Множественность решений краевых задач с дробными лапласианами Дирихле и Навье*

Н.С. Устинов †

23 декабря 2016 г.

1 Введение

В данной работе исследуется множественность положительных решений для уравнения с дробным лапласианом:

$$(-\Delta)^s u = |u|^{q-2}u \quad \text{в} \quad \Omega_R, \quad u \in \widetilde{H}^s(\Omega_R) \tag{1}$$

в кольце $\Omega_R = B_{R+1} \backslash B_R \in \mathbb{R}^n$ при $s \in (0,1)$, $2 < q < 2_n^* \equiv \frac{2n}{(n-2s)_+}$. Дробный лапласиан $(-\Delta)^s$ в левой части уравнения (1) может пониматься в смысле Дирихле или в смысле Навье, см. §2.

Эффект множественности был впервые открыт Ч. Коффманом [4], который показал, что при $n = 2$ задача

$$-\Delta u = |u|^{q-2}u \quad \text{в} \quad \Omega_R, \qquad u|_{\partial\Omega_R} = 0 \tag{2}$$

имеет любое наперед заданное число различных (не получающихся друг из друга поворотом) положительных решений при $q > 2$ и достаточно больших R.

В статье [9] была доказана множественность решений задачи (2) в случае $n \geq 4$, $2 < q < 2^* \equiv \frac{2n}{(n-2)_+}$, а также рассматривался вопрос существования нерадиальных решений при $q \geq 2^*$.

Множественность решений в случае $n = 3$ была получена в работе [1].

В дальнейшем в статьях [20] и [18] похожие результаты были получены для уравнения с p-лапласианом $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$: задача

$$-\Delta_p u = |u|^{q-2}u \quad \text{в} \quad \Omega_R, \qquad u|_{\partial\Omega_R} = 0$$

имеет любое наперед заданное число различных положительных решений при $1 < p < \infty$, $p < q < p^* \equiv \frac{np}{(n-p)_+}$ и достаточно больших R.

*Представлено А.И. Назаровым

†Санкт-Петербургский Государственный Университет, Университетский пр. 28, Санкт-Петербург, 198504, Россия. E-mail: ustinns@yandex.ru.

Мы получим аналогичные результаты для задачи (1) в случае $n \neq 3$. Отметим, что оператор дробного лапласиана является нелокальным, что не позволяет использовать технику, представленную в работах выше.

Статья имеет следующую структуру: в §2 даются основные определения, используемые в данной работе. В §3 приведены леммы, помогающие построить оценки энергии радиальных функций в пространстве $\widetilde{H}^s(\omega_R)$. В §4 описано поведение энергии при $R \to +\infty$. Наконец, в §5 доказан основной результат — Теорема 6. Большинство технических деталей помещено в Приложение.

Различные абсолютные константы мы будем обозначать через C. В случае зависимости константы от параметра, этот параметр указывается в скобках. Запись $a \asymp b$ означает, что верна двухсторонняя оценка $C_1 b \le a \le C_2 b$ с константами, не зависящими от R. Шар радиуса r с центром в точке x обозначим $B_r(x)$. Если $x = 0$, то, для краткости, обозначим его B_r. На протяжении всей работы нулевой вектор размерности m мы будем обозначать $\mathbb{O}_m$.

2 Определения и основные понятия

Обозначим ω_R кольцо в $\mathbb{R}^1$: $\omega_R = [-R-1, -R] \cup [R, R+1]$. Функцию с носителем в ω_R или в Ω_R мы будем обозначать u_R, подчеркивая зависимость от радиуса R.

Преобразование Фурье в пространстве $\mathbb{R}^n$ задается формулой

$$\mathcal{F}u(\xi) := \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x} u(x) dx.$$

Напомним определение пространств $H^s(\mathbb{R}^n)$ и $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$ (см., напр., [22, §2.3.3, 4.3.2]):

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in L_2(\mathbb{R}^n) \mid \int\limits_{\mathbb{R}^n} (1 + |\xi|^{2s}) |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi < +\infty \right\};$$
$$\widetilde{H}^s(\Omega_R) = \left\{ u \in H^s(\mathbb{R}^n) \mid supp(u) \subset \overline{\Omega}_R \right\}.$$

Дробный лапласиан $(-\Delta)^s u$ на классе Шварца

$$\mathcal{S} = \left\{ u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x^\alpha D^\beta u(x)| < +\infty \quad \forall \alpha, \beta \right\}$$

задается формулой

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi)).$$

Квадратичная форма этого оператора имеет вид

$$((-\Delta)^s u, u) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi. \tag{3}$$

Дробный лапласиан Дирихле $(-\Delta)^s_D$ в области Ω_R, называемый также суженным (restricted) дробным лапласианом — самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме (3) с областью определения $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$.

Дробный лапласиан Навье $(-\Delta)^s_N$ — это s-тая степень оператора Лапласа в смысле спектральной теории, то есть самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме

$$((-\Delta)^s_N u, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (u, \phi_j)^2, \tag{4}$$

где λ_j и ϕ_j — собственные числа и ортонормированные собственные функции оператора Лапласа с условием Дирихле в области Ω_R. Дробный лапласиан Навье $(-\Delta)^s_N u$ также называется спектральным (spectral) дробным лапласианом. Хорошо известно (см., напр., [10, Лемма 1]), что при $s \in [0,1]$ область определения квадратичной формы (4) совпадает с $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$. Подчеркнем, что оба оператора при $s \notin \mathbb{Z}$ являются нелокальными.

Норма в пространстве $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$ индуцируется нормой в пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} = \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)} + ((-\Delta)^s_D u, u), \tag{5}$$

однако, в силу неравенств Фридрихса (см. Приложение, Лемма 3) в пространстве $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$ квадратичными формами (3) и (4) задаются эквивалентные норме (5) нормы

$$[u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} := ((-\Delta)^s_D u, u) \asymp \|u\|^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \asymp ((-\Delta)^s_N u, u) =: [u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}.$$

Отметим следующее неравенство для квадратичных форм (3) и (4) (см. [10, Теор. 1]): при $s \in (0,1)$ для $u \not\equiv 0$

$$((-\Delta)^s_N u, u) > ((-\Delta)^s_D u, u). \tag{6}$$

Напомним, что квадратичная форма для дробного лапласиана Дирихле может быть получена с помощью продолжения Каффарелли–Сильвестра [2]. Именно, при $u \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$ минимум функционала

$$\mathcal{E}^D_s(w) = \int_0^{+\infty} \int_{\mathbb{R}^n} t^{1-2s} |\nabla w(x,t)|^2 dxdt$$

по подпространству функций

$$\mathfrak{W}^D = \left\{ w(x,t) \mid \mathcal{E}^D_s(w) < +\infty,\, w|_{t=0} = u \right\}$$

