УСРЕДНЕНИЕ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ: ДВУХПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ

Ю. М. Мешкова[1,2], Т. А. Суслина[2]

[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
14 линия ВО, д. 29Б
Санкт-Петербург, 199178, Россия

[2]Санкт-Петербургский государственный университет,
Физический факультет,
Ульяновская ул., д. 3, Петродворец,
Санкт-Петербург, 198504, Россия

e-mail: y.meshkova@spbu.ru, t.suslina@spbu.ru

15 декабря 2016 г.

АННОТАЦИЯ

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный матричный эллиптический дифференциальный оператор $B_{D,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, второго порядка при условии Дирихле на границе. Старшая часть оператора задана в факторизованной форме. Оператор включает члены первого и нулевого порядков с неограниченными коэффициентами. Коэффициенты оператора $B_{D,\varepsilon}$ периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Изучается обобщенная резольвента $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0(\cdot/\varepsilon))^{-1}$, где Q_0 — периодическая ограниченная и положительно определенная матрица-функция, а ζ — комплексный параметр. Получены аппроксимации обобщенной резольвенты по операторной норме в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в класс Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, с двухпараметрическими (относительно ε и ζ) оценками погрешности.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, эллиптические системы, усреднение, операторные оценки погрешности.

Исследование выполнено при поддержке РФФИ (проект 16-01-00087). Работа первого автора выполнена при поддержке программы социальных инвестиций „Родные города“ ПАО „Газпром нефть“, фонда Дмитрия Зимина „Династия“ и стипендии имени В. А. Рохлина.

Содержание

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Теории усреднения посвящена обширная литература. Укажем в первую очередь книги [BeLP, BaPa, OlSh, ZhKO].

0.1 Постановка задачи

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Мы изучаем самосопряженный матричный сильно эллиптический ДО второго порядка $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, действующий в пространстве $L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ при условии Дирихле на границе. Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решетки Γ. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ используем обозначения $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\overline{\psi} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

Старшая часть оператора $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ задается в факторизованной форме

$$A_{D,\varepsilon} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}),$$

где $b(\mathbf{D})$ — матричный однородный ДО первого порядка, $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, ограниченная и положительно определенная. (Точные условия на $b(\mathbf{D})$ и $g(\mathbf{x})$ приведены ниже в п. 1.3.) Задача усреднения для оператора $A_{D,\varepsilon}$ изучалась в работах [PSu, Su2, Su5]. Сейчас мы рассматриваем более общий класс самосопряженных ДО $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$, включающих младшие члены:

$$\mathcal{B}_{D,\varepsilon} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} \bigl(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* \bigr) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{0.1}$$

Здесь $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$, и $Q(\mathbf{x})$ — Γ-периодические матрицы-функции, вообще говоря, неограниченные. (Точные условия на коэффициенты см. ниже в п. 1.4. Строгое определение оператора $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ дается через соответствующую квадратичную форму на классе Соболева $H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$.

Коэффициенты оператора (0.1) быстро осциллируют при малом ε. Типичная задача теории усреднения применительно к оператору $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ состоит в нахождении аппроксимации при $\varepsilon \to 0$ для резольвенты $(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ либо обобщенной резольвенты $(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$. Здесь $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция, положительно определенная, ограниченная и ограниченно обратимая.

0.2 Обзор результатов по операторным оценкам погрешности

В серии работ [BSu1–3] М. Ш. Бирман и Т. А. Суслина разработали теоретико-операторный (спектральный) подход к задачам теории усреднения. Изучались операторы

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{0.2}$$

действующие в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. В [BSu1] было показано, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ к резольвенте эффективного оператора $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная положительная эффективная матрица. Была установлена оценка

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.3}$$

В [BSu3] была получена аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon+I)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$:

$$\|(A_\varepsilon+I)^{-1}-(A^0+I)^{-1}-\varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.4}$$

В этой аппроксимации учтен корректор $K(\varepsilon)$. Оператор $K(\varepsilon)$ содержит быстро осциллирующие множители, а потому зависит от ε. При этом $\|\varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1}=O(1)$.

Оценки (0.3), (0.4) точны по порядку. Постоянные в оценках контролируются явно в терминах данных задачи. Подобные результаты получили название *операторных оценок погрешности* в теории усреднения. Метод работ [BSu1–3] основан на применении масштабного преобразования, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений.

Впоследствии спектральный метод был распространен Т. А. Суслиной [Su1, Su4] на случай оператора

$$\mathcal{B}_\varepsilon = A_\varepsilon + \sum_{j=1}^{d}\left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x})D_j + D_j(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{0.5}$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В [Su1] установлены аналоги оценок (0.3), (0.4):

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon+\lambda Q_0^\varepsilon)^{-1}-(\mathcal{B}^0+\lambda\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon, \tag{0.6}$$

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon+\lambda Q_0^\varepsilon)^{-1}-(\mathcal{B}^0+\lambda\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.7}$$

Здесь вещественная постоянная λ выбрана так, чтобы оператор $\mathcal{B}_\varepsilon+\lambda Q_0^\varepsilon$ был положительно определен; $\mathcal{B}^0$ — соответствующий эффективный оператор с постоянными коэффициентами.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в теории усреднения был предложен В. В. Жиковым. В работах [Zh1, Zh2, ZhPas1] были получены оценки вида (0.3), (0.4) для операторов акустики и теории упругости. Метод, названный авторами „модифицированным методом первого приближения“ или „методом сдвига“, основан на анализе первого приближения к решению и введении в задачу дополнительного параметра. Помимо задач в $\mathbb{R}^d$ в работах [Zh1, Zh2, ZhPas1] изучались задачи усреднения в ограниченной области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на границе. Дальнейшие результаты В. В. Жикова, С. Е. Пастуховой и их учеников отражены в недавнем обзоре [ZhPas2].

Операторные оценки погрешности для задач Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения второго порядка (без младших членов) в ограниченной области изучались многими авторами. Первыми, по-видимому, были Ш. Москоу и М. Вогелиус, установившие оценку (см. [MoV1, следствие 2.2]), допускающую запись в операторных терминах:

$$\|(A_{D,\varepsilon})^{-1} - (A_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.8}$$

Здесь оператор $A_{D,\varepsilon}$ в $L_2(\mathcal{O})$, $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$, задан выражением $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$, а матрица-функция $g(\mathbf{x})$ предполагается C^∞-гладкой. В случае условия Неймана аналогичная оценка, а также аппроксимация при учете корректора по норме операторов, действующих из $L_2(\mathcal{O})$ в класс Соболева $H^1(\mathcal{O})$, с оценкой погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$ получена в [MoV2, следствие 1]. Ухудшение порядка по сравнению с аналогичным результатом в $\mathbb{R}^d$ объясняется влиянием границы области. В случае произвольной размерности задачи в ограниченной области изучались в работах [Zh1, Zh2] и [ZhPas1]. Гладкость коэффициентов не предполагалась. Для операторов акустики и упругости при условии Дирихле либо Неймана на границе была получена $(L_2 \to H^1)$-аппроксимация при учете корректора с оценкой погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. В качестве грубого следствия была установлена оценка вида (0.8) с оценкой погрешности порядка $O(\sqrt{\varepsilon})$. (В случае задачи Дирихле для оператора акустики $(L_2 \to L_2)$-оценка была улучшена в [ZhPas1], но ее порядок все равно не был точным.) Близкие результаты для оператора, заданного выражением $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на $\partial\mathcal{O}$, были установлены в работах Ж. Гризо [Gr1, Gr2] с помощью „unfolding“-метода. В [Gr2] для того же оператора впервые была получена точная по порядку оценка (0.8). Для эллиптических систем сходные результаты независимо получены в [KeLiS] и [PSu, Su2]. Дальнейшие продвижения и подробный обзор можно найти в работах [Su3, Su5].

В присутствии младших членов первого и нулевого порядков задача усреднения для оператора (0.5) в $\mathbb{R}^d$ изучалась в статье Д. И. Борисова [Bo]. Было найдено выражение для эффективного оператора $\mathcal{B}^0$ и получены оценки погрешности вида (0.6), (0.7). При этом предполагалось, что коэффициенты оператора зависят не только от быстрой, но и от медленной переменной. Однако в [Bo] коэффициенты оператора $\mathcal{B}_\varepsilon$ предполагались достаточно гладкими.

Для матричного оператора вида (0.1), действующего в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ при условии Дирихле и включающего младшие члены, задача усреднения изучалась К. Ху [Xu1]. Случаю краевого условия Неймана посвящена работа [Xu2]. Однако в [Xu1, Xu2] на оператор наложено весьма жесткое условие равномерной эллиптичности. Кроме этого, в [Xu1] коэффициенты оператора подчинены некоторым условиям регулярности, что неудобно для приложений.

До сих пор речь шла об аппроксимации резольвент в фиксированной регулярной точке. Аппроксимация резольвенты $(A_\varepsilon - \zeta I)^{-1}$ оператора (0.2) в зависимости от ε и спектрального параметра $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ найдена в недавней работе [Su5]. В этой работе также получены двухпараметрические (относительно ε и ζ) оценки погрешности при усреднении резольвент операторов $A_{D,\varepsilon}$ и $A_{N,\varepsilon}$ вида (0.2), действующих в ограниченной области при условии Дирихле либо Неймана на границе.

Для оператора (0.5) двухпараметрические оценки получены в [MSu1]:

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{0.9}$$

$$\|(\mathcal{B}_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\phi)\varepsilon. \tag{0.10}$$

Здесь $\phi = \arg\zeta \in (0, 2\pi)$, $|\zeta| \geqslant 1$. Зависимость констант в оценках от угла ϕ прослежена. Оценки (0.9), (0.10) равномерны по углу ϕ в любой области вида

$$\{\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C} : |\zeta| \geqslant 1, \phi_0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi - \phi_0\} \tag{0.11}$$

при сколь угодно малом $\phi_0 > 0$.

Стимулом к получению двухпараметрических оценок послужило изучение усреднения параболических систем, основанное на представлении операторной экспоненты в виде

$$e^{-A_{D,\varepsilon}t} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(A_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\, d\zeta,$$

где $\gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, обходящий спектр оператора $A_{D,\varepsilon}$ в положительном направлении. Подробнее см. [MSu2].

0.3 Основные результаты

Прежде чем формулировать результаты, удобно перейти к положительно определенному оператору $B_{D,\varepsilon} = \mathcal{B}_{D,\varepsilon} + \lambda Q_0^\varepsilon$, выбирая подходящую постоянную λ. Пусть B_D^0 — соответствующий эффективный оператор. *Цель работы* — получение аппроксимаций обобщенной резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ в зависимости от ε и спектрального параметра ζ.

Основные результаты работы — оценки

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \qquad (0.12)$$

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant C(\phi)\bigl(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \varepsilon\bigr), \end{aligned} \qquad (0.13)$$

справедливые при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, и достаточно малом ε. Величины $C(\phi)$ контролируются явно в терминах данных задачи и угла ϕ. Оценки (0.12), (0.13) равномерны по ϕ в любой области вида (0.11) при сколь угодно малом $\phi_0 > 0$.

При фиксированном ζ оценка (0.12) имеет точный порядок $O(\varepsilon)$. Порядок оценки (0.13) хуже, чем в $\mathbb{R}^d$ (см. (0.7)), из-за влияния границы области. Порядок $(L_2 \to H^1)$-оценки можно улучшить до точного $O(\varepsilon)$, переходя к строго внутренней подобласти или вводя поправку типа пограничного слоя. (См. теоремы 2.7 и 8.1 ниже.)

Корректор в (0.13) в общем случае содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем случаи, когда можно использовать более простой корректор.

Помимо оценок для обобщенной резольвенты мы находим также аппроксимации по $(L_2 \to L_2)$-норме для операторов $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, отвечающих потокам.

Для полноты изложения мы находим аппроксимации оператора $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра ζ, с оценками погрешности, имеющими другое поведение относительно ζ. (Подробнее см. §9 ниже.)

0.4 Метод доказательства

Для доказательства используется метод из работ [PSu, Su2, Su5]. Он основан на рассмотрении ассоциированной задачи в $\mathbb{R}^d$, использовании результатов работы [MSu1] об усреднении во всем пространстве, введении поправки типа пограничного слоя и ее тщательном анализе. Существенную техническую роль играет использование сглаживания по Стеклову (заимствованное из работы [ZhPas1]) и оценок в ε-окрестности границы. Зависимость оценок от спектрального параметра тщательно отслеживается. Присутствие младших членов с неограниченными коэффициентами вносит дополнительные технические трудности (по сравнению с [Su5]). Сначала мы доказываем оценку (0.13), а затем оценку (0.12), опираясь на уже доказанное неравенство (0.13) и соображения двойственности.

Аппроксимации в более широкой области изменения параметра ζ выводятся из уже доказанных оценок в точке $\zeta = -1$ и подходящих резольвентных тождеств.

0.5 Структура работы

Работа состоит из десяти параграфов. В §1 вводится класс операторов B_ε, действующих в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, и формулируются результаты усреднения обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, полученные в [MSu1]. В §2 описывается класс операторов $B_{D,\varepsilon}$, определяется эффективный оператор B_D^0 и формулируются основные результаты работы. В §3 содержится вспомогательный материал. В §4 приведено доказательство $(L_2 \to H^1)$-оценки с поправкой типа пограничного слоя. В §5 установлена аппроксимация (0.13) при учете корректора и аппроксимация потоков. В §6 для обобщенной резольвенты получена $(L_2 \to L_2)$-оценка (0.12). В §7 выделены случаи, когда сглаживающий оператор можно устранить. В §8 найдена аппроксимация в строго внутренней подобласти. Оценки, справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра, установлены в §9. Примеры применения общих результатов можно найти в §10. Там рассмотрен скалярный эллиптический оператор вида

$$\mathcal{B}_{D,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}),$$

который можно трактовать как периодический оператор Шрёдингера с быстро осциллирующими метрикой g^ε, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x})$, содержащим сингулярное первое слагаемое. Также рассмотрен периодический оператор Шрёдингера, содержащий сильно сингулярный потенциал $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon(\mathbf{x})$.

0.6 Обозначения

Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{H}$ и $\|\cdot\|_\mathfrak{H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{1}_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — $(n\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как оператора в $\mathbb{C}^n$. Для $z \in \mathbb{C}$ через z^* обозначается комплексно сопряженное число. (Мы используем такое нестандартное обозначение, так как верхняя черта означает среднее значение периодической функции по ячейке периодов.) Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Через $H^1_0(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но, если это не ведет к недоразумениям, мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций.

Используем обозначение $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$.

1 Задача усреднения для эллиптического оператора, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

В этом параграфе формулируются результаты усреднения для эллиптических систем в $\mathbb{R}^d$, полученные в [MSu1].

1.1 Решетки в $\mathbb{R}^d$

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d \in \mathbb{R}^d$:

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d \nu_j \mathbf{a}_j, \nu_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \tau_j \mathbf{a}_j, -\frac{1}{2} < \tau_j < \frac{1}{2} \right\}.$$

Через $|\Omega|$ обозначим меру Лебега ячейки Ω: $|\Omega| = \operatorname{mes} \Omega$.

Базис $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$ в $\mathbb{R}^d$, двойственный к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}_i, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi\delta_{ij}$. Двойственной к Γ называется решетка $\widetilde{\Gamma}$, порожденная двойственным базисом. В качестве фундаментальной области двойственной решетки $\widetilde{\Gamma}$ возьмем первую зону Бриллюэна: $\widetilde{\Omega} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}\}$.

Пусть r_0 — радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos} \widetilde{\Omega}$, и пусть $2r_1 = \operatorname{diam} \Omega$.

Через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Если $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, положим $f^\varepsilon(\mathbf{x}) :=$

$f(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$; $\overline{f} := |\Omega|^{-1}\int_\Omega f(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$, $\underline{f} := \left(|\Omega|^{-1}\int_\Omega f(\mathbf{x})^{-1}\,d\mathbf{x}\right)^{-1}$. Здесь при определении $\overline{f}$ предполагается, что $f \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, а при определении $\underline{f}$ считается, что матрица f квадратная и неособая, причем $f^{-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Через $[f^\varepsilon]$ обозначается оператор умножения на матрицу-функцию $f^\varepsilon(\mathbf{x})$.

1.2 Сглаживание по Стеклову

Рассмотрим оператор сглаживания по Стеклову $S_\varepsilon^{(k)}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^k)$ (где $k \in \mathbb{N}$) по правилу

$$(S_\varepsilon^{(k)}\mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon\mathbf{z})\,d\mathbf{z}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^k). \tag{1.1}$$

Зависимость $S_\varepsilon^{(k)}$ от k мы будем опускать в обозначениях, и писать просто S_ε. Очевидно, $S_\varepsilon\mathbf{D}^\alpha\mathbf{u} = \mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon\mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^k)$ для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leqslant s$. Отметим неравенство

$$\|S_\varepsilon\|_{H^l(\mathbb{R}^d)\to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1, \quad l \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.2}$$

Нам потребуются следующие свойства оператора S_ε (см. [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] или [PSu, предложения 3.1 и 3.2]).

Предложение 1.1. *Для любой функции $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^k)$ выполнена оценка*

$$\|S_\varepsilon\mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Предложение 1.2. *Пусть f — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$ такая, что $f \in L_2(\Omega)$. Тогда оператор $[f^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и справедлива оценка*

$$\|[f^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|f\|_{L_2(\Omega)}.$$

1.3 Класс операторов A_ε

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор A_ε, формально заданный дифференциальным выражением $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Здесь $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая эрмитова $(m \times m)$-матрица-функция (вообще говоря, с комплексными элементами). Считаем, что $g(\mathbf{x}) > 0$ и что $g, g^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Дифференциальный оператор $b(\mathbf{D})$ имеет вид $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$, где b_j, $j = 1, \dots, d$, — постоянные матрицы размера $m \times n$

(вообще говоря, с комплексными элементами). Считаем, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^{d} b_j \xi_j$ оператора $b(\mathbf{D})$ имеет максимальный ранг:

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Это условие равносильно существованию таких постоянных α_0 и α_1, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{1.3}$$

Отметим сразу оценки, вытекающие из (1.3):

$$|b_j| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad j = 1, \dots, d. \tag{1.4}$$

Точное определение оператора A_ε дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u} \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

При сделанных предположениях эта форма замкнута и неотрицательна. С помощью преобразования Фурье и условия (1.3) можно показать, что

$$\begin{gathered}\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \\ \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).\end{gathered} \tag{1.5}$$

Положим $c_1 := \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}$. Тогда нижнюю оценку (1.5) можно записать так:

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_1^2 \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \tag{1.6}$$

1.4 Оператор B_ε

Мы изучаем самосопряженный оператор B_ε, старшая часть которого совпадает с A_ε. Чтобы определить младшие члены оператора, введем Γ-периодические $(n \times n)$-матрицы-функции (вообще говоря, с комплексными элементами) a_j, $j = 1, \dots, d$, такие, что

$$a_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geqslant 2, \ j = 1, \dots, d. \tag{1.7}$$

Далее, пусть Q и Q_0 — такие Γ-периодические эрмитовы $(n \times n)$-матрицы-функции (с комплексными элементами), что

$$\begin{gathered} Q \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2; \\ Q_0(\mathbf{x}) > 0; \quad Q_0, Q_0^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \end{gathered} \tag{1.8}$$

(При нашем выборе условий на матрицу-функцию Q реализуется пример 2.4 из [MSu1].) Для удобства дальнейших ссылок назовем „исходными данными" следующие величины

$$
\begin{aligned}
&d,\, m,\, n,\, \rho,\, s;\, \alpha_0,\, \alpha_1,\, \|g\|_{L_\infty},\, \|g^{-1}\|_{L_\infty},\, \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)},\, j=1,\dots,d;\\
&\|Q\|_{L_s(\Omega)};\, \|Q_0\|_{L_\infty},\, \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty};\ \text{параметры решетки } \Gamma.
\end{aligned}
\tag{1.9}
$$

Рассмотрим квадратичную форму

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon D_j \mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\
+ (Q^\varepsilon \mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \lambda (Q_0^\varepsilon \mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).
\end{aligned}
\tag{1.10}
$$

Здесь постоянная λ выбирается так (см. (1.14) ниже), чтобы форма $\mathfrak{b}_\varepsilon$ была неотрицательна. Проверим замкнутость формы $\mathfrak{b}_\varepsilon$. Применяя неравенство Гёльдера и теорему вложения Соболева, можно показать (см. [Su1, (5.11)–(5.14)]), что для любого $\nu>0$ найдутся такие постоянные $C_j(\nu)>0$, что

$$
\begin{aligned}
\|a_j^* \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_j(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\\
\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\ j=1,\dots,d.
\end{aligned}
$$

Делая замену переменной $\mathbf{y} := \varepsilon^{-1}\mathbf{x}$ и обозначая $\mathbf{u}(\mathbf{x}) =: \mathbf{v}(\mathbf{y})$, отсюда получаем

$$
\begin{aligned}
\|(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})^*\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} = \varepsilon^d \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{y})^*\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}\\
&\leqslant \varepsilon^d \nu \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}_\mathbf{y}\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y} + \varepsilon^d C_j(\nu)\int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}\\
&\leqslant \nu \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_j(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0<\varepsilon\leqslant 1.
\end{aligned}
$$

Тогда с учетом (1.5) для любого $\nu>0$ найдется такая постоянная $C(\nu)>0$, что

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^d \|(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu \mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] + C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\\
0<\varepsilon\leqslant 1.
\end{aligned}
\tag{1.11}
$$

Если ν фиксировано, то $C(\nu)$ зависит лишь от d, ρ, α_0, от норм $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j=1,\dots,d$, и от параметров решетки Γ.

С учетом (1.6) из (1.11) вытекает, что

$$2\left|\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{d}(D_j\mathbf{u},(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant \frac{1}{4}\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}]+c_2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \qquad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \tag{1.12}$$

где $c_2 = 8c_1^2 C(\nu_0)$ при $\nu_0 = 2^{-6}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$.

Далее, в силу условия (1.8) на Q для любого $\nu>0$ найдется постоянная $C_Q(\nu)>0$ такая, что

$$|(Q^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| \leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_Q(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \qquad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \tag{1.13}$$

При фиксированном ν величина $C_Q(\nu)$ контролируется через d, s, $\|Q\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решетки Γ.

Как в [MSu1, п. 2.8], фиксируем постоянную λ в (1.10) следующим образом:

$$\lambda = (C_Q(\nu_*)+c_2)\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \quad \text{при } \nu_* = 2^{-1}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{1.14}$$

Теперь из (1.12), (1.13) при $\nu=\nu_*$ и (1.14) с учетом (1.6) получаем оценку снизу для формы (1.10):

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{1}{4}\mathfrak{a}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n); \tag{1.15}$$

$$c_* = \frac{1}{4}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{1.16}$$

В силу (1.5), (1.12) и (1.13) при $\nu=1$ выполнено

$$\begin{gathered}\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant C_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_3\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\\ C_* = \frac{5}{4}\alpha_1\|g\|_{L_\infty}+1, \quad c_3 = C_Q(1)+\lambda\|Q_0\|_{L_\infty}+c_2.\end{gathered} \tag{1.17}$$

Таким образом, форма $\mathfrak{b}_\varepsilon$ замкнута и неотрицательна. Отвечающий ей самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор обозначим через B_ε. Формально можно написать

$$B_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d}\left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x})D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{1.18}$$

Отметим, что из (1.17) следует неравенство

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_4\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n); \quad c_4 := \max\{C_*;c_3\}. \tag{1.19}$$

1.5 Эффективная матрица

Эффективный оператор для $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ задается дифференциальным выражением $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$. Здесь g^0 — постоянная эффективная матрица размера $m \times m$. Матрица g^0 выражается через решение вспомогательной задачи на ячейке. Пусть Γ-периодическая $(n \times m)$-матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ — (слабое) решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.20}$$

Тогда эффективная матрица задана выражением

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{1.21}$$

где

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \tag{1.22}$$

Можно показать, что g^0 положительно определена.

На основании (1.20) несложно установить, что

$$\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{1.23}$$

Нам также потребуются оценки для решения задачи (1.20), полученные в [BSu2, (6.28) и п. 7.3]:

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} M_1, \quad M_1 = m^{1/2}(2r_0)^{-1}\alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \tag{1.24}$$

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} M_2, \quad M_2 = m^{1/2}\alpha_0^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{1.25}$$

Отметим оценки для эффективной матрицы, известные в теории усреднения как вилка Фойгта–Рейсса (см., например, [BSu1, гл. 3, теорема 1.5]).

Предложение 1.3. *Пусть g^0 — эффективная матрица* (1.21). *Тогда*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{1.26}$$

В случае $m = n$ справедливо тождество $g^0 = \underline{g}$.

Из (1.26) вытекают неравенства

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.27}$$

Выделим случаи, когда в (1.26) реализуется верхняя или нижняя грань, см. [BSu1, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7].

Предложение 1.4. *Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.28}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$.

Предложение 1.5. *Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.29}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

1.6 Эффективный оператор

Чтобы описать усреднение младших членов оператора B_ε, рассмотрим Γ-периодическую $(n \times n)$-матрицу-функцию $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$, являющуюся решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.30}$$

(Уравнение понимается в слабом смысле.) Отметим сразу оценки, установленные в [Su1, (7.49)–(7.52)]:

$$\|b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{1.31}$$

$$\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1} C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{1.32}$$

$$\|\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{1.33}$$

где $C_a^2 = \sum_{j=1}^d \int_\Omega |a_j(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}$.

