

Анализ m -выпуклости многомерных параболоидов и гиперболоидов*

Н. В. Филимоненкова[†], П. А. Бакусов[‡]

Аннотация

Работа посвящена новому понятию дифференциальной геометрии: m -выпуклая гиперповерхность. Это понятие является обобщением классической выпуклости. Оно появилось в конце XX века в результате удачного применения конусов Гординга в теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Статья содержит краткое описание m -выпуклых гиперповерхностей, доступное широкой аудитории, и результаты исследования m -выпуклости многомерных квадрик: параболоидов и гиперболоидов. Полученные результаты продемонстрированы на двумерных и трехмерных квадраках.

1. Понятие m -выпуклой гиперповерхности

1.1. Элементарные симметрические функции

Для описания дифференциально-геометрических понятий нам понадобятся некоторые алгебраические структуры.

Как известно, элементарной симметрической функцией порядка p от n переменных называется сумма всевозможных произведений, где в качестве множителей выбираются p различных представителей из n переменных:

$$\sigma_p(x) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_p} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_p}, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad 1 \leq p \leq n. \quad (1.1)$$

По определению $\sigma_0(x) = 1$.

*Работа выполнена при поддержке РФФИ, проекты 15-01-07650а, 15-31-20600 мол-а-вед. Представлена Н. М. Ивочкиной.

[†]Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, 195251, Санкт-Петербург, Политехническая ул. 29. E-mail: nf33@yandex.ru.

[‡]Санкт-Петербургский государственный архитектурно-строительный университет, 190005, Санкт-Петербург, 2-ая Красноармейская ул. 4. E-mail: bakusovpavel@gmail.com.

Пусть $x \in \mathbb{R}^n$, обозначим символом $x^{(i)}$ вектор, полученный заменой i -й координаты вектора x на 0:

$$x^{(i)} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n), \quad 1 \leq i \leq n. \quad (1.2)$$

При вычислении $\sigma_p(x^{(i)})$, $p < n$, можно считать, что вектор $x^{(i)}$ получен вычеркиванием i -й координаты из вектора x . При этом $\sigma_n(x^{(i)}) \equiv 0$.

Далее нам понадобятся два простых соотношения:

$$\sigma_p(x) = \sigma_p(x^{(i)}) + x_i \sigma_{p-1}(x^{(i)}), \quad 1 \leq p \leq n, \quad (1.3)$$

$$\sigma_p(x) = \frac{1}{n-p} \sum_{i=1}^n \sigma_p(x^{(i)}), \quad 1 \leq p \leq n-1. \quad (1.4)$$

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^n$ множество всех точек, в которых первые m элементарных симметрических функций принимают положительные значения:

$$K_m = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_p(x) > 0, p = 1, 2, \dots, m\}, \quad 1 \leq m \leq n. \quad (1.5)$$

По определению $K_0 = \mathbb{R}^n$.

Множество (1.5) является конусом с вершиной в нуле: если $x \in K_m$, то $\alpha x \in K_m$, $\alpha > 0$.

Элементарные симметрические функции устойчивы к перестановкам переменных, поэтому векторы из конуса K_m можно считать пронумерованными семействами чисел.

Сформулируем простую версию критерия Сильвестра для конусов (1.5):

$$\begin{aligned} x \in K_m &\Rightarrow x^{(i)} \in K_{m-1}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ \sigma_m(x) > 0, \exists i : x^{(i)} \in K_{m-1} &\Rightarrow x \in K_m. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Множественно используя первую часть критерия (1.6), можно показать, что любой вектор x из конуса K_m имеет по крайней мере m положительных координат. При $m = n$ заключаем, что конус K_n состоит из тех и только из тех векторов, у которых все координаты положительны¹.

1.2. Определение m -выпуклости

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ — C^2 -гладкая ориентированная гиперповерхность, т. е. двусторонняя n -мерная поверхность с выбранным направлением нормали. Обозначим символом $\varkappa(M) = (\varkappa_1, \varkappa_2, \dots, \varkappa_n)(M)$ набор главных кривизн² этой гиперповерхности в точке $M \in \Gamma$.

¹При $m < n$ имеется только односторонняя импликация: если $x \in K_m$, то x имеет m положительных координат, однако обратное не обязательно верно.

²Заметим, что разумного способа нумерации главных кривизн на поверхности не существует, поэтому набор $\varkappa(M)$ понимается как семейство главных кривизн с произвольно выбранной нумерацией.

Определение 1.1. Пусть $1 \leq p \leq n$. Элементарная симметрическая функция порядка p от главных кривизн гиперповерхности Γ в точке M называется p -кривизной или кривизной порядка p этой поверхности в точке M . Обозначим p -кривизну символом $k_p(M) = \sigma_p(\kappa(M))$.

В дифференциальной геометрии два случая p -кривизны являются классическими:

$$k_1 = \kappa_1 + \kappa_2 + \dots + \kappa_n - \text{средняя кривизна,}$$

$$k_n = \kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_n - \text{гауссова кривизна.}$$

Заметим, что p -кривизны, как и главные кривизны, являются геометрическими инвариантами, т. е. не зависят от способа параметризации поверхности. При этом p -кривизны, в отличие от главных кривизн, обладают естественной глобальной нумерацией на поверхности.

Определение 1.2. Пусть $1 \leq m \leq n$. Гиперповерхность Γ называется m -выпуклой в точке $M \in \Gamma$, если $\kappa(M) \in K_m$, иначе говоря,

$$k_p(M) > 0, \quad p = 1, 2, \dots, m.$$

Областью³ m -выпуклости поверхности Γ называем множество всех точек $M \in \Gamma$, в которых Γ является m -выпуклой.

Все C^2 -гладкие ориентированные поверхности по умолчанию являются 0-выпуклыми. Поверхность является m -выпуклой в точке M , если в этой точке положительны все p -кривизны от первого порядка до порядка m включительно.

Например, на рис. 1 изображена схема некоторой поверхности, где разным тоном выделены области положительной p -кривизны, $p = 1, 2, 3$. Данная поверхность является 1-выпуклой в светло-серой двусвязной области с номером I, является 2-выпуклой в двусвязной области с номером II и является 3-выпуклой в темно-серой односвязной области с номером III. В остальных темно-серых областях поверхность не является 3-выпуклой, так как одна из кривизн младшего порядка отрицательна.

Из определения 1.2 следует, что если поверхность Γ является m -выпуклой в данной точке, то она является и $(m - 1)$ -выпуклой. Значит, область ее m -выпуклости вложена в область $(m - 1)$ -выпуклости и т. д.. На рис. 1 область 3-выпуклости вложена в область 2-выпуклости, а та, в свою очередь, включена в еще более широкую область 1-выпуклости.

Замечание 1.3. Определения 1.1 и 1.2 корректны только для ориентированной гиперповерхности, поскольку при изменении направления нормали главные кривизны и p -кривизны с нечетным значением p меняют знак на противоположный.

³На протяжении статьи “область” означает открытое множество, не обязательно связное.