достигается на единственной функции $\widetilde{w}_D$ и дает значение квадрата нормы Дирихле в $\widetilde{H}^s(\Omega)$ с точностью до константы $C(s) = \frac{4^s \Gamma(1+s)}{2s \cdot \Gamma(1-s)}$:

$$[u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} = C(s) \mathcal{E}^D_s(\widetilde{w}_D).$$

Аналогично, для дробного лапласиана Навье квадратичная форма получается продолжением Стинга—Торреа [15]: минимум функционала

$$\mathcal{E}^N_s(w) = \int_0^{+\infty} \int_{\Omega} t^{1-2s} |\nabla w(x,t)|^2 dxdt$$

по подпространству функций

$$\mathfrak{W}^N = \left\{ w(x,t) \mid \mathcal{E}_s^N(w) < +\infty,\, w|_{t=0} = u,\, w|_{x\in\partial\Omega} = 0 \right\}$$

достигается на единственной функции $\widetilde{w}_N$, и верна формула (см., напр., [11, (2.6)])

$$[u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)} = C(s)\mathcal{E}_s^N(\widetilde{w}_N).$$

Для пространств $\widetilde{H}^s(\Omega)$ верны неравенства Соболева (см., напр., [22, 2.8.1/15]): при $u \in \widetilde{H}^s(\Omega)$ и $s < \frac{n}{2}$ имеем

$$[u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \ge C_s \|u\|^2_{L_{2^*_n}(\Omega)} \quad \text{и} \quad [u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)} \ge C_s \|u\|^2_{L_{2^*_n}(\Omega)}, \tag{7}$$

(напомним, что через $2^*_n \equiv \frac{2n}{(n-2s)_+}$ обозначен предельный показатель вложения). Точная константа C_s в неравенстве для нормы Дирихле не зависит от области, ее значение было найдено в [5]. Равенство точных констант для норм Навье и Дирихле было получено при $s = 2$ в [16] и [7], при $s \in \mathbb{N}$ в [6] и для произвольного s в [12].

Из неравенств (7) следует непрерывность вложения $\widetilde{H}^s(\Omega)$ в $L_q(\Omega)$ для предельного показателя $q = 2^*_n$, которая, в свою очередь, обеспечивает компактность вложения при $q < 2^*_n$.

Пусть G — замкнутая подгруппа группы $O(n)$. Обозначим $\mathfrak{L}^s_G$ подпространство функций из $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$, инвариантных относительно G, то есть

$$\mathfrak{L}^s_G = \left\{ u \in \widetilde{H}^s(\Omega_R) \mid u(x) = u(gx), \forall g \in G \right\}.$$

Аналогично определяется подпространство функций $L_{q,G}(\Omega_R)$:

$$L_{q,G}(\Omega_R) = \{ u \in L_q(\Omega_R) \mid u(x) = u(gx), \forall g \in G \}.$$

Мы будем придерживаться обозначений, введенных в работе [20]: **допустимым** (m,k)-**разложением** пространства $\mathbb{R}^n$ мы будем называть разложение $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^m)^l \oplus \mathbb{R}^k$, где $l, m \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}_+$ и выполнены условия

$$ml + k = n; \quad m \ge 2; \quad k = 0 \quad \text{или} \quad k \ge m.$$

Например, для $\mathbb{R}^7$ допустимыми разложениями будут

$$\mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^2)^2 \oplus \mathbb{R}^3, \quad \mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^2)^1 \oplus \mathbb{R}^5, \quad \mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^3)^1 \oplus \mathbb{R}^4, \quad \mathbb{R}^7 = (\mathbb{R}^7)^1.$$

В оценках, содержащих допустимые (m,k)-разложения, точки пространства $\mathbb{R}^n$ мы будем обозначать x, точки пространства $\mathbb{R}^m$ — y, точки пространства $\mathbb{R}^k$ — z. Таким образом[1], $x = (y_1, \dots, y_l, z)$. В сферических координатах точки записываются как $x = (r_x, \theta_x)$, $y = (r_y, \theta_y)$, $z = (r_z, \theta_z)$, таким образом, $x = (r_{y_1}, \dots, r_{y_l}, r_z, \theta_{y_1}, \dots, \theta_{y_l}, \theta_z)$. Функция m-**радиальна**, если она зависит только от $r_{y_1}, \dots, r_{y_l}, r_z$. Функция (m,k)-**радиальна**, если она m-радиальна и инвариантна относительно всех перестановок векторов $y_1, \dots, y_l$. Группу, порождающую пространство (m,k)-радиальных функций, обозначим через $G_{m,k}$.

[1] здесь и ниже, если $k = 0$, то координата z отсутствует

3 Вспомогательные утверждения

Под **решением уравнения** (1) мы будем понимать обобщенное решение $u^* \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$, то есть

$$((-\Delta)^s_D u^*, h) \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} Re(\mathcal{F}u^* \overline{\mathcal{F}h}) d\xi = \int\limits_{\Omega_R} |u^*|^{q-2} u^* h dx \quad \forall h \in \widetilde{H}^s(\Omega_R) \tag{8}$$

для дробного лапласиана Дирихле и

$$((-\Delta)^s_N u^*, h) = \int\limits_{\Omega_R} |u^*|^{q-2} u^* h dx \quad \forall h \in \widetilde{H}^s(\Omega_R) \tag{9}$$

для дробного лапласиана Навье.

Определим функционалы $J_D(u)$ и $J_N(u)$ равенствами

$$J_D(u) = \frac{[u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega_R)}} \quad \text{и} \quad J_N(u) = \frac{[u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}}{\|u\|^2_{L_q(\Omega_R)}}.$$

В Лемме 5 (см. Приложение) показано, что минимайзеры этих функционалов по подпространствам $\mathfrak{L}^s_G$ при различных замкнутых подгруппах $G \subset O(n)$ являются положительными решениями уравнения (1).