Определим постоянные матрицы V и W равенствами

$$V = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}, \tag{1.34}$$

$$W = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{1.35}$$

Тогда эффективный оператор для оператора (1.18) задан выражением

$$B^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) D_j - W + \overline{Q} + \lambda \overline{Q_0}. \tag{1.36}$$

Оператор B^0 — эллиптический оператор второго порядка с постоянными коэффициентами с символом

$$L(\boldsymbol{\xi}) = b(\boldsymbol{\xi})^* g^0 b(\boldsymbol{\xi}) - b(\boldsymbol{\xi})^* V - V^* b(\boldsymbol{\xi}) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) \xi_j + \overline{Q} - W + \lambda \overline{Q_0}. \quad (1.37)$$

Лемма 1.6. *Символ* (1.37) *оператора* (1.36) *подчинен оценкам*

$$c_* |\boldsymbol{\xi}|^2 \mathbf{1}_n \leqslant L(\boldsymbol{\xi}) \leqslant C_L (|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1) \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d. \quad (1.38)$$

Здесь c_* — постоянная (1.16). *Постоянная C_L определена ниже в* (1.42) *и зависит только от исходных данных* (1.9).

Доказательство. Нижняя оценка (1.38) установлена в [MSu1, (2.30)]. Проверим верхнюю оценку. В силу (1.3), (1.27) и (1.37)

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{\xi}) \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} |\boldsymbol{\xi}|^2 \mathbf{1}_n + 2|V| \alpha_1^{1/2} |\boldsymbol{\xi}| \mathbf{1}_n + 2 \Big(\sum_{j=1}^{d} |\overline{a_j}|^2 \Big)^{1/2} |\boldsymbol{\xi}| \mathbf{1}_n \\ + \left(|\overline{Q}| + \lambda |\overline{Q_0}| \right) \mathbf{1}_n. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Мы учли, что матрица (1.35) очевидно неотрицательна. Согласно (1.23), (1.31) и (1.34) выполнено

$$\begin{aligned} |V| &\leqslant |\Omega|^{-1/2} \|g\|_{L_\infty} \|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_V, \\ C_V &= |\Omega|^{-1/2} \alpha_0^{-1/2} C_a n^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{3/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{3/2}. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Ясно, что

$$\sum_{j=1}^{d} |\overline{a_j}|^2 \leqslant |\Omega|^{-1} C_a^2, \quad |\overline{Q}| \leqslant |\Omega|^{-1/s} \|Q\|_{L_s(\Omega)}, \quad |\overline{Q_0}| \leqslant \|Q_0\|_{L_\infty}. \quad (1.41)$$

Теперь из (1.39)–(1.41) вытекает оценка (1.38) с постоянной

$$C_L = \max\{\alpha_1 \|g\|_{L_\infty}; |\Omega|^{-1/s} \|Q\|_{L_s(\Omega)} + \lambda \|Q_0\|_{L_\infty}\} + \alpha_1^{1/2} C_V + |\Omega|^{-1/2} C_a. \quad (1.42)$$

□

Следствие 1.7. *Квадратичная форма $\mathfrak{b}^0$ оператора* (1.36) *удовлетворяет оценкам*

$$c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leqslant \mathfrak{b}^0[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leqslant C_L \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n). \quad (1.43)$$

1.7 Результаты усреднения обобщенной резольвенты

В настоящем пункте мы приводим аппроксимации обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, установленные в [MSu1, теоремы 5.1 и 5.2].

Теорема 1.8 ([MSu1]). *Пусть выполнены условия п.* 1.3–1.6. *Пусть* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta| e^{i\phi}$, $\phi \in (0, 2\pi)$, *причем* $|\zeta| \geqslant 1$. *Положим*

$$c(\phi) = \begin{cases} |\sin \phi|^{-1}, & \phi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ 1, & \phi \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases} \tag{1.44}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 \varepsilon c(\phi)^2 |\zeta|^{-1/2}.$$

Постоянная C_1 *контролируется через исходные данные* (1.9).

Чтобы сформулировать результат об аппроксимации обобщенной резольвенты $(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в класс Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, введем корректор

$$K(\varepsilon; \zeta) = \Big([\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] \Big) S_\varepsilon (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}. \tag{1.45}$$

Корректор (1.45) ограничен как оператор, действующий из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Это нетрудно установить с помощью предложения 1.2 и включений $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Отметим, что $\|\varepsilon K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} = O(1)$ при малом ε и фиксированном ζ.

Теорема 1.9 ([MSu1]). *Пусть выполнены условия теоремы* 1.8. *Пусть* $K(\varepsilon; \zeta)$ — *оператор* (1.45). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad\qquad\qquad \leqslant C_2 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}, \\ &\|\mathbf{D} \left((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon; \zeta) \right)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad\qquad\qquad \leqslant C_3 c(\phi)^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Постоянные C_2 *и* C_3 *контролируются явно через исходные данные* (1.9).

Нам также потребуются оценки, справедливые в более широкой области изменения параметра ζ. Следующий результат представляет собой частный случай теоремы 9.1 из [MSu1].

Теорема 1.10 ([MSu1]). *Пусть выполнены условия п.* 1.3–1.6. *Пусть* $K(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (1.45). *При* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *положим* $\zeta = |\zeta| e^{i\phi}$, $\phi \in (0, 2\pi)$, *и обозначим*

$$\varrho(\zeta) = \begin{cases} c(\phi)^2 |\zeta|^{-2}, & |\zeta| < 1, \\ c(\phi)^2, & |\zeta| \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда при $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *верны оценки*

$$\|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_1 \varrho(\zeta) \varepsilon, \tag{1.46}$$

$$\begin{gathered} \|(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_2 \varrho(\zeta) \varepsilon, \\ \|\mathbf{D}\big((B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon;\zeta)\big)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \big(\widehat{C}_3' + |\zeta + 1|^{1/2} \widehat{C}_3''\big) \varrho(\zeta) \varepsilon. \end{gathered} \tag{1.47}$$

Постоянные $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}_2$, $\widehat{C}_3'$ *и* $\widehat{C}_3''$ *зависят только от исходных данных* (1.9).

Замечание 1.11. *Если в условиях теоремы* 1.10 *матрица-функция* Q_0 *постоянна, то оценка* (1.47) *справедлива при* $\widehat{C}_3'' = 0$. *Т. е. член, содержащий* $|\zeta + 1|^{1/2}$, *в оценке* (1.47) *отсутствует.*

Замечание 1.12. 1) *В* [MSu1] *установлены также аппроксимации операторов* $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, *отвечающих „потокам“, по операторной норме в* $L_2(\mathbb{R}^d)$. 2) *Разумеется, при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *теоремы* 1.8, 1.9 *и* 1.10 *применимы одновременно. При* ϕ, *отделенном от точек* 0 *и* 2π, *и большом* $|\zeta|$ *выгоднее применять теоремы* 1.8 *и* 1.9. *А при ограниченных значениях* $|\zeta|$, *а также при малом* ϕ *или* $2\pi - \phi$ *оценки из теоремы* 1.10 *могут быть предпочтительнее.*

2 Постановка задачи. Основные результаты

2.1 Постановка задачи

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $B_{D,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, формально заданный дифференциальным выражением

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \big(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\big) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \tag{2.1}$$

при условии Дирихле на границе. Точное определение оператора $B_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^d (D_j\mathbf{u}, (a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\ + (Q^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + \lambda(Q_0^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Продолжим $\mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нулем на $\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{O}$. Тогда $\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, и на основании (1.15) и (1.19) выполнены оценки

$$c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_4\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.3}$$

С помощью неравенства Фридрихса отсюда получаем

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*(\mathrm{diam}\,\mathcal{O})^{-2}\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.4}$$

Таким образом, форма $\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}$ замкнута и положительно определена. Отвечающий ей самосопряженный в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оператор мы обозначаем через $B_{D,\varepsilon}$. Отметим оценку, вытекающую из (2.3) и (2.4):

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_5\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \\ c_5 = c_*^{-1/2}\left(1+(\mathrm{diam}\,\mathcal{O})^2\right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Также нам потребуется вспомогательный оператор $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$. Факторизуем

$$Q_0(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*. \tag{2.6}$$

Пусть $\widetilde{B}_{D,\varepsilon}$ — самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, порожденный квадратичной формой

$$\widetilde{\mathfrak{b}}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[f^\varepsilon\mathbf{u}, f^\varepsilon\mathbf{u}] \tag{2.7}$$

на области определения

$$\mathrm{Dom}\,\widetilde{\mathfrak{b}}_{D,\varepsilon} = \{\mathbf{u}\in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) : f^\varepsilon\mathbf{u}\in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\}.$$

Формально, $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} = (f^\varepsilon)^* B_{D,\varepsilon} f^\varepsilon$. Отметим равенство

$$(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} = f^\varepsilon(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(f^\varepsilon)^*. \tag{2.8}$$

Наша цель — найти аппроксимацию обобщенной резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ с двухпараметрическими (по ε и ζ) оценками погрешности. Считаем, что $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Иначе говоря, нас интересует поведение при малом ε обобщенного решения $\mathbf{u}_\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ задачи

$$b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x})) \right)$$
$$+ Q^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) - \zeta Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \mathbf{F}(\mathbf{x}),\ \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_{\partial \mathcal{O}} = 0, \tag{2.9}$$

где $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Имеем

$$\mathbf{u}_\varepsilon = (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \mathbf{F}. \tag{2.10}$$

Лемма 2.1. *Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — обобщенное решение задачи* (2.9). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi) |\zeta|^{-1} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{2.11}$$
$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi) |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.12}$$

В операторных терминах,

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi) |\zeta|^{-1} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty},$$
$$\|\mathbf{D}(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi) |\zeta|^{-1/2}.$$

Здесь $c(\phi)$ — величина (1.44). *Постоянная $\mathcal{C}_1$ определена равенством*

$$\mathcal{C}_1 = 2\alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \left(1 + \|Q_0\|_{L_\infty} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\right)^{1/2}. \tag{2.13}$$

Доказательство. В силу (2.6), (2.8) и неравенства $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} \geqslant 0$ выполнено

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|f\|_{L_\infty}^2 \|(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \operatorname{dist}\{\zeta; \mathbb{R}_+\} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} = c(\phi) |\zeta|^{-1} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

что доказывает (2.11).

Чтобы проверить (2.12), выпишем интегральное тождество для $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta (Q_0^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).$$

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{u}_\varepsilon$ и воспользуемся нижней оценкой (2.3) и уже доказанным результатом (2.11). Получим

$$c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}^2$$
$$\leqslant \left(c(\phi) |\zeta|^{-1} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} + c(\phi)^2 |\zeta|^{-1} \|Q_0\|_{L_\infty} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2.$$

С учетом (1.16) отсюда вытекает неравенство (2.12) с постоянной (2.13). $\square$

2.2 Форма $\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}$

Кроме формы (2.2) нам потребуется квадратичная форма $\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}$, заданная тем же дифференциальным выражением, но на классе $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$:

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{d}(D_j\mathbf{u},(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\ + (Q^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + \lambda(Q_0^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{2.14}$$

Эта форма отвечает задаче Неймана. Соответствующий ей самосопряженный оператор в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначим через $B_{N,\varepsilon}$.

Оценим форму $\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}$ сверху, учитывая (1.4):

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant d\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \sum_{j=1}^{d}\int_{\mathcal{O}}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} + \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ + \int_{\mathcal{O}}|Q^\varepsilon(\mathbf{x})||\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} + \lambda\|Q_0\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{2.15}$$

Воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\int_{\mathcal{O}}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \left(\int_{\mathcal{O}}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^\rho\,d\mathbf{x}\right)^{2/\rho}\|\mathbf{u}\|^2_{L_q(\mathcal{O})}. \tag{2.16}$$

Здесь ρ — показатель из условия (1.7), $q=\infty$ при $d=1$, $q=2\rho/(\rho-2)$ при $d\geqslant 2$. Покроем область $\mathcal{O}$ объединением ячеек решетки $\varepsilon\Gamma$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, имеющих непустое пересечение с $\mathcal{O}$. Через N_ε обозначим количество ячеек в этом покрытии. Ясно, что это объединение ячеек содержится в области $\widetilde{\mathcal{O}}$, представляющей собой $2r_1$-окрестность области $\mathcal{O}$, где $2r_1=\operatorname{diam}\Omega$. Поэтому количество ячеек N_ε можно оценить сверху: $N_\varepsilon\leqslant\mathfrak{c}_1\varepsilon^{-d}$, где величина $\mathfrak{c}_1$ зависит только от области $\mathcal{O}$ и от параметров решетки Γ. Имеем

$$\int_{\mathcal{O}}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^\rho\,d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1\varepsilon^{-d}\int_{\varepsilon\Omega}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^\rho\,d\mathbf{x} = \mathfrak{c}_1\|a_j\|^\rho_{L_\rho(\Omega)}. \tag{2.17}$$

Теперь из (2.16) и (2.17) получаем

$$\int_{\mathcal{O}}|a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1^{2/\rho}\|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)}\|\mathbf{u}\|^2_{L_q(\mathcal{O})}, \quad q:=2\rho/(\rho-2). \tag{2.18}$$

В силу непрерывности вложения $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \hookrightarrow L_q(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\|\mathbf{u}\|_{L_q(\mathcal{O})} \leqslant C(q,\mathcal{O})\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})}, \tag{2.19}$$

где $C(q,\mathcal{O})$ — норма соответствующего оператора вложения. Из (2.18) и (2.19) следует, что

$$\sum_{j=1}^{d}\int_{\mathcal{O}} |a_j^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1^{2/\rho} C(q,\mathcal{O})^2 \widehat{C}_a^2 \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.20}$$

Здесь

$$\widehat{C}_a^2 := \sum_{j=1}^{d} \|a_j\|^2_{L_\rho(\Omega)}.$$

Аналогично (2.16)–(2.20) с учетом (1.8) получаем

$$\int_{\mathcal{O}} |Q^\varepsilon(\mathbf{x})||\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1^{1/s}\|Q\|_{L_s(\Omega)} C(\check{q},\mathcal{O})^2\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \check{q} := 2s/(s-1). \tag{2.21}$$

Из (2.15), (2.20) и (2.21) вытекает оценка

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \mathfrak{c}_2\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.22}$$

где $\mathfrak{c}_2 := 1 + d\alpha_1\|g\|_{L_\infty} + \mathfrak{c}_1^{2/\rho}C(q,\mathcal{O})^2\widehat{C}_a^2 + \mathfrak{c}_1^{1/s}\|Q\|_{L_s(\Omega)}C(\check{q},\mathcal{O})^2 + \lambda\|Q_0\|_{L_\infty}$.

2.3 Усредненная задача

В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^{d}(\overline{a_j}D_j\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\ - 2\mathrm{Re}\,(V\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} - (W\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + (\overline{Q}\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\ + \lambda(\overline{Q_0}\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{2.23}$$

С помощью (1.43), продолжения функции $\mathbf{u}\in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нулем на $\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{O}$ и неравенства Фридрихса несложно убедиться, что форма (2.23) удовлетворяет оценкам

$$c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant C_L\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.24}$$

$$\mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*(\mathrm{diam}\,\mathcal{O})^{-2}\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.25}$$

Отвечающий форме $\mathfrak{b}_D^0$ самосопряженный в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оператор обозначим через B_D^0. Из (2.24) и (2.25) вытекает, что

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_5 \|(B_D^0)^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.26}$$

Здесь постоянная c_5 — та же, что и в (2.5).

В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ оператор B_D^0 задается дифференциальным выражением

$$b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) D_j - W + \overline{Q} + \lambda \overline{Q_0}$$

на области определения $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При этом

$$\|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{c}. \tag{2.27}$$

Здесь постоянная $\widehat{c}$ зависит лишь от исходных данных (1.9) и от области $\mathcal{O}$. Для оправдания этого факта сошлемся на теоремы о повышении гладкости для сильно эллиптических систем (см. [McL, глава 4]).

Замечание 2.2. *Вместо условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ можно было бы наложить неявное требование: ограниченная область $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ с липшицевой границей такова, что справедлива оценка* (2.27). *Для такой области результаты работы остаются в силе. В случае скалярных эллиптических операторов широкие достаточные условия на $\partial\mathcal{O}$, обеспечивающие справедливость оценки* (2.27)*, можно найти в* [KoE] *и* [MaSh, гл. 7] (*в частности, достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O} \in C^\alpha$, $\alpha > 3/2$*).

Факторизуем $\overline{Q_0} = f_0^{-2}$. Отметим, что

$$|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty} = \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}, \quad |f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty} = \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{2.28}$$

В ходе дальнейшего изложения нам потребуется оператор $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$. Отметим равенство

$$(B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} = f_0 (\widetilde{B}_D^0 - \zeta I)^{-1} f_0. \tag{2.29}$$

„Усредненная задача” для задачи (2.9) имеет вид

$$\begin{gathered} b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 - b(\mathbf{D})^* V\mathbf{u}_0 - V^* b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) D_j \mathbf{u}_0 \\ - W\mathbf{u}_0 + \overline{Q}\mathbf{u}_0 + \lambda \overline{Q_0}\mathbf{u}_0 - \zeta \overline{Q_0}\mathbf{u}_0 = \mathbf{F}, \ \mathbf{x} \in \mathcal{O}, \quad \mathbf{u}_0|_{\partial\mathcal{O}} = 0. \end{gathered} \tag{2.30}$$

Тогда $\mathbf{u}_0 = (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\mathbf{F}$.

Лемма 2.3. *Для решения* $\mathbf{u}_0$ *задачи* (2.30) *при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\\
&\|\mathbf{D}\mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi)|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\\
&\|\mathbf{u}_0\|_{H^2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 c(\phi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

Здесь постоянная $\mathcal{C}_1$ *— та же, что в лемме* 2.1, $\mathcal{C}_2 = \widehat{c}\|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}$. *В операторных терминах,*

$$\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{2.31}$$

$$\|\mathbf{D}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1 c(\phi)|\zeta|^{-1/2}, \tag{2.32}$$

$$\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2 c(\phi). \tag{2.33}$$

Доказательство. Оценки (2.31), (2.32) устанавливаются аналогично оценкам из леммы 2.1. Проверим (2.33). Очевидно,

$$\begin{aligned}
&\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\\
&\leqslant \|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\|B_D^0(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{2.34}$$

В силу (2.29) имеем $B_D^0(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = B_D^0 f_0(\widetilde{B}_D^0 - \zeta I)^{-1} f_0 = f_0^{-1}\widetilde{B}_D^0(\widetilde{B}_D^0 - \zeta I)^{-1} f_0$. Тогда

$$\begin{aligned}
\|B_D^0(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} &\leqslant |f_0^{-1}||f_0| \sup_{x\geqslant 0}\frac{x}{|x-\zeta|}\\
&\leqslant \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} c(\phi).
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Мы учли (2.28). Теперь из (2.27), (2.34) и (2.35) вытекает оценка (2.33). $\square$

2.4 Формулировка результатов

Выберем числа ε_0, $\varepsilon_1 \in (0,1]$ согласно следующему условию.

Условие 2.4. *Пусть число* $\varepsilon_0 \in (0,1]$ *таково, что полоску* $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}; \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon\right\}$ *можно покрыть конечным набором окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса* $C^{0,1}$, *распрямляющие границу* $\partial\mathcal{O}$. *Обозначим* $\varepsilon_1 = \varepsilon_0(1+r_1)^{-1}$, *где* $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Ясно, что ε_1 зависит только от области $\mathcal{O}$ и от параметров решетки Γ. Отметим, что для справедливости условия 2.4 достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O}$ была липшицевой. Мы наложили более ограничительное условие $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$, чтобы гарантировать справедливость оценки (2.27).

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (2.9) *при $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. Пусть $\mathbf{u}_0$ — решение „усредненной" задачи* (2.30). *Пусть число ε_1 выбрано из условия* 2.4. *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4 c(\phi)^5 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Здесь $c(\phi)$ — величина (1.44); *постоянная C_4 зависит только от исходных данных* (1.9) *и от области $\mathcal{O}$. В операторных терминах,*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4 c(\phi)^5 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}. \quad (2.36)$$

Чтобы аппроксимировать решение в классе Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, введем корректор. Для этого фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O} : H^l(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad l \in \mathbb{Z}_+. \quad (2.37)$$

Такой „универсальный" оператор продолжения существует для любой ограниченной области с липшицевой границей (см. [St] или [R]). При этом

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^l(\mathcal{O})\to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_\mathcal{O}^{(l)}, \quad (2.38)$$

где постоянная $C_\mathcal{O}^{(l)}$ зависит лишь от l и от области $\mathcal{O}$. Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Положим

$$K_D(\varepsilon;\zeta) = R_\mathcal{O}[\Lambda^\varepsilon]S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + R_\mathcal{O}[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]S_\varepsilon P_\mathcal{O}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \quad (2.39)$$

Непрерывность оператора $K_D(\varepsilon;\zeta) : L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ проверяется аналогично непрерывности оператора (1.45).

Положим $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_\mathcal{O}\mathbf{u}_0$. Через $\mathbf{v}_\varepsilon$ обозначим первое приближение к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (2.9):

$$\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon := \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0, \quad (2.40)$$

$$\mathbf{v}_\varepsilon := \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon|_\mathcal{O}. \quad (2.41)$$

Т. е. $\mathbf{v}_\varepsilon = (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\mathbf{F} + \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}$, где $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — оператор (2.39).

Теорема 2.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.5. *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ*-периодические решения задач* (1.20) *и* (1.30) *соответственно,* S_ε — *оператор сглаживания по Стеклову* (1.1), *и пусть* $P_\mathcal{O}$ — *оператор продолжения* (2.37). *Положим* $\widetilde{\mathbf{u}}_0 = P_\mathcal{O}\mathbf{u}_0$. *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (2.40), (2.41). *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \bigl(C_5 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_6 c(\phi)^4\varepsilon\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.42}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant C_5 c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_6 c(\phi)^4\varepsilon,\end{aligned} \tag{2.43}$$

где $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (2.39). *Пусть матрица-функция* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *определена в* (1.22). *Для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon := g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon\bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \bigl(\widetilde{C}_5 c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_6 c(\phi)^4\varepsilon\bigr)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{2.44}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \widetilde{C}_5 c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_6 c(\phi)^4\varepsilon.\end{aligned}$$

Здесь

$$G(\varepsilon;\zeta) := \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon S_\varepsilon P_\mathcal{O}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.$$

Постоянные C_5, C_6, $\widetilde{C}_5$ *и* $\widetilde{C}_6$ *зависят только от исходных данных* (1.9) *и от области* $\mathcal{O}$.

Первое приближение $\mathbf{v}_\varepsilon$ к решению $\mathbf{u}_\varepsilon$ не удовлетворяет условию Дирихле на $\partial\mathcal{O}$: $\mathbf{v}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon\bigl(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\bigr)|_{\partial\mathcal{O}}$. Рассмотрим „поправку” $\mathbf{w}_\varepsilon$ — решение задачи

$$B_\varepsilon\mathbf{w}_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon\mathbf{w}_\varepsilon = 0 \text{ в } \mathcal{O}, \quad \mathbf{w}_\varepsilon|_{\partial\mathcal{O}} = \varepsilon\bigl(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\bigr)|_{\partial\mathcal{O}}. \tag{2.45}$$

Уравнение понимается в слабом смысле — как интегральное тождество для функции $\mathbf{w}_\varepsilon \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$:

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{w}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = 0, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.46}$$

Поправку $\mathbf{w}_\varepsilon$ часто называют „корректором типа пограничного слоя". Допуская некоторую вольность, наряду с $\mathbf{w}_\varepsilon$ будем пользоваться обозначением $\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot;\zeta)$ для решения задачи (2.45). Введем оператор, переводящий $\mathbf{F}$ в $\mathbf{w}_\varepsilon$:

$$\varepsilon W_D(\varepsilon;\zeta) : L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \ni \mathbf{F} \to \mathbf{w}_\varepsilon(\cdot;\zeta) \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{2.47}$$

Найдем более явное выражение для оператора $W_D(\varepsilon;\zeta)$. Ясно, что функция

$$\mathbf{r}_\varepsilon(\mathbf{x};\zeta) := \mathbf{w}_\varepsilon(\mathbf{x};\zeta) - \varepsilon\big(K_D(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}\big)(\mathbf{x}) \tag{2.48}$$

лежит в $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и удовлетворяет тождеству

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{r}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon\mathbf{r}_\varepsilon,\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = \varepsilon\mathcal{I}(\varepsilon;\zeta)[\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}], \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.49}$$

где

$$\mathcal{I}(\varepsilon;\zeta)[\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}] := -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[K_D(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}] + \zeta(Q_0^\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.50}$$

При фиксированном $\mathbf{F} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ равенство (2.50) задает антилинейный непрерывный функционал над $\boldsymbol{\eta} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Этот функционал можно отождествить с элементом из $H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Этот элемент зависит от $\mathbf{F}$ линейно, обозначим его $T(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}$. Таким образом, равенство

$$\mathcal{I}(\varepsilon;\zeta)[\mathbf{F},\boldsymbol{\eta}] = (T(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F},\boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{2.51}$$

(справа подразумевается распространение скалярного произведения в L_2 на пары из $H^{-1}\times H^1_0$) корректно определяет линейный непрерывный оператор $T(\varepsilon;\zeta) : L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Теперь согласно (2.49) и (2.51) можно записать

$$\mathbf{r}_\varepsilon = \varepsilon(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}T(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}, \tag{2.52}$$

где обобщенная резольвента распространена до непрерывного оператора, действующего из $H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

В силу (2.48) и (2.52) выполнено

$$\mathbf{w}_\varepsilon(\cdot;\zeta) = \varepsilon\big(K_D(\varepsilon;\zeta) + (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}T(\varepsilon;\zeta)\big)\mathbf{F},$$

а тогда (см. (2.47))

$$W_D(\varepsilon;\zeta) = K_D(\varepsilon;\zeta) + (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}T(\varepsilon;\zeta). \tag{2.53}$$

Следующая теорема показывает, что при учете поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ погрешность приближения решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ имеет точный порядок $O(\varepsilon)$.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon$ — *решение задачи* (2.45). *Пусть* $W_D(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (2.53). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon+\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant C_7 c(\phi)^4\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{2.54}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)+\varepsilon W_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&\leqslant C_7 c(\phi)^4\varepsilon.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Постоянная C_7 *зависит только от исходных данных* (1.9) *и от области* $\mathcal{O}$.