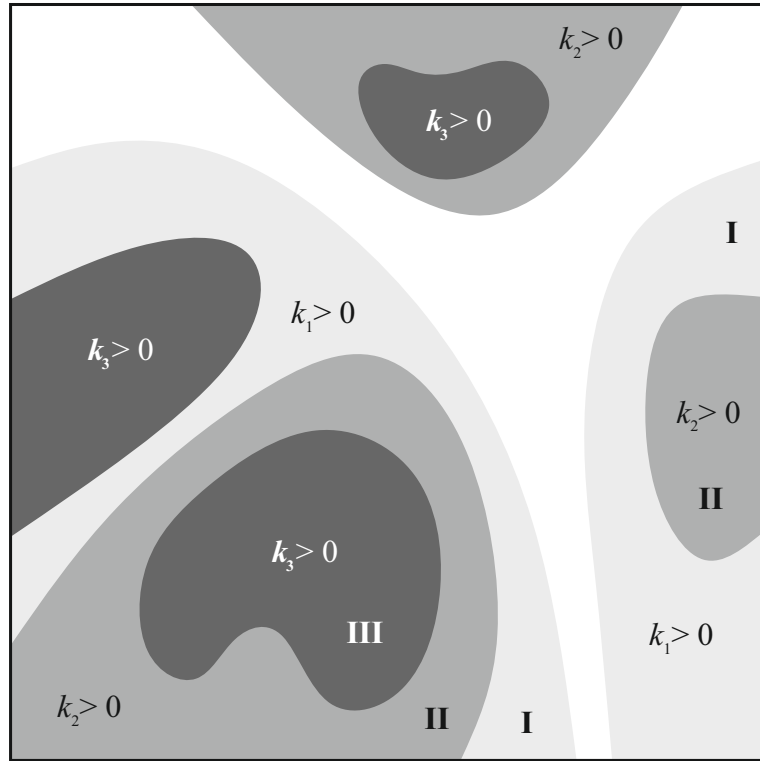


Рис. 1

1.3. Геометрический смысл m -выпуклости

Понятие m -выпуклости является обобщением классической строгой выпуклости и служит для более детальной стратификации поверхностей и точек на поверхности. Чтобы пояснить характер этого обобщения, обратимся к свойству конусов (1.5), описанному в конце раздела 1.1.

Конус K_n состоит из векторов с положительными координатами, следовательно, n -выпуклая гиперповерхность $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ – это поверхность, у которой все главные кривизны положительны, а значит, она является строго выпуклой в классическом смысле. Заметим, что строгая выпуклость и n -выпуклость – очень близкие, но все же не равносильные понятия. Между ними есть небольшой зазор: строго выпуклая поверхность может иметь точки уплощения (изолированные точки нулевой гауссовой кривизны), тогда как n -выпуклая поверхность подразумевает положительность гауссовой кривизны. Для простоты изложения в этой статье мы не будем делать различие между строгой выпуклостью и n -выпуклостью.

При $m < n$ понятие m -выпуклости слабее, чем строгая выпуклость: если поверхность Γ является m -выпуклой в точке M , то в этой точке у нее имеется хотя бы m положительных главных кривизн. Это свойство, однако, не является критерием m -выпуклости, т. е.

наличие m положительных главных кривизн не гарантирует m -выпуклость поверхности с $m < n$.

Геометрический смысл этого свойства заключается в следующем. Рассмотрим в точке M нормальные сечения поверхности вдоль главных направлений: каждое сечение образовано двумерной плоскостью, натянутой на вектор нормали к поверхности и одно из главных направлений. Если поверхность m -выпуклая в точке M , то хотя бы m таких сечений являются строго выпуклыми кривыми в данной точке⁴.

Проиллюстрируем понятие m -выпуклости в самом простом случае – на примере двумерной гиперповерхности $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. На рис. 2 изображены две такие ориентированные поверхности: стрелкой отмечено выбранное направление нормали в точке M , пунктиром выделены нормальные сечения поверхности вдоль главных направлений.

Двумерная поверхность в каждой точке имеет две главные кривизны $\varkappa = (\varkappa_1, \varkappa_2)$, она может быть 1-выпуклой или 2-выпуклой. Исходя из определения 1.2, легко убедиться, что двумерная поверхность является 2-выпуклой тогда и только тогда, когда обе главные кривизны положительны, а значит, она строго выпукла в классическом смысле (рис. 2а):

$$\varkappa \in K_2 \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow k_1 = \varkappa_1 + \varkappa_2 > 0, k_2 = \varkappa_1 \varkappa_2 > 0 \Leftrightarrow \varkappa_1 > 0, \varkappa_2 > 0.$$

Если двумерная поверхность является 1-выпуклой, то у нее одна главная кривизна положительна (рис. 2б):

$$\varkappa \in K_1 \subset \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow k_1 = \varkappa_1 + \varkappa_2 > 0 \Rightarrow \varkappa_1 > 0 \text{ или } \varkappa_2 > 0.$$

Однако ясно, что поверхность, изображенная на рис. 2б и имеющая одну положительную главную кривизну, может быть как 1-выпуклой, так и 0-выпуклой в точке M , поскольку ее средняя кривизна k_1 не обязательно положительна.

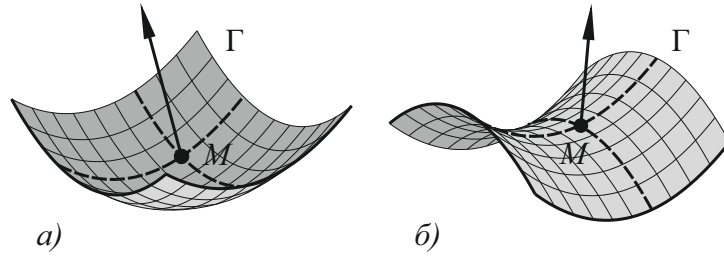


Рис. 2

⁴Недавно выявлена более основательная связь между m -выпуклыми гиперповерхностями и их нормальными сечениями, аналогичная критерию Сильвестра (1.6). Соответствующая теорема изложена в работе [5], раздел 5.3, однако здесь мы ее не приводим из-за громоздкой формулировки и малой степени наглядности.

Замечание 1.4. По нашему мнению, m -выпуклые гиперповерхности наверняка обладают и другими геометрическими свойствами, которые пока еще не обнаружены или не доказаны. Например, есть гипотеза, что как выпуклая, так и m -выпуклая замкнутая гиперповерхность с достаточно большим m ограничивает звездную область и что это, возможно, является аналитическим критерием звездности. Кроме того, хотелось бы получить модификации известных характеристик строго выпуклых гиперповерхностей: расположение выше касательной плоскости, неравенство Йенсена.

1.4. Происхождение и развитие теории m -выпуклых гиперповерхностей

Конструкции p -кривизны и m -выпуклой гиперповерхности появились в конце XX века в результате развития современной теории полностью нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных и до сих пор тесно связаны с этой теорией.

Элементарные симметрические функции главных кривизн впервые ввели в математику L. Caffarelli, L. Nirenberg и J. Spruck в работе 1985 г. [8], где рассматривается задача Дирихле для m -гессиановского уравнения в n -мерной ограниченной области с достаточно гладкой границей. Условие разрешимости этой задачи сводится к $(m - 1)$ -выпуклости граничной гиперповерхности. Этот результат обнаружил нелокальную природу полностью нелинейных задач (нелинейных по вторым производным решения): даже малейший изъян геометрических характеристик области может привести к отсутствию гладких решений, какими бы гладкими ни были данные. В этом заключается принципиальное отличие полностью нелинейных задач от линейных и квазилинейных.

Сами термины “ p -кривизна” и “ m -выпуклость” появились позднее – в работах Н. М. Ивочкиной [1], [11], посвященных также теории m -гессиановских уравнений.

С появлением понятий p -кривизны и m -выпуклой гиперповерхности возникли новые задачи на стыке полностью нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных и дифференциальной геометрии. Появились аналоги задач о построении замкнутых поверхностей по заданной средней или гауссовой кривизне. Последняя, как известно, называется классической проблемой Минковского, [6]. Задача о построении замкнутой гиперповерхности по заданной p -кривизне, $1 \leq p < n$, сформулирована в монографии [6] и названа обобщенной проблемой Минковского. Она не имеет удовлетворительного решения до сих пор. Построение поверхности по заданной p -кривизне и краю исследовалось в работах [9], [1], [17], но также не доведено до конца. В работах [18], [2], [14], [11], [10] были получены некоторые результаты об эволюции замкнутых выпуклых гиперповерхностей с предписанным законом зависимости p -кривизны от нормальной скорости эволюции. Все эти задачи сводятся к стационарным либо эволюционным полностью нелинейным дифференциальным уравнениям в частных производных.

