Mekler A.A.

REGULAR FUNCTIONS AND CONDITIONAL EXPECTATION OPERATORS ON ORDERED IDEALS OF $L^1(0,1)$-SPACE.

The article treats the role of action of conditional expectation operators in the real interpolation between $L^1(0,1)$ and $L^\infty(0,1)$. The main results are the following: 1). If all the above mentioned operators translate into itself $\Big($one says *average*$\Big)$ an real vector ordeded ideal X which lies between $L^1(0,1)$ and $L^\infty(0,1)$, then X is interpolated. 2). There exist a class of of sub-σ-algebras $\Big($which are called *verifying*$\Big)$ such that averaging of X by an arbitrary verifying σ-subalgebras guarantees for X to be being interpolated where X is every *symmetrical* $\Big($=rearrangement invariant$\Big)$ ideal. 3). The full classification of verifying sub-σ-algebras in the class of independently complemented sub-σ-algebras is given. 4). For a *principal* symmetrical ideal X $\Big($=generated by a function $f \in L^1(0,1)\Big)$ an efficiently criterion is given in order to X were averaged by an arbitrary independently complemented sub-σ-algebra.

Spaces of measurable functions, 46E30

Меклер Александр Александрович.

РЕГУЛЯРНЫЕ ФУНКЦИИ И ОПЕРАТОРЫ УСЛОВНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ НА ПОРЯДКОВЫХ ИДЕАЛАХ ПРОСТРАНСТВА $L^1(0,1)$

Введение

Симметричные (=перестановочно инвариантные) банаховы порядково идеальные пространства измеримых функций были введены в функциональный анализ в начале 2-й половины прошлого века. Отталкиваясь от известных неравенств Харди-Литтлвуда и работ по полиномам Бернштейна, их ввёл в рассмотрение G.G. Lorentz и продолжил изучение T. Shimogaki. Первые относящиеся к этому направлению монографии были опубликованы W.A.J Luxemburg, 1967, K-M Chong and N.M.Rice, 1971, J. Lindenstrauss and L.Tzafriri, 1973. Подход этих авторов кроме векторной, идеальной и симметричной структуры пространств предполагал также их банаховость.

Новый и мощный импульс в изучение этих объектов дала работа А.П. Кальдерона (A.P. Calderon, 1966), где доказана знаменательная теорема о вещественной интерполяции линейных операторов на векторных многообразиях промежуточных между L^1 и L^∞. Напомним, что такое многообразие V называется (L^1, L^∞)-интерполяционным, если **каждый** *допустимый* линейный оператор, т.е. переводящий крайние пространства этой пары в самих себя переводит в себя и V, удовлетворяя в случае банахова V неравенству логарифмического типа между нормами оператора в пространствах L^1, L^∞ и V. Ограничиваясь векторным случаем, теорему Кальдерона можно сформулировать так: интеполяционность V для пары (L^1, L^∞) равносильна некоему свойству этого многообразия, называемому *свойством мажорантности* (в смысле Харди-Литтлвуда). В дальнейшем теорию интерполяции линейных операторов успешно развивали многие математики, в том числе J. Peetre, D.W. Boyd, R.Sharply, C.Bennet, а также С.Г. Крейн, Б.С. Митягин, Е.М. Семёнов, В.И. Овчинников, А.А. Седаев, В.А. Шестаков и другие, см. библиографию в [20].

В 1965г. Дж. Рифф (J.V.Ryff) рассматривал бистохастические операторы и их орбиты; теорема Кальдерона при этом подходе сводится к тому, что (L^1, L^∞)-интерполяционность промежуточного векторного многообразия не обязательно проверять на множестве всех допустимых операторов, можно ограничить проверку только на существенно более узком подклассе всех *бистохастических операторов.* Последний включает в себя операторы, порождённые сохраняющими меру преобразованиями измеримого носителя, так что интерполяционные многообразия необходимо должны быть симметричными. Но симметричности недостаточно, (L^1, L^∞)-интерполяционные многообразия должны ещё вместе с каждой своей функцией целиком содержать её *орбиту*, которая есть совокупность образов **всех бистохастических операторов** на этой функции. В этом как раз и состоит свойство мажорантности, которое по теореме Кальдерона равносильно (L^1, L^∞)-интерполяционности вещественного векторного многообразия V, лежащего между L^1 и L^∞.

Идея сужения класса проверочных операторов за счёт ограничений на проверяемые многообразия V объединяет часть приводимых ниже результатов. В §3 показано, что, если подчинить V условию быть *векторным порядковым идеалом* (называемым здесь просто *идеалом*) в L^1, содержащим L^∞, то класс проверочных операторов сужается до множества **всех бистохастичнских проекторов.** Подчеркнём, что в качестве измеримого носителя функций из $L^1(I) := L^1(I, \Lambda, \lambda)$ мы рассмаириваем в этой работе промежуток $I := (0, 1]$, на котором лебегова мера λ задана на лебеговой σ-алгебре измеримых множеств Λ. В этом случае каждый бистохастический проектор есть оператор *условного математического ожидания* (мы называем его *усреднением*) по подходящей *σ-подалгебре* $\mathcal{A}$ в Λ. Мы говорим, что $\mathcal{A}$ *усредняет* векторный идеал V (или, что V *усредняется* σ-подалгеброй $\mathcal{A}$), если образ усреднения идеала V содержится в V.

Далее мы налагаем на векторный идеал новое ограничение, требуя, чтобы он был *симметричным*, т.е. инвариантным относительно всех операторов *перестановок.* Под последними понимаются операторы, порождённые *метрическими эндоморфизмами (т.е. сохраняющими меру преобразованиями)* лебегова промежутка I. Как показано в [11], существуют банаховы симметричные идеалы, не являющиеся мажорантными. Иными словами, неверно, что всякий симметричный идеал усредняется любой σ-подалгеброй, - вопреки приведенному без доказательства утверждению [38] и приведенному с неверным доказательством утверждению [39].

Изучение операторов усреднения в зазоре между симметричной и мажорантной областью задания составляет основное содержание настоящей работы. Чисто дискретные σ-подалгебры в Λ, порождённые конечным или счётным числом атомов, мы называем *разбиением* соответствующей мощности. Ввиду перестановочной инвариантности наших объектов мы можем ограничиться среди разбиений рассмотрением таких, атомы которых представлют собой наборы попарно дизъюнктных промежутков в I; мы называем их *интервальными разбиениями.* Особую роль среди интервальных разбиений играют *монотонные*, в которых длины составляющих их промежутков не возрастают при прохождении вдоль I от 1 к 0. Доказано, что каждое интервальное разбиение эквивалентно подпоследовательности того единственного монотонного разбиения, которое получается перестоновкой промежутков исходного разбиения в невозрастающем порядке длин. При этом наименьшая константа эквивалентности оказывается "золотым сечением".