3 Вспомогательные утверждения

3.1 Оценки в окрестности границы

В настоящем пункте приводятся вспомогательные утверждения, связанные с оценками интегралов по узкой окрестности $\partial\mathcal{O}$.

Лемма 3.1. *Пусть справедливо условие* 2.4. *Обозначим* $B_\varepsilon=(\partial\mathcal{O})_\varepsilon\cap\mathcal{O}$. *Тогда имеют место следующие утверждения:*
1°. *Для любой функции* $u\in H^1(\mathcal{O})$ *справедлива оценка*

$$\int_{B_\varepsilon}|u|^2\,d\mathbf{x}\leqslant\beta\varepsilon\|u\|_{H^1(\mathcal{O})}\|u\|_{L_2(\mathcal{O})},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0.$$

2°. *Для любой функции* $u\in H^1(\mathbb{R}^d)$ *справедлива оценка*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|u|^2\,d\mathbf{x}\leqslant\beta\varepsilon\|u\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|u\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0.$$

Постоянная β *зависит только от области* $\mathcal{O}$.

Лемма 3.2. *Пусть выполнено условие* 2.4. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ — Γ-*периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$ *такая, что* $f\in L_2(\Omega)$. *Пусть* S_ε — *оператор* (1.1). *Обозначим* $\beta_*=\beta(1+r_1)$, *где* $2r_1=\operatorname{diam}\Omega$. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *для любой функции* $\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *справедлива оценка*

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|f^\varepsilon(\mathbf{x})|^2|(S_\varepsilon\mathbf{u})(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x}\leqslant\beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|f\|^2_{L_2(\Omega)}\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Для области $\mathcal{O}$ класса C^1 утверждения лемм 3.1 и 3.2 установлены в [PSu, §5]. Справедливость этих результатов в случае, когда область $\mathcal{O}$ удовлетворяет менее ограничительному условию 2.4, отмечена в [Su5, леммы 3.5 и 3.6].

3.2 Свойства матриц-функций Λ и $\widetilde{\Lambda}$

Следующий результат установлен в [PSu, следствие 2.4].

Лемма 3.3. *Пусть Γ-периодическое решение $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (1.20) ограничено: $\Lambda \in L_\infty$. Тогда для любой функции $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ при $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \beta_1 \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \beta_2 \varepsilon^2 \|\Lambda\|^2_{L_\infty} \|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Постоянные β_1 и β_2 зависят от m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ и $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Следующее утверждение можно получить с помощью неравенства Гёльдера и теоремы вложения; ср. [MSu1, лемма 3.5].

Лемма 3.4. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$ такая, что*

$$f \in L_p(\Omega), \quad p = 2 \text{ при } d = 1, \quad p > 2 \text{ при } d = 2, \quad p \geqslant d \text{ при } d \geqslant 3. \quad (3.1)$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ оператор $[f^\varepsilon]$ непрерывно отображает $H^1(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и $\|[f^\varepsilon]\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|f\|_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q}, \Omega)$, где $C(\widehat{q}, \Omega)$ — норма оператора вложения $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\widehat{q}}(\Omega)$. Здесь $\widehat{q} = \infty$ при $d = 1$ и $\widehat{q} = 2p(p-2)^{-1}$ при $d \geqslant 2$.

Следующий результат получен в [MSu1, следствие 3.6].

Лемма 3.5. *Пусть Γ-периодическое решение $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ задачи (1.30) удовлетворяет условию (3.1). Тогда при любом $u \in H^2(\mathbb{R}^d)$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x} \leqslant \widetilde{\beta}_1 \|u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{\beta}_2 \varepsilon^2 \|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q}, \Omega)^2 \|\mathbf{D}u\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.$$

Постоянные $\widetilde{\beta}_1$ и $\widetilde{\beta}_2$ зависят только от n, d, α_0, α_1, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от норм $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, а также от параметров решетки Γ.

3.3 Лемма о $Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}$

Доказательство следующего утверждения совершенно аналогично доказательству леммы 3.7 из [MSu1].

Лемма 3.6. *Пусть $Q_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n \times n)$-матрица-функция, причем $Q_0 \in L_\infty$, и пусть $\overline{Q_0} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega Q_0(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}$. Тогда оператор $[Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}]$ умножения на матрицу-функцию $Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) - \overline{Q_0}$ непрерывен из $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^{-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и справедлива оценка*

$$\|[Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0}]\|_{H^1(\mathcal{O}) \to H^{-1}(\mathcal{O})} \leqslant C_{Q_0}\varepsilon. \tag{3.2}$$

Постоянная C_{Q_0} зависит от d, $\|Q_0\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Доказательство. Так как $Q_0 - \overline{Q_0}$ — это ограниченная периодическая матрица-функция с нулевым средним значением, справедливо представление

$$Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}) - \overline{Q_0} = -\varepsilon \sum_{j=1}^d D_j h_j^\varepsilon(\mathbf{x}), \tag{3.3}$$

где $h_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодические матрицы-функции размера $n \times n$, причем $\|h_j\|_{L_\infty} \leqslant \widehat{\mathfrak{c}}\|Q_0\|_{L_\infty}$. Здесь постоянная $\widehat{\mathfrak{c}}$ зависит лишь от d и от параметров решетки Γ. (Подробнее см. [MSu1].)

Пусть $\mathbf{F} \in H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В силу (3.3) имеем

$$\begin{aligned}
\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\mathbf{F}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} &= \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \frac{\left|\left((Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\mathbf{F}, \mathbf{v}\right)_{L_2(\mathcal{O})}\right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathcal{O})}} \\
&\leqslant \varepsilon \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \frac{\sum_{j=1}^d \left|\left((D_j h_j^\varepsilon)\mathbf{F}, \mathbf{v}\right)_{L_2(\mathcal{O})}\right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathcal{O})}}.
\end{aligned}$$

С помощью интегрирования по частям отсюда получаем

$$\begin{aligned}
\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\mathbf{F}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \leqslant{}& \varepsilon \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \frac{\sum_{j=1}^d \left|\left(h_j^\varepsilon \mathbf{F}, D_j \mathbf{v}\right)_{L_2(\mathcal{O})}\right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathcal{O})}} \\
&+ \varepsilon \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)} \frac{\sum_{j=1}^d \left|\left(h_j^\varepsilon D_j \mathbf{F}, \mathbf{v}\right)_{L_2(\mathcal{O})}\right|}{\|\mathbf{v}\|_{H^1(\mathcal{O})}}.
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Справедливы оценки

$$\sum_{j=1}^{d} \left|(h_j^\varepsilon \mathbf{F}, D_j \mathbf{v})_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant C_h \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{D}\mathbf{v}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.5}$$

$$\sum_{j=1}^{d} \left|(h_j^\varepsilon D_j \mathbf{F}, \mathbf{v})_{L_2(\mathcal{O})}\right| \leqslant C_h \|\mathbf{D}\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{3.6}$$

где $C_h^2 = \operatorname*{ess\,sup}_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d} \sum_{j=1}^d |h_j(\mathbf{x})|^2$. Отметим неравенство $C_h \leqslant \widetilde{\mathfrak{c}} \|Q_0\|_{L_\infty}$ с постоянной $\widetilde{\mathfrak{c}}$, зависящей лишь от d и от параметров решетки Γ.

Теперь из (3.4)–(3.6) вытекает оценка (3.2) с постоянной $C_{Q_0} = 2C_h$. $\square$

4 Доказательство теоремы 2.7. Начало доказательства теорем 2.5 и 2.6

При доказательстве теорем 2.5 и 2.6 мы следуем схеме из [Su5]. Метод основан на использовании результатов для задачи в $\mathbb{R}^d$ и выделении поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ типа пограничного слоя. В этом параграфе мы установим теорему 2.7 и редуцируем доказательство теорем 2.5 и 2.6 к оценке поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$.

4.1 Первый этап доказательства. Ассоциированная задача в $\mathbb{R}^d$

В силу леммы 2.3 и (2.38) с учетом $|\zeta| \geqslant 1$ имеем

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(0)} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} c(\phi) |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} =: k_1 c(\phi) |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C_{\mathcal{O}}^{(1)} \left(\mathcal{C}_1 + \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}\right) c(\phi) |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &=: k_2 c(\phi) |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(2)} \mathcal{C}_2 c(\phi) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} =: k_3 c(\phi) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.3}$$

Положим

$$\widetilde{\mathbf{F}} := (B^0 - \zeta \overline{Q_0}) \widetilde{\mathbf{u}}_0. \tag{4.4}$$

Тогда $\widetilde{\mathbf{F}} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\widetilde{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{F}$. Из (1.38), (4.1) и (4.3) вытекает, что

$$\|\widetilde{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_L \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + |\zeta| |\overline{Q_0}| \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\widetilde{F}} c(\phi) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \qquad (4.5)$$
$$C_{\widetilde{F}} := k_3 C_L + k_1 \|Q_0\|_{L_\infty}.$$

Пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ — решение уравнения в $\mathbb{R}^d$:

$$B_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = \widetilde{\mathbf{F}}, \qquad (4.6)$$

т. е. $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon = (B_\varepsilon - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} \widetilde{\mathbf{F}}$. Объединяя (4.4)–(4.6) и применяя теоремы 1.8 и 1.9, находим, что при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$ справедливы оценки

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_1 C_{\widetilde{F}} \varepsilon c(\phi)^3 |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \qquad (4.7)$$
$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_2 C_{\widetilde{F}} c(\phi)^3 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \qquad (4.8)$$
$$\|\mathbf{D}(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_3 C_{\widetilde{F}} c(\phi)^3 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \qquad (4.9)$$

Теперь из (4.8) и (4.9) с учетом $|\zeta| \geqslant 1$ следует, что

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant (C_2 + C_3) C_{\widetilde{F}} c(\phi)^3 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \qquad (4.10)$$

4.2 Доказательство теоремы 2.7

Обозначим $\mathbf{V}_\varepsilon := \mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon$. С учетом (2.9) и (2.45), (2.46) функция $\mathbf{V}_\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ удовлетворяет тождеству

$$\begin{aligned} &\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta (Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta (Q_0^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{v}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] + \zeta (Q_0^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= (\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} - \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{v}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] + \zeta (Q_0^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \end{aligned} \qquad (4.11)$$

Продолжим функцию $\boldsymbol{\eta}$ нулем на $\mathbb{R}^d \backslash \mathcal{O}$, сохраняя то же обозначение. Тогда $\boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Вспоминая, что функция $\widetilde{\mathbf{F}}$ является продолжением функции $\mathbf{F}$, и применяя (4.6), находим

$$(\mathbf{F}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = (\widetilde{\mathbf{F}}, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \mathfrak{b}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta (Q_0^\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Далее, так как функция $\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon$ — продолжение функции $\mathbf{v}_\varepsilon$, то

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{v}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta (Q_0^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = \mathfrak{b}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta (Q_0^\varepsilon \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Обозначим

$$\begin{aligned} I_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}] := \mathfrak{b}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta (Q_0^\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)} - \mathfrak{b}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] + \zeta (Q_0^\varepsilon \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}&, \\ 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad \boldsymbol{\eta} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)&. \end{aligned} \qquad (4.12)$$

Тогда тождество (4.11) принимает вид

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = I_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}], \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{4.13}$$

Оценим величину (4.12) по модулю, учитывая (1.19):

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| &\leqslant |\mathfrak{b}_\varepsilon[\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}]| + |\zeta||(Q_0^\varepsilon(\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon), \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| \\ &\leqslant c_4 \|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+ |\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2} \|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Применим (4.8) и (4.10):

$$\begin{aligned} |I_\varepsilon[\boldsymbol{\eta}]| &\leqslant C_8 c(\phi)^3 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\eta}\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+ C_9 c(\phi)^3 \varepsilon |\zeta|^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\eta}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $C_8 := c_4(C_2 + C_3) C_{\widetilde{F}}$, $C_9 := \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2} C_2 C_{\widetilde{F}}$.

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ в (4.13), возьмем мнимую часть и воспользуемся оценкой (4.14):

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\,\zeta| (Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} = |\mathrm{Im}\, I_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon]| &\leqslant C_8 c(\phi)^3 \varepsilon \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ C_9 |\zeta|^{1/2} c(\phi)^3 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

При $\mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0$ (а тогда $\mathrm{Im}\,\zeta \neq 0$) отсюда выводим

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\,\zeta| (Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant C_8 c(\phi)^3 \varepsilon \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ + \frac{1}{2} |\mathrm{Im}\,\zeta| (Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &+ \frac{1}{2} C_9^2 \frac{|\zeta|}{|\mathrm{Im}\,\zeta|} c(\phi)^6 \varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $\mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0$ выполнено

$$\begin{aligned} (Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 2 C_8 c(\phi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1} \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ C_9^2 c(\phi)^8 |\zeta|^{-1} \varepsilon^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Если $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$, то в равенстве (4.13) при $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$ возьмем вещественную часть. При рассматриваемых значениях ζ имеем $c(\phi) = 1$ и с учетом (4.14) получаем

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\,\zeta| (Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon] - \mathrm{Re}\,\zeta (Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\ \leqslant C_8 \varepsilon \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} &+ C_9 |\zeta|^{1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Складывая (4.15) и (4.17), приходим к неравенству

$$
\begin{aligned}
|\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 2C_8\varepsilon \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + 2C_9|\zeta|^{1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta < 0.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
|\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 2C_8\varepsilon \|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + \frac{1}{2}|\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + 2C_9^2\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta < 0.
\end{aligned}
$$

Следовательно, при $\operatorname{Re}\zeta < 0$ справедлива оценка

$$
(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4C_8\varepsilon|\zeta|^{-1}\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + 4C_9^2\varepsilon^2|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.
$$

В итоге отсюда и из (4.16) следует, что при всех рассматриваемых значениях ζ выполнено

$$
\begin{aligned}
(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 4C_8 c(\phi)^4\varepsilon|\zeta|^{-1}\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + 4C_9^2 c(\phi)^8\varepsilon^2|\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{4.18}
$$

Теперь из (4.13) при $\boldsymbol{\eta} = \mathbf{V}_\varepsilon$, (4.14) и (4.18) получаем

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon] &\leqslant |I_\varepsilon[\mathbf{V}_\varepsilon]| + |\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant C_8 c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad + C_9|\zeta|^{1/2}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\mathbf{V}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\zeta|(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant 7C_8 c(\phi)^4\varepsilon\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \frac{13}{2}C_9^2 c(\phi)^8\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
$$

С учетом (2.5) отсюда вытекает, что

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant 7c_5^2 C_8 c(\phi)^4\varepsilon\|\mathbf{V}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \frac{13}{2}c_5^2 C_9^2 c(\phi)^8\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \frac{1}{2}\|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} + \frac{49}{2}c_5^4 C_8^2 c(\phi)^8\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \frac{13}{2}c_5^2 C_9^2 c(\phi)^8\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
$$

Следовательно,

$$
\|\mathbf{V}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_7^2 c(\phi)^8\varepsilon^2\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad C_7^2 := 49c_5^4 C_8^2 + 13c_5^2 C_9^2,
$$

что влечет (2.54). $\square$

Кроме оценки (2.54) для H^1-нормы функции $\mathbf{V}_\varepsilon$ нам потребуется также оценка L_2-нормы этой функции.

Лемма 4.1. *В условиях теоремы* 2.7 *при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ *и* $|\zeta| \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon + \mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{10} c(\phi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.19}$$

Постоянная C_{10} *зависит только от исходных данных* (1.9) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Из (2.54) и (4.18) получаем

$$(Q_0^\varepsilon \mathbf{V}_\varepsilon, \mathbf{V}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4(C_7 C_8 + C_9^2) c(\phi)^8 \varepsilon^2 |\zeta|^{-1} \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда вытекает (4.19) с постоянной $C_{10} = 2\|Q_0^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} (C_7 C_8 + C_9^2)^{1/2}$. $\square$

4.3 Выводы

1) Из (2.54) следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_7 c(\phi)^4 \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{4.20}$$

Поэтому для доказательства оценки (2.42) (главного результата теоремы 2.6) достаточно оценить $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}$ подходящим образом.
2) Из (4.19) следует, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{10} c(\phi)^4 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{4.21}$$

Имеем

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon \|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon \|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{4.22}$$

Из предложения 1.2 и (1.24), (1.32) вытекают оценки

$$\|[\Lambda^\varepsilon] S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M_1, \tag{4.23}$$

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon] S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{M}_1, \tag{4.24}$$

$$\widetilde{M}_1 := |\Omega|^{-1/2} (2r_0)^{-1} C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{4.25}$$

С учетом (1.3) из (4.22)–(4.24) получаем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \varepsilon M_1 \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon \widetilde{M}_1 \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon (M_1^2 \alpha_1 + \widetilde{M}_1^2)^{1/2} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

В силу (4.2) отсюда следует, что

$$\|\mathbf{v}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon (M_1^2 \alpha_1 + \widetilde{M}_1^2)^{1/2} k_2 c(\phi) |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \qquad (4.26)$$

Теперь неравенства (4.21) и (4.26) влекут

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{11} \varepsilon c(\phi)^4 |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \qquad (4.27)$$
$$C_{11} := C_{10} + (M_1^2 \alpha_1 + \widetilde{M}_1^2)^{1/2} k_2.$$

Таким образом, доказательство теоремы 2.5 сводится к подходящей оценке для $\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$.

5 Доказательство $L_2 \to H^1$-теоремы

5.1 Локализация вблизи границы

Напомним обозначение

$$(\partial \mathcal{O})_\varepsilon = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}; \partial \mathcal{O}\} < \varepsilon\}.$$

Фиксируем такую гладкую срезку $\theta_\varepsilon(\mathbf{x})$ в $\mathbb{R}^d$, что

$$\begin{gathered} \theta_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \ \operatorname{supp} \theta_\varepsilon \subset (\partial \mathcal{O})_\varepsilon, \ 0 \leqslant \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \leqslant 1, \\ \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \partial \mathcal{O}; \ \varepsilon |\nabla \theta_\varepsilon(\mathbf{x})| \leqslant \mu = \mathrm{Const}. \end{gathered} \qquad (5.1)$$

Постоянная μ зависит только от d и от области $\mathcal{O}$. Рассмотрим в $\mathbb{R}^d$ функцию

$$\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon \theta_\varepsilon(\mathbf{x}) \left(\Lambda^\varepsilon(\mathbf{x}) (S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon(\mathbf{x}) (S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0)(\mathbf{x}) \right). \qquad (5.2)$$

Лемма 5.1. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ *— функция* (5.2). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi) \left(C_{12} |\zeta|^{1/2} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + C_{13} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \right). \qquad (5.3)$$

Постоянные C_{12} *и* C_{13} *зависят только от исходных данных* (1.9) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Имеем $\mathbf{w}_\varepsilon|_{\partial \mathcal{O}} = \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon|_{\partial \mathcal{O}}$. Поэтому $\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon := \mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. С учетом (2.46) справедливо тождество

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta (Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] + \zeta (Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})},$$
$$\boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \qquad (5.4)$$

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon$ в равенство (5.4) и возьмем мнимую часть:

$$\begin{aligned} &|\mathrm{Im}\,\zeta|(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant |\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon]| + |\zeta||(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}| \\ &\leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + |\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{5.5}$$

Мы учли (2.22). При $\mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0$ (тогда $\mathrm{Im}\,\zeta \neq 0$) отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} |\mathrm{Im}\,\zeta|(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + \frac{1}{2} \frac{|\zeta|^2}{|\mathrm{Im}\,\zeta|} \|Q_0\|_{L_\infty} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ + \frac{1}{2} |\mathrm{Im}\,\zeta| \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} (Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathfrak{c}_2 |\zeta|^{-1} c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ + \|Q_0\|_{L_\infty} c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0. \end{aligned}$$

Если $\mathrm{Re}\,\zeta < 0$, то возьмем вещественную часть равенства и получим

$$\begin{aligned} |\mathrm{Re}\,\zeta|(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ + |\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Сложим (5.5) и (5.6):

$$\begin{aligned} |\zeta|(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant 2\mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+ 2|\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty}^{1/2} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant 2\mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &+ \frac{1}{2} |\zeta| (Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + 2|\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4\mathfrak{c}_2 |\zeta|^{-1} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 4 \|Q_0\|_{L_\infty} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathrm{Re}\,\zeta < 0.$$

В итоге при всех рассматриваемых значениях ζ получаем

$$\begin{aligned} (Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant 4\mathfrak{c}_2 |\zeta|^{-1} c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ + 4 \|Q_0\|_{L_\infty} c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned}$$

Теперь из (5.4) при $\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon$ с учетом (2.22) вытекает оценка

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon] \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\
&+ |\zeta| \|Q_0\|^{1/2}_{L_\infty} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2} \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + |\zeta| (Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 2|\zeta| (Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} + |\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant 9\mathfrak{c}_2 c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 9|\zeta| \|Q_0\|_{L_\infty} c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

С учетом (2.5) получаем

$$\begin{aligned}
&\|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_5^2 \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon] \\
&\leqslant 9\mathfrak{c}_2 c_5^2 c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 9|\zeta| c_5^2 \|Q_0\|_{L_\infty} c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \frac{1}{2} \|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} + \frac{81}{2} \mathfrak{c}_2^2 c_5^4 c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{H^1(\mathcal{O})} + 9c_5^2 \|Q_0\|_{L_\infty} |\zeta| c(\phi)^2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant 9\mathfrak{c}_2 c_5^2 c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} + 3\sqrt{2} c_5 \|Q_0\|^{1/2}_{L_\infty} |\zeta|^{1/2} c(\phi) \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вспоминая, что $\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$, получаем (5.3) с постоянными $C_{13} = 9\mathfrak{c}_2 c_5^2 + 1$, $C_{12} = 3\sqrt{2} c_5 \|Q_0\|^{1/2}_{L_\infty}$. □

5.2 Оценки функции $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$

Лемма 5.2. *Пусть* $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ *— функция* (5.2). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *справедливы оценки*

$$\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{14} \varepsilon c(\phi) |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.7}$$

$$\|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c(\phi) \left(C_{15} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + C_{16} \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{5.8}$$

Постоянные C_{14}, C_{15} *и* C_{16} *зависят только от исходных данных* (1.9) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Начнем с проверки оценки (5.7). Учитывая (1.3), (4.23), (4.24), (5.1), (5.2), находим:

$$\begin{aligned}
\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \varepsilon \|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&+ \varepsilon \|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \varepsilon M_1 \alpha_1^{1/2} \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon \widetilde{M}_1 \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (4.1), (4.2) получаем оценку (5.7) с постоянной $C_{14} = M_1\alpha_1^{1/2}k_2 + \widetilde{M}_1 k_1$.

Перейдем к доказательству оценки (5.8). Рассмотрим производные:

$$\begin{aligned}\partial_j \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon = \varepsilon(\partial_j\theta_\varepsilon)(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0)\\ + \theta_\varepsilon\left((\partial_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + (\partial_j\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\right)\\ + \varepsilon\theta_\varepsilon(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 3\varepsilon^2\|(\nabla\theta_\varepsilon)(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ + 3\left\|\theta_\varepsilon\big((\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + (\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\big)\right\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ + 3\varepsilon^2\sum_{j=1}^d\|\theta_\varepsilon(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\partial_j\widetilde{\mathbf{u}}_0)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (5.9) через $J_1(\varepsilon)$, $J_2(\varepsilon)$, $J_3(\varepsilon)$. Для оценки $J_1(\varepsilon)$ воспользуемся (5.1) и леммой 3.2:

$$\begin{aligned}J_1(\varepsilon) &\leqslant 3\mu^2\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0|^2\,d\mathbf{x}\\ &\leqslant 6\mu^2\left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0|^2\,d\mathbf{x} + \int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0|^2\,d\mathbf{x}\right)\\ &\leqslant 6\mu^2\beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &+ 6\mu^2\beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\end{aligned} \tag{5.10}$$

Согласно (1.32) и (4.25) выполнено $|\Omega|^{-1/2}\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{M}_1$. Отсюда и из (1.3), (1.24), (5.10) получаем

$$J_1(\varepsilon) \leqslant 6\mu^2\beta_*\varepsilon\left(M_1^2\alpha_1\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{M}_1^2\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right), \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.$$

Применяя (4.1)–(4.3) и учитывая, что $|\zeta|\geqslant 1$, находим

$$J_1(\varepsilon) \leqslant \kappa_1 c(\phi)^2|\zeta|^{-1/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1. \tag{5.11}$$

Здесь $\kappa_1 = 6\mu^2\beta_* k_2(M_1^2\alpha_1 k_3 + \widetilde{M}_1^2 k_1)$.