Следующие леммы посвящены изучению свойств нормы Дирихле $[v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)}$ для функций одной переменной. В первой из них выводится оценка нормы Дирихле семейства функций $v_R(x)$, заданных на прямой и "убегающих по R" при $R \to +\infty$:

Лемма 1. *Пусть функция $g_+(x) \in \widetilde{H}^s[0,1]$ и $g_-(x) = g_+(-x)$. Зададим семейство "убегающих по R" функций:*

$$v_R(x) = g_+(x-R) + g_-(x+R). \tag{10}$$

Тогда при $R \to +\infty$ имеет место соотношение

$$[v_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} = 2[g_+]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]} + o(1).$$

Доказательство. Справедлива цепочка равенств:

$$[v_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} = \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}v_R|^2 d\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} \left|\mathcal{F}g_+ \cdot e^{-i\xi R} + \mathcal{F}g_- \cdot e^{i\xi R}\right|^2 d\xi =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}g_+|^2 d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}g_-|^2 d\xi + \int\limits_{\mathbb{R}} |\xi|^{2s} (\mathcal{F}g_+ \overline{\mathcal{F}g_-} e^{-2i\xi R} + \overline{\mathcal{F}g_+} \mathcal{F}g_- e^{2i\xi R}) d\xi \stackrel{*}{=}$$

$$\stackrel{*}{=} [g_+]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]} + [g_-]^2_{D,\widetilde{H}^s[-1,0]} + o(1) = 2[g_+]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]} + o(1)$$

(равенство * следует из леммы Римана—Лебега). $\square$

Лемма 2. *Пусть $v_R(x)$ — семейство из Леммы 1. Тогда при $a > 0$ и $R \to +\infty$*

$$[v_R r^a]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \asymp R^a [v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)}.$$

Доказательство. Требуется показать, что существуют константы C_0 и C_1, не зависящие от R, такие, что

$$C_0 R^a [v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \geq [v_R r^a]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \geq C_1 R^a [v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)}. \tag{11}$$

Неравенство (25) (см. Приложение) с $v = r^a$ дает левую часть неравенства (11). Далее, применим неравенство (25) к функциям $v = r^{-a}$, $u = v_R r^a$. Получаем требуемое:

$$[v_R r^a]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \geq \frac{[v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)}}{C\|r^{-a}\|_{C^m(\omega_R)}} \geq C_1 [v_R]_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} R^a. \qquad \square$$

4 Оценка энергии по подпространству (m, k)-радиальных функций

Оценим функционал J_D на подпространстве радиальных функций. Любая радиальная функция может быть отождествлена с функцией на прямой, которая, в свою очередь, порождает семейство “убегающих по R” функций по формуле (10).

Теорема 1. *Пусть $v_R \in \widetilde{H}^s(\omega_R)$ — семейство “убегающих по R” функций на прямой из Леммы 1. Восстановим радиальную функцию $u_R(x) \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$ из функции $v_R \in \widetilde{H}^s(\omega_R)$ по формуле $u_R(x) = v_R(|x|)$. Тогда*

$$J_D(u_R) = \frac{[u_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}}{\|u_R\|^2_{L_q(\Omega_R)}} \asymp \frac{R^{n-1}[v_0]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]}}{R^{(n-1)\frac{2}{q}}\|v_0\|^2_{L_q[0,1]}} \tag{12}$$

при $R \to +\infty$ и $q \in [2, 2^*_1]$.

Доказательство. Образ Фурье радиальной функции радиален. Запишем норму Дирихле функции u_R:

$$[u_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}u_R|^2 d\xi = C\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} \left(\int\limits_R^{R+1} v_R(r)\int_{S^{n-1}} e^{-ir|\xi|(\sigma,\theta_\xi)}d\sigma dr\right)^2 d\xi.$$

Благодаря свойству функции Бесселя (см. [21, Теор. IV.1.6])

$$\int\limits_{S^{n-1}} e^{-i|y|(\sigma,\theta)}d\sigma = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{|y|^{\frac{n-2}{2}}}\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(|y|), \quad \theta \in S^{n-1}$$

норму можно преобразовать к следующему виду:

$$[u_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} = C\int\limits_{\mathbb{R}_+} t^{1+2s}\left(\int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r)\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(rt)dr\right)^2 dt.$$

Для оценки правой части разобьем ее на два интеграла. Пусть $\varepsilon(R) = \frac{1}{\sqrt{R}}$. Тогда

$$[u_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} = C \left(\int\limits_0^{\varepsilon(R)} + \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} \right) t^{1+2s} \left(\int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r) \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(rt) dr \right)^2 dt =: I_1 + I_2.$$

Покажем, что I_1 оценивается как $o(R^{n-1})$:

$$\int_0^{\varepsilon(R)} t^{1+2s} \left(\int_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r) \mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(rt) dr \right)^2 dt \leq C\varepsilon(R)^{2+2s} \left(\int_R^{R+1} v_R(r) r^{\frac{n}{2}} dr \right)^2 \leq$$
$$\leq CR^{n-1-s} \|v_R\|^2_{L_2(\omega_R)} \leq CR^{n-1-s} \|v_0\|^2_{L_2[0,1]} = o(R^{n-1}).$$

Оценим теперь интеграл I_2. Функция Бесселя допускает разложение в асимптотический ряд (при $t \to +\infty$) с остатком $|R_N(t)| \leq \frac{C}{t^{2N+\frac{1}{2}}}$ (см. [17, с. 199]):

$$\mathcal{J}_{\frac{n-2}{2}}(t) = \sum_{k=0}^{N} (A_k(t) + B_k(t)) + R_N(t) \tag{13}$$

при $A_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \frac{\cos(t - \frac{n-1}{4}\pi)}{t^{2k}}$ и $B_k(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \frac{\sin(t - \frac{n-1}{4}\pi)}{t^{2k+1}}$.

Легко видеть, что при $t > \varepsilon(R)$ на носителе $v_R(r)$ выражение $rt \to +\infty$ при $R \to +\infty$, поэтому применима асимптотика (13). Определим $\mathfrak{A}_k$, $\mathfrak{B}_k$ и $\mathfrak{R}_N(t)$ формулами

$$\mathfrak{A}_k(t) = \int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r) A_k(rt) dr, \quad \mathfrak{B}_k(t) = \int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r) B_k(rt) dr$$

$$\text{и} \quad \mathfrak{R}_N(t) = \int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r) R_N(rt) dr.$$

Таким образом,

$$I_2 = \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} t^{1+2s} \left(\sum_{k=0}^{N} (\mathfrak{A}_k(t) + \mathfrak{B}_k(t)) + \mathfrak{R}_N(t) \right)^2 dt.$$

В качестве первого приближения к I_2 используем энергию, получающуюся из $\mathfrak{A}_0(t)$:

$$\int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} \mathfrak{A}_0^2(t) t^{1+2s} dt = C \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} t^{1+2s} \left(\int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n}{2}} v_R(r) \sqrt{\frac{2}{\pi r t}} \cos(rt - \tfrac{n-1}{4}\pi) dr \right)^2 dt =$$
$$= C \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} t^{2s} \left(\int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n-1}{2}} v_R(r) \cos(rt - \tfrac{n-1}{4}\pi) dr \right)^2 dt.$$

Сделаем замену переменной $t_1 = t + \frac{(n-1)\pi}{4r}$. Поскольку $t_1 \asymp t$ при $t > \varepsilon(R)$, имеем:

$$\int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} \mathfrak{A}_0^2(t) t^{1+2s} dt \asymp C \int\limits_{\varepsilon(R)-\frac{n-1}{4R}\pi}^{+\infty} t_1^{2s} \left(\int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n-1}{2}} v_R(r) \cos(rt_1) dr \right)^2 dt_1 \asymp$$

$$\asymp \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |t_1|^{2s} \left(\int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n-1}{2}} v_R(r) \cos(rt_1) dr \right)^2 dt_1 + o(R^{n-1}). \quad (14)$$

