3, Теорема 3.3, п. 1]

Теорема 4.4. *Пусть $U_{(a)}(t)$ — стационарный процесс Орнштейна-Уленбека. Тогда имеет место следующее асимптотическое соотношение*

$$\mathsf{P}\left\{\|U_{(a)}\|_{\psi t^\alpha}\le\varepsilon\right\}\sim\frac{\sqrt{a}\cdot e^{a/2}\cdot 2^{2+\frac{3\alpha+8}{4\alpha+8}}\cdot\vartheta^{\frac{\alpha+4}{4\alpha+8}}}{(\alpha+2)^{-\frac{\alpha}{4\alpha+8}}\pi^{1/4}\Gamma^{1/2}(\frac{\alpha+1}{\alpha+2})\cdot\psi^{\frac{1}{4\alpha+8}}(0)\psi^{\frac{1}{8}}(1)}\left(\frac{\varepsilon}{\vartheta}\right)^{\frac{3\alpha+8}{2\alpha+4}}\exp\left(\frac{-\vartheta^2}{8\varepsilon^2}\right),$$

где

$$\vartheta=\int_0^1\sqrt{\psi(t)t^\alpha}dt. \tag{42}$$

Доказательство. По лемме 2.1 собственные числа в разложении Кархунена-Лоэва $\lambda_k=\mu_k^{-1}$, где μ_k — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases}-y''=(\mu\psi(t)t^\alpha-a^2)y \text{ на } [0,1]\\ (y'-ay)(0)=0\\ (y'+ay)(1)=0\end{cases} \tag{43}$$

Подставив общее решение $y(t) = c_1\varphi_1(t,\zeta) + c_2\varphi_2(t,\zeta)$ в граничные условия (43), получаем, что собственные числа μ_k связанной с процессом краевой задачи равны x_k^2, где x_k — положительные корни функции

$$F(\zeta) = \begin{vmatrix} \varphi_1'(0,\zeta) - a\varphi_1(0,\zeta) & \varphi_2'(0,\zeta) - a\varphi_2(0,\zeta) \\ \varphi_1'(1,\zeta) + a\varphi_1(1,\zeta) & \varphi_2'(1,\zeta) + a\varphi_2(1,\zeta) \end{vmatrix} = -a\varphi_2'(1,\zeta) - a^2\varphi(1,\zeta) - \varphi_1'(1,\zeta) - a\varphi_1(1,\zeta).$$

Заметим([2]), что слагаемое $-a^2 y$ в уравнении 43 не влияет на главный член Y_i, поэтому асимптотические выражения из теоремы 4.1 верны и для решений данной задачи. Таким образом

$$F(\zeta) = aB_1 \cdot \psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0) \cdot \zeta^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}} \sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}} \psi^{1/4}(1) \cos\left(\vartheta\zeta + \frac{(\alpha+4)\pi}{4\alpha+8}\right)\left(1 + O(|\zeta^{-1}|)\right), \qquad (44)$$

при $|\zeta| \to \infty$. .
Возьмем функцию

$$\Psi(\zeta) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{\zeta^2}{(\pi(n+\delta))^2}\right), \quad \delta = -\frac{3\alpha+8}{4(\alpha+2)}.$$

Тогда по [3, Лемма 1.3], при $|\zeta| = \pi(N + \delta + 1/2)$ и $N \to \infty$

$$\Psi(\zeta) \sim \Gamma^2\left(\frac{\alpha}{4(\alpha+2)}\right)\pi^{-\frac{3\alpha+8}{2\alpha+4}}\zeta^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}\cos\left(\zeta + \frac{(\alpha+4)\pi}{4\alpha+8}\right).$$

Соответственно

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\Psi(\vartheta\zeta)|} \rightrightarrows aB_1 \cdot \psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\sqrt{\frac{\alpha+2}{\pi}}\psi^{1/4}(1)\left(\Gamma\left(\frac{\alpha}{4(\alpha+2)}\right)\right)^{-2}\pi^{\frac{3\alpha+8}{2\alpha+4}}\vartheta^{-\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}$$

Применяя теорему Йенсена, получаем

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{(\pi(n+\delta)/\vartheta)^{-2}}{\lambda_n} = \left(\prod_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{\pi(n+\delta)/\vartheta}\right)^2 = \frac{|F(0)|\Gamma^2\left(\frac{\alpha}{4(\alpha+2)}\right)\vartheta^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}\pi^{-\frac{\alpha+3}{\alpha+2}}}{aB_1 \cdot \psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0)\sqrt{\alpha+2}\,\psi^{1/4}(1)}$$

Остается найти $F(0)$. По теореме о непрерывной зависимости решения от параметра

$$F(0) = \lim_{t\to 1}(-a\varphi_2'(t,0) - a^2\varphi(t,0) - \varphi_1'(t,0) - a\varphi_1(t,0))$$

Легко заметить, что $\varphi_1(t,0) = \operatorname{ch}(at)$, $\varphi_2(t,0) = \frac{1}{a}\operatorname{sh}(at)$. Таким образом, $|F(0)| = 2ae^a$.