В §6 вводятся два непересекающихся класса σ-подалгебр - проверочные и универсальные. По определению универсальная σ-подалгебра усредняет любой симметричный идеал, между тем как проверочная σ-подалгебра из всех симметричных идеалов усредняет только мажорантные. Таким образом, если на многообразие V наложить условие быть симметричным идеалом, то вопрос о его интерполяционности между L^1 и L^∞ решается проверкой на единственном бистохастическом проекторе - операторе усреднения по любой из проверочных σ-подалгебр.

В §7 для класса всех независимо дополняемых σ-подалгебр доказан следующий общий факт: *счётное разбиение усредняет некоторый симметричный идеал, если его усредняет независимое дополнение к этому разбиению. Более того, если симметричный идеал X содержится в пространстве $L\log^+ L$, то верно и обратное утверждение.* Последний результат позволяет ответить на некоторые вопросы, сформулированные автором в конце статьи [35]. В частности, благодаря ему, в §6 и §8 устанавливается полная классификация проверочных/универсальных σ-подалгебр в классе независимо дополняемых σ-подалгебр, к каковому относятся, в частности, все счётные разбиения. Универсальными оказываются конечные разбиения и независимые дополнения к ним. Проверочными же являются 1) σ-подалгебры, такие, что они содержат непустую непрерывную часть; 2) интервальные разбиения, эквивалентные бесконечной геометрической прогрессии или любые более мелкие, чем таковые; 3) независимые дополнения к интервальным разбиениям из п.2).

Мы вводим понятие *главного симметричного идеала $\mathcal{N}_f$*, т.е. симметричного идеала, порождённого функцией $f \in L^1(I)$ и являющегося "симметричным атомом"любого симметричного идеала. $\Big($Это понятие можно рассматривать

как функционально-аналитическое обобщение понятия случайной величины.)
Среди порождающих функций f мы выделяем *регулярные*, т.е. такие, что главный симметричный идеал $\mathcal{N}_f$ является мажорантным. Заметим что для регулярных функций $\mathcal{N}_f$ по составу своих элементов совпадает с известным *пространством Марцинкевича* $\mathcal{M}_\psi$, где производная от неубывающей непрерывной в нуле вогнутой функции ψ, $\psi(0) = 0$, есть невозрастающая перестановка на I функции $|f|$. §1 посвящён вопросу о возможности банахова нормирования главного с.и., а также изучению поведения регулярных функций под действием операторов сжатия/растяжения на I; в этом же параграфе доказано, что регулярные функции мажорируются степенными и в терминах регулярных и слабо регулярных функций характеризуется свойство BMO.

В §4 даётся решение следующей задачи: сформулировать в терминах функции $f \in L^1(I)$ и счётного разбиения $\mathcal{F}$ необходимые и достаточные условия, при выполнении которых $\mathcal{F}$ усредняет главный симметричный идеал $\mathcal{N}_f$; в этом случае мы говорим, что функция f является *$\mathcal{F}$-регулярной.* В §5 изучаются свойства $\mathcal{F}$-регулярных функций, в частности, те из этих свойств, которые аналогичны свойствам регулярных функций. Приведены условия, равносильные тому, что симметричный идеал, порождённый образом усреднения некоторого главного симметричного идеала, и сам будет главным.

Кроме ещё неопубликованных результатов §7 и §8 все остальные были получены автором в предыдущие годы, начиная с 1974, а статью [35] можно считать предварительной для настоящей работы. Собственно говоря, цель автора - собрать и единообразно изложить все его результаты на обозначенную в заглавии тему.

В конце работы имеется библиография, а в начале - §0, содержащий терминологию и предварительные сведения. В каждом параграфе от 1-го до 8-го после заголовка даётся краткая аннотация, а также ссылки на относящуюся сюда литературу.

Отсутствие ссылок и пояснений при утверждениях означает, что последние либо просты, либо хорошо известны.

§0. Определения, обозначения и предварительные сведения.

Через (I, Λ, λ) обозначается единичный промежуток $I := (0, 1]$ с лебеговой σ-алгеброй Λ и лебеговой мерой на ней λ. Множества из Λ называются *измеримыми*. Отображение $\pi : I \to I$ мы называем *(метрическим) эндоморфизмом*, если в Λ найдётся подмножество меры нуль, вне которого π осуществляет измеримое сохраняющее меру отображение: $\lambda\Big(\pi^{-1}(A)\Big) = \lambda(A), A \in \Lambda$. П.в. взаимно однозначный эндоморфизм π называются *автоморфизмом* и в этом случае π^{-1} также сохраняет меру.

Как обычно, через $L^0(I, \Lambda, \lambda) := L^0(I)$ обозначается пространство всех (классов эквивалентности совпадающих п.в.) вещественных Λ-измеримых конечнозначных функций, в котором под частичным порядком понимается упорядочение λ-п.в. Характеристическая (т.е. индикаторная) функция измеримого множества A обозначается 1_A; $\mathbf{1} := 1_I$. Две функции $0 \le f, g \in L^0(I, \Lambda, \lambda)$ называются *эквивалентными* (обозначение: $f \simeq g$), если найдётся константа $C > 0$, такая что $C^{-1}f \le g \le Cf$. *Равноизмеримость* функций $f, g \in L^0(I, \Lambda, \lambda)$, которую мы обозначаем $f \sim g$, означает, что для любого $\alpha > 0$ выполняется равенство $\lambda(\{t : f(t) > \alpha\}) = \lambda(\{t : g(t) > \alpha\})$. Очевидно, что функции, переводимые одна в другую эндоморфизмами, равноизмеримы. В [12] показано, что для всякой функции $f \in L^0(I)$ найдётся единственная непрерывная справа невозрастающая функция на I, равноизмеримая с $|f|$; она обозначается $f^* : \ f^* \sim |f|$, и называется *невозрастающей перестановкой* функции f. Там же доказано, что для всякой функции $f \in L^0(I)$ найдётся эндоморфизм π, такой что $|f| = f^* \circ \pi$.

Через $L^1(I, \Lambda, \lambda) := L^1(I)$ (через $L^\infty(I, \Lambda, \lambda) := L^\infty(I)$) обозначаются векторные многообразия в $L^0(I)$, состоящие из всех суммируемых по абсолютной величине (соответственно, существенно ограниченных) вещественых функций на (I, Λ, λ).

Для $f \in L^1(I)$ через $f^{**}(t)$ обозначается невозрастающая на I функция $t^{-1}\int_0^t f^* d\lambda, \ t \in I$. Очевидно, что $f^* \le f^{**}$. Множество $\Omega_f := \{g \in L^1(I) : g^{**} \le f^{**}\}$ называется *орбитой* функции f. Иногда принадлежность $g \in \Omega_f$ обозначается $g \prec f$.