Из эквивалентности (14) и Лемм 1 и 2 получаем, что

$$\int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} \mathfrak{A}_0^2(t) t^{1+2s} dt \asymp [r^{\frac{n-1}{2}} v_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \asymp R^{n-1}[v_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\omega_R)} \asymp R^{n-1}[v_0]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]}.$$

Аналогичным образом[2] можно оценить энергию, связанную с $\mathfrak{A}_k$ и $\mathfrak{B}_k$ при $k \le N = \lceil s+1 \rceil$. Асимптотики этих членов будут степенями R с меньшими показателями, то есть $o(R^{n-1})$. Наконец, оценка $R_N(t)$ позволяет оценить член с $\mathfrak{R}_N$:

$$\int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} \mathfrak{R}_N^2(t) t^{1+2s} dt \le C \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} t^{-2} \left(\int\limits_R^{R+1} r^{\frac{n-1}{2} - \lceil s+1 \rceil} |v_R(r)| dr \right)^2 dt \le$$

$$\le C R^{n-1-2s-2+\frac{1}{2}} \left(\int\limits_0^1 |v_0(r)| dr \right)^2 = o(R^{n-1}) \|v_0\|^2_{L_2[0,1]}.$$

Эквивалентность $I_2 \asymp R^{n-1}[v_0]^2_{D,\widetilde{H}^s[0,1]}$ следует из эквивалентности

$$I_2 \asymp \int\limits_{\varepsilon(R)}^{+\infty} t^{1+2s} \left(\sum_{k=0}^{N} \left(\mathfrak{A}_k^2(t) + \mathfrak{B}_k^2(t) \right) + \mathfrak{R}_N^2(t) \right) dt.$$

$\square$

Следствие 1. *Минимум функционала J_D по подпространству радиальных функций эквивалентен $R^{(n-1)(1-\frac{2}{q})}$:*

$$\min_{u_R \in \mathfrak{L}^s_{O(n)}} J_D(u_R) \asymp R^{(n-1)(1-\frac{2}{q})} \quad (15)$$

при $R \to +\infty$ и $q \in [2, 2_1^*]$.

Доказательство. Оценка сверху в (15) очевидно следует из эквивалентности (12). Оценка снизу следует из (12) и ограниченности оператора вложения $\widetilde{H}^s[0,1] \hookrightarrow L_q[0,1]$. $\square$

[2]По формуле приведения $\sin(r\rho - \frac{n-1}{4}\pi) = \cos(r\rho - \frac{n+1}{4}\pi)$.

Для исследования поведения энергии на подпространствах $\mathfrak{L}^s_G$ требуется ее двухсторонняя оценка. Следующая теорема дает оценку снизу для (m,k)-радиальных функций:

Теорема 2. *Пусть $u_R(x) \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$ — (m,k)-радиальная функция с $m \neq n$. Тогда при $q \in [2, 2^*_{n-m+1}]$ выполнены неравенства*

$$[u_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \geq CR^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|u_R\|^2_{L_q(\Omega_R)} \quad \text{и} \quad [u_R]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \geq CR^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|u_R\|^2_{L_q(\Omega_R)}. \quad (16)$$

Доказательство. Пусть T_0 — тождественный оператор на пространстве $L_{2,G}$:

$$T_0 : L_{2,G_{m,k}}(\Omega_R) \to L_{2,G_{m,k}}(\Omega_R).$$

Его норма равна единице. Пусть T_1 — оператор вложения пространства $\mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}$ в пространство $L_{p,G_{m,k}}(\Omega_R)$ при $p \in [2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}]$

$$T_1 : \mathfrak{L}^1_{G_{m,k}} \to L_{p,G_{m,k}}(\Omega_R).$$

Согласно работам [9] при $m = 2, k = n-2$ и [20] для произвольных (m,k)-разложений существует такое C_0, что для любого $v \in \mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}$ выполнено неравенство

$$[v]^2_{\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \geq C_0 R^{(m-1)(1-\frac{2}{p})} \|v\|^2_{L_p(\Omega_R)}.$$

Таким образом, оператор T_1 непрерывен и имеет оценку для нормы

$$\|T_1\| = \sup_{v \in \mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}} \frac{\|T_1 v\|_{L_p(\Omega_R)}}{\|v\|_{\mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}}} \leq C_0^{-\frac{1}{2}} R^{(m-1)(\frac{1}{p}-\frac{1}{2})}.$$

Равенство (26) из Леммы 6 описывает пространства $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$ как интерполяционную шкалу:

$$[\widetilde{H}^k(\Omega_R), \widetilde{H}^{k+1}(\Omega_R)]_\delta = \widetilde{H}^{k+\delta}(\Omega_R).$$

Как хорошо известно, пространства Лебега $L_p(\Omega_R)$ также образуют интерполяционную шкалу: при $\frac{1}{p} = \frac{1-\delta}{p_0} + \frac{\delta}{p_1}$

$$[L_{p_0}(\Omega_R), L_{p_1}(\Omega_R)]_\delta = L_p(\Omega_R).$$

Усреднение по группе при помощи меры Хаара позволяет определить непрерывный проектор P в пространстве $L_{p_0}(\Omega_R)$, проецирующий это пространство в подпространство функций $L_{p_0,G_{m,k}}(\Omega_R)$ (также его можно воспринимать как непрерывный проектор из $L_{p_1}(\Omega_R)$ в $L_{p_1,G_{m,k}}(\Omega_R)$). Пространство $L_{p_0,G_{m,k}}(\Omega_R)$ является дополняемым, поэтому в силу [22, Теор. 1.17.1.1] верно

$$[L_{p_0,G_{m,k}}(\Omega_R), L_{p_1,G_{m,k}}(\Omega_R)]_\delta = L_{p,G_{m,k}}(\Omega_R).$$

Аналогичным образом определяется непрерывный проектор из пространства $L_2(\Omega_R)$ в $L_{2,G_{m,k}}(\Omega_R)$ (также непрерывный как проектор из $\widetilde{H}^1(\Omega_R)$ в $\mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}$), пространство дополняемо и

$$[L_{2,G_{m,k}}(\Omega_R), \mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}]_\delta = \mathfrak{L}^\delta_{G_{m,k}}.$$

Таким образом, мы можем интерполировать оператор вложения между операторами T_0 и T_1, полученный оператор мы обозначим T_s:

$$T_s : \mathfrak{L}^s_{G_{m,k}} \to L_{q,G_{m,k}}(\Omega_R) \quad \text{при} \quad \frac{1}{q} = \frac{s}{p} + \frac{1-s}{2}, \tag{17}$$