В силу (1.33) справедлива оценка $|\Omega|^{-1/2}\|\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant \widetilde{M}_2$,

$$\widetilde{M}_2 := |\Omega|^{-1/2} C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{5.12}$$

Теперь член $J_2(\varepsilon)$ оценивается аналогично на основании леммы 3.2 и (1.3), (1.25), (4.1)–(4.3), (5.1). В результате получаем

$$J_2(\varepsilon) \leqslant \kappa_2 c(\phi)^2 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{5.13}$$

где $\kappa_2 = 6\beta_* k_2 (M_2^2 k_3 \alpha_1 + \widetilde{M}_2^2 k_1)$.

Наконец, член $J_3(\varepsilon)$ оценим на основании (1.3), (4.23), (4.24) и (5.1):

$$\begin{aligned} J_3(\varepsilon) &\leqslant 6\varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \left(\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \partial_j \widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \right) \\ &\leqslant 6\varepsilon^2 \left(M_1^2 \alpha_1 \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{M}_1^2 \|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \right). \end{aligned}$$

Отсюда и из (4.2), (4.3) с учетом $|\zeta| \geqslant 1$ получаем

$$J_3(\varepsilon) \leqslant \kappa_3 \varepsilon^2 c(\phi)^2 \|\mathbf{F}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \tag{5.14}$$

где $\kappa_3 = 6M_1^2 \alpha_1 k_3^2 + 6\widetilde{M}_1^2 k_2^2$. Теперь из (5.9), (5.11), (5.13), (5.14) вытекает оценка (5.8) с постоянными $C_{15} = (\kappa_1 + \kappa_2)^{1/2}$, $C_{16} = \kappa_3^{1/2}$. $\square$

5.3 Завершение доказательства теоремы 2.6

Из лемм 5.1 и 5.2 вытекает оценка

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant c(\phi)^2 \left(C_{13} C_{15} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + (C_{12} C_{14} + C_{13} C_{14} + C_{13} C_{16}) \varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned}$$

справедливая при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. Вместе с (4.20) это влечет (2.42) с постоянными $C_5 = C_{13} C_{15}$, $C_6 = C_7 + C_{12} C_{14} + C_{13} C_{14} + C_{13} C_{16}$.

Остается проверить (2.44). Из (2.42) с учетом (1.4) следует, что

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} (C_5 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + C_6 c(\phi)^4 \varepsilon) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Имеем

$$\begin{aligned} g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{v}_\varepsilon &= g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0 + g^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0 \\ &\quad + \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l (\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0 + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l \widetilde{\mathbf{u}}_0). \end{aligned} \tag{5.16}$$

Четвертый член в (5.16) оценим на основании (1.4), (4.23), (4.24):

$$\Big\|\varepsilon\sum_{l=1}^{d} g^\varepsilon b_l(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0)\Big\|_{L_2(\mathcal{O})}$$
$$\leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\left(M_1\sum_{l=1}^{d}\|b(\mathbf{D})D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widetilde{M}_1\sum_{l=1}^{d}\|D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right). \tag{5.17}$$

С учетом (1.3), (4.2), (4.3) и условия $|\zeta|\geqslant 1$ отсюда получаем оценку

$$\Big\|\varepsilon\sum_{l=1}^{d} g^\varepsilon b_l(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l\widetilde{\mathbf{u}}_0)\Big\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_{17}c(\phi)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \tag{5.18}$$

с постоянной

$$C_{17}=\|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}\big(M_1\alpha_1^{1/2}k_3+\widetilde{M}_1k_2\big).$$

Далее, в силу предложения 1.1 выполнено

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0-g^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant \varepsilon r_1\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{5.19}$$

С учетом (1.3) и (4.3) отсюда следует, что

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0-g^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C_{18}\varepsilon c(\phi)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{5.20}$$

где $C_{18}=r_1\alpha_1^{1/2}k_3\|g\|_{L_\infty}$. Теперь из (1.22), (5.15), (5.16), (5.18) и (5.20) вытекает неравенство (2.44) с постоянными $\widetilde{C}_5=(d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_5$, $\widetilde{C}_6=(d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_6+C_{17}+C_{18}$.

Теорема 2.6 полностью доказана.

6 Доказательство $L_2\to L_2$-теоремы

6.1 Оценка поправки $\mathbf{w}_\varepsilon$ по L_2-норме

Лемма 6.1. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon$ *— решение задачи* (2.45). *Пусть число* ε_1 *выбрано согласно условию* 2.4. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant c(\phi)^5(C_{19}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}+C_{20}\varepsilon^2)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.1}$$

Постоянные C_{19} *и* C_{20} *зависят только от исходных данных* (1.9) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Подставим в тождество (5.4) для функции $\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon = \mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ в качестве $\boldsymbol{\eta}$ функцию $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon = (B_{D,\varepsilon} - \zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\Phi}$, где $\boldsymbol{\Phi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда левая часть (5.4) запишется в виде

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon] - \zeta(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} = (\boldsymbol{\varrho}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следовательно,

$$(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} = -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon] + \zeta(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.2}$$

Для аппроксимации $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ по норме в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ воспользуемся уже доказанной теоремой 2.6. Положим $\boldsymbol{\eta}_0 = (B_D^0 - \zeta^* \overline{Q_0})^{-1}\boldsymbol{\Phi}$, $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 = P_{\mathcal{O}}\boldsymbol{\eta}_0$. Первое приближение к $\boldsymbol{\eta}_\varepsilon$ — это функция $\boldsymbol{\eta}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$.

Перепишем тождество (6.2) в следующем виде:

$$\begin{gathered}(\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} = -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 - \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0] \\ - \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_0] - \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0] + \zeta(Q_0^\varepsilon \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})}.\end{gathered} \tag{6.3}$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части этого равенства через $\mathcal{I}_j(\varepsilon)$, $j = 1, 2, 3, 4$.

Член $\mathcal{I}_4(\varepsilon)$ оценивается на основании лемм 2.1 и 5.2:

$$|\mathcal{I}_4(\varepsilon)| \leqslant C_{21} c(\phi)^2 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad C_{21} := C_{14} \|Q_0\|_{L_\infty} \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{6.4}$$

Оценим $\mathcal{I}_1(\varepsilon)$ с помощью (2.22):

$$|\mathcal{I}_1(\varepsilon)| \leqslant \mathfrak{c}_2 \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\eta}_\varepsilon - \boldsymbol{\eta}_0 - \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 - \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Отсюда на основании теоремы 2.6 и леммы 5.2 получаем

$$\begin{gathered}|\mathcal{I}_1(\varepsilon)| \leqslant \mathfrak{c}_2 c(\phi) \left(C_{15} |\zeta|^{-1/4} \varepsilon^{1/2} + (C_{14} + C_{16})\varepsilon \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ \times \left(C_5 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2} |\zeta|^{-1/4} + C_6 c(\phi)^4 \varepsilon \right) \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{gathered}$$

Следовательно,

$$|\mathcal{I}_1(\varepsilon)| \leqslant c(\phi)^5 \left(\gamma_1 |\zeta|^{-1/2} \varepsilon + \gamma_2 \varepsilon^2 \right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.5}$$

где $\gamma_1 = \mathfrak{c}_2(C_5(C_{14} + C_{15} + C_{16}) + C_6 C_{15})$, $\gamma_2 = \mathfrak{c}_2 \left(C_5(C_{14} + C_{16}) + C_6(C_{14} + C_{15} + C_{16}) \right)$.

Далее, имеем

$$\mathcal{I}_2(\varepsilon) = -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_0] = -\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0] - \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_0 - S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]. \qquad (6.6)$$

В силу предложения 1.1 и оценки (4.3) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ выполнено

$$\|\boldsymbol{\eta}_0 - S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 - S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 k_3 c(\phi) \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда с помощью (2.22) и леммы 5.2 выводим неравенство

$$\begin{aligned}&|\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_0 - S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| \\ &\quad\leqslant \varepsilon c(\phi)^2 \mathfrak{c}_2 r_1 k_3 \left(C_{15}|\zeta|^{-1/4}\varepsilon^{1/2} + (C_{14}+C_{16})\varepsilon\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$|\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}_0 - S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| \leqslant c(\phi)^2 \left(\gamma_3|\zeta|^{-1/2}\varepsilon + \gamma_4\varepsilon^2\right) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (6.7)$$

где $\gamma_3 = \mathfrak{c}_2 r_1 k_3 C_{15}$, $\gamma_4 = \mathfrak{c}_2 r_1 k_3 (C_{14}+C_{15}+C_{16})$.

Оценим первое слагаемое в правой части (6.6). Согласно (2.14),

$$\begin{aligned}|\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| \leqslant{}& \left|\int_{\mathcal{O}} \langle g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, b(\mathbf{D})S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\rangle\, d\mathbf{x}\right| \\ &+ \sum_{j=1}^d \int_{\mathcal{O}} \left(|\langle a_j^\varepsilon D_j\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\rangle| + |\langle (a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, D_j S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\rangle|\right) d\mathbf{x} \\ &+ \left|\int_{\mathcal{O}} \langle Q^\varepsilon\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\rangle\, d\mathbf{x}\right| + \lambda\left|\int_{\mathcal{O}} \langle Q_0^\varepsilon\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\rangle\, d\mathbf{x}\right| \\ &=: \sum_{k=1}^4 \mathcal{I}_2^{(k)}(\varepsilon).\end{aligned} \qquad (6.8)$$

Так как функция $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ сосредоточена в $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon$, в (6.8) все интегралы реально берутся по $B_\varepsilon = (\partial\mathcal{O})_\varepsilon \cap \mathcal{O} \subset (\partial\mathcal{O})_\varepsilon$. Член $\mathcal{I}_2^{(1)}(\varepsilon)$ оценим с помощью леммы 3.1, учитывая (1.2) и (1.3):

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2^{(1)}(\varepsilon) &\leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |b(\mathbf{D})S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\, d\mathbf{x}\right)^{1/2} \\ &\leqslant \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} (\beta\varepsilon)^{1/2} \left(\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Применяя (1.3), (4.2) и (4.3) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$, а также (5.8), находим

$$\mathcal{I}_2^{(1)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2(\gamma_5 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \gamma_6 \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.9}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_5 &= \beta^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \alpha_1 (k_2 k_3)^{1/2} (C_{15} + C_{16}),\\
\gamma_6 &= \beta^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \alpha_1 (k_2 k_3)^{1/2} C_{16}.
\end{aligned}$$

Оценим член $\mathcal{I}_2^{(2)}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_2^{(2)}(\varepsilon) \leqslant \sum_{j=1}^{d} \|D_j \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(a_j^\varepsilon)^* S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} &\\
+ \sum_{j=1}^{d} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|a_j^\varepsilon S_\varepsilon D_j \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. &
\end{aligned} \tag{6.10}$$

В силу леммы 3.2 выполнено

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(a_j^\varepsilon)^* S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2 \, d\mathbf{x} \leqslant \beta_* \varepsilon |\Omega|^{-1} \|a_j\|^2_{L_2(\Omega)} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда, из (4.1), (4.2) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и (5.8) вытекает оценка для первого слагаемого в правой части (6.10):

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{d} \|D_j \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(a_j^\varepsilon)^* S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}\\
&\leqslant c(\phi)^2 \gamma_7 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},
\end{aligned} \tag{6.11}$$

где

$$\gamma_7 = C_a \left(\beta_* |\Omega|^{-1} k_1 k_2 \right)^{1/2} (C_{15} + C_{16}).$$

Второе слагаемое в правой части (6.10) оценивается на основании предложения 1.2, (4.2) для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и (5.7):

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{d} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|a_j^\varepsilon S_\varepsilon D_j \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant |\Omega|^{-1/2} \sum_{j=1}^{d} \|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \|a_j\|_{L_2(\Omega)} \|D_j \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\leqslant \gamma_8 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\\
\gamma_8 &:= |\Omega|^{-1/2} C_a C_{14} k_2.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (6.10), (6.11) вытекает оценка

$$\mathcal{I}_2^{(2)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2(\gamma_7+\gamma_8)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.12}$$

Рассмотрим теперь член $\mathcal{I}_2^{(3)}(\varepsilon)$:

$$\mathcal{I}_2^{(3)}(\varepsilon) \leqslant \||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|Q^\varepsilon||S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2}. \tag{6.13}$$

Первый сомножитель в правой части (6.13) оценим с помощью леммы 3.4 и условия (1.8):

$$\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(\check{q},\Omega)\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad \check{q}=2s/(s-1). \tag{6.14}$$

Второй сомножитель в правой части (6.13) оценим с помощью леммы 3.2:

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|Q^\varepsilon||S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|Q\|_{L_1(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.15}$$

Объединяя (6.13)–(6.15), учитывая (4.1), (4.2) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и используя лемму 5.2, находим

$$\mathcal{I}_2^{(3)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2\gamma_9\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.16}$$

где

$$\gamma_9 = C(\check{q},\Omega)\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}\|Q\|^{1/2}_{L_1(\Omega)}\left(\beta_*|\Omega|^{-1}k_1k_2\right)^{1/2}(C_{14}+C_{15}+C_{16}).$$

Теперь оценим член $\mathcal{I}_2^{(4)}(\varepsilon)$, используя (4.1) для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и (5.7):

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2^{(4)}(\varepsilon) &\leqslant \lambda\|Q_0\|_{L_\infty}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\|S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \gamma_{10}c(\phi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned} \tag{6.17}$$

где $\gamma_{10}=\lambda\|Q_0\|_{L_\infty}C_{14}k_1$.

Таким образом, на основании (6.6)–(6.9), (6.12), (6.16), (6.17) имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_2(\varepsilon) \leqslant &\Big((\gamma_3+\gamma_5+\gamma_7+\gamma_8+\gamma_9+\gamma_{10})\varepsilon|\zeta|^{-1/2}+(\gamma_4+\gamma_6)\varepsilon^2\Big)\\ &\times c(\phi)^2\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{6.18}$$

Остается оценить член $\mathcal{I}_3(\varepsilon)$:

$$
\begin{aligned}
|\mathcal{I}_3(\varepsilon)| &= |\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0]| \\
&\leqslant \left|(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, (b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0)_{L_2(\mathcal{O})}\right| \\
&+ \left|\Big(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\Big)_{L_2(\mathcal{O})}\right| \\
&+ \left|\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon\sum_{l=1}^d b_l\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_l\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\right)_{L_2(\mathcal{O})}\right| \\
&+ \left|\left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon\sum_{l=1}^d b_l\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\right)_{L_2(\mathcal{O})}\right| \\
&+ \sum_{j=1}^d\left|\Big(a_j^\varepsilon D_j\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\Big)_{L_2(\mathcal{O})}\right| \\
&+ \sum_{j=1}^d\left|\Big((a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, (D_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + (D_j\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\Big)_{L_2(\mathcal{O})}\right| \\
&+ \sum_{j=1}^d\left|\Big((a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\Big)_{L_2(\mathcal{O})}\right| \\
&+ \left|\Big(Q^\varepsilon\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\Big)_{L_2(\mathcal{O})}\right| \\
&+ \lambda\left|\Big(Q_0^\varepsilon\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\Big)_{L_2(\mathcal{O})}\right|.
\end{aligned}
\tag{6.19}
$$

Обозначим последовательные слагаемые в правой части (6.19) через $\mathcal{I}_3^{(j)}(\varepsilon)$, $j = 1, \dots, 9$.

Первый член оценим с помощью (1.3) и леммы 3.2, учитывая, что функция $\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon$ сосредоточена в $(\partial\mathcal{O})_\varepsilon$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon) &\leqslant \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2} \\
&\leqslant \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\times(\beta_*\varepsilon)^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}^{1/2}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^{1/2}.
\end{aligned}
$$

Теперь воспользуемся леммой 5.2 и оценками (4.2), (4.3) применительно к $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$. Учитывая (1.3) и (1.23), приходим к оценке

$$\mathcal{I}_3^{(1)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2(\gamma_{11}\varepsilon|\zeta|^{-1/2} + \gamma_{12}\varepsilon^2)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.20}$$

где

$$\gamma_{11} = \|g\|^{3/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\alpha_1\beta_*^{1/2}(k_2k_3)^{1/2}(C_{15}+C_{16}),$$
$$\gamma_{12} = \|g\|^{3/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\alpha_1\beta_*^{1/2}(k_2k_3)^{1/2}C_{16}.$$

Аналогично, с учетом (1.31) получаем

$$\mathcal{I}_3^{(2)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2\gamma_{13}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.21}$$

Здесь

$$\gamma_{13} = \|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}(\alpha_1\beta_*nk_1k_2)^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\alpha_0^{-1/2}C_a(C_{15}+C_{16}).$$

Чтобы оценить $\mathcal{I}_3^{(3)}(\varepsilon)$, воспользуемся (1.3), (1.4) и (4.23):

$$\mathcal{I}_3^{(3)}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{3/2}d^{1/2}M_1\|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}.$$

Отсюда с помощью (4.3) для $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и леммы 5.2 выводим оценку

$$\mathcal{I}_3^{(3)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2\left(\gamma_{14}\varepsilon|\zeta|^{-1/2} + \gamma_{15}\varepsilon^2\right)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.22}$$

где $\gamma_{14} = \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{3/2}d^{1/2}M_1k_3C_{15}$, $\gamma_{15} = \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{3/2}d^{1/2}M_1k_3(C_{15}+C_{16})$.

Аналогично, с учетом (4.24) получаем

$$\mathcal{I}_3^{(4)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2\gamma_{16}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad |\zeta| \geqslant 1, \tag{6.23}$$

с постоянной

$$\gamma_{16} = \|g\|_{L_\infty}d^{1/2}\alpha_1\widetilde{M}_1k_2(C_{15}+C_{16}).$$

Оценим член $\mathcal{I}_3^{(5)}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3^{(5)}(\varepsilon) \leqslant \varepsilon\sum_{j=1}^d \|D_j\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(a_j^\varepsilon)^*\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ + \varepsilon\sum_{j=1}^d \|D_j\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|(a_j^\varepsilon)^*\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{6.24}$$

В силу предложения 1.2 выполнено

$$\|(a_j^\varepsilon)^*\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|a_j^*\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.25}$$

Применяя неравенство Гёльдера и теорему вложения Соболева, получаем

$$\|a_j^*\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(q,\Omega)\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)}, \tag{6.26}$$

$q=\infty$ при $d=1$, $q=2\rho/(\rho-2)$ при $d\geqslant 2$. Аналогично,

$$\begin{aligned}\|(a_j^\varepsilon)^*\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant |\Omega|^{-1/2}\|a_j^*\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant |\Omega|^{-1/2}C(q,\Omega)\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}\|\widetilde{\Lambda}\|_{H^1(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{6.27}$$

Из (6.24)–(6.27) вытекает, что

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3^{(5)}(\varepsilon) &\leqslant \varepsilon\widehat{C}_a C(q,\Omega)|\Omega|^{-1/2}\|\mathbf{D}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\times\Big(\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\|\widetilde{\Lambda}\|_{H^1(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big).\end{aligned} \tag{6.28}$$

В силу (1.24) и (1.25) имеем

$$|\Omega|^{-1/2}\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)} \leqslant M_1+M_2. \tag{6.29}$$

Согласно (1.32), (1.33), (5.12), (4.25) выполнено

$$|\Omega|^{-1/2}\|\widetilde{\Lambda}\|_{H^1(\Omega)} \leqslant \widetilde{M}_1+\widetilde{M}_2. \tag{6.30}$$

Из (1.3), (5.8), (6.28) и неравенств (4.1), (4.2) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ получаем, что

$$\mathcal{I}_3^{(5)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2\gamma_{17}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{6.31}$$

Здесь

$$\gamma_{17}=\widehat{C}_a C(q,\Omega)(C_{15}+C_{16})\Big((M_1+M_2)\alpha_1^{1/2}k_2+(\widetilde{M}_1+\widetilde{M}_2)k_1\Big).$$

Перейдем к оценке члена $\mathcal{I}_3^{(6)}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3^{(6)}(\varepsilon) &\leqslant \sum_{j=1}^d \|(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|(D_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2} \\ &+\sum_{j=1}^d \|(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\left(\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon}|(D_j\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\right)^{1/2}.\end{aligned} \tag{6.32}$$

Применяя лемму 3.4, имеем

$$\|(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(q,\Omega)\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}, \quad q = 2\rho/(\rho-2). \quad (6.33)$$

В силу леммы 3.2 выполнено

$$\begin{aligned}&\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(D_j\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x}\\ &\leqslant \beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|D_j\Lambda\|^2_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \quad (6.34)$$

Аналогично,

$$\int_{(\partial\mathcal{O})_\varepsilon} |(D_j\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \beta_*\varepsilon|\Omega|^{-1}\|D_j\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \quad (6.35)$$

Теперь из (6.32)–(6.35) вытекает оценка

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3^{(6)}(\varepsilon) &\leqslant C(q,\Omega)\widehat{C}_a\left(\beta_*|\Omega|^{-1}\varepsilon\right)^{1/2}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\times\Big(\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &+\|\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{H^1(\mathbb{R}^d)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|^{1/2}_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big).\end{aligned}$$

Учитывая (1.3), (1.25), (1.33), (5.12), неравенства (4.1)–(4.3) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и лемму 5.2, отсюда получаем

$$\mathcal{I}_3^{(6)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2(\gamma_{18}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}+\gamma_{19}\varepsilon^2)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad (6.36)$$

где

$$\begin{aligned}\gamma_{18} &= (C_{14}+C_{15}+C_{16})C(q,\Omega)\widehat{C}_a\beta_*^{1/2}k_2^{1/2}\big(M_2\alpha_1^{1/2}k_3^{1/2}+\widetilde{M}_2k_1^{1/2}\big),\\ \gamma_{19} &= C_{16}C(q,\Omega)\widehat{C}_a\beta_*^{1/2}k_2^{1/2}M_2\alpha_1^{1/2}k_3^{1/2}.\end{aligned}$$

Член $\mathcal{I}_3^{(7)}(\varepsilon)$ оценим с помощью (6.33), (4.23) и (4.24):

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_3^{(7)}(\varepsilon) &\leqslant \varepsilon\sum_{j=1}^d\|(a_j^\varepsilon)^*\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big(\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big)\\ &\leqslant \varepsilon C(q,\Omega)\sum_{j=1}^d\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\times\Big(M_1\|b(\mathbf{D})D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+\widetilde{M}_1\|D_j\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\Big).\end{aligned}$$

Воспользуемся теперь леммой 5.2 и неравенствами (1.3) и (4.2), (4.3) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$. Получим

$$\mathcal{I}_3^{(7)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2(\gamma_{20}\varepsilon|\zeta|^{-1/2} + \gamma_{21}\varepsilon^2)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.37}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_{20} &= \widehat{C}_a C(q,\Omega)\left(C_{15}M_1\alpha_1^{1/2}k_3 + (C_{14}+C_{15}+C_{16})\widetilde{M}_1 k_2\right),\\
\gamma_{21} &= \widehat{C}_a C(q,\Omega)(C_{14}+C_{15}+C_{16})M_1\alpha_1^{1/2}k_3.
\end{aligned}$$

Оценим теперь член $\mathcal{I}_3^{(8)}(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3^{(8)}(\varepsilon) &\leqslant \varepsilon\||Q^\varepsilon|^{1/2}\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&\times\left(\||Q^\varepsilon|^{1/2}\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \||Q^\varepsilon|^{1/2}\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right).
\end{aligned} \tag{6.38}$$

На основании предложения 1.2 и (1.3) имеем

$$\||Q^\varepsilon|^{1/2}\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1^{1/2}|\Omega|^{-1/2}\||Q|^{1/2}\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.39}$$

В силу неравенства Гёльдера и теоремы вложения

$$\||Q|^{1/2}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C(\check{q},\Omega)\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}\|\Lambda\|_{H^1(\Omega)}, \quad \check{q} = 2s/(s-1). \tag{6.40}$$

Аналогично,

$$\||Q^\varepsilon|^{1/2}\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}C(\check{q},\Omega)\|Q\|^{1/2}_{L_s(\Omega)}\|\widetilde{\Lambda}\|_{H^1(\Omega)}\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{6.41}$$

Из оценок (6.38)–(6.41) с учетом (6.14), (6.29), (6.30) следует, что

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_3^{(8)}(\varepsilon) &\leqslant \varepsilon C(\check{q},\Omega)^2\|Q\|_{L_s(\Omega)}\|\boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\\
&\times\left(\alpha_1^{1/2}(M_1+M_2)\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + (\widetilde{M}_1+\widetilde{M}_2)\|\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right).
\end{aligned}$$

В силу неравенств (4.1), (4.2) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и леммы 5.2 это влечет

$$\mathcal{I}_3^{(8)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2\gamma_{22}\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{6.42}$$

где

$$\gamma_{22} = C(\check{q},\Omega)^2\|Q\|_{L_s(\Omega)}(C_{14}+C_{15}+C_{16})\big((M_1+M_2)\alpha_1^{1/2}k_2 + (\widetilde{M}_1+\widetilde{M}_2)k_1\big).$$

Оценим, наконец, член $\mathcal{I}_3^{(9)}(\varepsilon)$ с помощью (1.3), (4.23), (4.24), неравенств (4.1), (4.2) для функции $\widetilde{\boldsymbol{\eta}}_0$ и леммы 5.2. В результате получаем

$$\mathcal{I}_3^{(9)}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 \gamma_{23} \varepsilon |\zeta|^{-1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \qquad (6.43)$$

где $\gamma_{23} = \lambda \|Q_0\|_{L_\infty} C_{14} \left(M_1 \alpha_1^{1/2} k_2 + \widetilde{M}_1 k_1 \right)$.