Систематическое изучение m -выпуклых поверхностей как самостоятельного раздела дифференциальной геометрии еще только начинается. Есть множество открытых вопро-

сов, которые нуждаются во внимании специалистов-геометров (см. например, замечание 1.4). Наиболее полный обзор уже накопленных фактов и методов имеется в работе [5].

Одним из пробелов теории до сих пор было построение простейших примеров m -выпуклых гиперповерхностей, их численный анализ. В данной работе восполняется именно этот пробел.

В качестве простейших гиперповерхностей мы рассмотрели квадрики (параболоиды и гиперболоиды), которые в двумерном случае называют поверхностями второго порядка.

В §2 продемонстрирован анализ m -выпуклости для n -мерного параболоида, включая техническую реализацию.

В §3 приведены аналогичные результаты для n -мерного гиперболоида, но уже без технических выкладок.

Полученные результаты, несмотря на незатейливость вывода, являются новыми. Главным результатом является полное описание связи между формулой параболоида (гиперболоида) произвольной размерности и структурой области его m -выпуклости.

Общие результаты проиллюстрированы на квадриках малой размерности. Самыми простыми и наглядными примерами являются двумерные квадрики: двумерные параболоиды подробно разобраны в разделе 2.3, двумерные гиперболоиды эпизодически рассматриваются в разделе 3. Но поскольку двумерная поверхность может быть только 1-выпуклой и 2-выпуклой, причем последнее соответствует классической строгой выпуклости и потому малоинтересно, то в двумерном случае палитра возможностей достаточно бедная. Поэтому в разделе 2.4 мы рассматриваем трехмерные параболоиды, которые нельзя изобразить, но зато теория на их примере иллюстрируется полнее.

1.5. Связь m -выпуклых гиперповерхностей с конусами Гординга

Целесообразность определения 1.2 и некоторые свойства m -выпуклых поверхностей вытекают из алгебраической теории гиперболических многочленов и конусов Гординга [16], которая сложилась в середине XX века задолго до появления понятия m -выпуклости.

Элементарная симметрическая функция (1.1) является классическим примером гиперболических многочленов, а конус (1.5) – примером конусов Гординга.

Обзору теории Гординга посвящена наша предыдущая работа [7]. Статьи [15], [3], [12], [13], [4] освещают m -выпуклые гиперповерхности с точки зрения теории Гординга. В этом разделе мы приведем одно методологическое следствие этой теории, на котором основан наш анализ m -выпуклости квадрик.

Введем обозначение для области положительной p -кривизны гиперповерхности $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Omega_p^+ = \{M \in \Gamma : k_p(M) > 0\}, \quad 1 \leq p \leq n. \quad (1.7)$$

Согласно определению 1.2 область m -выпуклости получается в результате пересечения

$$\bigcap_{p=1}^m \Omega_p^+.$$

В частности, область t -выпуклости содержится в Ω_m^+ . Из теории Гординга вытекает, что область t -выпуклости, если она не пустая, занимает целиком одну или несколько компонент связности Ω_m^+ . А именно, верна следующая лемма⁵.

Лемма 1.5. *Если Γ – t -выпуклая гиперповерхность в точке M_0 , тогда Γ является t -выпуклой во всей компоненте связности множества Ω_m^+ , которой принадлежит точка M_0 .*

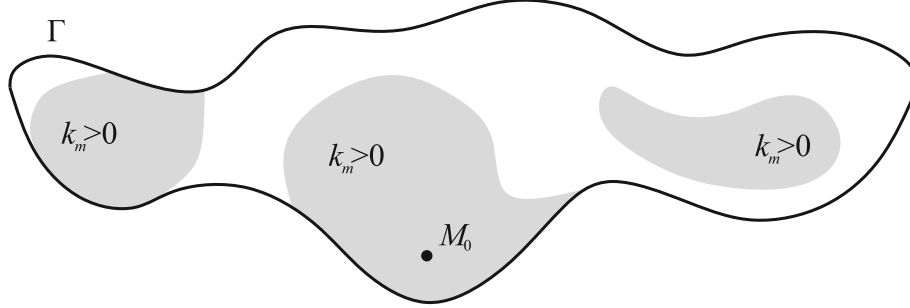


Рис. 3

Лемма 1.5 неявно включает и обратное утверждение: если в точке $M_0 \in \Omega_m^+$ поверхность Γ не является t -выпуклой, то она не t -выпуклая во всей компоненте связности множества Ω_m^+ , которой принадлежит точка M_0 .

Таким образом, для того чтобы установить t -выпуклость поверхности в какой-то компоненте Ω_m^+ , достаточно проверить t -выпуклость всего в одной точке (рис. 3). Напомним, что установить t -выпуклость поверхности в какой-либо точке $M_0 \in \Omega_m^+$ – значит проверить в этой точке положительность всех p -кривизн младшего порядка: $p = 1, 2, \dots, t - 1$.

Благодаря лемме 1.5 можно проще определить t -выпуклость замкнутой гиперповерхности.

Определение 1.6. *Замкнутая гиперповерхность $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$, ориентированная внутренней нормалью, называется t -выпуклой, если ее t -кривизна положительна.*

Замечание 1.7. Для замкнутых гиперповерхностей понятие t -выпуклости однозначно, поскольку предписывается конкретное направление нормали. Выбор в пользу внутренней нормали необходим для корректности определения 1.6 при $t = n$: чтобы граница строго выпуклого компакта, например шара, оказалась n -выпуклой поверхностью (а не 0-выпуклой, как в случае выбора внешней нормали).

В определении 1.6 речь идет о тотальной t -выпуклости, во всех точках поверхности. Согласованность определений 1.2 и 1.6 обусловлена тем, что в данном случае область

⁵Лемма 1.5 является прямым следствием пункта 1 теоремы 3.2, [7].

$\Omega_m^+ = \Gamma$ содержит одну компоненту связности и на замкнутой гиперповерхности обязательно найдется точка M_0 строгой выпуклости, в которой все главные кривизны положительны. В точке M_0 поверхность n -выпуклая, а значит, и m -выпуклая, $m \leq n$.

В подтверждение естественности определения 1.6 напомним известный факт: замкнутая поверхность с положительной гауссовой кривизной (n -кривизной) является строго выпуклой (n -выпуклой). Типичным примером является n -мерная сфера радиуса $r > 0$, чья гауссова кривизна во всех точках равна $1/r^n$.

2. Анализ m -выпуклости параболоидов

2.1. Вычисление p -кривизны параболоида

В этом разделе приведены технические рассуждения и формулы, позволяющие вычислить p -кривизну гиперповерхности, являющейся графиком функции, и, в частности, p -кривизну параболоида.

Поскольку главные кривизны трудно вычислимы и являются негладкими функциями точки на поверхности, то определение 1.1 неудобно как в теоретическом анализе, так и в вычислительной практике. Для вычисления p -кривизны используются альтернативные подходы, например такая формула:

$$k_p = \text{tr}_p(g^{-1}b), \quad 1 \leq p \leq n. \quad (2.1)$$

Здесь g – матрица первой квадратичной формы, b – матрица второй квадратичной формы гиперповерхности $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Матрица $g^{-1}b$ – квадратная, размерности n , в общем случае несимметричная. Символом tr_p обозначен p -след матрицы, равный сумме всех главных миноров порядка p этой матрицы. Например, 1-след матрицы равен сумме элементов на главной диагонали (обычно называется просто следом), n -след матрицы равен ее определителю. Главные кривизны поверхности являются собственными числами матрицы $g^{-1}b$. С другой стороны, диагонализация матрицы не меняет значение p -следа. Поэтому формула (2.1) не противоречит определению 1.1.