его норма оценивается посредством интерполяционного неравенства:

$$\|T_s\| \le \|T_0\|^{1-s} \|T_1\|^s \le C_0^{-\frac{s}{2}} R^{(m-1)(\frac{s}{p}-\frac{s}{2})} = C_0^{-\frac{s}{2}} R^{(m-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{2})}. \tag{18}$$

При $p \in [2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}]$ показатель q пробегает отрезок $[2, 2^*_{n-m+1}]$, неравенство (18) дает оценку на интерполяционную норму (совпадающей со стандартной нормой в $H^s(\mathbb{R}^n)$):

$$\|v\|^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \ge C_0^s R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|v\|^2_{L_q(\Omega_R)},$$

из неравенства Фридрихса (см. Лемму 3, Приложение) получаем неравенство (16) для нормы Дирихле:

$$2[v]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \ge \|v\|^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \ge C R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|v\|^2_{L_q(\Omega_R)},$$

неравенство (16) для нормы Навье следует из оценки (6):

$$[v]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \ge [v]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \ge C R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|v\|^2_{L_q(\Omega_R)}. \qquad \square$$

Замечание 1. *Условие $m \neq n$ существенно используется в доказательстве: при $m = n$ предельный показатель q равен $2^*_1 = \frac{2}{1-2s}$, и даже в случае $s < \frac{1}{2}$ его не получить из интерполяции в пространствах Лебега $L_p(\Omega_R)$ — равенство (17) обеспечивает показатели $q \le \frac{2}{1-s}$, что меньше 2^*_1. Однако утверждение теоремы верно и в этом случае, как показывает Теорема 1.*

Оценка из Теоремы 2 является точной, как показывает следующая теорема:

Теорема 3. *Для любого R и $q \in [2, 2^*_{n-m+1}]$ существует такая (m,k)-радиальная функция $\tilde{u}_R$, что*

$$[\tilde{u}_R]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \le C R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|\tilde{u}_R\|^2_{L_q(\Omega_R)} \quad \text{и} \quad [\tilde{u}_R]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \le C R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|\tilde{u}_R\|^2_{L_q(\Omega_R)}. \tag{19}$$

Доказательство. Согласно работам [9] (при $m = 2, k = n-2$ и при $m = n$) и [20] (для произвольных (m,k)-разложений) существует такая $\tilde{u}_R \in \mathfrak{L}^1_{G_{m,k}}$, для которой при $q \in [2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}]$ выполнено неравенство

$$[\tilde{u}_R]^2_{\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \le C R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|\tilde{u}_R\|^2_{L_q(\Omega_R)}.$$

Заметим, что $[2, 2^*_{n-m+1}] \subset [2, \frac{2(n-m+1)}{(n-m-1)_+}]$, поэтому Лемма 4 (см. Приложение) дает требуемую оценку для норм Навье и Дирихле:

$$[\tilde{u}_R]^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \le [\tilde{u}_R]^2_{\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \le C R^{(m-1)(1-\frac{2}{q})} \|\tilde{u}_R\|^2_{L_q(\Omega_R)}.$$

$\square$

Для доказательства множественности решений требуется оценить энергию в пространствах $\mathfrak{L}^s_{O(n-2)\times O(2)}$.

Следствие 2. *Пусть* $n \geq 4$, *тогда минимумы* J_D *и* J_N *по подпространствам* $\mathfrak{L}^s_{O(n-2)\times O(2)}$ *эквивалентны* $R^{1-\frac{2}{q}}$*:*

$$\min_{u_R\in\mathfrak{L}^s_{O(n-2)\times O(2)}} J_D(u_R) \asymp R^{1-\frac{2}{q}} \quad \textit{и} \quad \min_{u_R\in\mathfrak{L}^s_{O(n-2)\times O(2)}} J_N(u_R) \asymp R^{1-\frac{2}{q}}. \tag{20}$$

Доказательство. При $n \geq 4$ функции из пространств $\mathfrak{L}^s_{O(n-2)\times O(2)}$ являются $(2, n-2)$-радиальными, оценки следуют из неравенств (16) и (19). □

5 Теоремы существования и множественности

Теорема 1 дает двухстороннюю оценку на норму Дирихле радиальной функции в $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$ через норму сужения в пространстве $\widetilde{H}^s(\omega_R)$. Это означает, что для подпространства $\mathfrak{L}^s_{O(n)}$ с нормой Дирихле компактность вложения имеет место при $q \in [1, 2^*_1)$. Также, ввиду того, что нормы Дирихле и Навье эквивалентны, компактность вложения при $q \in [1, 2^*_1)$ справедлива и для подпространства $\mathfrak{L}^s_{O(n)}$ с нормой Навье. Используя Лемму 5 (см. Приложение), получаем теорему:

Теорема 4 (Существование радиального решения). *При* $q \in [1, 2^*_1), q \neq 2$ *существует положительное радиальное решение задачи* (1) *для дробных лапласианов Дирихле и Навье.*

Пусть $n \geq 4$, рассмотрим допустимое (m,k)-разложение. Теорема 2 обеспечивает вложение $\mathfrak{L}^s_{G_{m,k}}(\Omega_R) \hookrightarrow L_q(\Omega_R)$ для нормы Дирихле при $q = 2^*_{n-m+1}$. Это означает, что оно имеет место и компактно при $q \in [1, 2^*_{n-m+1})$. Для нормы Навье вложение справедливо в силу эквивалентности норм. Лемма 5 дает существование обобщеного решения $u_R \in \mathfrak{L}^s_{G_{m,k}}$. При $q > 2$ и больших R минимумы функционала J_D по подпространствам $\mathfrak{L}^s_{O(n)}$ и $\mathfrak{L}^s_{G_{m,k}}$ различны в силу оценок (15), (16) и (19); аналогичное утверждение для функцонала J_N получается при помощи неравенства (6). Таким образом, решение не является радиальным, и доказана теорема:

Теорема 5 (Существование нерадиального решения при показателях $q \geq 2^*_n$). *При* $n \geq 4$ *и* $q \in (2, 2^*_{n-m+1})$ *существует такой радиус* R_0, *что при* $R > R_0$ *в* Ω_R *существует положительное* (m,k)*-радиальное решение (при различных* m *решения различны) задачи* (1) *для дробных лапласианов Дирихле и Навье.*

Замечание 2. *Максимальный показатель получается при наибольшем допустимом* m, *то есть* $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

Теорема 6 (Множественность при $n \neq 3$). *Пусть* $n \neq 3$, $s \in (0,1)$, $q \in (2, 2^*_n)$ *и* N *— некоторое натуральное число. Тогда существует такое* $R_1(N)$, *что при любом* $R \geq R_1$ *существует не менее* N *не совмещающихся поворотом положительных решений задач* (1) *с дробными лапласианами Дирихле и Навье.*

Доказательство. Рассмотрим семейство групп $T_\ell \times O(n-2)$, $\ell = 1,2,3\dots,N$, где T_ℓ — группа поворотов на углы, кратные $\frac{2\pi}{\ell}$. Минимайзеры по инвариантным подпространствам $\mathfrak{L}^s_{T_\ell\times O(n-2)}$ являются обобщенными решениями задачи (1) при $q < 2^*_n$.