В итоге соотношения (6.19)–(6.23), (6.31), (6.36), (6.37), (6.42), (6.43) влекут

$$\mathcal{I}_3(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2 \Big(\big(\gamma_{11} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{16} + \gamma_{17} + \gamma_{18} + \gamma_{20} + \gamma_{22} + \gamma_{23}\big) \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \big(\gamma_{12} + \gamma_{15} + \gamma_{19} + \gamma_{21}\big) \varepsilon^2 \Big) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \qquad (6.44)$$

Итак, мы оценили все члены в правой части (6.3). Из (6.3)–(6.5), (6.18), (6.44) следует неравенство

$$\left| (\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon, \boldsymbol{\Phi})_{L_2(\mathcal{O})} \right| \leqslant c(\phi)^5 (\gamma_* \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \gamma_{**} \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\boldsymbol{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Здесь $\gamma_* = C_{21} + \gamma_1 + \gamma_3 + \gamma_5 + \gamma_7 + \gamma_8 + \gamma_9 + \gamma_{10} + \gamma_{11} + \gamma_{13} + \gamma_{14} + \gamma_{16} + \gamma_{17} + \gamma_{18} + \gamma_{20} + \gamma_{22} + \gamma_{23}$, $\gamma_{**} = \gamma_2 + \gamma_4 + \gamma_6 + \gamma_{12} + \gamma_{15} + \gamma_{19} + \gamma_{21}$. Следовательно,

$$\|\mathbf{w}_\varepsilon - \boldsymbol{\varphi}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)^5 (\gamma_* \varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \gamma_{**} \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Вместе с (5.7) это влечет (6.1) с постоянными $C_{19} = \gamma_* + C_{14}$, $C_{20} = \gamma_{**}$. $\square$

6.2 Завершение доказательства теоремы 2.5

Из (4.27) и (6.1) вытекает неравенство

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{22} c(\phi)^5 (\varepsilon |\zeta|^{-1/2} + \varepsilon^2) \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} \qquad (6.45)$$

с постоянной $C_{22} = \max\{C_{11} + C_{19}; C_{20}\}$. Чтобы получить отсюда (2.36), заметим, что в силу (2.6), (2.8), (2.28) и (2.29) при всех $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$ и $0 < \varepsilon \leqslant 1$ верна грубая оценка

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2 \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} c(\phi) |\zeta|^{-1}. \qquad (6.46)$$

При $|\zeta| \leqslant \varepsilon^{-2}$ используем (6.45) и заметим, что $\varepsilon^2 \leqslant \varepsilon |\zeta|^{-1/2}$. При $|\zeta| > \varepsilon^{-2}$ применим (6.46) и учтем, что $|\zeta|^{-1} < \varepsilon |\zeta|^{-1/2}$. Отсюда вытекает (2.36) с постоянной $C_4 = \max\{2\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}; 2C_{22}\}$. Теорема 2.5 доказана.

7 Специальные случаи

7.1 Устранение сглаживателя S_ε в корректоре

Оказывается, что сглаживающий оператор S_ε в корректоре может быть устранен, если наложить на матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ дополнительные условия.

Условие 7.1. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* $\Lambda(\mathbf{x})$ *задачи* (1.20) *ограничено, т. е.* $\Lambda \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Случаи, когда условие 7.1 выполнено автоматически, выделены в [BSu3, лемма 8.7]:

Предложение 7.2 ([BSu3]). *Условие* 7.1 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений:*
1°) $d \leqslant 2$;
2°) *размерность* $d \geqslant 1$ *произвольна, а оператор* A_ε *имеет вид* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$*, где* $g(\mathbf{x})$ *— симметричная матрица с вещественными элементами*;
3°) *размерность* d *произвольна, и* $g^0 = \underline{g}$*, т. е. справедливы соотношения* (1.29).

Для того, чтобы устранить S_ε в члене корректора, содержащем $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$, достаточно наложить следующее условие.

Условие 7.3. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *задачи* (1.30) *таково, что*

$$\widetilde{\Lambda} \in L_p(\Omega), \quad p = 2 \text{ при } d = 1, \quad p > 2 \text{ при } d = 2, \quad p = d \text{ при } d \geqslant 3.$$

Следующий результат установлен в [Su1, предложение 8.11].

Предложение 7.4 ([Su1]). *Условие* 7.3 *выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений:*
1°) $d \leqslant 4$;
2°) *размерность* d *произвольна, а оператор* A_ε *имеет вид* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$*, где* $g(\mathbf{x})$ *— симметричная матрица с вещественными элементами.*

Замечание 7.5. *Если* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$*, где* $g(\mathbf{x})$ *— симметричная матрица с вещественными элементами, то из* [LaU, глава III, теорема 13.1] *следует, что норма* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *не превосходит величины, зависящей от* d, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* Ω*, а норма* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ *оценивается в терминах* d, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, *и* Ω. *В этом случае выполнены условия* 7.1 *и* 7.3.

Наша цель в этом пункте — доказать следующую теорему.

Теорема 7.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6.
1°. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 7.1. *Положим*

$$G_1(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon S_\varepsilon P_\mathcal{O}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \quad (7.1)$$

Тогда при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon P_\mathcal{O})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant C_5 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C'_{23} c(\phi)^4 \varepsilon, \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \widetilde{C}_5 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}'_{23} c(\phi)^4 \varepsilon.
\end{aligned} \quad (7.2)$$

Здесь постоянные C_5 *и* $\widetilde{C}_5$ *— те же, что и в* (2.43) *и* (2.44) *соответственно. Постоянные* C'_{23} *и* $\widetilde{C}'_{23}$ *зависят только от исходных данных* (1.9), *области* $\mathcal{O}$ *и* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.
2°. *Пусть матрица-функция* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 7.3. *Обозначим*

$$G_2(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \quad (7.3)$$

Тогда при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant C_5 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C''_{23} c(\phi)^4 \varepsilon, \\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \widetilde{C}_5 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}''_{23} c(\phi)^4 \varepsilon.
\end{aligned} \quad (7.4)$$

Постоянные C''_{23} *и* $\widetilde{C}''_{23}$ *зависят лишь от исходных данных* (1.9), *области* $\mathcal{O}$, *от* p *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.
3°. *Предположим, что условия* 7.1 *и* 7.3 *выполнены одновременно. Положим*

$$G_3(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \quad (7.5)$$

Тогда при $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы аппроксимации*

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant C_5 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_{23} c(\phi)^4 \varepsilon,
\end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned}
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \widetilde{C}_5 c(\phi)^2 \varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_{23} c(\phi)^4 \varepsilon.
\end{aligned} \quad (7.7)$$

Постоянные C_{23} и $\widetilde{C}_{23}$ зависят лишь от исходных данных (1.9), *области $\mathcal{O}$, от p и от норм $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.*

При соответствующих условиях непрерывность операторов под знаком нормы в оценках из теоремы 7.6 вытекает из лемм 3.3, 3.4, 3.5.

Для доказательства теоремы 7.6 нам потребуются следующие леммы. Их доказательства сходны с доказательствами лемм 8.7 и 8.8 из [MSu1].

Лемма 7.7. *Пусть Γ-периодическое матричнозначное решение $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи* (1.20) *удовлетворяет условию* 7.1. *Пусть S_ε — оператор сглаживания по Стеклову* (1.1). *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant 1$ выполнено*

$$\|[\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda. \tag{7.8}$$

Постоянная $\mathfrak{C}_\Lambda$ зависит только от m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от параметров решетки Γ и нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Доказательство. Пусть $\mathbf{\Phi} \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В силу (1.3) и условия 7.1

$$\|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\alpha_1^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{7.9}$$

Рассмотрим производные:

$$\partial_j\left(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\right) = \varepsilon^{-1}(\partial_j\Lambda)^\varepsilon(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\mathbf{\Phi} + \Lambda^\varepsilon(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\partial_j\mathbf{\Phi}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}\left(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\varepsilon^{-2}\|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + 2\|\Lambda\|^2_{L_\infty}\|(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\mathbf{D}\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

В силу леммы 3.3 отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}\left(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\beta_1\varepsilon^{-2}\|(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + 2\|\Lambda\|^2_{L_\infty}(\beta_2+1)\|(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})\mathbf{D}\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Применяя (1.3) и предложение 1.1, находим

$$\|\mathbf{D}\left(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\right)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \alpha_1\left(2\beta_1 r_1^2 + 8\|\Lambda\|^2_{L_\infty}(\beta_2+1)\right)\|\mathbf{D}^2\mathbf{\Phi}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{7.10}$$

Теперь из (7.9) и (7.10) получаем оценку

$$\begin{aligned}\|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda\|\mathbf{D}\mathbf{\Phi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \mathfrak{C}_\Lambda\|\mathbf{\Phi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}, \\ &\mathbf{\Phi} \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n),\end{aligned}$$

с постоянной $\mathfrak{C}_\Lambda^2 = \alpha_1\left(2\beta_1 r_1^2 + 8\|\Lambda\|^2_{L_\infty}(\beta_2+1)\right)$. Это равносильно оценке (7.8). $\square$

Лемма 7.8. *Пусть матричнозначное* Γ*-периодическое решение* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *задачи* (1.30) *удовлетворяет условию* 7.3. *Пусть* S_ε *— оператор сглаживания по Стеклову* (1.1). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}$ *зависит только от* n, d, α_0, α_1, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от норм* $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, *от* p, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. Пусть $\mathbf{\Phi} \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Из леммы 3.4 и условия 7.3 вытекает оценка

$$\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2C(\widehat{q}, \Omega)\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}\|\mathbf{\Phi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}. \tag{7.11}$$

Рассмотрим производные:

$$\partial_j\big(\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\big) = \varepsilon^{-1}(\partial_j\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi} + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon(S_\varepsilon - I)\partial_j\mathbf{\Phi}.$$

С учетом лемм 3.4 и 3.5 отсюда получаем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}\big(\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\big)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\widetilde{\beta}_1\varepsilon^{-2}\|(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + 2(\widetilde{\beta}_2 + 1)\|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_p(\Omega)}C(\widehat{q}, \Omega)^2\|\mathbf{D}(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Для оценки первого члена справа применим предложение 1.1. Тогда

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{D}\big(\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\big)\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad\leqslant \big(2\widetilde{\beta}_1 r_1^2 + 8(\widetilde{\beta}_2 + 1)\|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_p(\Omega)}C(\widehat{q}, \Omega)^2\big)\|\mathbf{D}\mathbf{\Phi}\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{7.12}$$

Теперь из (7.11) и (7.12) следует неравенство

$$\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(S_\varepsilon - I)\mathbf{\Phi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}\|\mathbf{\Phi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)},$$

справедливое при любом $\mathbf{\Phi} \in H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Здесь

$$\mathfrak{C}^2_{\widetilde{\Lambda}} = 2\widetilde{\beta}_1 r_1^2 + (8\widetilde{\beta}_2 + 12)C(\widehat{q}, \Omega)^2\|\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_p(\Omega)}.$$

$\square$

7.2 Доказательство теоремы 7.6

Доказательство. Установим сначала аппроксимации обобщенной резольвенты при учете корректора. Из (2.33), (2.38) и леммы 7.7 вытекает, что при условии 7.1 справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|[\Lambda^\varepsilon](S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \varepsilon\|[\Lambda^\varepsilon](S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\quad\leqslant \varepsilon\mathfrak{C}_\Lambda C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_2 c(\phi).\end{aligned}\tag{7.13}$$

Отсюда и из (2.43) получаем оценку (7.2) с постоянной $C'_{23} = C_6 + \mathfrak{C}_\Lambda C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_2$.

Аналогично, с помощью (2.33), (2.38) и леммы 7.8 находим, что при условии 7.3 выполнено

$$\varepsilon\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)P_{\mathcal{O}}(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \varepsilon\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}} C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_2 c(\phi).\tag{7.14}$$

Отсюда и из (2.43) вытекает оценка (7.4) с постоянной $C''_{23} = C_6 + \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}} C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_2$.

Наконец, если выполнены условия 7.1 и 7.3 одновременно, из (2.43), (7.13) и (7.14) следует неравенство (7.6), где $C_{23} = C_6 + (\mathfrak{C}_\Lambda + \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}})C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_2$.

Результаты теоремы 7.6, относящиеся к аппроксимации потоков, выводятся из соответствующих оценок для обобщенной резольвенты. Доказательство во многом похоже на доказательство оценки (2.44). Для примера докажем (7.7) в условиях пункта 3° теоремы. Аналогично (5.15) из (7.6) вытекает, что

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big(I + \varepsilon([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon])\big)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2\to L_2}\\ &\quad\leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\big(C_5 c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_{23}c(\phi)^4\varepsilon\big).\end{aligned}\tag{7.15}$$

Далее, аналогично (5.16)

$$\begin{aligned}&\varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\ &\quad= g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\Lambda\big)^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\ &\quad+ \varepsilon\sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l\big([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D})D_l + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]D_l\big)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.\end{aligned}\tag{7.16}$$

Отличие от доказательства неравенства (2.44) возникает при оценке третьего слагаемого в правой части тождества (7.16). Используя условие 7.1, а также (1.4) и (2.33), получаем

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \sum_{l=1}^{d} \| g^{\varepsilon} b_l [\Lambda^{\varepsilon}] b(\mathbf{D}) D_l (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \varepsilon \alpha_1 d \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}^2 (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \varepsilon \alpha_1 d \|g\|_{L_\infty} \|\Lambda\|_{L_\infty} \mathcal{C}_2 c(\phi).
\end{aligned}
\tag{7.17}
$$

Далее, в силу (1.4), (2.33), (2.38), условия 7.3 и леммы 3.4 выполнено

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \sum_{l=1}^{d} \| g^{\varepsilon} b_l [\widetilde{\Lambda}^{\varepsilon}] D_l (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \| [\widetilde{\Lambda}^{\varepsilon}] \mathbf{D} (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \| [\widetilde{\Lambda}^{\varepsilon}] P_{\mathcal{O}} \mathbf{D} (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q}, \Omega) C_{\mathcal{O}}^{(1)} \| \mathbf{D} (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} \|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} C(\widehat{q}, \Omega) C_{\mathcal{O}}^{(1)} \mathcal{C}_2 c(\phi).
\end{aligned}
\tag{7.18}
$$

Отсюда и из (7.17) вытекает, что третье слагаемое в правой части (7.16) оценивается через $\widehat{C}_{23} \varepsilon c(\phi)$, где

$$
\widehat{C}_{23} = (d\alpha_1)^{1/2} \mathcal{C}_2 \|g\|_{L_\infty} \big((d\alpha_1)^{1/2} \|\Lambda\|_{L_\infty} + C(\widehat{q}, \Omega) C_{\mathcal{O}}^{(1)} \|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} \big).
$$

Вместе с (7.15) и (7.16) это влечет оценку (7.7) с постоянной $\widetilde{C}_{23} = (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C_{23} + \widehat{C}_{23}$. $\square$

7.3 Случай, когда корректор обращается в нуль

Предположим, что $g^0 = \overline{g}$, т. е. справедливы соотношения (1.28). Тогда Г-периодическое решение задачи (1.20) обращается в нуль: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$. Пусть кроме этого выполнено равенство

$$
\sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0. \tag{7.19}
$$

Тогда Г-периодическое решение задачи (1.30) также равно нулю: $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому в рассматриваемом случае оператор (2.39) обращается в нуль, формула (2.43) упрощается и из теоремы 2.6 вытекает следующий результат.

Предложение 7.9. *Пусть справедливы равенства* (1.28) *и* (7.19). *Тогда в условиях теоремы* 2.6 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *верна оценка*

$$\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_5 c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}+C_6 c(\phi)^4\varepsilon.$$

7.4 Специальный случай

Предположим теперь, что $g^0 = \underline{g}$, т. е. справедливы представления (1.29). Тогда в силу предложения 7.2(3°) выполнено условие 7.1. При этом согласно [BSu2, замечание 3.5] матрица-функция (1.22) постоянна и совпадает с g^0, т. е. $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Таким образом, $\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = g^0 b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}$.

Предположим дополнительно, что справедливо равенство (7.19). Тогда $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$ и из теоремы 7.6(3°) вытекает следующий результат.

Предложение 7.10. *Пусть имеют место соотношения* (1.29) *и* (7.19). *Тогда в условиях теоремы* 2.5 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *верна оценка*

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^0 b(\mathbf{D})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \widetilde{C}_5 c(\phi)^2\varepsilon|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_{23} c(\phi)^4\varepsilon.\end{aligned}$$

8 Оценки в строго внутренней подобласти

8.1 Общий случай

Используя теорему 2.5 и результаты для задачи усреднения в $\mathbb{R}^d$, можно улучшить H^1-оценки погрешности в строго внутренней подобласти $\mathcal{O}'$ области $\mathcal{O}$.

Следующий результат устанавливается тем же методом, что и теорема 7.1 из [Su5].

Теорема 8.1. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.6. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$. *Введем обозначение* $\delta := \operatorname{dist}\{\mathcal{O}'; \partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant (C'_{24}\delta^{-1} + C''_{24})c(\phi)^6\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.1}$$

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')}\\ &\quad\leqslant \big(\widetilde{C}'_{24}\delta^{-1} + \widetilde{C}''_{24}\big)c(\phi)^6\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{8.2}$$

Постоянные C'_{24}, C''_{24}, $\widetilde{C}'_{24}$ и $\widetilde{C}''_{24}$ зависят только от исходных данных (1.9) *и от области $\mathcal{O}$.*

Доказательство. Фиксируем гладкую срезку $\chi(\mathbf{x})$ со следующими свойствами:

$$\chi \in C_0^\infty(\mathcal{O}); \quad 0 \leqslant \chi(\mathbf{x}) \leqslant 1; \quad \chi(\mathbf{x}) = 1 \text{ при } \mathbf{x} \in \mathcal{O}'; \quad |\nabla\chi(\mathbf{x})| \leqslant \kappa\delta^{-1}. \tag{8.3}$$

Постоянная κ зависит только от размерности d и области $\mathcal{O}$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (2.9), и пусть $\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon$ — решение уравнения (4.6). Тогда

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - \zeta(Q_0^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n). \tag{8.4}$$

Подставим $\boldsymbol{\eta} = \chi^2(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)$ в (8.4) и обозначим

$$\mathfrak{U}(\varepsilon) := \mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)] = \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)]. \tag{8.5}$$

Полученное равенство можно привести к виду

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}(\varepsilon) &- \zeta \left(Q_0^\varepsilon \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\right)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &= 2i\mathrm{Im}\, \left(g^\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\right)_{L_2(\mathcal{O})} + (g^\varepsilon \mathbf{z}_\varepsilon, \mathbf{z}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\ &+ 2i\mathrm{Im} \sum_{j=1}^d \left((D_j\chi)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon), (a_j^\varepsilon)^*\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\right)_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{8.6}$$

где введено обозначение $\mathbf{z}_\varepsilon := \sum_{l=1}^d b_l(D_l\chi)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)$. Обозначим последовательные слагаемые в правой части (8.6) через $i\mathfrak{I}_1(\varepsilon)$, $\mathfrak{I}_2(\varepsilon)$ и $i\mathfrak{I}_3(\varepsilon)$. Оценим эти слагаемые. В силу (1.3), (2.3) и (8.5) выполнено

$$\begin{aligned} |\mathfrak{I}_1(\varepsilon)| &\leqslant 2\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\alpha_1^{1/2}\|\mathbf{D}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\leqslant 2c_*^{-1/2}\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\alpha_1^{1/2}\mathfrak{U}(\varepsilon)^{1/2}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Очевидно,

$$\mathfrak{I}_2(\varepsilon) \leqslant \|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{z}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.8}$$

Норма $\mathbf{z}_\varepsilon$ оценивается на основании (1.4), (8.3):

$$\|\mathbf{z}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\kappa\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.9}$$

Тогда

$$\mathfrak{I}_2(\varepsilon) \leqslant \gamma_{24}\delta^{-2}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \gamma_{24} := d\alpha_1\kappa^2\|g\|_{L_\infty}. \tag{8.10}$$

Член $\mathfrak{I}_3(\varepsilon)$ оценим с помощью леммы 3.4, (2.5), (8.3) и (8.5):

$$
\begin{split}
|\mathfrak{I}_3(\varepsilon)| \leqslant 2\|(\mathbf{D}\chi)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \left(\sum_{j=1}^{d} \|(a_j^\varepsilon)^* \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \right)^{1/2} \\
\leqslant \gamma_{25}\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\mathfrak{U}(\varepsilon)^{1/2}, \quad \gamma_{25} := 2c_5 C(q,\mathcal{O})\widehat{C}_a\kappa,
\end{split}
\tag{8.11}
$$

где $q = \infty$ при $d = 1$ и $q = 2\rho(\rho-2)^{-1}$ при $d \geqslant 2$.

В тождестве (8.6) возьмем мнимую часть. Тогда

$$
\operatorname{Im}\zeta \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} = -\mathfrak{I}_1(\varepsilon) - \mathfrak{I}_3(\varepsilon).
$$

Поэтому из (8.7), (8.9) и (8.11) вытекает оценка

$$
|\operatorname{Im}\zeta| \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{26}\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\mathfrak{U}(\varepsilon)^{1/2}, \tag{8.12}
$$

где $\gamma_{26} := 2c_*^{-1/2} d^{1/2}\alpha_1\kappa\|g\|_{L_\infty} + \gamma_{24}$. Если $\operatorname{Re}\zeta \geqslant 0$ (а тогда $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$) отсюда получаем

$$
\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}\gamma_{25}\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\mathfrak{U}(\varepsilon)^{1/2}. \tag{8.13}
$$

Если $\operatorname{Re}\zeta < 0$, то возьмем вещественную часть в (8.6). Тогда в силу (8.10) имеем

$$
|\operatorname{Re}\zeta| \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{I}_2(\varepsilon) \leqslant \gamma_{24}\delta^{-2}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.14}
$$

Складывая (8.12) и (8.14), получаем

$$
\begin{split}
\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant |\zeta|^{-1}\gamma_{26}\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\mathfrak{U}(\varepsilon)^{1/2} \\
+ |\zeta|^{-1}\gamma_{24}\delta^{-2}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta < 0.
\end{split}
\tag{8.15}
$$

В итоге из (8.13) и (8.15) следует, что при всех рассматриваемых значениях ζ выполнено

$$
\begin{split}
\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}\gamma_{26}\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\mathfrak{U}(\varepsilon)^{1/2} \\
+ |\zeta|^{-1}\gamma_{24}\delta^{-2}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{split}
\tag{8.16}
$$

Возьмем в (8.6) вещественную часть. Тогда

$$
\mathfrak{U}(\varepsilon) \leqslant |\zeta| \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \mathfrak{I}_2(\varepsilon).
$$

На основании (8.8), (8.9) и (8.16) отсюда вытекает, что

$$\mathfrak{U}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)\gamma_{26}\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\mathfrak{U}(\varepsilon)^{1/2} + 2\gamma_{24}\delta^{-2}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{U}(\varepsilon) \leqslant c(\phi)^2\gamma_{27}^2\delta^{-2}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})},$$

где $\gamma_{27}^2 = \gamma_{26}^2 + 4\gamma_{24}$. С помощью (2.3) и (8.5) отсюда выводим

$$\|\mathbf{D}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)c_*^{-1/2}\gamma_{27}\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.17}$$

В силу (2.36) и (4.7) выполнена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{28}c(\phi)^5\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1, \tag{8.18}$$

с постоянной $\gamma_{28} = C_4 + C_1C_{\widetilde{F}}$. Из (8.17) и (8.18) вытекает, что

$$\|\mathbf{D}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)^6\varepsilon|\zeta|^{-1/2}\gamma_{29}\delta^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Здесь $\gamma_{29} = c_*^{-1/2}\gamma_{27}\gamma_{28}$. Следовательно,

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant c(\phi)^6\varepsilon|\zeta|^{-1/2}(\gamma_{29}\delta^{-1} + \gamma_{28})\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{8.19}$$

Комбинируя (2.41) и (4.10), находим

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \|\widetilde{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \gamma_{30}c(\phi)^3\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{8.20}$$

где $\gamma_{30} := (C_2 + C_3)C_{\widetilde{F}}$. Теперь из (8.19), (8.20) вытекает оценка (8.1) с постоянными $C'_{24} = \gamma_{29}$, $C''_{24} = \gamma_{28} + \gamma_{30}$.

Установим теперь оценку (8.2). Из (8.1) с учетом (1.4) получаем

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}(C'_{24}\delta^{-1} + C''_{24})c(\phi)^6\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда и из (5.16), (5.18) и (5.20) вытекает оценка (8.2) с постоянными

$$\begin{aligned}\widetilde{C}'_{24} &= (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C'_{24},\\ \widetilde{C}''_{24} &= (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C''_{24} + C_{17} + C_{18}.\end{aligned}$$

$\square$

8.2 Устранение сглаживателя в корректоре

В случае, когда матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ удовлетворяют дополнительно условиям 7.1, 7.3, сглаживатель S_ε в соответствующих членах корректора удается устранить.