Пусть s любое положительное число, $f \in L^0(I)$. *Оператор сжатия-растяжения* $\rho_s : L^0(I) \to L^0(I)$, действующий по формуле

$$\begin{cases} (\rho_s f)(t) = f(s \cdot t), \text{ если } 0 < s \cdot t \le 1; \\ 0, \text{ если } s \cdot t > 1, \end{cases} \qquad ({}_0.1)$$

мы называем *c/d-оператором*. Очевидно, что каждый c/d-оператор действует из $L^1(I)$ в $L^1(I)$.

Лемма 0.1. Справедливость следующих соотношений для любых $f \ge 0, g \in$

$L^0(I)$ легко проверяется.

$$\begin{cases} \rho_s f \le s^{-1}\rho_s f^*, \ s \in I; \\ (\rho_2 f^*)(t) \le f^*(t) \le (\rho_{\frac{1}{2}} f^*)(t) \le \Big(f^*(t) + f^*(1-t)\Big)^*, \ t \in I; \\ 0 \le f^*(t) \le f^{**}(t) = (f^{**})^*(t) \ge t^{-1}\int_0^t f d\lambda, \ t \in I; \\ f^* \le \rho_s f^*, \ \rho_s f^{**} \le s^{-1} f^{**}, \ s \in I; \\ (f+g)^* \le \rho_s f^* + \rho_{1-s} g^*, \ 0 < s < 1. \end{cases} \qquad ({}_0.2)$$

□

Лемма 0.2. Для всякого c/d-оператора $\rho_s, \ s \in I$, и всякой функции $f, \ f \in L^0(I)$ справедливо равенство

$$(\rho_s f)^* \le \rho_s f^*. \qquad ({}_0.3)$$

Доказательство. Для любого $f, \ f \in L^0(I)$, и любого $\alpha > 0$ положим $A_f(\alpha) := \{t \in I : f(t) > \alpha\}$. Тогда для любого $u \in I$ выполняется

$$A_{\rho_u f}(\alpha) = u^{-1} A_f(\alpha).$$

Действительно, справедливы равносильности

$$s \in u^{-1}A_f(\alpha) \Leftrightarrow us \in A_f(\alpha) \Leftrightarrow f(us) > \alpha \Leftrightarrow \rho_u f(s) > \alpha \Leftrightarrow s \in A_{\rho_u f}(\alpha),$$

которые применительно к $(\rho_u f)^*$ в силу $({}_0.2)$ и свойств лебеговой меры влекут

$$\lambda\{\rho_u f > \alpha\} = \lambda\{A_{\rho_u f}(\alpha)\} = \lambda\{u^{-1}A_f(\alpha)\} \le u^{-1}\lambda\{A_{f^*}(\alpha)\} = \lambda\{\rho_u f^* > \alpha\}.$$

□

Измеримую на I функцию f, множество значений которой не более чем счётно и не имеет конечных точек сгущения, мы называем *элементарной.* Легко видеть, что любая измеримая функция на I равномерно и с любой степенью точности аппроксимируется на I подходящей элементарной функцией. Две равноизмеримые элементарной функции переводятся одна в другую автоморфизмами. В частности, для элементарной функции f найдётся автоморфизм π, такой что $f^* = |f| \circ \pi$.

Под σ-подалгеброй понимается система подмножеств Λ, замкнутая относительно счётных объединений и пересечений своих элементов, взятия к ним множественных дополнений в I и содержащая все множества из Λ меры нуль. Для σ-подалгебры $\mathcal{A}$ подмножество $a \in \mathcal{A}, \ \lambda(a) > 0$, называется *атомом* в $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A} \ni b \subseteq a$ влечёт либо $\lambda(a \backslash b) = 0$, либо $\lambda(b) = 0$. σ-подалгебра называется *непрерывной*, если она не содержит собственных атомов. Она называется *дискретной*, если множественное дополнение в $\mathcal{A}$ к совокупности всех её атомов имеет λ-меру нуль. Говорят, что σ-подалгебры $\mathcal{A}$ имеет *смешанный тип*, если она содержит нетривиальные дискретные и непрерывные части.

Наименьшая σ-подалгебра в Λ, содержащая некоторую совокупность $\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ подмножеств Λ, называется *порождённой* этой совокупностью и обозначается $\mathcal{G} := \sigma\Big(\{G_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}\Big)$. Две σ-подалгебры $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ мы называем *равноизмеримыми*, (обозначение: $\mathcal{H} \sim \mathcal{G}$), если одна из них переводится в другую некоторым эндоморфизмом. Если для двух σ-подалгебр $\mathcal{H}$ и $\mathcal{G}$ в Λ справедливо множественное включение $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, то говорят, что $\mathcal{G}$ *мельче* $\mathcal{H}$, а $\mathcal{H}$ *крупнее* $\mathcal{G}$. Мы называем $\sigma-$подалгебру $\mathcal{A}^\perp$ *независимым дополнением* к $\sigma-$подалгебре $\mathcal{A}$ в Λ, если множественное объединение $\mathcal{A} \cup \mathcal{A}^\perp$ порождает Λ и при этом равенство $\lambda(D\cap E) = \lambda(D)\times\lambda(E)$ выполняется для любых $D\in\mathcal{A},\ E\in\mathcal{A}^\perp$.

Дискретную $\sigma-$подалгебру $\mathcal{F} = \sigma\Big(F_n,\ n\ge 1\Big)$ в Λ со счётным (или с конечным) множеством атомов положительной меры $\{F_n,\ n\ge 1\}$ мы называем *счётным* (соответственно, *конечным) разбиением* и говорим, что это разбиение принадлежит *стохастическому вектору* (с.в.) $\vec{\phi} = [\phi_n]$, где $\phi_n := \lambda(F_n) > 0,\ n\ge 1,\ \sum_{n\ge1}\phi_n = 1$. Два с.в считаются один *крупнее* другого, если существуют соответственные принадлежащие им дискретные $\sigma-$подалгебры такого же смысла.

Таким образом каждая элементарная функция измерима по отношению к некоторому не более, чем счётному разбиению. Равноизмеримые не более, чем счётные разбиения принадлежат стохастическим векторам, координаты которых являются перестановками координат одного и того же стохастического вектора. Эти разбиения переводятся одно в другое автоморфизмами $\sigma-$алгебры Λ, [1].