Окончательно получаем

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{(\pi(n+\delta)/\vartheta)^{-2}}{\lambda_n} = \frac{2ae^a \cdot \Gamma^2\left(\frac{\alpha}{4(\alpha+2)}\right) \pi^{-\frac{\alpha+3}{\alpha+2}} \vartheta^{\frac{\alpha+4}{2\alpha+4}}}{(\alpha+2)^{\frac{\alpha}{2\alpha+4}} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\alpha+2}\right) \cdot \psi^{\frac{1}{2\alpha+4}}(0) \cdot \psi^{1/4}(1)}$$

Осталось применить теорему 3.3

$\square$

Замечание. При $\alpha = 0$ асимптотическое выражение принимает вид, описанный в [5] для $U_{(a)}(t)$ с невырожденным весом

$$\mathsf{P}\left\{\|U_{(a)}\|_\psi \le \varepsilon\right\} \sim \frac{8a^{1/2}e^{a/2}}{\pi^{1/2}\vartheta^{3/2}\psi^{1/8}(1)\psi^{1/8}(0)} \varepsilon^2 \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8}\varepsilon^{-2}\right).$$

При $\psi \equiv 1$ получаем результат [3, Теорема 3.3, п. 1]

Список литературы

[1] Аурзада Ф., Ибрагимов И. А., Лифшиц М. А., ван Зантен Х., *Малые уклонения случайных гауссовских процессов*, Теория вероятности и ее применения, 2009, **53**, вып. 4, 788-798.

[2] Дородницын А. А., *Асимптотические законы распределения собственных значений для некоторых особых видов дифференциальных уравнений второго порядка*, Успехи математических наук, 1952, **7**, вып. 6.

[3] Назаров А. И., *О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2-норме некоторых гауссовских процессов*, Проблемы матем. анализа, 2003, **26**, 179–214.

[4] Назаров А. И., Пусев Р. С., *Точная асимптотика малых уклонений в L_2-норме с весом для некоторых гауссовских процессов*, Зап. научн. семин. ПОМИ, 2009, **364**, 166–199.

[5] Никитин Я. Ю., Пусев Р. С., *Точная асимптотика малых уклонений для ряда броуновских функционалов*, Теория вероятностей и ее применения, 2012, **57**, N 1, 98–123.

[6] Титчмарш Е., *Теория функций*, 2-е изд., М.: Наука, 1980.

[7] Федорюк М. В., *Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений*, 2-е изд., М.: Либроком, 2009.

[8] Эрдейи А., *Асимптотические разложения*, М.:ФМ, 1962, 49–50.

[9] Abramowitz M., Stegun I. A., *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, 9th printing*, 1972, New York: Dover, 360-361.

[10] Adler R. J., *An introduction to continuity, extrema, and related topics for general Gaussian processes*, IMS Lecture Monogr. Ser. 1990, **12**, Hayward, CA: Inst. Math. Statist.

[11] Ferraty F., Vieu, Ph. , *Nonparametric functional data analysis. Theory and practice*, 2006, New York: Springer.

[12] Li W. V., *Comparison results for the lower tail of Gaussian seminormes*, J. Theor. Probab., **5(1)**, 1-31.

[13] Li W. V., Shao Q.-M., *Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications*, Stochastic Processes: Theory and Methods. Handbook of Statist, 2001, **19**, 533–597. Amsterdam: North-Holland.

[14] Lifshits M. A., *Asymptotic behavior of small ball probabilities*, Probability Theory and Mathematical Statistics: Proceedings of The Seventh International Vilnuis Conference, 1999, 453–468. Vilnius: TEV.

[15] Nazarov A. I., *Exact small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary value problems*, J. Theor. Probab., 2009, **22**, pp. 640–665.

[16] Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu., *Exact L_2-small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems*, Probability Theory and Related Fields, 2004, **129**, N 4, 469–494.

Пусев Руслан Сергеевич
Санкт-Петербургский государственный университет
199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9
r.pusev@spbu.ru

Толстоганов Иван Николаевич
Санкт-Петербургский национальный исследовательский Академический университет Российской академии наук
194021, Санкт-Петербург, ул. Хлопина, д. 8, корп. 3, лит. А