Замечание 2.1. Наиболее квалифицированным способом выражения p -кривизны является формула $k_p = \text{tr}_p(\mathcal{K})$, где $\mathcal{K} = \tau^T b \tau$ – матрица кривизны гиперповерхности, $\tau = \sqrt{g^{-1}}$. Матрица кривизны – это симметричный аналог матрицы $g^{-1}b$, аналитические преимущества которого наиболее полно изложены в статье [5]. Для задач данной работы оказалось удобнее пользоваться несимметричной, но зато более простой в вычислительном отношении матрицей $g^{-1}b$.

Для вычисления p -кривизны параболоидов (и далее гиперболоидов) по формуле (2.1) ключевую роль сыграло новое свойство p -следа, которое мы вывели из кососимметричности миноров:

$$\text{tr}_p(S + t\xi \times \eta) = \text{tr}_p(S) + t \sum_{i,j=1}^n \text{tr}_p^{ij}(S) \xi_i \eta_j, \quad (2.2)$$

$$S = (s_{ij})_{i,j=1}^n, \quad \xi \times \eta = (\xi_i \eta_j)_{i,j=1}^n, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{tr}_p^{ij}(S) = \frac{\partial \text{tr}_p(S)}{\partial s_{ij}}.$$

Допустим, гиперповерхность $\Gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}$ является графиком C^2 -гладкой функции

$$x_{n+1} = \omega(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.3)$$

и Γ ориентирована нормалью, образующей острый угол с координатной осью x_{n+1} . Обозначим символом ω_x вектор градиента функции $\omega(x)$, символом ω_{xx} – матрицу вторых производных (матрицу Гессе) функции $\omega(x)$.

Замечание 2.2. Как известно, в этом случае строгая выпуклость (n -выпуклость) поверхности Γ равносильна строгой выпуклости функции $\omega(x)$ и сводится к положительной определенности матрицы ω_{xx} . К сожалению, такая редукция от поверхности к функции не справедлива при анализе m -выпуклости, $m < n$, где не обойтись без вычисления p -кривизн.

Приведем известные расчетные формулы матриц g^{-1} и b для графика функции:

$$g^{-1} = I - \frac{\omega_x \times \omega_x}{1 + \omega_x^2}, \quad b = \frac{\omega_{xx}}{\sqrt{1 + \omega_x^2}}, \quad (2.4)$$

где I – единичная матрица.

В нашей работе рассматриваются n -мерные параболоиды, которые являются графиками функций следующего вида:

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + \dots + a_n x_n^2, \quad a_i \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Помимо стандартной записи вектора переменных $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, будем использовать следующие обозначения:

$$a = (a_1, a_2, \dots, a_n) - \text{вектор коэффициентов параболоида}, \quad (2.6)$$

$$A = \text{diag}(a_1, a_2, \dots, a_n) - \text{диагональная матрица коэффициентов}.$$

После вычисления матриц (2.4), умножения и упрощения получаем для параболоида

$$g^{-1}b = \frac{2}{\sqrt{1 + 4(Ax)^2}} \left(A - \frac{4}{1 + 4(Ax)^2} Ax \times A^2 x \right). \quad (2.7)$$

Как видно, p -след этой матрицы может быть вычислен по формуле (2.2). Прежде всего заметим, что если в (2.2) в качестве матрицы S взять диагональную матрицу A , то правая

часть (2.2) выражается через элементарные симметрические функции от векторов a и $a^{(i)}$ (см. обозначение (1.2)):

$$\mathrm{tr}_p(A + t\xi \times \eta) = \mathrm{tr}_p(A) + t \sum_{i=1}^n \mathrm{tr}_p^{ii}(A) \xi_i \eta_i = \sigma_p(a) + t \sum_{i=1}^n \sigma_{p-1}(a^{(i)}) \xi_i \eta_i.$$

Для выражения p -кривизны параболоида осталось применить эту адаптированную формулу к (2.7), используя однородность p -следа:

$$\begin{aligned} k_p &= \mathrm{tr}_p(g^{-1}b) = \left(\frac{2}{\sqrt{1 + 4(Ax)^2}} \right)^p \left(\sigma_p(a) - \frac{4}{1 + 4(Ax)^2} \sum_{i=1}^n \sigma_{p-1}(a^{(i)}) a_i^3 x_i^2 \right) = \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{2}{\sqrt{1 + 4(Ax)^2}} \right)^{p+2} \left(\sigma_p(a) + 4 \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 (\sigma_p(a) - a_i \sigma_{p-1}(a^{(i)})) \right) = \\ &= c \cdot \left(\sigma_p(a) + 4 \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 \sigma_p(a^{(i)}) \right), \quad c > 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Для преобразования p -кривизны к виду (2.8) пригодились соотношения (1.3).

2.2. Область m -выпуклости параболоида

В этом разделе приведены результаты исследования m -выпуклости параболоида (2.5), ориентированного нормалью, образующей острый угол с координатной осью x_{n+1} . Для вектора коэффициентов параболоида используем обозначения (2.6) и (1.2).

Под областью m -выпуклости параболоида удобнее понимать не только часть самого параболоида (см. определение 1.2), но и множество точек $x \in \mathbb{R}^n$ (аргументов функции (2.5)), в которых параболоид m -выпуклый.

Формула (2.8) при $p = m$ задаёт в пространстве $\mathbb{R}^n$ область положительной m -кривизны параболоида (2.5). Используем для этой области обозначение (1.7) и запишем ее в явном виде:

$$\Omega_m^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sigma_m(a) + 4 \sum_{i=1}^n a_i^2 x_i^2 \sigma_m(a^{(i)}) > 0 \right\}, \quad 1 \leq m \leq n.$$

Выявление топологической структуры Ω_m^+ является несложным упражнением. Область Ω_m^+ может быть

- односвязной, если $\sigma_m(a) > 0$;
- односвязной или двусвязной, если $\sigma_m(a) \leq 0$ и $\exists i : \sigma_m(a^{(i)}) > 0$;
- пустой в остальных случаях.

В общей ситуации (см. раздел 1.5) можно утверждать, что если гиперповерхность имеет непустую область m -выпуклости, то она совпадает с некоторыми компонентами связности Ω_m^+ . Поскольку у параболоида область Ω_m^+ содержит не более двух компонент, да и те симметричны (геометрические характеристики параболоида на них одинаковы), то имеется альтернатива, отраженная в следующей теореме.

Теорема 2.3. Пусть $1 \leq m < n$. Область m -выпуклости параболоида (2.5) либо пустая, либо совпадает с непустой⁶ областью Ω_m^+ . Последнее верно тогда и только тогда, когда

$$\exists i : a^{(i)} \in K_m, \quad (2.9)$$

причем достаточно выполнения условия

$$a \in K_m. \quad (2.10)$$

Область n -выпуклости параболоида (2.5) либо пустая, либо совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^n$. Последнее верно тогда и только тогда, когда

$$a \in K_n. \quad (2.11)$$

Доказательство. Условие (2.11) равносильно положительности всех коэффициентов a_i . Ясно, что при таком и только при таком условии параболоид (2.5) является n -выпуклым (строго выпуклым), причем в каждой точке $x \in \mathbb{R}^n$. В рамках нашей методологии это подтверждается тем, что $\sigma_n(a^{(i)}) \equiv 0$ и либо $\Omega_n^+ = \emptyset$, либо $\Omega_n^+ = \mathbb{R}^n$.