Счётное разбиение $\mathcal{B} = \sigma\Big(\ B_n := (b_n, b_{n-1}],\ n\ge 1\Big)$,где $1 = b_0 > b_1 > ... > b_n \downarrow 0$, будем называть *интервальным разбиением (и.р), принадлежащим* с.в. $\vec{\beta} = [\beta_n]$; $\beta_n = b_{n-1} - b_n > 0,\ n\ge 1$, и обозначать $\mathcal{B} = (b_n)$. Понятно, что и.р. $\mathcal{T} = (t_n)$ мельче, чем и.р. $\mathcal{S} = (s_n)$, тогда и только тогда, когда $\{s_n\}\subseteq\{t_n\}$. Мы называем и.р. $\mathcal{T} = (t_n)$ и $\mathcal{S} = (s_n)$ *эквивалентными* (обозначение $\mathcal{T} \simeq \mathcal{S}$), если при подходящей константе $C > 0$ выполняются неравенства $C^{-1}t_n \le s_n \le Ct_n,\ n\ge 1$. Мы называем и.р. $\mathcal{S} = (s_n)$ *кратным* и.разбиению $\mathcal{T} = (t_n)$, если найдутся натуральное число n_0 и положительное число p, такие что $s_n = p\cdot t_n,\ n\ge n_0$.

И.р. $\mathcal{B}$ называется *монотонным*, если координаты его с.в. $\vec{\beta} = [\beta_n]$ образуют монотонно невозрастающую последовательность: $\beta_n \ge \beta_{n+1},\ n\ge 1$. Невозрастающая перестановка координат с.в. $\vec{\beta}$ составляет координаты с.в. $\vec{\beta}^* = [\beta_n^*]$. Всякое счётное разбиение $\mathcal{F}$, с.в. которого есть $\vec{\beta}$, равноизмеримо с некоторым и.р. $\mathcal{B}^*$, с.в. которого есть $\vec{\beta}^*$. При этом и.р. $\mathcal{B}^*$ называется *монотонной перестановкой* счётного разбиения $\mathcal{F}$.

Точки вида $2^{-n},\ n\ge 0$, мы называем *двоичными*, как *двоичным* мы называем и.р. $\sigma\Big((2^{-m_n}, 2^{-m_{n-1}}],\Big) := (2^{-m_n})$, где $\{m_n\}$ - целые числа: $0 = m_0 < m_1 < m_2 < ... < m_n < ....$ Мы обозначаем $\mathcal{D} := (2^{-n})$, а двоичный промежуток $(2^{-n}, 2^{-n+1}]$ -

через $D_n,\ n \geq 1$. Легко видеть, что для любой функции $f = f^* \in L^1(I)$ найдётся $\mathcal{D}$-измеримая функция $g:\ g = g^* = \sum_{n\geq 1} a_n 1_{D_n}$, такая что

$$\rho_2 g(t) \leq f(t) \leq \rho_{\frac{1}{2}} g(t),\ t \in I. \qquad ({}_0.4)$$

Каждому и.р. $\mathcal{T} = (t_n)$ мы ставим в соответствие его *(правую) двоичную проекцию* - двоичное и.р. $\mathcal{T}_{(2)}$, образованное всеми различными точками вида $2^{-[-\log_2 t_n]+1}$, где через $[r]$ обозначается целая часть положительного числа $r:\ [r] \leq r < [r+1]$. Отметим, что и.р. $\mathcal{T}_{(2)}$ всегда монотонно. Для счётного разбиения $\mathcal{F}$ и.р. $(\mathcal{F}^*)_{(2)}$ обозначается просто $\mathcal{F}^*_{(2)}$

Выборкой из счётного разбиения $\mathcal{F} = \sigma(F_n,\ n \geq 1,)$ называется разбиение

$$\mathcal{F}_{(n_m)} := \sigma(F_{n_m},\ m \geq 0),\ \text{где } F_{n_0} := I \setminus \bigcup_{m\geq 1} F_{n_m}.$$

Для и.р. $\mathcal{T} = (t_n)$ определим следующие две функции от $k,\ k \geq 1$:

$\omega_{\mathcal{T}}(k) := \sup_{n\geq 0} \frac{t_{n+k}}{t_n}$;

$q_{\mathcal{T}}(k) =$ *количество точек последовательности* $\{t_n\}_{n=0}^{\infty}$ *на промежутке* D_k.

Лемма 0.3. Следующие условия равносильны.

1. Найдётся натуральное число k, такое что $\omega_{\mathcal{T}}(k) < 1$;

2. Последовательность $\{q_{\mathcal{T}}(k)\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена.

□

Для непрерывной в точке нуль неубывающей функции ψ на $[0,1],\ \psi(0) = 0,\ \psi(1) > 0$, и и.р. $\mathcal{T}$ образуем и.р., состоящее из всех попарно различных точек последовательности $\{\min[1, \psi(t_n)]\}_{n=0}^{\infty}$ (добавляя, если нужно, точку 1) и обозначим его $\psi(\mathcal{T})$. При этом обозначения $\omega_{\psi(\mathcal{T})}$ и $q_{\psi(\mathcal{T})}$ соответствуют вышеприведённым..

Предложение 0.4. 1-й принцип непрерывности Ляпунова.

Пусть $A, B \in \Lambda,\ \lambda(A) = \lambda(B) > 0,\ \lambda(A \cap B) = 0$, и пусть $\{A_n\}_{n\geq 1}$ - разбиение множества A на попарно дизъюнктные подмножества положительной меры. Тогда найдётся разбиение $\{B_n\}_{n\geq 1}$ множества B на попарно дизъюнктные подмножества положительной меры, такое что $\lambda(B_n) = \lambda(A_n),\ n \geq 1$.

2-й принцип непрерывности Ляпунова.

Пусть $A \in \Lambda,\ \lambda(A) > 0$ и пусть $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ разбиение A на попарно дизъюнктные подмножества положительной меры. Для каждой функции $f \in L^1(I)$ найдётся функция $\tilde{f},\ \tilde{f} \sim f$, такая что

$$\int_{A_n} \tilde{f} d\lambda = \int_A f d\lambda,\ n \geq 1.$$

□

Для всякой $\sigma-$подалгебры $\mathcal{A}$ в Λ *оператор условного математического ожидания* (по другому -=*усреднения) по* $\mathcal{A}$

$$E(\cdot|\mathcal{A}) : L^1(I) \to L^1(I, \mathcal{A}, \lambda)$$

действует как производная Радона-Никодима:

$$E(f|\mathcal{A}) := \frac{\lambda_f(A)}{\lambda(A)},\ f \in L^1(I),$$

где мера λ_f на $\mathcal{A}$ определена формулой $\lambda_f(A) := \int_A f d\lambda, A \in \mathcal{A}$.
□

Предложение 0.5.