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1.
1°. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 7.1. *Пусть* $G_1(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (7.1). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$, $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, *справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon P_{\mathcal{O}})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')}\\&\quad\leqslant(C'_{25}\delta^{-1}+C''_{25})c(\phi)^6\varepsilon,\end{aligned} \tag{8.21}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-G_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')}\leqslant(\widetilde{C}'_{25}\delta^{-1}+\widetilde{C}''_{25})c(\phi)^6\varepsilon.$$

Постоянные C'_{25}, C''_{25} *и* $\widetilde{C}'_{25}$, $\widetilde{C}''_{25}$ *зависят только от исходных данных* (1.9), *области* $\mathcal{O}$ *и* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.
2°. *Пусть матрица-функция* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 7.3. *Пусть* $G_2(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (7.3). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, *имеют место аппроксимации*

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_{\mathcal{O}}+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')}\\&\quad\leqslant(C'_{26}\delta^{-1}+C''_{26})c(\phi)^6\varepsilon,\end{aligned} \tag{8.22}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-G_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')}\leqslant(\widetilde{C}'_{26}\delta^{-1}+\widetilde{C}''_{26})c(\phi)^6\varepsilon.$$

Постоянные C'_{26}, C''_{26} *и* $\widetilde{C}'_{26}$, $\widetilde{C}''_{26}$ *зависят только от исходных данных* (1.9), *области* $\mathcal{O}$, *а также от* p *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.
3°. *Пусть условия* 7.1 *и* 7.3 *справедливы одновременно. Пусть* $G_3(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (7.5). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, *выполнены неравенства*

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O}')}\\&\quad\leqslant(C'_{27}\delta^{-1}+C''_{27})c(\phi)^6\varepsilon,\end{aligned} \tag{8.23}$$

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-G_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')}\leqslant(\widetilde{C}'_{27}\delta^{-1}+\widetilde{C}''_{27})c(\phi)^6\varepsilon. \tag{8.24}$$

Постоянные C'_{27}, C''_{27} *и* $\widetilde{C}'_{27}$, $\widetilde{C}''_{27}$ *зависят от исходных данных* (1.9), *области* $\mathcal{O}$, *от* p *и норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Сначала обсудим аппроксимации обобщенной резольвенты при учете корректора. В условиях пункта 1° теоремы из (7.13) и (8.1) вытекает оценка (8.21) с постоянными $C'_{25} = C'_{24}$, $C''_{25} = C''_{24} + \mathfrak{C}_\Lambda C^{(2)}_{\mathcal{O}} \mathcal{C}_2$. В условиях пункта 2° теоремы оценка (8.22) следует из (7.14) и (8.1). Наконец, в условиях пункта 3° теоремы неравенство (8.23) получается на основании (7.13), (7.14) и (8.1).

Аппроксимации потоков выводятся из соответствующих аппроксимаций обобщенной резольвенты. Доказательство похоже на доказательство оценки (2.44). Для примера проверим (8.24) в условиях пункта 3°. Аналогично (5.15) из (8.23) вытекает, что

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O}')}\\ &\quad \leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}(C'_{27}\delta^{-1} + C''_{27})c(\phi)^6\varepsilon.\end{aligned}$$

Вместе с (7.16)–(7.18) это влечет оценку (8.24) с постоянными $\widetilde{C}'_{27} = (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty} C'_{27}$, $\widetilde{C}''_{27} = (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty} C''_{27} + \widehat{C}_{23}$. $\square$

9 „Другая" аппроксимация обобщенной резольвенты

В теоремах из §2, §7 и §8 предполагалось, что $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ и $|\zeta| \geqslant 1$. В настоящем параграфе устанавливаются результаты, справедливые в более широкой области изменения спектрального параметра.

9.1 Общий случай

Теорема 9.1. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Пусть $c_\flat \geqslant 0$ — общая нижняя грань операторов $\widetilde{B}_{D,\varepsilon} = (f^\varepsilon)^* B_{D,\varepsilon} f^\varepsilon$ и $\widetilde{B}_D^0 = f_0 B_D^0 f_0$. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat, \infty)$. Положим $\psi = \arg(\zeta - c_\flat)$, $0 < \psi < 2\pi$. Введем обозначение*

$$\varrho_\flat(\zeta) = \begin{cases} c(\psi)^2|\zeta - c_\flat|^{-2}, & |\zeta - c_\flat| < 1,\\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_\flat| \geqslant 1.\end{cases} \tag{9.1}$$

Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (2.9), $\mathbf{u}_0$ — решение „усредненной" задачи (2.30). Пусть число ε_1 выбрано из условия 2.4. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{28}\varrho_\flat(\zeta)\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.2}$$

В операторных терминах,

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{28}\varrho_\flat(\zeta)\varepsilon. \tag{9.3}$$

Пусть $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (2.39). *Пусть функция* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *определена в* (2.40), (2.41). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \bigl(C_{29}\varepsilon^{1/2} + C_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\bigr)\varrho_\flat(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.4}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant C_{29}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta) + C_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).\end{aligned} \tag{9.5}$$

Пусть $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (1.22). *Для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon = g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon$ *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеет место аппроксимация*

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{p}_\varepsilon - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 - g^\varepsilon\bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \bigl(\widetilde{C}_{29}\varepsilon^{1/2} + \widetilde{C}_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\bigr)\varrho_\flat(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{9.6}$$

Постоянные C_{28}, C_{29}, C_{30} *и* $\widetilde{C}_{29}$, $\widetilde{C}_{30}$ *зависят от исходных данных* (1.9), *области* $\mathcal{O}$ *и от выбора* $c_\flat$.

Замечание 9.2. 1) *Выражение* $c(\psi)^2|\zeta - c_\flat|^{-2}$ *в* (9.1) — *это величина, обратная к квадрату расстояния от* ζ *до* $[c_\flat,\infty)$. 2) *В силу* (1.16), (2.4), (2.6) *и* (2.25) *в качестве* $c_\flat$ *можно выбрать постоянную* $4^{-1}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}(\operatorname{diam}\mathcal{O})^{-2}\|Q_0\|^{-1}_{L_\infty}$. 3) *Разумеется, при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$, *теоремы* 2.5, 2.6 *и* 9.1 *применимы одновременно. При* ϕ, *отделенном от точек* 0 *и* 2π, *и большом* $|\zeta|$ *выгоднее применять теоремы* 2.5 *и* 2.6. *Однако при ограниченных значениях* $|\zeta|$, *а также при малом* ϕ *или* $2\pi - \phi$ *оценки из теоремы* 9.1 *могут быть предпочтительнее.*

Доказательство. Сначала установим оценку (9.3). Воспользовавшись (2.36) при $\zeta = -1$, находим

$$\|(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{9.7}$$

Справедливо тождество

$$\begin{aligned}&(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\ &\quad= (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)\\ &\quad\times\bigl((B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1}\bigr)(B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\\ &\quad+ (1+\zeta)(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.\end{aligned} \tag{9.8}$$

Обозначим слагаемые в правой части (9.8) через $T_1(\varepsilon;\zeta)$ и $T_2(\varepsilon;\zeta)$. С учетом (2.8) выполнено

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\|(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}+I)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{9.9}$$

Очевидно,

$$\|(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}+I)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{(x+1)}{|x-\zeta|}. \tag{9.10}$$

Вычисление показывает, что

$$\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{(x+1)^2}{|x-\zeta|^2}\leqslant (c_\flat+2)^2\varrho_\flat(\zeta),\quad \zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty). \tag{9.11}$$

Аналогично (9.9), (9.10) с учетом оценок (2.28) получаем

$$\|(B_D^0+\overline{Q_0})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{(x+1)}{|x-\zeta|}. \tag{9.12}$$

Теперь из (9.7), (9.9)–(9.12) вытекает оценка первого члена в (9.8):

$$\|T_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_4\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}(c_\flat+2)^2\varepsilon\varrho_\flat(\zeta). \tag{9.13}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (9.8):

$$\begin{aligned} &\|T_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant |1+\zeta|\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad\times\|[Q_0^\varepsilon-\overline{Q_0}]\|_{H^1(\mathcal{O})\to H^{-1}(\mathcal{O})}\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{9.14}$$

По двойственности, поскольку образ оператора $(B_{D,\varepsilon}-\zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}$ лежит в $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, с учетом (2.5) имеем

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}=\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant c_5\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon}-\zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{9.15}$$

В силу (2.7) и (2.8) выполнено

$$\begin{aligned} &\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon}-\zeta^* Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}=\|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^* I)^{-1}(f^\varepsilon)^*\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant \|f\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{x^{1/2}}{|x-\zeta^*|}=\|f\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{x^{1/2}}{|x-\zeta^*|}. \end{aligned} \tag{9.16}$$

Справедлива оценка

$$\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{x}{|x-\zeta|^2}\leqslant\begin{cases}(c_\flat+1)c(\psi)^2|\zeta-c_\flat|^{-2}, & |\zeta-c_\flat|<1,\\ (c_\flat+1)c(\psi)^2|\zeta-c_\flat|^{-1}, & |\zeta-c_\flat|\geqslant 1.\end{cases}\tag{9.17}$$

Заметим, что

$$|\zeta+1|\leqslant 2+c_\flat \text{ при } |\zeta-c_\flat|<1,\tag{9.18}$$

$$|\zeta+1||\zeta-c_\flat|^{-1}\leqslant 2+c_\flat \text{ при } |\zeta-c_\flat|\geqslant 1.\tag{9.19}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}&|\zeta+1|^{1/2}\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\qquad\leqslant\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+1)^{1/2}(c_\flat+2)^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}.\end{aligned}\tag{9.20}$$

Далее, так как $\operatorname{Ran}(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\subset H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, в силу (2.26)

$$\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant c_5\|(B_D^0)^{1/2}(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.$$

Отсюда по аналогии с (9.16) получаем

$$\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant c_5\|f\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{x^{1/2}}{|x-\zeta|}.\tag{9.21}$$

Используя (9.17)–(9.19) и (9.21), приходим к неравенству

$$|\zeta+1|^{1/2}\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant c_5\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+1)^{1/2}(c_\flat+2)^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}.\tag{9.22}$$

Теперь из (3.2), (9.14), (9.15), (9.20) и (9.22) вытекает оценка

$$\|T_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant c_5^2C_{Q_0}\|f\|^2_{L_\infty}(c_\flat+1)(c_\flat+2)\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).\tag{9.23}$$

В итоге соотношения (9.8), (9.13) и (9.23) влекут (9.3) с постоянной

$$C_{28}=C_4\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}(c_\flat+2)^2+c_5^2C_{Q_0}\|f\|^2_{L_\infty}(c_\flat+1)(c_\flat+2).$$

Установим теперь оценку (9.5). Воспользуемся неравенством (2.43) при $\zeta=-1$:

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0+\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;-1)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant(C_5+C_6)\varepsilon^{1/2},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\end{aligned}\tag{9.24}$$

Заметим, что в силу леммы 5.2 при $\zeta = -1$ выполнено

$$\|\varepsilon\theta_\varepsilon K_D(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant (C_{14} + C_{15} + C_{16})\varepsilon^{1/2}. \tag{9.25}$$

Из (9.24) и (9.25) следует, что при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ имеет место оценка

$$\|(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; -1)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{31}\varepsilon^{1/2}, \tag{9.26}$$

где $\gamma_{31} = C_5 + C_6 + C_{14} + C_{15} + C_{16}$.

Справедливо тождество

$$\begin{aligned}
&(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; \zeta) \\
&= (B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon) \\
&\times \big((B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B_D^0 + \overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon(1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; -1)\big) \\
&\times (B_D^0 + \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} \\
&+ \varepsilon(\zeta + 1)(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} Q_0^\varepsilon (1 - \theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon; \zeta) \\
&+ (1 + \zeta)(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}.
\end{aligned} \tag{9.27}$$

Так как образ операторов в (9.27) лежит в $H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, можно подействовать оператором $B_{D,\varepsilon}^{1/2}$ на левую и правую части этого тождества. С учетом (2.7) при всех $\mathbf{w} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\begin{aligned}
\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\mathbf{w}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2 &= b_{D,\varepsilon}[\mathbf{w}, \mathbf{w}] = \widetilde{b}_{D,\varepsilon}[(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}, (f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}] \\
&= \|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}\|_{L_2(\mathcal{O})}^2.
\end{aligned} \tag{9.28}$$

Очевидно,

$$(f^\varepsilon)^*(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon) = (\widetilde{B}_{D,\varepsilon} + I)(f^\varepsilon)^{-1}. \tag{9.29}$$

Используя (2.8), (9.28) и (9.29), заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{D,\varepsilon} + Q_0^\varepsilon)\mathbf{w}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&= \|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} + I)(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \|(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} + I)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{w}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&= \|(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon} + I)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\mathbf{w}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \\
&\mathbf{w} \in H_0^1(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n).
\end{aligned}$$

Пользуясь этими соображениями и учитывая (3.2), (9.10)–(9.12), (9.20) и (9.22), на основании (9.27) получаем

$$
\begin{aligned}
&\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\left((B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon(1-\theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon;\zeta)\right)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\leqslant (c_\flat+2)^2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\varrho_\flat(\zeta)\\
&\times\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\left((B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0+\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon(1-\theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon;-1)\right)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&+\varepsilon|\zeta+1|^{1/2}\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+1)^{1/2}(c_\flat+2)^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}\\
&\times\|(1-\theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&+|1+\zeta|^{1/2}\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\times C_{Q_0}c_5\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+1)^{1/2}(c_\flat+2)^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}\varepsilon.
\end{aligned}
\tag{9.30}
$$

Обозначим слагаемые в правой части (9.30) через $\mathcal{L}_1(\varepsilon;\zeta)$, $\mathcal{L}_2(\varepsilon;\zeta)$ и $\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)$. Оценка первого слагаемого вытекает из (2.3) и (9.26):

$$
\mathcal{L}_1(\varepsilon;\zeta)\leqslant c_4^{1/2}\gamma_{31}(c_\flat+2)^2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\varrho_\flat(\zeta)\varepsilon^{1/2}=:\gamma_{32}\varrho_\flat(\zeta)\varepsilon^{1/2}. \tag{9.31}
$$

Для оценки $\mathcal{L}_2(\varepsilon;\zeta)$ заметим, что в силу (1.3), (2.38), (2.39) и (4.23), (4.24) выполнено

$$
\begin{aligned}
\|K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}&\leqslant \alpha_1^{1/2}M_1C_{\mathcal{O}}^{(1)}\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&+\widetilde{M}_1C_{\mathcal{O}}^{(0)}\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
$$

Поэтому из (9.22) следует, что

$$
\mathcal{L}_2(\varepsilon;\zeta)\leqslant\gamma_{33}\varrho_\flat(\zeta)\varepsilon, \tag{9.32}
$$

где $\gamma_{33}:=c_5(c_\flat+1)(c_\flat+2)\|f\|^2_{L_\infty}\|f^{-1}\|^2_{L_\infty}\left(\alpha_1^{1/2}M_1C_{\mathcal{O}}^{(1)}+\widetilde{M}_1C_{\mathcal{O}}^{(0)}\right)$.

Осталось оценить $\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)$. Учитывая (2.7), (2.8), по двойственности получаем

$$
\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\|_{H^{-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}=\|f^\varepsilon\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^*I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}. \tag{9.33}
$$

Используя (9.17), находим

$$
\begin{aligned}
\|f^\varepsilon\widetilde{B}_{D,\varepsilon}^{1/2}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^*I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}&\leqslant\|f\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat}\frac{x^{1/2}}{|x-\zeta^*|}\\
&\leqslant\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+1)^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}.
\end{aligned}
\tag{9.34}
$$

Так как образ оператора, стоящего под знаком нормы в правой части (9.33), лежит в $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, в силу (2.3) и (2.7) имеем

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{D}[f^\varepsilon]\widetilde{B}^{1/2}_{D,\varepsilon}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant c_*^{-1/2}\|\widetilde{B}_{D,\varepsilon}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (9.11) (после загрубления) получаем

$$\|\mathbf{D}[f^\varepsilon]\widetilde{B}^{1/2}_{D,\varepsilon}(\widetilde{B}_{D,\varepsilon}-\zeta^* I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant c_*^{-1/2}(c_\flat+2)\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}. \tag{9.35}$$

Объединяя (9.33)–(9.35), находим

$$\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta)\leqslant|1+\zeta|^{1/2}\gamma_{34}\varrho_\flat(\zeta)\varepsilon, \tag{9.36}$$

где $\gamma_{34}=c_5C_{Q_0}(c_\flat+1)^{1/2}(c_\flat+2)^{1/2}\|f\|_{L_\infty}\bigl(\|f\|_{L_\infty}(c_\flat+1)^{1/2}+c_*^{-1/2}(c_\flat+2)\bigr)$. Теперь из (2.5), (9.30), (9.31), (9.32) и (9.36) вытекает, что

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon(1-\theta_\varepsilon)K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant\gamma_{35}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)+C_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta),\end{aligned} \tag{9.37}$$

где $\gamma_{35}:=c_5(\gamma_{32}+\gamma_{33})$, $C_{30}=c_5\gamma_{34}$.

Наконец, в силу (2.39), (9.11), (9.12) и (9.25) выполнено

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon\theta_\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant\|\varepsilon\theta_\varepsilon K_D(\varepsilon;-1)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\|(B_D^0+\overline{Q_0})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant\varepsilon^{1/2}(C_{14}+C_{15}+C_{16})\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}(c_\flat+2)\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}.\end{aligned} \tag{9.38}$$

В итоге из (9.37) и (9.38) вытекает оценка (9.5) с постоянной

$$C_{29}=\gamma_{35}+(c_\flat+2)(C_{14}+C_{15}+C_{16})\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}.$$

Остается проверить (9.6). Из (9.4) с учетом (1.4) следует, что

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{p}_\varepsilon-g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant(d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\bigl(C_{29}\varepsilon^{1/2}+C_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\bigr)\varrho_\flat(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{9.39}$$

Далее, рассуждая аналогично (5.16), (5.17) и (5.19), с учетом (1.3) имеем

$$\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{v}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0-g^\varepsilon\bigl(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\bigr)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant\gamma_{36}\varepsilon\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}. \tag{9.40}$$

Здесь $\gamma_{36} = \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} \big(M_1 (\alpha_1 d)^{1/2} + \widetilde{M}_1 d^{1/2} + r_1 \big)$. В силу (2.27)–(2.29) и (9.11) выполнено

$$\begin{aligned} &\|(B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^2(\mathcal{O})} \|B_D^0 (B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \widehat{c} \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \sup_{x \geqslant c_\flat} x |x - \zeta|^{-1} \leqslant \widehat{c}(c_\flat + 2) \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty} \rho_\flat(\zeta)^{1/2}. \end{aligned} \tag{9.41}$$

Следовательно, с учетом (2.38) справедливо неравенство

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \gamma_{37} \rho_\flat(\zeta)^{1/2} \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \gamma_{37} := C_{\mathcal{O}}^{(2)} \widehat{c}(c_\flat + 2) \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{9.42}$$

Отсюда и из (9.39), (9.40) вытекает оценка (9.6) с постоянными $\widetilde{C}_{29} = (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C_{29} + \gamma_{36}\gamma_{37}$ и $\widetilde{C}_{30} = (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C_{30}$. □

Замечание 9.3. *Если в условиях теоремы* 9.1 *матрица-функция* $Q_0(\mathbf{x})$ *постоянна:* $Q_0(\mathbf{x}) = \overline{Q_0}$, *то последнее слагаемое в правой части тождества* (9.27) *обращается в нуль. В этом случае* $C_{Q_0} = 0$, *а потому оценки* (9.4)–(9.6) *справедливы при* $C_{30} = \widetilde{C}_{30} = 0$.

9.2 Устранение S_ε

Теорема 9.4. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1.
1°. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *удовлетворяет условию* 7.1. *Пусть* $G_1(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (7.1). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon P_{\mathcal{O}})(B_D^0 - \zeta \overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant C_{31}' \varepsilon^{1/2} \varrho_\flat(\zeta) + C_{30} |1 + \zeta|^{1/2} \varepsilon \varrho_\flat(\zeta), \end{aligned} \tag{9.43}$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - G_1(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \widetilde{C}_{31}' \varepsilon^{1/2} \varrho_\flat(\zeta) + \widetilde{C}_{30} |1 + \zeta|^{1/2} \varepsilon \varrho_\flat(\zeta). \end{aligned}$$

Постоянные C_{31}' *и* $\widetilde{C}_{31}'$ *зависят от исходных данных* (1.9), *области* $\mathcal{O}$, *выбора* $c_\flat$ *и от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$. *Постоянные* C_{30} *и* $\widetilde{C}_{30}$ *те же, что и в* (9.5), (9.6).

2°. *Пусть матрица-функция $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию 7.3. Пусть $G_2(\varepsilon;\zeta)$ — оператор (7.3). Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ и $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ выполнено*

$$
\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant C_{31}''\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)+C_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta),\\
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-G_2(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant \widetilde{C}_{31}''\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)+\widetilde{C}_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).
\end{aligned}
\tag{9.44}
$$

Постоянные C_{31}'' и $\widetilde{C}_{31}''$ зависят от исходных данных (1.9), области $\mathcal{O}$, выбора $c_\flat$, а также от p и $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.
3°. *Пусть условия 7.1 и 7.3 выполнены одновременно. Пусть оператор $G_3(\varepsilon;\zeta)$ определен в (7.5). Тогда при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ и $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ справедливы аппроксимации*

$$
\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant C_{31}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)+C_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta),
\end{aligned}
\tag{9.45}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-G_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant \widetilde{C}_{31}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)+\widetilde{C}_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).
\end{aligned}
\tag{9.46}
$$

Здесь постоянные C_{31} и $\widetilde{C}_{31}$ зависят от исходных данных (1.9), области $\mathcal{O}$, выбора $c_\flat$, от p и от норм $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Сначала установим аппроксимации обобщенной резольвенты при учете корректора. На основании (2.38), (2.39), (9.5), (9.41) и леммы 7.7 заключаем, что при условии 7.1 справедлива оценка (9.43), где $C_{31}'=C_{29}+\mathfrak{C}_\Lambda C_\mathcal{O}^{(2)}\widehat{c}(c_\flat+2)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

Аналогично, с помощью леммы 7.8 заключаем, что при условии 7.3 выполнена оценка (9.44) с постоянной

$$
C_{31}''=C_{29}+\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}C_\mathcal{O}^{(2)}\widehat{c}(c_\flat+2)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}.
$$

Если условия 7.1 и 7.3 справедливы одновременно, то в силу лемм 7.7 и 7.8 верна оценка (9.45) с постоянной

$$
C_{31}=C_{29}+(\mathfrak{C}_\Lambda+\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}})C_\mathcal{O}^{(2)}\widehat{c}(c_\flat+2)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}.
$$

Результаты, относящиеся к „потокам" $g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, выводятся из соответствующих аппроксимаций обобщенной резольвенты. Доказательство похоже на доказательство оценки (2.44). Для примера проверим справедливость оценки (9.46) при условиях 7.1 и 7.3. С учетом (1.4) из (9.45) следует, что

$$\begin{aligned}
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\left(C_{31}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)+C_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta)\right).
\end{aligned} \tag{9.47}$$

Сохраняет силу соотношение (7.16). По аналогии с (7.17) и (7.18) с учетом (9.41) имеем

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\Big\|\sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})D_l+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon D_l\big)(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant \varepsilon\left(\alpha_1 d\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}+(\alpha_1 d)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}C(\widehat{q},\Omega)C_{\mathcal{O}}^{(1)}\right) \\
&\quad\times\|(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\leqslant\gamma_{38}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta)^{1/2},
\end{aligned} \tag{9.48}$$

где

$$\begin{aligned}
\gamma_{38}&=\|g\|_{L_\infty}\left(\alpha_1 d\|\Lambda\|_{L_\infty}+(\alpha_1 d)^{1/2}\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}C(\widehat{q},\Omega)C_{\mathcal{O}}^{(1)}\right) \\
&\quad\times\widehat{c}(c_\flat+2)\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}.
\end{aligned}$$

Теперь из (7.16), (9.47) и (9.48) вытекает (9.46) с постоянной $\widetilde{C}_{31}=(d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_{31}+\gamma_{38}$. $\square$

9.3 Специальные случаи

Следующие утверждения получаются аналогично предложениям 7.9 и 7.10.

Предложение 9.5. *Пусть справедливы равенства* (1.28) *и* (7.19). *Тогда в условиях теоремы* 9.1 *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *выполнено*

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant C_{29}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)+C_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).
\end{aligned}$$

Предложение 9.6. *Пусть имеют место соотношения* (1.29) *и* (7.19). *Тогда* $\widetilde{g}(\mathbf{x})=g^0=\underline{g}$, $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})=0$, *и в условиях теоремы* 9.1 *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}
&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-g^0 b(\mathbf{D})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant\widetilde{C}_{31}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)+\widetilde{C}_{30}|1+\zeta|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).
\end{aligned}$$

9.4 Оценка с поправкой типа пограничного слоя

Получим теперь „другую” аппроксимацию с поправкой типа пограничного слоя на основании теоремы 2.7.