Для проверки m -выпуклости параболоида в области Ω_m^+ , $1 \leq m < n$, используем подход, описанный в разделе 1.5 и основанный на лемме 1.5.

I. Докажем достаточность условия (2.9). Пусть существует такой номер i , $1 \leq i \leq n$, что $a^{(i)} \in K_m$, т. е. $\sigma_p(a^{(i)}) > 0$, $p = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, область Ω_m^+ непустая. Проверим m -выпуклость параболоида в отдельных точках Ω_m^+ . Рассмотрим два случая.

1. Если $a_i = 0$, то $\sigma_p(a) = \sigma_p(a^{(i)}) > 0$, $p = 1, 2, \dots, m$. Область Ω_m^+ односвязная и содержит точку $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$. В этой точке все p -кривизны (2.8) положительны, $p = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, параболоид является m -выпуклым в точке $\mathbf{0}$, а значит, по лемме 1.5 он является m -выпуклым во всей области Ω_m^+ .
2. Если $a_i \neq 0$, тогда область Ω_m^+ содержит пару точек

$$x = (0, 0, \dots, \pm x_i, \dots, 0), \quad |x_i| \gg 1. \quad (2.12)$$

Если область Ω_m^+ двусвязная, то эти точки попадают в разные компоненты связности. В точках (2.12) все p -кривизны (2.8) положительны, $p = 1, 2, \dots, m$. Следовательно, параболоид является m -выпуклым в этих точках, а значит, по лемме 1.5 он является m -выпуклым во всей области Ω_m^+ .

⁶В случае (2.10) область Ω_m^+ односвязная, в случае (2.9) область Ω_m^+ может быть как односвязной, так и двусвязной.

II. Докажем необходимость условия (2.9). Пусть $a^{(i)} \notin K_m$, $i = 1, 2, \dots, n$. Покажем, что тогда для параболоида возможны две ситуации: $\Omega_m^+ = \emptyset$ или $\Omega_m^+ \cap \Omega_p^+ = \emptyset$, $p < m$. В обеих ситуациях область m -выпуклости пуста.

1. Если $\sigma_m(a^{(i)}) \leq 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, то по формуле (1.4) $\sigma_m(a) \leq 0$ и область Ω_m^+ пустая.
2. Если существует такой номер i , что $\sigma_m(a^{(i)}) > 0$, то область Ω_m^+ содержит точки x вида (2.12). Но поскольку $a^{(i)} \notin K_m$, то легко показать, что найдется $p < m$, такой что $\sigma_p(a^{(i)}) < 0$. Следовательно, $k_p(x) < 0$ и параболоид не является m -выпуклым в точках (2.12). Тогда по лемме 1.5 параболоид не является m -выпуклым ни в одной точке области Ω_m^+ .

Справедливость достаточного условия (2.10) обусловлена свойствами (1.6), (1.4). $\square$

Из теоремы 2.3 вытекает критерий тотальной m -выпуклости параболоида.

Следствие 2.4. Пусть $1 \leq m \leq n$. Параболоид (2.5) является m -выпуклым в любой точке $x \in \mathbb{R}^n$ тогда и только тогда, когда⁷

$$a \in K_m, \quad \sigma_m(a^{(i)}) \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (2.13)$$

Доказательство. Понятно, что $\Omega_m^+ = \mathbb{R}^n$ только при $\sigma_m(a) > 0$, $\sigma_m(a^{(i)}) \geq 0$. Если добавить сюда требование (2.9), то критерий Сильвестра (1.6) обеспечивает $a \in K_m$. $\square$

Таким образом, теорема 2.3 и следствие 2.4 дают полное описание области m -выпуклости параболоида (2.5). Показательно, что условия m -выпуклости параболоида записываются в терминах принадлежности вектора коэффициентов a или $a^{(i)}$ конусу K_m .

Общие результаты этого раздела проиллюстрированы в следующих разделах на примерах двумерных и трехмерных параболоидов.

Замечание 2.5. Обратим внимание на связь между m -выпуклостью параболоида (2.5) и количеством его положительных коэффициентов. Поскольку любой вектор из конуса K_m имеет хотя бы m положительных координат (см. раздел 1.1), то из критерия (2.9) следует вывод: если параболоид имеет непустую область m -выпуклости, то у него имеется не менее m положительных коэффициентов. Однако параболоид, имеющий m положительных коэффициентов, не обязательно является m -выпуклым хотя бы в одной точке. Это верно только при $m = n$ и $m = n - 1$. Случай $m = n$ очевиден.

Случай $m = n - 1$ вытекает из теоремы 2.3. Допустим, параболоид (2.5) имеет ровно $(n - 1)$ положительных коэффициентов и один неположительный коэффициент: $a_j \leq 0$. Тогда $a^{(j)} \in K_{n-1}$, и параболоид является $(n - 1)$ -выпуклым в непустой области Ω_{n-1}^+ . Причем эта область устроена особым образом. Согласно следствию 2.4 тотальная $(n - 1)$ -выпуклость такого параболоида возможна только в случае его вырождения в цилиндрическую поверхность:

$$a_j = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_{n-1}^+ = \mathbb{R}^n.$$

⁷Условие (2.13) при $m = n$ не противоречит условию (2.11), так как $\sigma_n(a^{(i)}) \equiv 0$.

В невырожденном случае $(n - 1)$ -выпуклой является только часть параболоида, расположенная ниже определенного уровня:

$$a_j < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Omega_{n-1}^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n a_i x_i^2 < -\frac{\sigma_{n-1}(a)}{4\sigma_n(a)} \right\}.$$

2.3. Двумерный параболоид

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^3$ двумерный параболоид

$$x_3 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2, \quad (2.14)$$

ориентированный нормалью, образующей острый угол с координатной осью x_3 .

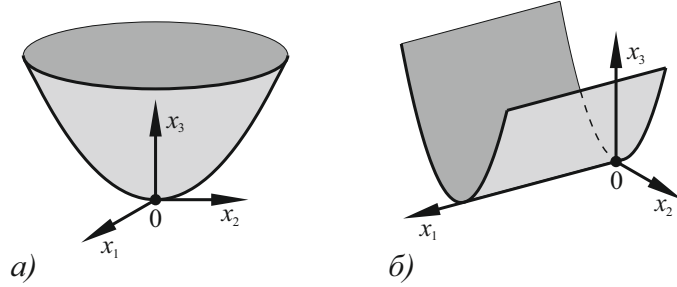


Рис. 4

Двумерная поверхность может иметь точки 1-выпуклости и точки 2-выпуклости (точки строгой выпуклости). Это случаи $m = n$ и $m = n - 1$, которые разобраны в замечании 2.5.

- При $a_1 > 0, a_2 > 0$ имеем эллиптический параболоид (рис. 4а). Только такой параболоид является 2-выпуклым, причем сразу во всех точках.
- При $a_1 = 0, a_2 > 0$ происходит вырождение эллиптического параболоида в параболический цилиндр (рис. 4б). Эта поверхность является 1-выпуклой во всех точках.
- При $a_1 < 0, a_2 > 0$ поверхность (2.14) называется гиперболическим параболоидом или “седлом” (рис. 5а). Только часть этой поверхности является 1-выпуклой, а именно та часть, которая расположена ниже плоскости

$$x_3 = -\frac{a_1 + a_2}{4a_1 a_2}.$$

В зависимости от знака суммы $a_1 + a_2$ это может быть плоскость нулевого уровня (рис. 5б), отрицательного или положительного уровня (рис. 6а,б). Соответственно, область 1-выпуклости гиперболического параболоида может быть односвязной или двусвязной. На рисунках она выделена серым цветом: как на самом параболоиде, так и в пространстве аргументов $\mathbb{R}^2$.