1). *Проекционное свойство.*
Если $\sigma-$подалгебра $\mathcal{A}$ мельче $\sigma-$подалгебры $\mathcal{C}$, то

$$E\Big(E(\cdot|\mathcal{A})|\mathcal{C})\Big) = E(\cdot|\mathcal{C}).$$

2). *Правило замены переменной.* Пусть π эндоморфизм на Λ. Для любой функции $f \in L^1$ справедлива формула

$$E(f \circ \pi|\mathcal{A} \circ \pi) = E(f|\mathcal{A}) \circ \pi.$$

3). Для не более, чем счётного разбиения $\mathcal{F} = \sigma\Big(F_n,\ n \geq 1\Big)$ оператор усреднения по $\mathcal{F}$ действует по формуле

$$E(f|\mathcal{F})(t) = \sum_{n\geq 1} \Big(\frac{1}{\lambda(F_n)} \int_{F_n} f d\lambda\Big) \cdot 1_{F_n}(t),\ t \in I. \qquad ({}_0.5)$$

□

Из принципов Ляпунова и формулы замены переменной вытекает

Предложение 0.6. 1). Для любого счётного разбиения $\mathcal{F}$ и любой функции $f \in L^1(I)$ справедливо равенство $E(f|\mathcal{F})^* = E(\bar{f}|\mathcal{B})$, где и.р. $\mathcal{B} \sim \mathcal{F},\ \bar{f} \sim f$.

2). Если счётное разбиение $\mathcal{F}$ мельче, чем счётное разбиение $\mathcal{G}$, то для любой функции $f \in L^1(I)$ найдётся такая равноизмеримая ей функция $\tilde{f} \sim f$, что

$$E(\tilde{f}|\mathcal{F}) = E(f|\mathcal{G}). \qquad ({}_0.6)$$

3). Если счётные разбиения $\mathcal{F}$ и $\mathcal{G}$ равноизмеримы, то для любой функции $f \in L^1(I)$ найдётся такая функция $g \in L^1(I),\ g \sim f$, что $E(g|\mathcal{G}) \sim E(f|\mathcal{F})$.
□

В дальнейшем нам понадобятся некоторые понятия теории интерполяции линейных операторов на пространстве $L^1(I)$.

Назовём линейный непрерывный оператор $T : L^1(I) \to L^1(I)$ *допустимым*, если $T|_{L^\infty(I)} \subseteq L^\infty(I)$. Положительный допустимый оператор $\mathcal{U} : L^1(I) \to L^1(I)$ называется *бистохастическим*, если $\mathcal{U}(\mathbf{1}) = \mathcal{U}^*(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, где через $\mathcal{U}^*$ обозначается сопряжённый к $\mathcal{U}$ оператор на $L^\infty(I)$.

Примерами бистохастических операторов могут служить операторы, порождаемые автоморфизмами на I, а также операторы усреднения по $\sigma-$подалгебрам.

Векторное многообразие X между $L^1(I)$ и $L^\infty(I)$ $\Big($банахово пространство $(X, ||\cdot||_X)$, непрерывно вложенное между $L^1(I)$ и $L^\infty(I)$ $\Big)$, называется *интерполяционным*$\Big($*строго интерполяционным*$\Big)$ между $L^1(I)$ и $L^\infty(I)$, если сужение на X всякого допустимого оператора T отображает X в себя (соответственно, $||T||_{X\to X} \leq \max[||T||_{L^1(I)\to L^1(I)}, ||T||_{L^\infty(I)\to L^\infty(I)}]$). Интерполяционная теорема Кальдерона, [9], состоит в том, что для проверки интерполяционности $X\Big($строгой интерполяционности $(X, ||\cdot||_X)\Big)$ достаточно установить, что вместе с каждой своей функцией x многообразие X содержит её орбиту: $x \in X \Rightarrow \Omega_x \subset X$ $\Big($соответственно, что норма любого элемента орбиты функции $x \in X$ не превосходит нормы x $\Big)$. В свою очередь Рифф показал, [8], что орбита Ω_f каждой функции $f \in L^1(I)$ есть $\{U(f) :\ U \in \mathfrak{U}\}$, где через $\mathfrak{U}$ обозначается множество всех бистохастических операторов. Тем самым для проверки интерполяционности (соответственно, строгой интерполяционности) можно брать не все допустимые операторы, а ограничиться лишь операторами класса $\mathfrak{U}$.

Операторы условного математического ожидания, - усреднения по всевозможным σ-подалгебрам, - представляют собой бистохастические *проекторы*, то есть образуют подкласс $\mathfrak{P}$ класса $\mathfrak{U}$.

Векторное многообразие $X,\ X \subseteq L^1(I)$, содержащее функцию $\mathbf{1}\Big($банахово пространство $(X, ||\cdot||_X)$, непрерывно вложенное между $L^1(I)$ и $L^\infty(I)$ $\Big)$, мы называем *порядковым* идеалом в $L^1(I)\Big($ *банаховым идеалом*$\Big)$, если для $y, x \in L^1(I)$ выполняется импликация $|y| \leq |x|,\ x \in X \Rightarrow y \in X\Big($ и при этом банахова норма $||\cdot||_X$ *монотонна*, т.е. $||x||_X \leq ||y||_X$, если $|x| \leq |y|\Big)$. Мы опускаем слово "порядковый", ибо других идеалов в дальнейшем не встретится. Интерполяционные между $L^1(I)$ и $L^\infty(I)$ идеалы мы называем *мажорантными идеалами* (м.и.), а банаховы строго интерполяционные идеалы - *строго мажорантными пространствами*; по теореме Кальдерона каждый из последних вместе с любой своей функцией f содержит её орбиту Ω_f, причём норма любого элемента Ω_f не превосходит нормы f. Идеалы, не являющиеся мажорантными, будем называть *немажорантными*.

Идеал X называется *симметричным (с.и.)*, если выполняется импликация $y^* \le x^*,\ x \in X \Rightarrow y \in X$. Понятно, что всякий мажорантный идеал симметричен.

Симметричный идеал X называется *симметричным пространством* (с.п) $(X, \|\cdot\|_X)$, если заданная на X банахова норма $\|\cdot\|_X$ монотонна и симметрична, т.е. принимает одинаковые значения на равноизмеримых функциях.
Строго интерполяционные между $L^1(I))$ и $L^\infty(I)$ банаховы банаховы идеалы, снабжённые монотонной нормой, будем называть *строго мажорантными с.п.*.

Из лемм 0.1 и 0.2 вытекают неравенства

$$(\rho_2 f^*)(t) \le f^*(t) \le (\rho_{\frac{1}{2}} f^*)(t) \le \Big(f^*(t) + f^*(1-t)\Big)^*,\ t \in I,\ f \in L^1(I), \qquad ({}_0.7),$$

из которых следует, что всякий c/d-оператор переводит любой с.и. в себя. Отсюда же видно, что каждый м.и. является также с.и.

Пусть $\{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ семейство идеалов в $L^1(I)$. Сумма этого семейства определяется формулой

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma := \{\sum_{i=1}^{n} x_{\gamma_i} : x_{\gamma_i} \in X_{\gamma_i},\ i = 1, ..., n;\ (\gamma_1, ..., \gamma_n) \in \Gamma^n,\ n \ge 1\}. \qquad ({}_0.8)$$

Лемма 0.7. Сумма $\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma$ идеалов является идеалом,в $L^1(I)$, причём симметричным или мажорантным, если таковыми являются слагаемые идеалы.