Рассмотрим положительную функцию $\phi(x) \in \mathcal{C}_0^\infty(B_{\frac{1}{2}}(\mathbb{O}_n))$, удовлетворяющую равенству

$$\phi(x) = \phi(y,z) = \phi(|y|,|z|), \quad y \in \mathbb{R}^2, z \in \mathbb{R}^{n-2}, \quad |y|+|z| \le \tfrac{1}{2}.$$

Обозначим через y_i^0 вершины правильного ℓ-угольника на плоскости с центром в начале координат и $y_1^0 = (R+\frac{1}{2},0)$. Определим функцию u_ℓ равенством

$$u_\ell(y,z) = \sum_{k=1}^{\ell} \phi(y-y_i^0,z).$$

Лемма 7 обеспечивает равномерную ограниченность константой значений $J_D(u_\ell)$ и $J_N(u_\ell)$ при больших R. Из оценок (20) существует такой уровень R_1, что минимумы функционалов J_D и J_N по $\mathfrak{L}^s_{O(2)\times O(n-2)}$ при $R > R_1$ больше найденной выше константы. Остается показать, что минимайзеры по $\mathfrak{L}^s_{T_\ell\times O(n-2)}$, $\ell = 1,2,3\dots,N$ попарно различны.

Свойство инвариантности функции $u(x)$ под действием группы $T_\ell \times O(n-2)$ переносится на минимайзер: если $\widetilde{w}(x,t)$ — продолжение Каффарелли—Сильвестра (Стинга—Торреа)[3] для функции $u(x)$, то $\widetilde{w}(gx,t)$ — продолжение К-С (С-Т) для функции $u(gx) = u(x), \forall g \in T_\ell$. Это продолжения одной и той же функции, в силу единственности они совпадают:

$$\widetilde{w}(x,t) = \widetilde{w}(gx,t), \quad \forall g \in T_\ell \times O(n-2).$$

Таким образом, $\mathcal{E}(w)$ можно минимизировать по подпространству $T_\ell \times O(n-2)$-инвариантных функций в $\mathfrak{W}$. Пусть $\ell_1,\ell_2 \in [1:N], \ell_1 > \ell_2$, рассмотрим два случая:

Первый случай (ℓ_1 делится на ℓ_2). Пусть u_{ℓ_1} и u_{ℓ_2} — минимайзеры по $\mathfrak{L}^s_{T_{\ell_1}\times O(n-2)}$ и $\mathfrak{L}^s_{T_{\ell_2}\times O(n-2)}$ с единичной нормой в $L_q(\Omega)$, им соответствуют продолжения w_{ℓ_1} и w_{ℓ_2}. Рассмотрим функцию $v = u_{\ell_1}(r_y, \frac{\ell_2}{\ell_1}\theta_y, z)$. Очевидным образом, $v \in \mathfrak{L}^s_{T_{\ell_2}\times O(n-2)}$, $\|v\|_{L_q(\Omega)} = 1$ и продолжение для v удовлетворяет равенству $w = w_{\ell_1}(r_y, \frac{\ell_2}{\ell_1}\theta_y, z, t)$. Легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&[u_{\ell_2}]^2_{\widetilde{H}^s(\Omega)} \le [v]^2_{\widetilde{H}^s(\Omega)} = C(s)\mathcal{E}(w) = \\
&= C(s)|S^{n-3}| \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} t^{1-2s} r_y |z|^{n-3}(w^2_{r_y} + \tfrac{1}{r_y^2}w^2_{\theta_y} + w_z^2 + w_t^2)dz d\theta_y dr_y dt = \\
&= C(s)|S^{n-3}| \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} t^{1-2s} r_y |z|^{n-3}((w_{\ell_1})^2_{r_y} + \tfrac{1}{r_y^2}\tfrac{\ell_2^2}{\ell_1^2}(w_{\ell_1})^2_{\theta_y} + (w_{\ell_1})^2_z + (w_{\ell_1})^2_t)dz d\theta_y dr_y dt < \\
&< C(s)|S^{n-3}| \int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{+\infty} t^{1-2s} r_y |z|^{n-3}((w_{\ell_1})^2_{r_y} + \tfrac{1}{r_y^2}(w_{\ell_1})^2_{\theta_y} + (w_{\ell_1})^2_z + (w_{\ell_1})^2_t)dz d\theta_y dr_y dt = \\
&= C(s)\mathcal{E}(w_{\ell_1}) = [u_{\ell_1}]^2_{\widetilde{H}^s(\Omega)},
\end{aligned}$$

[3] далее, для краткости, К-С и С-Т

строгое неравенство следует из того, что при $R \geq R_1$ функция u_{ℓ_1} не принадлежит $\mathfrak{L}^s_{O(2)\times O(n-2)}$. Таким образом, значение энергии у u_{ℓ_1} строго больше, чем у u_{ℓ_2}.

Второй случай (ℓ_1 не делится на ℓ_2). Если минимайзер по $\mathfrak{L}^s_{T_{\ell_1}\times O(n-2)}$ и $\mathfrak{L}^s_{T_{\ell_2}\times O(n-2)}$ один и тот же, то он принадлежит $\mathfrak{L}^s_{T_{\text{НОК}(\ell_1,\ell_2)}\times O(n-2)}$. Применяя первый случай к числам ℓ_1 и НОК(ℓ_1, ℓ_2), получаем требуемое. $\square$

Замечание 3. *Для оператора Лапласа и p-лапласиана Теорема 6 верна в случае $n = 3$, как указывалось во введении. Известные автору доказательства этих утверждений требуют более продвинутых методов концентрации решений. Поэтому для дробных лапласианов вопрос существования таких решений остается открытым.*

Приложение

Лемма 3 (Неравенства Фридрихса). *Для любой функции $u \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$ верны неравенства*

$$((-\Delta)^s_D u, u) \geq \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)} \quad \text{и} \quad ((-\Delta)^s_N u, u) \geq \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)}. \tag{21}$$

Доказательство. Неравенство для нормы Навье можно получить напрямую из определения дробного лапласиана Навье:

$$((-\Delta)^s_N u, u) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (u, \phi_j)^2 \geq \lambda_1^s \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)},$$

$\lambda_1 > 1$ в силу неравенства Фридрихса в области ширины 1 при $u \in \widetilde{H}^1(\Omega_R)$:

$$\|\nabla u\|^2_{L_2(\Omega_R)} \geq \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)}. \tag{22}$$