- При $a_1 < 0, a_2 < 0$ параболоид (2.14) с указанной ориентацией является 0-выпуклым. Понятно, что с противоположной ориентацией этот параболоид является всюду 2-выпуклым.

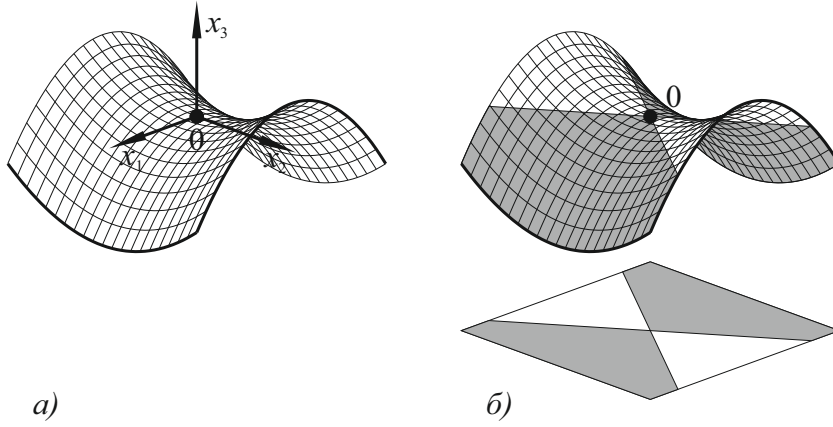


Рис. 5

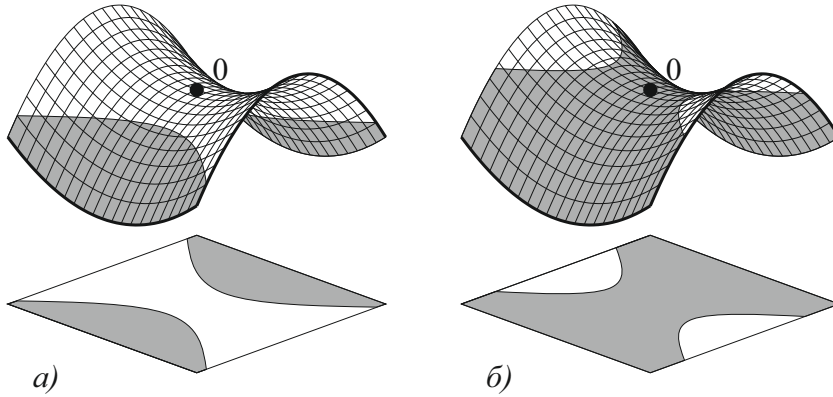


Рис. 6

2.4. Трехмерный параболоид

Рассмотрим в пространстве $\mathbb{R}^4$ трехмерный параболоид

$$x_4 = a_1 x_1^2 + a_2 x_2^2 + a_3 x_3^2, \quad (2.15)$$

ориентированный нормалью, образующей острый угол с координатной осью x_4 . Трехмерная гиперповерхность может иметь точки 1-выпуклости, 2-выпуклости и 3-выпуклости.

- Параболоид (2.15) может быть 3-выпуклым (строго выпуклым) только при условии $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 > 0$, причем в этом случае он является totally 3-выпуклым.
- При $a_1 > 0, a_2 > 0, a_3 \leq 0$ параболоид имеет непустые области 2-выпуклости и 1-выпуклости.
- При $a_1 > 0, a_2 \leq 0, a_3 \leq 0$ параболоид может иметь только непустую область 1-выпуклости, однако может быть вовсе 0-выпуклым (см. замечание 2.5).
- При $a_1 < 0, a_2 < 0, a_3 < 0$ параболоид является всюду 0-выпуклым (однако является 3-выпуклым с противоположной ориентацией).

В таблице приведены некоторые примеры трехмерных параболоидов с одним или двумя отрицательными коэффициентами и с различной областью m -выпуклости, $m = 1, 2$.

Каждый пример сопровождаем анализом вектора коэффициентов параболоида: проверим, выполняются ли условия теоремы 2.3 и следствия 2.4.

параболоид	область 1-выпуклости	область 2-выпуклости
$x_4 = 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_3^2$ (рис. 7а)	$\mathbb{R}^3$	односвязная область: $-72x_1^2 - 48x_2^2 + 24x_3^2 > -1$
$a = (3, 2, -1)$	$a \in K_1, \sigma_1(a^{(i)}) \geq 0 \forall i$	$a \in K_2$
$x_4 = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_3^2$ (рис. 7б)	односвязная область: $-16x_1^2 - 16x_2^2 + 144x_3^2 > -1$	двусвязная область: $-12x_1^2 - 12x_2^2 + 18x_3^2 > 1$
$a = (2, 2, -3)$	$a \in K_1$	$\exists i : a^{(i)} \in K_2 (i = 3)$
$x_4 = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2$ (рис. 8а)	двусвязная область: $-8x_1^2 - 8x_2^2 + 72x_3^2 > 1$	двусвязная область: $-12x_1^2 - 12x_2^2 + 36x_3^2 > 5$
$a = (1, 1, -3)$	$\exists i : a^{(i)} \in K_1 (i = 3)$	$\exists i : a^{(i)} \in K_2 (i = 3)$
$x_4 = 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ (рис. 8б)	односвязная область: $-8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 0$	$\emptyset$
$a = (2, -1, -1)$	$\exists i : a^{(i)} \in K_1 (i = 2, 3)$	$\nexists i : a^{(i)} \in K_2$

$x_4 = 2x_1^2 - 3x_2^2 - x_3^2$ (рис. 9а)	двусвязная область: $-32x_1^2 + 18x_2^2 - 2x_3^2 > 1$	$\emptyset$
$a = (2, -3, -1)$	$\exists i : a^{(i)} \in K_1 \ (i = 2)$	$\nexists i : a^{(i)} \in K_2$
$x_4 = x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ (рис. 9б)	$\emptyset$	$\emptyset$
$a = (1, -1, -1)$	$\nexists i : a^{(i)} \in K_1$	$\nexists i : a^{(i)} \in K_2$

Каждому примеру соответствует один из рис. 7 – 9. Поскольку трехмерную поверхность в четырехмерном пространстве изобразить невозможно, то рисунок дает представление только об областях 1-выпуклости и 2-выпуклости параболоида, изображая их как области подходящих аргументов $x \in \mathbb{R}^3$. Точнее говоря, для каждого параболоида, включенного в таблицу, изображены границы областей

$$\Omega_1^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : k_1 > 0\}, \quad \Omega_2^+ = \{x \in \mathbb{R}^3 : k_2 > 0\},$$

полученные из формулы (2.8), и стрелками указаны эти области. Область Ω_1^+ является также областью 1-выпуклости параболоида, пересечение $\Omega_1^+ \cap \Omega_2^+$ является областью 2-выпуклости. Так как $\Omega_1^+ \cap \Omega_2^+ = \emptyset$ на рис. 8б, 9а,б, то соответствующие параболоиды в таблице не имеют точек 2-выпуклости. Последний параболоид в таблице не имеет также точек 1-выпуклости, поскольку для него $\Omega_1^+ = \emptyset$ (рис. 9б).