□

Лемма 0.8. Для любого идеала $X,\ X \subseteq L^1(I)$, и любой σ-подалгебры $\mathcal{A}$ образ $E\Big(X|\mathcal{A}\Big)$ есть идеал в пространстве $L^1(I, \mathcal{A}, \lambda)$.
□

Лемма 0.9. Для любого множества $\mathfrak{X} = \{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ идеалов $X_\gamma \subseteq L^1(I)$ и любой σ-подалгебры $\mathcal{A}$ справедлива формула

$$E\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma|\mathcal{A}\Big) = \sum_{\gamma\in\Gamma} E\Big(X_\gamma|\mathcal{A}\Big), \qquad ({}_0.9)$$

где в правой части подразумевается сумма идеалов в пространстве $L^1(I, \mathcal{A}, \lambda)$.
□

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. 1. Если для векторного идеала X и оператора $E(\cdot|\mathcal{A})$ усреднения по σ-подалгебре $\mathcal{A}$ выполняется включение $E(X|\mathcal{A}) \subseteq X$, то мы говорим, что $\mathcal{A}$ *усредняет* X или, что X *усредняется* $\mathcal{A}$.

2. Говорят, что *с.п.* $(X, ||\cdot||_X)$ *строго усредняется* σ*-подалгеброй* $\mathcal{A}$ $\Big($или, что $\mathcal{A}$ *строго усредняет с.п.* $(X, ||\cdot||_X)\Big)$, если $\mathcal{A}$ усредняет с.и. X и при этом $||E(\cdot|\mathcal{A})||_{X\to X} \le 1$.

Замечание 0.10. Пусть (Ω, Σ, μ) - непрерывное вероятностное пространство, т.е. измеримое пространство с полной безатомной мерой, $\mu(\Omega) = 1$. Определения σ-подалгебры в Σ и дополняемой σ-подалгебры в Σ в точности такие же как выше. В точности так же как выше можно ввести понятие равноизмеримости для двух функций $f \in L^1(I)$ и $\tilde{f} \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. Множества $A \subseteq L^1(I)$ и $\tilde{A} \subseteq L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ мы называем $\overset{e}{\sim}$*эквивалентными*, если для любой функции $f \in A$ найдётся функция $\tilde{f} \in \tilde{A}$, равноизмеримая с f, и наоборот, для любой функции $\tilde{f} \in \tilde{A}$ найдётся равноизмеримая с ней функция $f \in A$ (обозначение: $A \overset{e}{\sim} \tilde{A}$). Для функции $\tilde{f} \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ под её невозрастающей перестановкой мы понимаем функцию f^*, где $f \in L^1(I)$ и равноизмерима с $\tilde{f}$. В пространстве $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ определения орбиты функции, симметричных и мажорантных идеалов, а также идеалов, усредняемых σ-подалгеброй $\tilde{\mathcal{B}} \subseteq \Sigma$, ничем не отличается от вышеприведённых. Для любого с и. в $L^1(I)$ найдётся единственный $\overset{e}{\sim}$эквивалентный ему с.и. в $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, и наоборот, [15], [35]. Две σ-подалгебры $\mathcal{A} \subseteq \Lambda$ и $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \Sigma$ будем называть $\overset{e}{\sim}$*эквивалентными*, если $\overset{e}{\sim}$эквивалентны совокупности индикаторных функций всех элементов σ-подалгебр $\mathcal{A}$ и $\tilde{\mathcal{A}}$, соответственно.
$\square$

Замечание 0.11.

1). $\overset{e}{\sim}$эквивалентные с.и. X и $\tilde{X}$ лишь одновременно могут быть мажорантными. σ-подалгебра $\mathcal{A} \subseteq \Lambda$ и $\overset{e}{\sim}$эквивалентная ей σ-подалгебра $\tilde{\mathcal{A}} \subseteq \Sigma$ могут лишь одновременно усреднять или не усреднять $\overset{e}{\sim}$эквивалентные с.и. X и $\tilde{X}$.

2). В силу предложения 0.5 все σ-подалгебры, равноизмеримые с некоторой σ-подалгеброй, одновременно с ней усредняют или не усредняют любой с.и. $X \subseteq L^1(I)$. В частности, счётные разбиения, имеющие один и тот же монотонный с.в., одновременно усредняют или не усредняют любой с.и. $X \subseteq L^1(I)$. В силу инвариантности при действии c/d-операторов вместе с и.р. $\mathcal{B}$ все и.р., эквивалентные с $\mathcal{B}$ усредняет или нет любой с.и. $X \subseteq L^1(I)$.

3) Если и.р. $\mathcal{S}$ кратно и.разбиению $\mathcal{T}$, то $\mathcal{S}$ и $\mathcal{T}$ одновременно усредняют или не усредняют любой с.и. $X \subseteq L^1(I)$.

4). Двоичная проекция $\mathcal{T}_{(2)}$ интервального разбиения $\mathcal{B}$ одновременно с $\mathcal{B}$ усредняет или нет любой с.и. $X \subseteq L^1(I)$, [25].

5). Из предложения 0.6 и п. 2) настоящего замечания следует, что, если

счётное разбиение $\mathcal{H}$ не усредняет некоторый идеал, то и более мелкое чем $\mathcal{H}$ разбиение $\mathcal{F}$, а также все равноизмеримые с $\mathcal{F}$ счётные разбиения не усредняют X. Если счётное разбиение $\mathcal{H}$ усредняет идеал X, то и любая его выборка $\mathcal{H}'$ тоже усредняет X.
$\square$

Так как всё пространство $L^1(I)$ есть мажорантный (а, значит, и симметричный) идеал, то для каждого множества $Z \subseteq L^1(I)$ существует наименьший с.и. (наименьший м.и.), содержащий Z, который мы обозначаем $\mathcal{N}_Z$ (соответственно, $\mathcal{M}_Z$) и говорим, что Z *порождает* с.и $\mathcal{N}_Z$, (соответственно, м.и. $\mathcal{M}_Z$). Для одноточечного множества $Z = \{f\},\ f \in L^1(I)$, мы пишем $\mathcal{N}_f$ вместо $\mathcal{N}_{\{f\}}$ (соответственно, $\mathcal{M}_f$ вместо $\mathcal{M}_{\{f\}}$) и говорим о *главном симметричном* (соответственно, *главном мажорантном*) идеале, *порождённом* f. Если $\mathcal{A}$ -непрерывная σ-подалгебра σ-алгебры Λ, то, избегая недоразумений, мы используем символ $(\mathcal{A})\mathcal{N}_X$ $\Big($соответственно, $(\mathcal{A})\mathcal{M}_X\Big)$ для обозначения симметричного $\Big($соответственно, мажорантного $\Big)$ идеала в $L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, порождённого множеством $X \subseteq L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$.