Теорема 9.7. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1. *Пусть* $\mathbf{w}_\varepsilon$ — *решение задачи* (2.45). *Пусть оператор* $W_D(\varepsilon;\zeta)$ *определен в* (2.53). *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant 1$ *и* $\zeta\in\mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon+\mathbf{w}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}\leqslant(C_{32}+C_{30}|1+\zeta|^{1/2})\varepsilon\varrho_\flat(\zeta)\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)+\varepsilon W_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&\quad\leqslant(C_{32}+C_{30}|\zeta+1|^{1/2})\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).\end{aligned}\tag{9.49}$$

Постоянная C_{30} — *та же, что и в теореме* 9.1. *Постоянная* C_{32} *зависит только от данных задачи* (1.9), *от области* $\mathcal{O}$ *и от выбора* $c_\flat$.

Доказательство. Доказательство основано на применении оценки (2.55) (см. также (2.53)) в фиксированной точке $\zeta=-1$:

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0+\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;-1)+\varepsilon W_D(\varepsilon;-1)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&\quad=\|(B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0+\overline{Q_0})^{-1}+\varepsilon(B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}T(\varepsilon;-1)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&\quad\leqslant C_7\varepsilon\end{aligned}\tag{9.50}$$

и использовании аналога резольвентного тождества.

Из определения $T(\varepsilon;\zeta)$ (см. (2.50), (2.51)) ясно, что

$$T(\varepsilon;-1)(B_D^0+\overline{Q_0})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}=T(\varepsilon;\zeta).$$

Пользуясь этим соображением и учитывая (2.53), несложно установить тождество

$$\begin{aligned}&(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)+\varepsilon W_D(\varepsilon;\zeta)\\&\quad=(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}+\varepsilon(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}T(\varepsilon;\zeta)\\&\quad=(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)\\&\quad\times\big((B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0+\overline{Q_0})^{-1}+\varepsilon(B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}T(\varepsilon;-1)\big)\\&\quad\times(B_D^0+\overline{Q_0})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}\\&\quad+(\zeta+1)(B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}(Q_0^\varepsilon-\overline{Q_0})(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}.\end{aligned}$$

Заметим, что образ операторов в левой и правой частях равенства лежит в $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, и мы можем подействовать оператором $B_{D,\varepsilon}^{1/2}$ на левую и правую части. По аналогии с (9.30) получаем

$$\begin{aligned}
&\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\left((B_{D,\varepsilon}-\zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0-\zeta\overline{Q_0})^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)+\varepsilon W_D(\varepsilon;\zeta)\right)\|_{L_2\to L_2}\\
&\quad\leqslant (c_\flat+2)^2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\varrho_\flat(\zeta)\\
&\quad\times\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\left((B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}-(B_D^0+\overline{Q_0})^{-1}+\varepsilon(B_{D,\varepsilon}+Q_0^\varepsilon)^{-1}T(\varepsilon;-1)\right)\|_{L_2\to L_2}\\
&\quad+\mathcal{L}_3(\varepsilon;\zeta).
\end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части оценим на основании (2.3) и (9.50). Пользуясь (2.5), (9.36) и этими соображениями, заключаем, что справедлива оценка (9.49) с постоянной

$$C_{32}=c_5c_4^{1/2}(c_\flat+2)^2C_7\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}.$$

$\square$

9.5 Оценки в строго внутренней подобласти

Пусть $\mathcal{O}'$ — строго внутренняя подобласть области $\mathcal{O}$. Используя теорему 9.1 и результаты усреднения в $\mathbb{R}^d$, аналогично теореме 8.1 получим аппроксимацию точного порядка (относительно ε) для решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в $H^1(\mathcal{O}')$.

Теорема 9.8. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1. *Пусть* $\mathcal{O}'$ — *строго внутренняя подобласть области* $\mathcal{O}$ *и пусть* $\delta := \operatorname{dist}\{\mathcal{O}';\partial\mathcal{O}\}$. *Тогда при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon-\mathbf{v}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')}\leqslant\left(C'_{33}\delta^{-1}c(\psi)+C''_{33}+|1+\zeta|^{1/2}C'''_{33}\right)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\tag{9.51}$$

$$\begin{aligned}
&\|\mathbf{p}_\varepsilon-\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0-g^\varepsilon\left(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\right)^\varepsilon S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathcal{O}')}\\
&\quad\leqslant\left(\widetilde{C}'_{33}\delta^{-1}c(\psi)+\widetilde{C}''_{33}+|1+\zeta|^{1/2}\widetilde{C}'''_{33}\right)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}\tag{9.52}$$

Постоянные C'_{33}, C''_{33}, C'''_{33}, $\widetilde{C}'_{33}$, $\widetilde{C}''_{33}$ *и* $\widetilde{C}'''_{33}$ *зависят только от данных задачи* (1.9) *и от области* $\mathcal{O}$.

Доказательство. Мы будем действовать по аналогии с доказательством теоремы 8.1, опираясь на теорему 9.1 и результаты усреднения во всем пространстве. Однако ассоциированную задачу в $\mathbb{R}^d$ приходится выбирать иначе. Положим

$$B^0\widetilde{\mathbf{u}}_0 - (\zeta - c_\flat)\overline{Q_0}\widetilde{\mathbf{u}}_0 =: \widehat{\mathbf{F}}. \tag{9.53}$$

Заметим, что

$$\widehat{\mathbf{F}}|_{\mathcal{O}} - \mathbf{F} = c_\flat \overline{Q_0}\mathbf{u}_0.$$

В силу (2.28) и (2.29)

$$\|(B_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}.$$

Вместе с (2.38) это приводит к оценке

$$\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{\mathcal{O}}^{(0)} c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.54}$$

Аналогично (4.5) на основании (2.28), (9.54) и (9.42) получаем оценку для функции (9.53):

$$\begin{gathered}\|\widehat{\mathbf{F}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|B^0\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + |\zeta - c_\flat|\|Q_0\|_{L_\infty}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant C_L\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + |\zeta - c_\flat|\|Q_0\|_{L_\infty}\|\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_F \varrho_\flat(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{gathered} \tag{9.55}$$

где $\widehat{C}_F = C_L\gamma_{37} + C_{\mathcal{O}}^{(0)}\|Q_0\|_{L_\infty}\|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}$.

По условию теоремы $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$. Тогда точка $(\zeta - c_\flat) \in \mathbb{C}\setminus[0,\infty)$ является регулярной для оператора $\widetilde{B}_\varepsilon := (f^\varepsilon)^* B_\varepsilon f^\varepsilon$. Поэтому определен оператор $(B_\varepsilon - (\zeta - c_\flat)Q_0^\varepsilon)^{-1} = f^\varepsilon(\widetilde{B}_\varepsilon - (\zeta - c_\flat)I)^{-1}(f^\varepsilon)^*$, а значит разрешима задача

$$B_\varepsilon\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon - (\zeta - c_\flat)Q_0^\varepsilon\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon = \widehat{\mathbf{F}} \tag{9.56}$$

в $\mathbb{R}^d$. Тогда функция $\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon$ удовлетворяет тождеству

$$\mathfrak{b}_{N,\varepsilon}[\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon, \boldsymbol{\eta}] - (\zeta - c_\flat)(Q_0^\varepsilon(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon), \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})} = c_\flat(Q_0^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon - \overline{Q_0}\mathbf{u}_0, \boldsymbol{\eta})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \boldsymbol{\eta} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{9.57}$$

Пусть χ — срезка, удовлетворяющая условиям (8.3). В равенство (9.57) подставим $\boldsymbol{\eta} = \chi^2(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)$ и обозначим

$$\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon) := \mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon), \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)]. \tag{9.58}$$

Аналогично (8.6) преобразуем полученное тождество к виду

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon) - (\zeta - c_\flat)(Q_0^\varepsilon \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon), \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon))_{L_2(\mathcal{O})} \\
&= 2i \mathrm{Im}\,(g^\varepsilon \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon, b(\mathbf{D})\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon))_{L_2(\mathcal{O})} + (g^\varepsilon \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon, \widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon)_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ 2i \mathrm{Im} \sum_{j=1}^d \big((D_j \chi)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon), (a_j^\varepsilon)^* \chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\big)_{L_2(\mathcal{O})} \\
&+ c_\flat (Q_0^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon - \overline{Q_0}\mathbf{u}_0, \chi^2(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon))_{L_2(\mathcal{O})} \\
&=: i\widehat{\mathcal{J}}_1(\varepsilon) + \widehat{\mathcal{J}}_2(\varepsilon) + i\widehat{\mathcal{J}}_3(\varepsilon) + \widehat{\mathcal{J}}_4(\varepsilon).
\end{aligned} \tag{9.59}$$

Здесь введено обозначение

$$\widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon := \sum_{l=1}^d b_l (D_l \chi)(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon).$$

Оценим слагаемые в правой части (9.59). Аналогично (8.7) получаем

$$|\widehat{\mathcal{J}}_1(\varepsilon)| \leqslant 2 c_*^{-1/2} \|g\|_{L_\infty} \|\widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \alpha_1^{1/2} \widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2}. \tag{9.60}$$

Далее,

$$\widehat{\mathcal{J}}_2(\varepsilon) \leqslant \|g\|_{L_\infty} \|\widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.61}$$

В силу (1.4) и (8.3)

$$\|\widehat{\mathbf{z}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant (d\alpha_1)^{1/2} \kappa \delta^{-1} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.62}$$

Член $\widehat{\mathcal{J}}_3(\varepsilon)$ оценим аналогично (8.11):

$$|\widehat{\mathcal{J}}_3(\varepsilon)| \leqslant \gamma_{24} \delta^{-1} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2}. \tag{9.63}$$

Рассмотрим теперь член $\widehat{\mathcal{J}}_4(\varepsilon)$. В силу (8.3)

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mathcal{J}}_4(\varepsilon)| &= c_\flat \left| \big((Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\mathbf{u}_\varepsilon + \overline{Q_0}(\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0), \chi^2(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\big)_{L_2(\mathcal{O})} \right| \\
&\leqslant c_\flat \|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi \mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \|\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{H^1(\mathcal{O})} \\
&+ c_\flat \|Q_0\|_{L_\infty} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}$$

Учитывая (2.5) и (9.58), заключаем, что

$$\begin{aligned}
|\widehat{\mathcal{J}}_4(\varepsilon)| &\leqslant c_\flat c_5 \|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi \mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\
&+ c_\flat \|Q_0\|_{L_\infty} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{9.64}$$

Возьмем мнимую часть в тождестве (9.59):

$$\operatorname{Im}\zeta \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} = -\widehat{\mathcal{J}}_1(\varepsilon) - \widehat{\mathcal{J}}_3(\varepsilon) - \operatorname{Im}\widehat{\mathcal{J}}_4(\varepsilon). \tag{9.65}$$

Объединяя (9.60) и (9.62)–(9.65), находим

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Im}\zeta| \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \gamma_{39}\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\ &\quad + c_\flat c_5 \|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\ &\quad + c_\flat \|Q_0\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \end{aligned} \tag{9.66}$$

где $\gamma_{39} = 2c_*^{-1/2}\|g\|_{L_\infty}d^{1/2}\alpha_1\kappa + \gamma_{24}$. Если $\operatorname{Re}\zeta \geqslant c_\flat$ (а тогда $\operatorname{Im}\zeta \neq 0$), отсюда выводим неравенство

$$\begin{aligned} &\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}\gamma_{39}\delta^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\ &\quad + c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}c_\flat c_5\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\ &\quad + c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}c_\flat\|Q_0\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta \geqslant c_\flat. \end{aligned} \tag{9.67}$$

Если $\operatorname{Re}\zeta < c_\flat$, то возьмем вещественную часть в (9.59) и получим

$$\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon) + |\operatorname{Re}\zeta - c_\flat| \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} = \widehat{\mathcal{J}}_2(\varepsilon) + \operatorname{Re}\widehat{\mathcal{J}}_4(\varepsilon). \tag{9.68}$$

В силу (9.61), (9.62) и (9.64) из (9.68) следует, что

$$\begin{aligned} &|\operatorname{Re}\zeta - c_\flat| \|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant d\alpha_1\kappa^2\|g\|_{L_\infty}\delta^{-2}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + c_\flat c_5\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\ &\quad + c_\flat\|Q_0\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{9.69}$$

Складывая (9.66) и (9.69), имеем

$$\begin{aligned} &\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \gamma_{39}\delta^{-1}|\zeta - c_\flat|^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\ &\quad + d\alpha_1\kappa^2\|g\|_{L_\infty}\delta^{-2}|\zeta - c_\flat|^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad + 2c_\flat c_5|\zeta - c_\flat|^{-1}\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\ &\quad + 2c_\flat|\zeta - c_\flat|^{-1}\|Q_0\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \operatorname{Re}\zeta < c_\flat. \end{aligned} \tag{9.70}$$

Теперь из (9.67) и (9.70) следует, что при всех рассматриваемых значениях ζ выполнено

$$
\begin{aligned}
&\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \gamma_{39}\delta^{-1}c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\
&\quad + d\alpha_1\kappa^2\|g\|_{L_\infty}\delta^{-2}|\zeta - c_\flat|^{-1}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + 2c_\flat c_5 c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\
&\quad + 2c_\flat c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}\|Q_0\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
\tag{9.71}
$$

Взяв в (9.59) вещественную часть, получим

$$
\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon) \leqslant |\zeta - c_\flat|\|(Q_0^\varepsilon)^{1/2}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + \widehat{\mathcal{J}}_2(\varepsilon) + \left|\widehat{\mathcal{J}}_4(\varepsilon)\right|.
$$

Используя (9.61), (9.62), (9.64) и (9.71), отсюда выводим

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon) &\leqslant \gamma_{39}\delta^{-1}c(\psi)\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\
&\quad + 2d\alpha_1\kappa^2\|g\|_{L_\infty}\delta^{-2}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + 3c_\flat c_5 c(\psi)\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})}\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon)^{1/2} \\
&\quad + 3c_\flat c(\psi)\|Q_0\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
\widehat{\mathfrak{U}}(\varepsilon) &\leqslant \gamma_{40}^2\delta^{-2}c(\psi)^2\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|^2_{L_2(\mathcal{O})} + 18c_\flat^2 c_5^2 c(\psi)^2\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|^2_{H^{-1}(\mathcal{O})} \\
&\quad + 6c_\flat c(\psi)\|Q_0\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})},
\end{aligned}
$$

где $\gamma_{40}^2 := 2\gamma_{39}^2 + 4d\alpha_1\kappa^2\|g\|_{L_\infty}$. С помощью (2.3) и (9.58) это влечет

$$
\begin{aligned}
\|\mathbf{D}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant c_*^{-1/2}\left(\gamma_{40}c(\psi)\delta^{-1} + 1\right)\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad + \sqrt{18}c_*^{-1/2}c_\flat c_5 c(\psi)\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \\
&\quad + 3c_*^{-1/2}c_\flat c(\psi)\|Q_0\|_{L_\infty}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
\tag{9.72}
$$

Чтобы оценить второе слагаемое в правой части (9.72), воспользуемся леммой 3.6:

$$
\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \leqslant C_{Q_0}\varepsilon\|\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})}. \tag{9.73}
$$

В силу (2.8), (2.10) и (8.3)

$$
\begin{aligned}
\|\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant (1 + \kappa\delta^{-1})\|\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant (1 + \kappa\delta^{-1})c(\psi)|\zeta - c_\flat|^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned}
\tag{9.74}
$$

На основании (2.3) и (9.16) находим, что

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_*^{-1/2}\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_*^{-1/2}\|f\|_{L_\infty}\sup_{x\geqslant c_\flat} x^{1/2}|x-\zeta|^{-1}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.75}$$

Из (9.1) и (9.17) вытекает неравенство

$$|\zeta - c_\flat|^{1/2}\sup_{x\geqslant c_\flat} x^{1/2}|x-\zeta|^{-1} \leqslant (c_\flat+1)^{1/2}c(\psi)^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/4}.$$

Вместе с (9.75) это влечет

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_*^{-1/2}(c_\flat+1)^{1/2}\|f\|_{L_\infty}c(\psi)^{1/2}|\zeta-c_\flat|^{-1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.76}$$

А тогда из (9.74) и (9.76) следует неравенство

$$\begin{aligned}\|\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant (1+\kappa\delta^{-1})c(\psi)|\zeta-c_\flat|^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ c_*^{-1/2}(c_\flat+1)^{1/2}\|f\|_{L_\infty}c(\psi)^{1/2}|\zeta-c_\flat|^{-1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{9.77}$$

Объединяя (9.73) и (9.77), находим

$$\begin{aligned}\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} &\leqslant C_{Q_0}\varepsilon(1+\kappa\delta^{-1})c(\psi)|\zeta-c_\flat|^{-1}\|f\|^2_{L_\infty}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &+ \varepsilon\gamma_{41}c(\psi)^{1/2}|\zeta-c_\flat|^{-1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/4}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},\end{aligned}$$

где $\gamma_{41} = c_*^{-1/2}(c_\flat+1)^{1/2}C_{Q_0}\|f\|_{L_\infty}$. С учетом (9.1) (после загрубления) это влечет

$$\|(Q_0^\varepsilon - \overline{Q_0})\chi\mathbf{u}_\varepsilon\|_{H^{-1}(\mathcal{O})} \leqslant (\gamma_{42}\delta^{-1}+\gamma_{43})\varepsilon\varrho_\flat(\zeta)^{1/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{9.78}$$

где $\gamma_{42} = C_{Q_0}\kappa\|f\|^2_{L_\infty}$, $\gamma_{43} = C_{Q_0}\|f\|^2_{L_\infty} + \gamma_{41}$.

Оценим теперь $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})}$. Для $\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2}$ выполнено (9.2). Используем аппроксимацию (1.46) в $\mathbb{R}^d$ (в точке $\zeta - c_\flat$):

$$\|(B_\varepsilon - (\zeta-c_\flat)Q_0^\varepsilon)^{-1} - (B^0 - (\zeta-c_\flat)\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_1\varrho_\flat(\zeta)\varepsilon.$$

Учитывая (9.53), (9.55) и (9.56), отсюда получаем

$$\|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{C}_1\widehat{C}_F\varepsilon\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.79}$$

Комбинируя (9.1), (9.2) и (9.79), находим

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})} &\leqslant \|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant (C_{28} + \widehat{C}_1\widehat{C}_F)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned} \tag{9.80}$$

Теперь соотношения (9.2), (9.72), (9.78) и (9.80) приводят к оценке

$$\|\mathbf{D}\chi(\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \left(C'_{33}\delta^{-1}c(\psi) + C'_{34}\right)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Здесь

$$C'_{33} = c_*^{-1/2}\gamma_{40}(C_{28} + \widehat{C}_1\widehat{C}_F) + \sqrt{18}c_*^{-1/2}c_\flat c_5\gamma_{42},$$
$$C'_{34} = c_*^{-1/2}(C_{28} + \widehat{C}_1\widehat{C}_F) + \sqrt{18}c_*^{-1/2}c_\flat c_5\gamma_{43} + 3c_*^{-1/2}c_\flat\|Q_0\|_{L_\infty}C_{28}.$$

Отсюда и из (9.80) вытекает неравенство

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \left(C'_{33}\delta^{-1}c(\psi) + C'_{34} + C_{28} + \widehat{C}_1\widehat{C}_F\right)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.81}$$

В силу теоремы 1.10 и (9.53), (9.55), (9.56)

$$\begin{split}\|\widehat{\mathbf{u}}_\varepsilon - \widetilde{\mathbf{u}}_0 - \varepsilon\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)S_\varepsilon\widetilde{\mathbf{u}}_0\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \\ \leqslant \widehat{C}_F\big(\widehat{C}_2 + \widehat{C}'_3 + |1+\zeta-c_\flat|^{1/2}\widehat{C}''_3\big)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{split} \tag{9.82}$$

В итоге оценки (9.81) и (9.82) влекут искомое неравенство (9.51) с постоянными $C''_{33} = C'_{34} + C_{28} + \widehat{C}_F(\widehat{C}_1 + \widehat{C}_2 + \widehat{C}'_3 + c_\flat^{1/2}\widehat{C}''_3)$,

$$C'''_{33} = \widehat{C}_F\widehat{C}''_3. \tag{9.83}$$

Действуя по аналогии с (5.15)–(5.20) и используя (9.42) вместо (4.2) и (4.3), на основании (9.51) получаем оценку (9.52) с постоянными

$$\widetilde{C}_{33} = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}C'_{33},$$
$$\widetilde{C}''_{33} = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}C''_{33} + \|g\|_{L_\infty}\alpha_1^{1/2}\gamma_{37}\big(M_1\alpha_1^{1/2}d^{1/2} + \widetilde{M}_1 d^{1/2} + r_1\big),$$
$$\widetilde{C}'''_{33} = \|g\|_{L_\infty}(d\alpha_1)^{1/2}C'''_{33}. \tag{9.84}$$

□

В силу замечания 1.11, (9.51), (9.52), (9.83), (9.84) имеет место следующее утверждение.

Замечание 9.9. *Если в условиях теоремы* 9.8 *матрица-функция* Q_0 *постоянна, то оценки* (9.51) *и* (9.52) *справедливы при* $C'''_{33} = \widetilde{C}'''_{33} = 0$, *т. е. члены, содержащие* $|\zeta+1|^{1/2}$, *в этих оценках отсутствуют.*

9.6 Устранение S_ε в аппроксимациях в строго внутренней подобласти

Теорема 9.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.8.
1°. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 7.1. *Пусть* $G_1(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (7.1). *Положим* $\mathbf{v}_\varepsilon^{(1)} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0$. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^{(1)}\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \bigl(C'_{33}\delta^{-1}c(\psi) + C'_{34} + |1+\zeta|^{1/2}C'''_{33}\bigr)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - G_1(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \bigl(\widetilde{C}'_{33}\delta^{-1}c(\psi) + \widetilde{C}'_{34} + |1+\zeta|^{1/2}\widetilde{C}'''_{33}\bigr)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Здесь постоянные C'_{33}, C'''_{33}, $\widetilde{C}'_{33}$ *и* $\widetilde{C}'''_{33}$ — *те же, что и в* (9.51), (9.52). *Постоянные* C'_{34} *и* $\widetilde{C}'_{34}$ *зависят от исходных данных* (1.9), *области* $\mathcal{O}$ *и* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.
2°. *Пусть матрица-функция* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 7.3. *Пусть* $G_2(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (7.3). *Положим* $\mathbf{v}_\varepsilon^{(2)} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D})\widetilde{\mathbf{u}}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\mathbf{u}_0$. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *справедливы неравенства*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^{(2)}\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \bigl(C'_{33}\delta^{-1}c(\psi) + C''_{34} + |1+\zeta|^{1/2}C'''_{33}\bigr)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})},$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - G_2(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \bigl(\widetilde{C}'_{33}\delta^{-1}c(\psi) + \widetilde{C}''_{34} + |1+\zeta|^{1/2}\widetilde{C}'''_{33}\bigr)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}.$$

Постоянные C''_{34} *и* $\widetilde{C}''_{34}$ *зависят лишь от исходных данных* (1.9), *области* $\mathcal{O}$, *от* p *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.
3°. *Предположим, что условия* 7.1 *и* 7.3 *выполнены одновременно. Пусть* $G_3(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (7.5). *Положим* $\mathbf{v}_\varepsilon^{(3)} = \mathbf{u}_0 + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0 + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\mathbf{u}_0$. *Тогда при* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *и* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *имеют место аппроксимации*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{v}_\varepsilon^{(3)}\|_{H^1(\mathcal{O}')} \leqslant \bigl(C'_{33}\delta^{-1}c(\psi) + C_{34} + |1+\zeta|^{1/2}C'''_{33}\bigr)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \tag{9.85}$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon - G_3(\varepsilon;\zeta)\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O}')} \leqslant \bigl(\widetilde{C}'_{33}\delta^{-1}c(\psi) + \widetilde{C}_{34} + |1+\zeta|^{1/2}\widetilde{C}'''_{33}\bigr)\varrho_\flat(\zeta)^{3/2}\varepsilon\|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathcal{O})}. \tag{9.86}$$

Постоянные C_{34} *и* $\widetilde{C}_{34}$ *зависят от исходных данных* (1.9), *области* $\mathcal{O}$, *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Доказательство. Доказательство похоже на доказательство теоремы 9.4. Для примера установим утверждения п. 3° теоремы 9.10. Пусть выполнены условия 7.1 и 7.3. В силу лемм 7.7, 7.8 и (2.37), (2.39), (9.41), (9.51) заключаем, что верна оценка (9.85) с постоянной

$$C_{34} = C''_{33} + (\mathfrak{C}_\Lambda + \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}) C^{(2)}_{\mathcal{O}} \widehat{c}(c_\flat + 2) \|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}.$$

Аппроксимация потоков (9.86) выводится из (9.85). Действуя по аналогии с (9.47) и учитывая (9.48), приходим к оценке (9.86) с постоянной $\widetilde{C}_{34} = (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C_{34} + \gamma_{38}$. □

10 Примеры применения общих результатов

В случае операторов, действующих во всем пространстве, рассматриваемые в этом параграфе примеры изучались в [Su1, Su4, MSu1].

10.1 Скалярный эллиптический оператор

Рассмотрим случай, когда $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, а $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция *с вещественными элементами*, $g(\mathbf{x}) > 0$, $g, g^{-1} \in L_\infty$. Тогда очевидно (см. (1.3)) $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ и $b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla$.