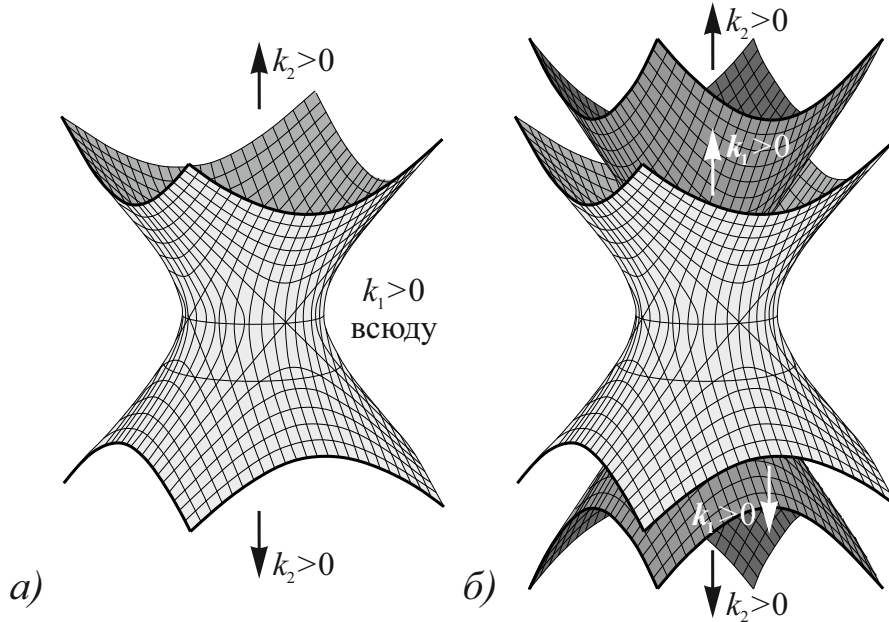


Рис. 7

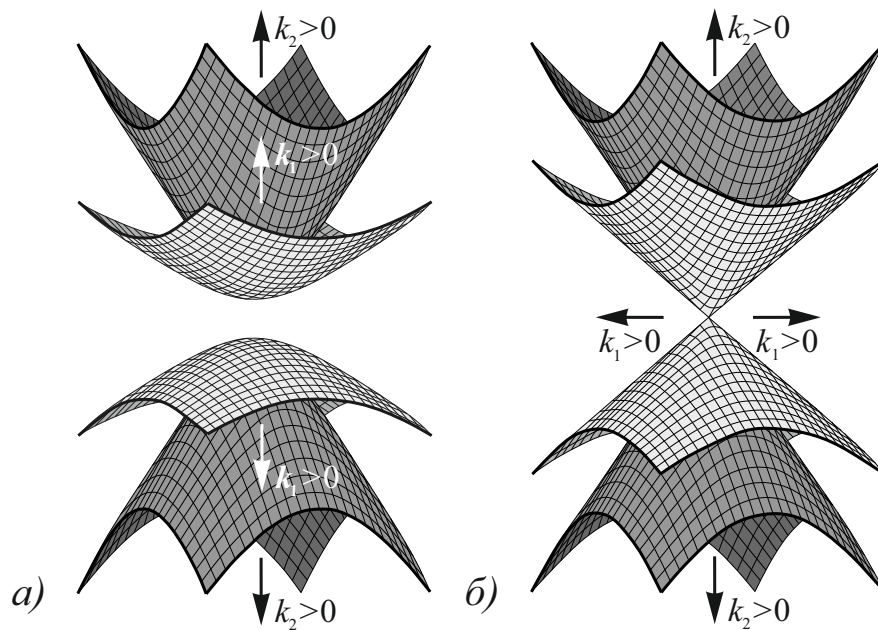


Рис. 8

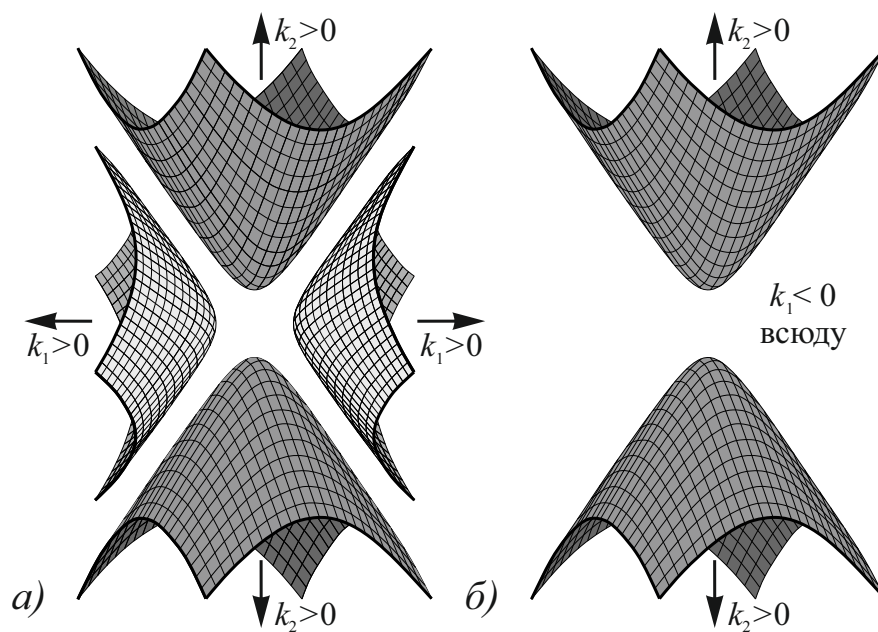


Рис. 9

3. Анализ m -выпуклости гиперboloидов

Анализ m -выпуклости гиперboloидов во всем аналогичен анализу параболоидов, но технически более трудоемкий. Поэтому в этом параграфе ограничимся описанием полученных

результатов.

Напомним, что n -мерным гиперboloидом называется квадрака

$$\frac{x_1^2}{c_1^2} + \dots + \frac{x_k^2}{c_k^2} - \frac{x_{k+1}^2}{c_{k+1}^2} - \dots - \frac{x_{n+1}^2}{c_{n+1}^2} = 1.$$

Поскольку наша техника вычисления p -кривизны приспособлена для графиков функций (см. раздел 2.1), то рассмотрим функцию вида

$$x_{n+1} = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i x_i^2 + b}, \quad a_i, b \in \mathbb{R}. \quad (3.1)$$

В зависимости от знаков a_i , b графиком этой функции может быть пустое множество, точка, полусфера, конус, но в большинстве случаев – верхняя половина гиперboloида. Для краткости будем называть поверхность (3.1) гиперboloидом.

Считаем, что поверхность (3.1) ориентирована нормалью, образующей острый угол с координатной осью x_{n+1} . Для вектора коэффициентов a_i используем обозначения (2.6), (1.2).

Область положительной m -кривизны гиперboloида (3.1) устроена следующим образом:

$$\Omega_m^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : b \sigma_m(a) + \sum_{i=1}^n a_i (a_i + 1) x_i^2 \sigma_m(a^{(i)}) > 0 \right\}, \quad 1 \leq m \leq n.$$

Способ проверки m -выпуклости в этой области описан в разделе 1.5 и продемонстрирован в действии при доказательстве критерия m -выпуклости параболоида (§2, теорема 2.3). Для гиперboloида тем же способом рассуждения удалось получить только достаточные условия m -выпуклости в области Ω_m^+ .

Теорема 3.1. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область определения и C^2 -гладкости функции (3.1), $1 \leq m \leq n$.