Неравенство для нормы Дирихле достаточно доказывать для $u \in C_0^\infty(\Omega_R)$; исходное неравенство получится замыканием по норме пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$. Определим семейство норм в пространстве $\widetilde{H}^s(\Omega_R)$, проиндексированных параметром ε, эквивалентных норме в пространстве $H^s(\mathbb{R}^n)$ и заданных формулой

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

Рассмотрим оператор вложения

$$A : \widetilde{H}^s(\Omega_R) \hookrightarrow L_2(\Omega_R),$$

сопряженный ему оператор действует как

$$A^* : L_2(\Omega_R) \to (\widetilde{H}^s(\Omega_R))',$$

их нормы одинаковы. Индуцированная норма в сопряженном пространстве задается формулой

$$\|v\|^2_{(\widetilde{H}^s(\Omega_R))'} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon + |\xi|)^{-2s} |\mathcal{F}v(\xi)|^2 d\xi,$$

в силу неравенства Гельдера получаем

$$\|v\|^2_{(\widetilde{H}^s(\Omega_R))'} \equiv \int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon+|\xi|)^{-2s}|\mathcal{F}v(\xi)|^2 d\xi \le$$

$$\le \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon+|\xi|)^{-2}|\mathcal{F}v(\xi)|^2 d\xi\right)^s \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}v(\xi)|^2 d\xi\right)^{1-s} = \|v\|^{2s}_{(\widetilde{H}^1(\Omega_R))'}\|v\|^{2-2s}_{L_2(\Omega_R)}. \quad (23)$$

Пользуясь оценкой (23) и неравенством Фридрихса (22), получаем цепочку неравенств:

$$\|A\| = \sup \frac{\|u\|_{L_2(\Omega_R)}}{\|u\|_{\widetilde{H}^s(\Omega_R)}} = \sup \frac{\|v\|_{(\widetilde{H}^s(\Omega_R))'}}{\|v\|_{L_2(\Omega_R)}} \le \sup \frac{\|v\|^s_{(\widetilde{H}^1(\Omega_R))'}\|v\|^{1-s}_{L_2(\Omega_R)}}{\|v\|_{L_2(\Omega_R)}} \le$$

$$\le \sup\left(\frac{\|v\|_{(\widetilde{H}^1(\Omega_R))'}}{\|v\|_{L_2(\Omega_R)}}\right)^s = \sup\left(\frac{\|u\|_{L_2(\Omega_R)}}{\|u\|_{\widetilde{H}^1(\Omega_R)}}\right)^s \le 1$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ верно неравенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (\varepsilon+|\xi|)^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \ge \|u\|^2_{L_2(\Omega_R)},$$

неравенство (3) получается предельным переходом $\varepsilon \to 0$. □

Лемма 4. *Для любой функции $u \in \widetilde{H}^1(\Omega_R)$ верны неравенства*

$$[u]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \le [u]_{D,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \quad \text{и} \quad [u]_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} \le [u]_{N,\widetilde{H}^1(\Omega_R)}.$$

Доказательство. Сначала докажем утверждение для нормы Дирихле. Ввиду неравенства Гельдера и неравенства Фридрихса (21) имеем

$$[u]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s}|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi \le \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi\right)^{1-s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2|\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi\right)^s =$$

$$= [u]^{1-s}_{D,L_2(\Omega_R)}[u]^s_{D,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \le [u]^{1-s}_{D,\widetilde{H}^1(\Omega_R)}[u]^s_{D,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} = [u]_{D,\widetilde{H}^1(\Omega_R)}.$$

Утверждение для нормы Навье также получается из неравенства Гельдера и неравенства Фридрихса (21)

$$[u]_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)} = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda_j^s (u,\phi_j)^2 \le \left(\sum_{j=1}^{\infty}(u,\phi_j)^2\right)^{1-s} \left(\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j(u,\phi_j)^2\right)^s =$$

$$= [u]^{1-s}_{N,L_2(\Omega_R)}[u]^s_{N,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} \le [u]^{1-s}_{N,\widetilde{H}^1(\Omega_R)}[u]^s_{N,\widetilde{H}^1(\Omega_R)} = [u]_{N,\widetilde{H}^1(\Omega_R)}.$$

□

Лемма 5. *Пусть вложение $\mathfrak{L}^s_G \hookrightarrow L_q(\Omega_R)$ компактно. Тогда минимайзеры функционалов $J_D(u)$ и $J_N(u)$ по подпространству $\mathfrak{L}^s_G$ существуют и являются положительными решениями задачи (1) с дробными лапласианами Навье и Дирихле.*

Доказательство. В силу однородности функционалов $J_D(u)$ и $J_N(u)$ можно считать их знаменатели единичными. Задача свелась к минимизации норм $W_D(u) = [u]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}$ и $W_N(u) = [u]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega_R)}$ по поверхности уровня $V(u) = \|u\|^q_{L_q(\Omega_R)} = 1$, которая ввиду компактности вложения слабо замкнута. Существование минимайзеров следует из теоремы существования минимайзера у слабо полунепрерывного снизу коэрцитивного функционала на слабо замкнутом множестве (см. [19, Теор. 26.8]). Уравнения Эйлера после домножения на подходящие константы обращаются в тождества (8) и (9) для обобщенных решений на приращениях $h \in \mathfrak{L}^s_G$:

$$\exists \lambda_1, \lambda_2 : DV(u^*_D)h = \lambda_1 DW_D(u^*_D)h, \quad DV(u^*_N)h = \lambda_2 DW_N(u^*_N)h \quad \forall h \in \mathfrak{L}^s_G. \tag{24}$$

Воспользуемся **принципом симметричной критичности**, см. [14, Теор. 1.1]: оба функционала $J_D(u)$ и $J_N(u)$ инвариантны под действием компакнтной замкнутой группы Ли G, и, благодаря этому, из равенств (24) для приращений $h \in \mathfrak{L}^s_G$ следуют аналогичные (24) равенства для всех приращений $h \in \widetilde{H}^s(\Omega_R)$.

Для завершения доказательства остается показать положительность минимайзеров. Их неотрицательность обеспечивается следующим предложением:

Предложение [12, Теор. 3]. *Пусть функция $u(x) \in \widetilde{H}^s(\Omega)$ при $s \in (0,1)$. Тогда функция $|u(x)|$ принадлежит пространству $\widetilde{H}^s(\Omega)$ и верны неравенства для норм:*

$$[u]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \geq [|u|]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \quad \text{и} \quad [u]_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)} \geq [|u|]_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)}.$$

Кроме того, если положительная и отрицательная части функции $u(x)$ не вырождаются, то неравенства строгие.