Лемма 0.12. Пусть (Ω, Σ, μ) - непрерывное вероятностное пространство. Для любого множества $\mathfrak{X} = \{X_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ идеалов $X \subseteq L^1((\Omega, \Sigma, \mu))$ и для любой функции $f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ справедливы соотношения

$$\begin{cases} \mathcal{N}_{\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{N}_{X_\gamma}; \\ \mathcal{N}_f = \sum_{\bar{f}\sim f} \mathcal{N}_{\bar{f}}. \end{cases} \tag{$_0.10_{\mathcal{N}}$}$$

$$\begin{cases} \mathcal{M}_{\sum_{\gamma\in\Gamma} X_\gamma} = \sum_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{M}_{X_\gamma}; \\ \mathcal{M}_f = \sum_{\bar{f}\sim f} \mathcal{M}_{\bar{f}}. \end{cases} \tag{$_0.10_{\mathcal{M}}$}$$

$\square$

Леммы 0.1 и 0.2 позволяют дать для главного с.и. $\mathcal{N}_f$ (соответственно, главного м. и. $\mathcal{M}_{\{f\}}$) следующее однотипное описание:

Лемма 0.13. Для любой функции $g \in L^1(I)$ справедливы равенства

$$\begin{cases} \mathcal{N}_g = \mathcal{N}_f = \{z \in L^1(I) :\ \text{существует}\ q = q(z) > 1,\ \text{такое что}\ z^* \le q\rho_{q^{-1}} f^*\} \\ \mathcal{M}_f = \{z \in L^1(I) :\ \text{существует}\ q = q(z) > 1,\ \text{такое что}\ z^{**} \le q\rho_{q^{-1}} f^{**}\} \\ \mathcal{M}_f = \{z \in L^1(I) :\ \text{существует}\ q = q(z) > 1,\ \text{такое что}\ z^{**} \le q f^{**}\}. \end{cases} \tag{$_0.11$}$$

Именно в смысле первого равенства мы употребляем впредь обозначение $\mathcal{N}_f$ (причём даже и тогда, когда измеримая функция $f \in L^0(I)$ суммируемой не является).

Лемма 0.14. Для любого счётного разбиения $\mathcal{F}$ и любой функции $f \in L^1(I)$

справедливы равенства

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} = \sum_{\hat{f}\sim f,\ \hat{\mathcal{F}}\sim\mathcal{F}} \mathcal{N}_{E(\hat{f}|\hat{\mathcal{F}})},\ \mathcal{M}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} = \sum_{\hat{f}\sim f,\ \hat{\mathcal{F}}\sim\mathcal{F}} \mathcal{M}_{E(\hat{f}|\hat{\mathcal{F}})}. \qquad ({}_0.12)$$

□

Замечание 0.15. Из лемм 0.12 и 0.13 вытекает, что всякий с..и. X (всякий м.и. Y), $\overset{e}{\sim}$*эквивалентный* главному с.и. $\mathcal{N}_f$ (соответственно, главному м.и. $\mathcal{M}_g$), сам является главным с.и. $\mathcal{N}_{\bar{f}}$ (соответственно, главным м.и. $\mathcal{M}_{\bar{g}}$), где $\bar{f} \sim f$, $\bar{g} \sim g$. При этом из леммы 0.14 следует, что, если $\mathcal{N}_f$ усредняется счётным разбиением $\mathcal{F}$, то $\mathcal{N}_{\bar{f}}$ усредняется счётным разбиением $\check{\mathcal{F}}$, равноизмеримым с $\mathcal{F}$.
□

Последнее равенство в $({}_0.11)$ показывает, что порождённый f главный м.и. $\mathcal{M}_f$ по составу элементов совпадает с с.п., называемым *пространством Марцинкевича* M_f, [4]. По заданной $f \in L^1(I)$ с.п. M_f определяется как

$$M_f := \{x \in L^1(I) :\ \|x\|_{M_f} := \sup_{t\in I} \frac{x^{**}(t)}{f^{**}(t)} < \infty\}. \qquad ({}_0.13)$$

(Отсюда видно, что всякое пространство Марцинкевича есть строго мажорантное с.п.).

Лемма 0.16. ([4]). Для любых функций $x, y \in M_f$ справедливо неравенство

$$\|x^* - y^*\|_{M_f} \le \|x - y\|_{M_f}.$$

□

Замыкание с.и. $\mathcal{N}_f$ в M_f по норме $\|\cdot\|_{M_f}$ обозначается M_f^1, [16].

§1. Главные симметричные и мажорантные идеалы, порождённые слабо регулярными и регулярными функциями . [23], [26], [31], [34], [36]

В этом параграфе рассматриваются свойства регулярности и слабой регулярности функций, порождающих главные симметричные и мажорантные идеалы.

Для $s > 0$ обозначим $\hat{s} := \max[s, s^{-1}]$ $\Big($так что $\hat{s}^{-1} = \min[s, s^{-1}]\Big)$.

Лемма 1.1. Для произвольной функции $f,\ f \in L^1(I)$, порождённый ею главный с.и. может быть определён формулой

$$\mathcal{N}_f = \{x \in L^1 : n_f(x) < \infty\},\ \text{где } n_f(x) := \inf_{s>0}\{x^*(t) \leq \hat{s} \cdot f^*(\hat{s}^{-1}) \cdot t),\ t \in I\}.$$

Перечислим очевидные свойства модуляры n_f. Для любых $x, y \in L^1(I)$ и любого вещественного $r,\ r \neq 0$, справедливо

$$1).\ n_f(x) \geq 0;\ n_f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0;\ 2).\ n_f(r \cdot x) \leq \hat{|r|} n_f(x);$$

$$3).\ n_f(x+y) \leq 2 \cdot [n_f(x) + n_f(y)];$$

$$4).\ n_f(y) \leq n_f(x),\ \text{если } |y| \leq |x|;\ 5).\ n_f(x) = n_f(y),\ \text{если } x \sim y.$$

Тем самым модуляра n_f монотонна и симметрична на $\mathcal{N}_f$, и имеет счётный базис окрестностей нуля $U_k = \{x :\ x^*(t) \leq \max[2^k, 2^{-k}] \cdot f^*(\min[2^k, 2^{-k}] \cdot t),\ t \in I\},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Лемма 1.2. Модуляра n_f обладает свойством Леви-Фату. Иными словами,

6). *Если неубывающая последовательность неотрицательных функций* $\{x_k\},\ \{x_k\} \subseteq \mathcal{N}_f$, *такова что* $C := \sup_{k \geq 0} n_f(x_k) < \infty$, *то* $\sup_{k \geq 0} x_k \in \mathcal{N}_f$.

7). Модуляра n_f полна на $\mathcal{N}_f$.