Для того чтобы гиперboloид (3.1) с $b > 0$ являлся m -выпуклым в непустой области $\Omega_m^+ \cap \Omega$, достаточно выполнения условия

$$a \in K_m. \quad (3.2)$$

Для того чтобы гиперboloид (3.1) с $b \leq 0$ являлся m -выпуклым в непустой области $\Omega_m^+ \cap \Omega$, достаточно выполнения условия

$$\exists i : a_i > 0, \quad a^{(i)} \in K_m. \quad (3.3)$$

При $m = n$ условия (3.2), (3.3) являются также необходимыми.

Таким образом, условие m -выпуклости гиперboloида, как и параболоида, выражается в терминах принадлежности векторов $a, a^{(i)}$ конусу K_m . Заметим, что требование (3.3) сильнее, чем (3.2).

Проанализируем требование (3.2) при $m = n$. Для гиперboloидов (3.1) с $b > 0$ условие $a \in K_n$ равносильно положительности всех коэффициентов a_i . Очевидно, что в таком и только в таком случае гиперboloид является n -выпуклым (строго выпуклым), причем всюду. Двумерная версия такого гиперboloида изображена на рис. 10а.

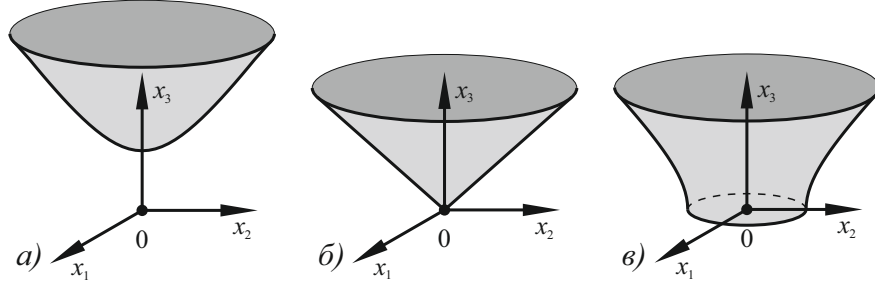


Рис. 10

Требование (3.3) при $m = n$ не может быть выполнено, поскольку $\sigma_n(a^{(i)}) \equiv 0$. Это соответствует тому, что гиперboloиды (3.1) с $b < 0$ и конусы ($b = 0$) не могут иметь точек n -выпуклости (строгой выпуклости), даже если все их коэффициенты a_i положительны.

Рассмотрим подробнее свойства поверхностей (3.1) с параметрами вида

$$b \leq 0, a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.4)$$

Двумерные версии соответствующего конуса ($b = 0$) и гиперboloида ($b < 0$) изображены на рис. 10б,в. Согласно теореме 3.1 в этом случае гарантировано имеется m -выпуклость в области $\Omega_m^+ \cap \Omega$ при всех $m = 1, 2, \dots, n-1$. Для конусов это означает $(n-1)$ -выпуклость во всех точках, кроме вершины. Поясним, какова ситуация для гиперboloидов, на конкретном их представителе

$$x_{n+1} = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} - 1. \quad (3.5)$$

В этом случае $a = (1, 1, \dots, 1)$ и прямые вычисления приводят к формуле

$$\Omega_m^+ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : 2 \sum_{i=1}^n C_{n-1}^m x_i^2 > C_n^m \right\}.$$

Для данного гиперboloида (3.5) области Ω_m^+ и Ω занимают части пространства, расположенные вне некоторых сфер. Сравнивая радиусы этих сфер, приходим к следующим

выводам. Если $n/2 < m < n$, то m -выпуклой является только часть гиперboloида (3.5), расположенная выше плоскости

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{2m - n}{2n - 2m}}.$$

При $m \leq n/2$ гиперboloид (3.5) является m -выпуклым во всех внутренних точках своей области определения. В частности, двумерная версия гиперboloида (3.5), изображенная на рис. 10в, является 1-выпуклой поверхностью во всех своих внутренних точках. Аналогичным образом можно получить условия тотальной m -выпуклости для остальных гиперboloидов с параметрами вида (3.4).

Замечание 3.2. При $b > 0$, $a_i < 0$, $i = 1, 2, \dots, n$, график функции (3.1) является верхней половиной сферы, ориентированной внешней (по отношению к сфере) нормалью. Нет ничего странного в том, что согласно теореме 3.1 такая поверхность не является n -выпуклой. Сферу, как и любую замкнутую поверхность, целесообразно ориентировать внутренней нормалью, чтобы она считалась n -выпуклой (см. определение 1.6, замечание 1.7).

Список литературы

- [1] Ивочкина Н. М. Задача Дирихле для уравнения кривизны порядка m // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2. – Вып. 3. – С. 192–217.
- [2] Ивочкина Н. М., Ладыженская О. А. Оценка вторых производных на границе для поверхностей, эволюционирующих под действием главных кривизн // Алгебра и анализ. – 1997. – Т. 9, вып. 2. – С. 30–50.
- [3] Ивочкина Н. М. От конусов Гординга к p -выпуклым гиперповерхностям // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2012. – Т. 45. – С. 94–104.
- [4] Ивочкина Н. М., Филимонова Н. В. О новых структурах в теории полностью нелинейных уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2015. – Т. 58. – С. 82–95.
- [5] Ивочкина Н. М., Филимонова Н. В. Геометрические модели в теории полностью нелинейных уравнений. Препринты Санкт-Петербургского математического общества. – 2016. – №6.
- [6] Погорелов А.В. Многомерная проблема Минковского. – Наука, 1975, – 95 с.
- [7] Филимонова Н. В., Бакусов П. А. Гиперболические многочлены и конусы Гординга // Математическое просвещение. Третья серия. – 2016. – вып. 20. – С. 143–166.

- [8] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J. The Dirichlet problem for nonlinear second order elliptic equations III. Functions of the eigenvalues of the Hessian// *Acta Math.* – 1985. – Vol. 155. – P. 261–301.
- [9] Caffarelli L., Nirenberg L., Spruck J., Nonlinear second-order elliptic equations V. The Dirichlet problem for Weingarten hypersurfaces // *Comm. Pure Appl. Math.* – 41 (1988). – P. 47–70.
- [10] Ivochkina N. M. Geometric evolution equations preserving convexity// *AMS Transl.* — Ser. 2. *Adv. Math. Sci.*, 220, 191–121 (2007).
- [11] Ivochkina N. M. Symmetry and geometric evolution equations // *Записки науч. сем. ПОМИ.* – 2004. – Т. 318. – С. 135–146.
- [12] Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V. On the backgrounds of the theory of m-Hessian equations// *Communications on Pure and Applied Analysis.* – 2013. – Vol. 12. – № 4. – P. 1687–1703.
- [13] Ivochkina N. M., Filimonenkova N. V. On algebraic and geometric conditions in the theory of Hessian equations// *Journal of Fixed Point Theory and Applications.*, JFPTA. – 2015. – v.16, no.1. – P. 11–25.
- [14] Ivochkina N. M., Nehring Th., Tomi F. Evolution of starshaped hypersurfaces by nonhomogeneous curvature functions // *Алгебра и анализ.* – 2000. – Т.12, вып.1. – 185–203.
- [15] Ivochkina N. M., Yakunina G. V., Prokof'eva S. I. The Garding cones in the modern theory of fully nonlinear second order differential equations// *Journal of Mathematical Sciences.* – 2012. – Vol. 184, Issue 3. – P. 295–315.
- [16] Garding L. An inequality for hyperbolic polynomials // *J. Math. Mech.* – 1959. – 8. – P. 957–965.
- [17] Trudinger N. S. The Dirichlet problem for the prescribed curvature equations // *Arch. Rat. Mech. Anal.* – 111(1990). – P. 153–179.
- [18] Urbas J. On the expansion of starshaped hypersurfaces by symmetric functions of their principal curvatures // *Math. Z.* – 1990.– 205. – P. 355–372.