Из неотрицательности минимайзеров следует их положительность в силу строгого принципа максимума:

Предложение ([3, Лемма 2.6], [8, Теор. 2.5]) . *Пусть функция $u(x) \in \widetilde{H}^s(\Omega) \setminus \{0\}$ удовлетворяет неравенству $(-\Delta)^s u \geq 0$ для дробного лапласиана Дирихле или Навье. Тогда $u > 0$ на любом компактном подмножестве $K \subset \Omega$.* $\square$

Замечание 4. *При $q < 2^*_n$ условия леммы 5 выполнены для любой замкнутой подгруппы $G \subset O(n)$ ввиду компактности вложения $\widetilde{H}^s(\Omega_R) \hookrightarrow L_q(\Omega_R)$.*

Лемма 6. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{Z}_+$, $s = m + \delta \in [m, m+1]$. Тогда для функций $u \in \widetilde{H}^s(\Omega)$, $v \in C^{m+1}(\overline{\Omega})$ верно $uv \in \widetilde{H}^s(\Omega)$ и выполнено неравенство*

$$[uv]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \leq C[u]_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \|v\|^{1-\delta}_{C^m(\overline{\Omega})} \|v\|^{\delta}_{C^{m+1}(\overline{\Omega})}. \tag{25}$$

Доказательство. Утверждение для целых $s = m$ следует из очевидного неравенства

$$\sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha(uv)\|_{L_2(\Omega)} \leq C \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L_2(\Omega)} \|v\|_{C^m(\overline{\Omega})}.$$

Утверждение для $\delta > 0$ получается интерполяцией: по доказанному выше имеем (в случае $m = 0$ пространство $\widetilde{H}^0(\Omega)$ следует понимать как $L_2(\Omega)$):

$$[uv]_{D,\widetilde{H}^m(\Omega)} \leq C[u]_{D,\widetilde{H}^m(\Omega)} \|v\|_{C^m(\overline{\Omega})}$$
$$[uv]_{D,\widetilde{H}^{m+1}(\Omega)} \leq C[u]_{D,\widetilde{H}^{m+1}(\Omega)} \|v\|_{C^{m+1}(\overline{\Omega})},$$

стало быть, оператор домножения на функцию v непрерывен в пространствах $\widetilde{H}^m(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{m+1}(\Omega)$. Согласно [22, Теор. 4.3.2/2]

$$[\widetilde{H}^m(\Omega), \widetilde{H}^{m+1}(\Omega)]_\delta = \widetilde{H}^{m+\delta}(\Omega), \tag{26}$$

откуда следует непрерывность оператора домножения на v в пространстве $\widetilde{H}^{m+\delta}(\Omega)$, интерполяционное неравенство совпадает с требуемой оценкой (25). $\square$

Замечание 5. *При $s \in [0,1]$ утверждение Леммы 6 верно и для норм Навье.*

Лемма 7. *Пусть $u_i(x) \in \widetilde{H}^s(\Omega), i = 1, \dots, k$. Обозначим через $U(x)$ сумму*

$$U(x) = u_1(x) + \dots + u_k(x).$$

Тогда верны неравенства:

$$[U]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \le k \sum_{i=1}^k [u_i]^2_{D,\widetilde{H}^s(\Omega)} \quad \textit{и} \quad [U]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)} \le k \sum_{i=1}^k [u_i]^2_{N,\widetilde{H}^s(\Omega)}.$$

Доказательство. Очевидное следствие неравенства о среднем арифметическом и среднем квадратическом. $\square$

Список литературы

[1] J. Byeon, *Existence of many nonequivalent nonradial positive solutions of semilinear elliptic equations on three-dimensional annuli*, J. Diff. Eqs., **136** (1997), no. 1, 136-165.

[2] L. Caffarelli and L. Silvestre, *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Part. Diff. Eqs. **32** (2007), no. 7-9, 1245-1260.

[3] A. Capella, J. Dávila, L. Dupaigne and Y. Sire, *Regularity of radial extremal solutions for some non-local semilinear equations*, Comm. Part. Diff. Eqs. **36** (2011), no. 8, 1353-1384.

[4] C. V. Coffman, *A non-linear boundary value problem with many positive solutions*, J. Diff. Eqs., **54** (1984), no. 3, 429-437.

[5] A. Cotsiolis and N. K. Tavoularis, *Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives*, J. Math. Anal. Appl., **295** (2004), no. 1, 225-236.

[6] F. Gazzola and H.-C. Grunau and G. Sweers, *Optimal Sobolev and Hardy–Rellich constants under Navier boundary conditions*, Ann. Mat. Pura ed Appl. (4), **189** (2010), no. 3, 475-486.

[7] Y. Ge, *Sharp Sobolev inequalities in critical dimensions*, Michigan Math. J., **51** (2003), no. 1, 27-45.

[8] A. Iannizzotto, S. Mosconi and M. Squassina, *H^s versus C^0-weighted minimizers*, NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl., **22** (2015), no. 3, 477-497.

[9] Y. Y. Li, *Existence of many positive solutions of semilinear elliptic equations on annulus*, J. Diff. Eqs., **83** (1990), no. 2, 348-367.

[10] R. Musina and A.I.Nazarov, *On fractional Laplacians*, Comm. Part. Diff. Eqs., **39** (2014), no. 9, 1780-1790.

[11] R. Musina and A.I.Nazarov, *On fractional Laplacians–3*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations., **22** (2016), no. 3, 832-841.

[12] R. Musina and A.I.Nazarov, *On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications., **121** (2015), 123-129.

[13] R. Musina and A.I.Nazarov, *Variational inequalities for the spectral fractional Laplacian*, arXiv preprint arXiv:1603.05730.

[14] R. S. Palais, *The principle of symmetric criticality*, Comm. Math. Phys., **69** (1979), no. 1, 19-30.

[15] P. R. Stinga and J. L. Torrea, *Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators*, Comm. Part. Diff. Eqs., **35** (2010), no. 11, 2092-2122.

[16] R. C. A. M. Van der Vorst, *Best constant for the embedding of the space $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ into $L^{2N/(N-4)}$*, Differential Integral Equations, **6** (1993), no. 2, 259-276.

[17] Дж. Н. Ватсон, *Теория бесселевых функций*, Издательство иностранной литературы., 1949.

[18] С. Б. Колоницкий, *Множественность решений задачи Дирихле для уравнения с p-лапласианом в трехмерном сферическом слое*, Алгебра и анализ., **22** (2010), no. 3, 206-221.

[19] А. Куфнер, С. Фучик, *Нелинейные дифференциальные уравнения*, Наука., 1988.

[20] А. И. Назаров, *О решениях задачи Дирихле уравнения, содержащего p-лапласиан, в сферическом слое*, Труды СПбМО., **10** (2004), 33-62.

[21] И. М. Стеин, Г. Вейс *Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах*, Мир., 1974.

[22] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир., 1980.