Далее, пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$, — Γ-периодические вещественные функции, причем

$$A_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geqslant 2; \quad j = 1, \dots, d. \tag{10.1}$$

Пусть $v(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ — вещественные Γ-периодические функции такие, что

$$v, \mathcal{V} \in L_s(\Omega), \quad \int_\Omega v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0, \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2. \tag{10.2}$$

В $L_2(\mathcal{O})$ рассмотрим оператор $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathfrak{B}_{D,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) \tag{10.3}$$

при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Точное определение оператора $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[u,u] = \int_{\mathcal{O}} \left(\langle g^\varepsilon (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) u \rangle + (\varepsilon^{-1} v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon) |u|^2 \right) d\mathbf{x}, \qquad u \in H^1_0(\mathcal{O}).$$

Оператор (10.3) можно понимать как периодический оператор Шрёдингера с метрикой g^ε, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon$, содержащим сингулярное слагаемое $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon$.

Легко видеть (см. [Su1, п. 13.1]), что оператор (10.3) можно переписать следующим образом:

$$\mathfrak{B}_{D,\varepsilon} = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}). \qquad (10.4)$$

Здесь вещественная функция $Q(\mathbf{x})$ определена равенством

$$Q(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \langle g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x})\rangle. \qquad (10.5)$$

Комплексные функции $a_j(\mathbf{x})$ заданы выражениями

$$a_j(\mathbf{x}) = -\eta_j(\mathbf{x}) + i\xi_j(\mathbf{x}), \quad j = 1, \dots, d, \qquad (10.6)$$

где $\eta_j(\mathbf{x})$ — компоненты вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x})$, а функции $\xi_j(\mathbf{x})$ определены через Γ-периодическое решение $\Phi(\mathbf{x})$ задачи $\Delta\Phi(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$, $\int_\Omega \Phi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0$, соотношением $\xi_j(\mathbf{x}) = -\partial_j \Phi(\mathbf{x})$. При этом выполнено

$$v(\mathbf{x}) = -\sum_{j=1}^{d} \partial_j \xi_j(\mathbf{x}). \qquad (10.7)$$

Можно проверить, что функции (10.6) удовлетворяют условию (1.7) с подходящим показателем ρ', зависящим от ρ и s, причем нормы $\|a_j\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$ контролируются через $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}$, $\|v\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решетки Γ. (См. [Su1, п. 13.1].) Функция (10.5) удовлетворяет условию (1.8) с подходящим показателем $s' = \min\{s; \rho/2\}$.

Пусть $Q_0(\mathbf{x})$ — положительно определенная и ограниченная Γ-периодическая функция. Следуя (2.1), введем положительно определенный оператор $\mathcal{B}_{D,\varepsilon} := \mathfrak{B}_{D,\varepsilon} + \lambda Q_0^\varepsilon$. Здесь постоянная λ выбрана из условия (1.14) для оператора, коэффициенты g, a_j, $j = 1, \dots, d$, Q и Q_0 которого определены выше. Оператор $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ можно записать в виде

$$\mathcal{B}_{D,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda Q_0^\varepsilon(\mathbf{x}). \qquad (10.8)$$

Нас интересует поведение оператора $(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$, $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$. В рассматриваемом случае исходные данные (1.9) сводятся к набору

$$\begin{gathered} d, \rho, s; \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|v\|_{L_s(\Omega)}, \|\mathcal{V}\|_{L_s(\Omega)}, \\ \|Q_0\|_{L_\infty}, \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty}; \text{параметры решетки } \Gamma. \end{gathered} \qquad (10.9)$$

Выпишем эффективный оператор. В нашем случае Г-периодическое решение задачи (1.20) является матрицей-строкой:

$$\Lambda(\mathbf{x}) = i\Psi(\mathbf{x}), \quad \Psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_d(\mathbf{x}),$$

где $\psi_j(\mathbf{x}) \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla \psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_\Omega \psi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}_j$, $j = 1, \dots, d$, — стандартные орты в $\mathbb{R}^d$. Ясно, что функции $\psi_j(\mathbf{x})$ вещественнозначные, а элементы матрицы-строки $\Lambda(\mathbf{x})$ чисто мнимые. Согласно (1.22) столбцы $(d \times d)$-матрицы-функции $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — это $g(\mathbf{x})(\nabla \psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, d$. Эффективная матрица определена в соответствии с (1.21): $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. Ясно, что $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ и g^0 имеют вещественные элементы.

Согласно (10.6) и (10.7) периодическое решение задачи (1.30) представляется в виде $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + i\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$, где вещественные Г-периодические функции $\widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$ являются решениями задач

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0,$$
$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) + \operatorname{div} g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Матрица-столбец V (см. (1.34)) имеет вид $V = V_1 + iV_2$, где V_1, V_2 — столбцы с вещественными элементами, определяемые равенствами

$$V_1 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\nabla \Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x}) \nabla \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{10.10}$$

$$V_2 = -|\Omega|^{-1} \int_\Omega (\nabla \Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x}) \nabla \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{10.11}$$

Согласно (1.35) постоянная W запишется в виде

$$W = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \Big(\langle g(\mathbf{x}) \nabla \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}), \nabla \widetilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) \rangle + \langle g(\mathbf{x}) \nabla \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}), \nabla \widetilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) \rangle \Big)\, d\mathbf{x}. \tag{10.12}$$

Эффективный оператор для $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ действует по правилу

$$\mathcal{B}_D^0 u = -\operatorname{div} g^0 \nabla u + 2i \langle \nabla u, V_1 + \overline{\boldsymbol{\eta}} \rangle + (-W + \overline{Q} + \lambda \overline{Q_0}) u, \quad u \in H^2(\mathcal{O}) \cap H_0^1(\mathcal{O}).$$

Этот оператор допускает запись в виде

$$\mathcal{B}_D^0 = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) + \mathcal{V}^0 + \lambda \overline{Q_0}, \tag{10.13}$$

где

$$\mathbf{A}^0 = (g^0)^{-1}(V_1 + \overline{g\mathbf{A}}), \quad \mathcal{V}^0 = \overline{\mathcal{V}} + \overline{\langle g\mathbf{A}, \mathbf{A}\rangle} - \langle g^0\mathbf{A}^0, \mathbf{A}^0\rangle - W. \tag{10.14}$$

Согласно замечанию 7.5 в рассматриваемом случае справедливы условия 7.1 и 7.3, причем нормы $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ и $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ оцениваются в терминах данных задачи (10.9). Поэтому можно использовать корректор, не содержащий сглаживающего оператора:

$$\mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta) := \Big([\Lambda^\varepsilon]\mathbf{D} + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\Big)(\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} = \Big([\Psi^\varepsilon]\nabla + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\Big)(\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{10.15}$$

Оператор (7.5) запишется в виде $G_3(\varepsilon;\zeta) = -i\mathcal{G}_3(\varepsilon;\zeta)$, где

$$\mathcal{G}_3(\varepsilon;\zeta) = \widetilde{g}^\varepsilon\nabla(\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} + g^\varepsilon(\nabla\widetilde{\Lambda})^\varepsilon(\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}. \tag{10.16}$$

В соответствии с теоремами 2.5 и 7.6(3°) справедлив следующий результат.

Предложение 10.1. *Пусть $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ — оператор* (10.8)*, коэффициенты которого удовлетворяют условиям, сформулированным выше в п.* 10.1. *Пусть $\mathcal{B}_D^0$ — эффективный оператор* (10.13)*, коэффициенты которого определены согласно* (10.10)–(10.12) *и* (10.14)*. Пусть $\mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)$ — корректор* (10.15)*. Пусть оператор $\mathcal{G}_3(\varepsilon;\zeta)$ определен в* (10.16)*. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, $|\zeta| \geqslant 1$. Число ε_1 выберем из условия* 2.4. *Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливы оценки*

$$\|(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4 c(\phi)^5\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{10.17}$$

$$\begin{aligned} &\|(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon\mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant C_5 c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_{23}c(\phi)^4\varepsilon, \end{aligned} \tag{10.18}$$

$$\begin{aligned} &\|g^\varepsilon\nabla(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - \mathcal{G}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant \widetilde{C}_5 c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_{23}c(\phi)^4\varepsilon. \end{aligned} \tag{10.19}$$

Здесь $c(\phi)$ — величина (1.44)*. Постоянные C_4, C_5, C_{23}, $\widetilde{C}_5$ и $\widetilde{C}_{23}$ зависят только от исходных данных* (10.9) *и области $\mathcal{O}$.*

„Другая“ аппроксимация оператора $(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}$ получается на основании теорем 9.1 и 9.4(3°).

Предложение 10.2. *Пусть коэффициенты операторов $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$ и $\mathcal{B}_D^0$ удовлетворяют условиям предложения* 10.1*. Пусть $\mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)$ и $\mathcal{G}_3(\varepsilon;\zeta)$ — операторы* (10.15), (10.16)*. Положим $f(\mathbf{x}) := Q_0(\mathbf{x})^{-1/2}$, $f_0 := (\overline{Q_0})^{-1/2}$.*

Пусть $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$, *где* $c_\flat \geqslant 0$ — *общая нижняя грань операторов* $\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} := f^\varepsilon \mathcal{B}_{D,\varepsilon} f^\varepsilon$ *и* $\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 := f_0 \mathcal{B}_D^0 f_0$. *Пусть* $\varrho_\flat(\zeta)$ — *величина* (9.1). *Число* ε_1 *выберем из условия* 2.4. *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеют место оценки*

$$\|(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{28} \varrho_\flat(\zeta)\varepsilon,$$

$$\begin{aligned}&\|(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1} - \varepsilon \mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant C_{31}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta) + C_{30}|\zeta+1|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta),\end{aligned} \tag{10.20}$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon \nabla(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1} - \mathcal{G}_3(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \widetilde{C}_{31}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta) + \widetilde{C}_{30}|\zeta+1|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).\end{aligned} \tag{10.21}$$

Постоянные C_{28}, C_{30}, C_{31}, $\widetilde{C}_{30}$ *и* $\widetilde{C}_{31}$ *зависят от исходных данных* (10.9), *от области* $\mathcal{O}$ *и от выбора* $c_\flat$. *В случае, когда функция* $Q_0(\mathbf{x})$ *постоянна, оценки* (10.20) *и* (10.21) *выполнены при* $C_{30} = \widetilde{C}_{30} = 0$.

10.2 Периодический оператор Шрёдингера

Пусть $\check{g}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая симметричная $(d \times d)$-матрица-функция в $\mathbb{R}^d$ с вещественными элементами: $\check{g}(\mathbf{x}) > 0$, $\check{g}, \check{g}^{-1} \in L_\infty$; а $\check{v}(\mathbf{x})$ — вещественная Γ-периодическая функция такая, что

$$\check{v} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2.$$

Через $\check{\mathcal{A}}$ обозначим оператор в $L_2(\mathbb{R}^d)$, отвечающий квадратичной форме

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}u, \mathbf{D}u\rangle + \check{v}(\mathbf{x})|u|^2\right) d\mathbf{x}, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

За счет добавления постоянной к потенциалу $\check{v}(\mathbf{x})$ будем считать, что оператор $\check{\mathcal{A}}$ имеет точку ноль краем спектра. При этом условии оператор $\check{\mathcal{A}}$ допускает факторизацию (см. [BSu1, гл. 6, п. 1.1]).

В $L_2(\mathcal{O})$ рассмотрим оператор $\check{\mathcal{A}}_D = \mathbf{D}^*\check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D} + \check{v}(\mathbf{x})$ при условии Дирихле. Строгое определение оператора $\check{\mathcal{A}}_D$ дается через квадратичную форму

$$\check{\mathfrak{a}}[u,u] = \int_{\mathcal{O}} \left(\langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}u, \mathbf{D}u\rangle + \check{v}(\mathbf{x})|u|^2\right) d\mathbf{x}, \quad u \in H_0^1(\mathcal{O}). \tag{10.22}$$

Оператор $\check{\mathcal{A}}_D$ наследует факторизацию оператора $\check{\mathcal{A}}$. Чтобы ее описать, рассмотрим уравнение

$$\mathbf{D}^*\check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x}) + \check{v}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0. \tag{10.23}$$

Это уравнение имеет Γ-периодическое решение $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$, определенное с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, чтобы $\omega(\mathbf{x}) > 0$ и

$$\int_\Omega \omega^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = |\Omega|. \tag{10.24}$$

Более того, решение положительно определено и ограничено: $0 < \omega_0 \leqslant \omega(\mathbf{x}) \leqslant \omega_1 < \infty$. Нормы $\|\omega\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ контролируются через $\|\check{g}\|_{L_\infty}$, $\|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\|\check{v}\|_{L_s(\Omega)}$. Отметим, что ω и ω^{-1} являются мультипликаторами в $H_0^1(\mathcal{O})$.

Подстановка $u = \omega z$ с учетом (10.23) преобразует форму (10.22) к виду

$$\check{\mathfrak{a}}[u,u] = \int_{\mathcal{O}} \omega(\mathbf{x})^2 \langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}z, \mathbf{D}z\rangle\, d\mathbf{x}, \quad u = \omega z, \quad z \in H_0^1(\mathcal{O}).$$

Поэтому оператор $\check{\mathcal{A}}_D$ допускает факторизацию

$$\check{\mathcal{A}}_D = \omega^{-1}\mathbf{D}^* g \mathbf{D} \omega^{-1}, \quad g = \omega^2 \check{g}. \tag{10.25}$$

Рассмотрим теперь оператор с осциллирующими коэффициентами

$$\check{\mathcal{A}}_{D,\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad g = \omega^2 \check{g}. \tag{10.26}$$

В исходных терминах выражение (10.26) запишется так:

$$\check{\mathcal{A}}_{D,\varepsilon} = \mathbf{D}^* \check{g}^\varepsilon \mathbf{D} + \varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon. \tag{10.27}$$

Этот оператор можно трактовать как оператор Шрёдингера с быстро осциллирующей метрикой $\check{g}^\varepsilon$ и сильно сингулярным потенциалом $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon$.

Далее, пусть $\mathbf{A} = \operatorname{col}\{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, удовлетворяющие условию (10.1). Пусть $\widehat{v}(\mathbf{x})$ и $\check{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ — Γ-периодические вещественные функции, причем

$$\widehat{v}, \check{\mathcal{V}} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2, \int_\Omega \widehat{v}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{10.28}$$

В $L_2(\mathcal{O})$ рассмотрим оператор $\check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)^* \check{g}^\varepsilon (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) + \varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon + \check{\mathcal{V}}^\varepsilon \tag{10.29}$$

при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Строгое определение дается через квадратичную форму. Оператор $\check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon}$ можно трактовать как оператор Шрёдингера с метрикой $\check{g}^\varepsilon$, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon + \check{\mathcal{V}}^\varepsilon$, содержащим сингулярные слагаемые $\varepsilon^{-2}\check{v}^\varepsilon$ и $\varepsilon^{-1}\widehat{v}^\varepsilon$.

Положим

$$v(\mathbf{x}) := \widehat{v}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) := \check{\mathcal{V}}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x}). \tag{10.30}$$

С учетом (10.26), (10.27) справедливо тождество $\check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}(\omega^\varepsilon)^{-1}$, где оператор $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ задан выражением (10.3), в котором g определено в (10.25), а v и $\mathcal{V}$ — в (10.30). В силу (10.28) и свойств функции ω коэффициенты v и $\mathcal{V}$ удовлетворяют условиям (10.2). Тогда оператор $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ можно представить в виде (10.4), где a_j, $j = 1, \dots, d$, и Q построены по g, $\mathbf{A}$ и вышеописанным функциям v и $\mathcal{V}$ согласно (10.5), (10.6).

Пусть $\check{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая вещественная функция, положительно определенная и ограниченная. Положим $Q_0(\mathbf{x}) := \check{Q}_0(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})$. Постоянную λ выберем из условия (1.14) для оператора с теми же коэффициентами g, a_j, $j = 1, \dots, d$, и Q, что и у $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$, и коэффициентом $Q_0(\mathbf{x}) := \check{Q}_0(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})$. Тогда оператор $\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} := \check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon} + \lambda\check{Q}_0^\varepsilon$ связан с оператором $\mathcal{B}_{D,\varepsilon} := \mathfrak{B}_{D,\varepsilon} + \lambda Q_0^\varepsilon$ соотношением $\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} = (\omega^\varepsilon)^{-1}\mathcal{B}_{D,\varepsilon}(\omega^\varepsilon)^{-1}$. Очевидно,

$$(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} = \omega^\varepsilon(\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\omega^\varepsilon. \tag{10.31}$$

Под исходными данными будем понимать набор

$$\begin{aligned} &d, \rho, s; \|\check{g}\|_{L_\infty}, \|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|\check{v}\|_{L_s(\Omega)}, \|\widehat{v}\|_{L_s(\Omega)}, \|\check{\mathcal{V}}\|_{L_s(\Omega)}, \\ &\|\check{Q}_0\|_{L_\infty}, \|\check{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty}; \text{ параметры решетки } \Gamma. \end{aligned} \tag{10.32}$$

На основании (10.31) и предложений 10.1, 10.2 получим следующий результат.

Предложение 10.3. *Пусть $\check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon}$ — оператор* (10.29)*, коэффициенты которого удовлетворяют условиям, сформулированным выше в п.* 10.2. *Пусть $\omega(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое положительное решение уравнения* (10.23)*, удовлетворяющее условию* (10.24)*. Пусть $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ — оператор* (10.3)*с коэффициентами $g^\varepsilon = \check{g}^\varepsilon(\omega^\varepsilon)^2$, $\mathbf{A}^\varepsilon$, $v^\varepsilon = \widehat{v}^\varepsilon(\omega^\varepsilon)^2$ и $\mathcal{V}^\varepsilon = \check{\mathcal{V}}^\varepsilon(\omega^\varepsilon)^2$. Пусть $\check{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая вещественная функция, положительно определенная и ограниченная, а $Q_0 := \check{Q}_0\omega^2$. Постоянную λ выберем из условия* (1.14) *для оператора $\mathfrak{B}_{D,\varepsilon}$ и функции Q_0. Положим*

$\mathcal{B}_{D,\varepsilon} := \mathfrak{B}_{D,\varepsilon} + \lambda Q_0^\varepsilon$, $\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} := \check{\mathfrak{B}}_{D,\varepsilon} + \lambda \check{Q}_0^\varepsilon$. Пусть $\mathcal{B}_D^0$ — эффективный оператор для $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$, определенный в (10.13)*. Пусть $\mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)$, $\mathcal{G}_3(\varepsilon;\zeta)$ — операторы* (10.15) *и* (10.16) *для оператора $\mathcal{B}_{D,\varepsilon}$. Пусть число ε_1 выбрано из условия* 2.4*.*
1°*. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $\zeta = |\zeta|e^{i\phi}$, $0 < \phi < 2\pi$, $|\zeta| \geqslant 1$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливы оценки*

$$\|(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \omega^\varepsilon(\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_4\|\omega\|_{L_\infty}^2 c(\phi)^5\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{10.33}$$

$$\begin{aligned}&\|(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon - \varepsilon\mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant C_5\|\omega\|_{L_\infty} c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + C_{23}\|\omega\|_{L_\infty}c(\phi)^4\varepsilon,\end{aligned} \tag{10.34}$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon\nabla(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \mathcal{G}_3(\varepsilon;\zeta)\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \widetilde{C}_5\|\omega\|_{L_\infty} c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \widetilde{C}_{23}\|\omega\|_{L_\infty}c(\phi)^4\varepsilon.\end{aligned} \tag{10.35}$$

Здесь $c(\phi)$ — величина (1.44)*.*
2°*. Положим $f(\mathbf{x}) := Q_0(\mathbf{x})^{-1/2}$, $f_0 := (\overline{Q_0})^{-1/2}$. Пусть $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$, где $c_\flat \geqslant 0$ — общая нижняя грань операторов $\widetilde{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} := f^\varepsilon\mathcal{B}_{D,\varepsilon}f^\varepsilon$ и $\widetilde{\mathcal{B}}_D^0 := f_0\mathcal{B}_D^0 f_0$. Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \omega^\varepsilon(\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{28}\|\omega\|_{L_\infty}^2 \varrho_\flat(\zeta)\varepsilon,\\ &\|(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - (\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}\omega^\varepsilon - \varepsilon\mathcal{K}_D^0(\varepsilon;\zeta)\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant C_{31}\|\omega\|_{L_\infty}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta) + C_{30}\|\omega\|_{L_\infty}|\zeta+1|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta),\end{aligned} \tag{10.36}$$

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon\nabla(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta \check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} - \mathcal{G}_3(\varepsilon;\zeta)\omega^\varepsilon\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\ &\quad\leqslant \widetilde{C}_{31}\|\omega\|_{L_\infty}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta) + \widetilde{C}_{30}\|\omega\|_{L_\infty}|\zeta+1|^{1/2}\varepsilon\varrho_\flat(\zeta).\end{aligned} \tag{10.37}$$

Здесь $\varrho_\flat(\zeta)$ — величина (9.1)*.*

Постоянные $C_4\|\omega\|_{L_\infty}^2$, $C_5\|\omega\|_{L_\infty}$, $C_{23}\|\omega\|_{L_\infty}$, $\widetilde{C}_5\|\omega\|_{L_\infty}$ и $\widetilde{C}_{23}\|\omega\|_{L_\infty}$ зависят только от исходных данных (10.32) *и от области $\mathcal{O}$. Постоянные $C_{28}\|\omega\|_{L_\infty}^2$, $C_{30}\|\omega\|_{L_\infty}$, $C_{31}\|\omega\|_{L_\infty}$ и $\widetilde{C}_{30}\|\omega\|_{L_\infty}$, $\widetilde{C}_{31}\|\omega\|_{L_\infty}$ зависят от тех же параметров и от выбора $c_\flat$. В случае, когда функция $Q_0(\mathbf{x})$ постоянна, оценки* (10.36) *и* (10.37) *выполнены при $C_{30} = \widetilde{C}_{30} = 0$.*

Доказательство. Домножая операторы под знаком нормы в (10.17) с двух сторон на ω^ε и используя (10.31), приходим к оценке (10.33).

В силу (10.31) имеем $(\omega^\varepsilon)^{-1}(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta\check{Q}_0^\varepsilon)^{-1} = (\mathcal{B}_{D,\varepsilon} - \zeta Q_0^\varepsilon)^{-1}\omega^\varepsilon$. Домножая операторы под знаком нормы в (10.18) справа на ω^ε, получаем (10.34). Аналогично из (10.19) вытекает (10.35).

Результаты п. 2° получаются аналогично на основании предложения 10.2. □

Замечание 10.4. *Предложение* 10.3 *демонстрирует, что для оператора* (10.29) *характер усреднения меняется* (*по сравнению с результатами для оператора* (10.3)). *Наличие сильно сингулярного потенциала* $\varepsilon^{-2}\check{v}^{\varepsilon}$ *приводит к тому, что обобщенная резольвента* $(\check{\mathcal{B}}_{D,\varepsilon} - \zeta\check{Q}_0^{\varepsilon})^{-1}$ *не имеет предела по операторной норме в* $L_2(\mathcal{O})$. *Она аппроксимируется через обобщенную резольвенту* $(\mathcal{B}_D^0 - \zeta\overline{Q_0})^{-1}$, *окаймленную быстро осциллирующими множителями* ω^{ε}.

Список литературы

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolau G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publishing Co., Amsterdam—New York, 1978.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), № 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), № 6, 1–104.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), № 6, 1–130.

[Bo] Борисов Д. И., *Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, Алгебра и анализ **20** (2008), № 2, 19–42.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[Zh1] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), вып. 3, 305–308.

[Zh2] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), вып. 5, 597–601.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[ZhPas2] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН **71 (429)** (2016), № 3, 27–122.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[KoE] Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д., *Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач*, Докл. АН СССР **246** (1979), № 4, 812–815.

[LaU] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

[MaSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1986.

[McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.

[MSu1] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Two-parametric error estimates in homogenization of second order elliptic systems in $\mathbb{R}^d$*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 7, 1413–1448.

[MSu2] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of initial boundary value problems for parabolic systems with periodic coefficients*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 8, 1736–1775.

[MoV1] Moskow Sh., Vogelius M., *First-order corrections to the homogenised eigenvalues of a periodic composite medium. A* *convergence proof*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), no. 6, 1263–1299.

[MoV2] Moskow S., Vogelius M., *First order corrections to the homogenized eigenvalues of a periodic composite medium. The case of Neumann boundary conditions*, Preprint, Rutgers University, 1997.

[OISh] Олейник О. А., Иосифьян, Г. А., Шамаев А. С., *Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред*, М., Моск. гос. ун-т, М., 1990.

[PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012),№ 6, 139–177.

[R] Rychkov V. S., *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. **60** (1999), 237–257.

[St] Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[Su1] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), № 1, 108–222.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463-476.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453-3493.

[Su4] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с учетом корректора*, Алгебра и анализ **26** (2014), № 4, 195–263.

[Su5] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических операторов с периодическими коэффициентами в зависимости от спектрального параметра*, Алгебра и анализ **27** (2015), № 4, 87–166.

[Xu1] Xu Q., *Uniform regularity estimates in homogenization theory of elliptic system with lower order terms*, J. Math. Anal. Appl. **438** (2016), no. 2, 1066–1107.

[Xu2] Xu Q., *Uniform regularity estimates in homogenization theory of elliptic systems with lower order terms on the Neumann boundary problem*, J. Diff. Equ. **261** (2016), no. 8, 4368—4423.