Доказательство. Обозначим $\sup_{k \geq 0} x_k := x,\ \sup_{k \geq 0} x_k^* := \bar{x}$. Очевидно, $\bar{x}$ есть измеримая невозрастающая функция, удовлетворяющая неравенству $\bar{x}(t) \leq C \cdot f^*(C^{-1} \cdot t),\ t \in I$. Тем самым $\bar{x} \in \mathcal{N}_f$ и $n_f(\bar{x}) \leq C$. Но $\bar{x} \sim x$, [12], откуда $x \in \mathcal{N}_f$ и $n_f(x) \leq C$. На основании [5] из 6) следует 7).
□

Определение 1.1. 1. Функция $f,\ f \in L^1(I)$, называется *слабо регулярной*, если найдётся константа $C = C(f) > 0$, такая что

$$f^*(\frac{t}{2}) \leq C \cdot f^*(t),\ t \in I.$$

2. Функция $f,\ f\in L^1(I)$, называется *регулярной*, если найдётся константа $K=K(f)>0$, такая что $f^{**}(t)\le K\cdot f^*(t),\ t\in I$.
$\square$

Очевидно, что условие слабой регулярности функции f равносильно тому, что для любой константы $0<c<1$ найдётся константа $C>0$, такая что $\rho_c f^*(t)\le C\cdot f^*(t),\ t\in I$. Поэтому для слабо регулярной функции f справедливо равенство

$$\mathcal{N}_f=\{z\in L^1(I,\Lambda,\lambda):\ z^*\le q\cdot f^* \text{ для подходящего } q=q(z),\ q>0\}, \qquad ({}_1.1)$$

и равенство
$$n_f(x)=\inf\{s>0: x^*(t)\le s\cdot f^*(t)\}. \qquad ({}_1.2)$$

Пусть $f=f^*\in L^1(I),\ \psi(t)=\int_0^t f d\lambda,\ t\in I,\ M_\psi$ - пространство Марцинкевича со своей нормой $\|\cdot\|_{M_\psi}$, см.(${}_0$.12). Рассмотрим функцию от $s,\ s\in I$,

$$\|\rho_s\|_{M_\psi\to M_\psi}=\sup\{\|\rho_s x\|_{M_\psi\to M_\psi}:\ \|x\|_{M_\psi,}=1\}.$$

Лемма 1.3. Для $s\in I$ справедливо равенство $\|\rho_s\|_{M_\psi\to M_\psi}=\|\rho_s f\|_{M_\psi}$.

Доказательство. Для любого $x\in M_\psi,\ \|x\|_{M_\psi}=1$, в силу леммы 0.2 имеем $\int_0^t(\rho_s x)^*d\lambda=\int_0^t\rho_s x^*d\lambda\le\int_0^t\rho_s f d\lambda$. Лемма следует из того, что $\|f\|_{M_\psi}=1$.
$\square$

Теорема 1.4. Для любого $f\in L^1(I)$ следующие условия равносильны.

i). На $\mathcal{N}_f$ можно задать норму $||\cdot||$, эквивалентную квазинорме n_f;

ii). Главный симметричный идеал $\mathcal{N}_f$ совпадает с главным мажорантным идеалом $\mathcal{M}_f$;

iii). Любая σ-подалгебра в Λ усредняет главный симметричный идеал $\mathcal{N}_f$;

iv). Функция f регулярна, иными словами $f^{**}\in\mathcal{N}_f$.

v). Найдутся константы $k>0$ и $p\in(0,1)$, такие что $\|\rho_s\|_{M_\psi\to M_\psi}\le k\cdot s^{-p},\ 0<s\le 1$.

vi). $\liminf_{t\to 0}\frac{\psi(2t)}{\psi(t)}>1$.

Доказательство. i) $\Rightarrow$ *ii*). Пусть $||\cdot||\simeq n_f$ на $\mathcal{N}_f$ и пусть G обозначает выпуклую и ограниченную окрестность нуля в топологии квазинормы n_f, такую что G есть единичный шар в смысле нормы $||\cdot||$. Тогда $\sup\{n_f(g):\ g\in G\}:=C<\infty$. Положим $H=\{h\in\mathcal{N}_f:\ |h|\le|g| \text{ для подходящего } g\in G\}$ и обозначим через F выпуклую оболочку H. Имеем: $\sup\{n_f(x):\ x\in F\}\le 2\cdot C$, поскольку $\sup\{n_f(x):\ x\in H\}\le C$. Тем самым множество F - выпуклая и ограниченная окрестность нуля в топологии квазинормы n_f. Стандартные рассуждения показывают, что F порядково идеальное множество. Поэтому функционал Минковского множества F, [10], порождает на $\mathcal{N}_f$ монотонную норму $||\cdot||'$, эквивалентную квазинорме n_f. Эта норма полна и обладает свойством Леви-Фату, а такое симметричное пространство всегда мажорантно (см., например, [12]). Таким образом $\mathcal{N}_f$ - мажорантный идеал, тем самым по определению $\mathcal{N}_f = \mathcal{M}_f$. Импликация доказана.

Обратная импликация $ii) \Rightarrow i)$ следует из полноты и монотонности как нормы $||\cdot||_{M_\psi}$ на $\mathcal{M}_f$, так и квазинормы n_f на $\mathcal{N}_f$.

Равносильность $ii) \Leftrightarrow iv)$ в одну сторону тривиальна, а в другую доказана ниже при доказательстве импликации $iii) \Rightarrow iv)$. .

$ii) \Rightarrow iii)$. Если $\mathcal{N}_f = \mathcal{M}_f$, то $\mathcal{N}_f$ как м.и. усредняется любой σ-подалгеброй в Λ, ибо усреднение функции содержится в её орбите.

Доказываем импликацию $iii) \Rightarrow iv)$.

Допустим, что для $f = f^* \in L^1(I)$ включение $f^{**} \in \mathcal{N}_f$ не выполняется. Мы построим такое и.р. $\mathcal{W}$, что $E(f|\mathcal{W}) \notin \mathcal{N}_f$ и тем самым придём к противоречию.

По определению главного с.и. $\mathcal{N}_f$ из того, что $f^{**} \notin \mathcal{N}_f$, вытекает, что найдётся последовательность $\{t_n\} \subseteq I,\ t_{n+1} < t_n,\ n \geq 1,\ t_1 = 1$, такая, что для любого $m \geq 1$

$$\sup_n \frac{f^{**}(t_n)}{f(\frac{t_n}{m})} = \infty.$$

Отсюда следует, что для подходящей последовательности $\{n_m\},\ n_1 = 1$, натуральных чисел справедливо

$$1 < c_m := \frac{f^{**}(s_m)}{f(\frac{s_m}{m})} \uparrow \infty,$$

где $s_m = t_{n_m},\ m \geq 1,\ s_1 = t_{n_1} = 1$.

Зафиксируем $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < c_1$. На интервале $(0, s_1)$ рассмотрим непрерывную неубывающую функцию

$$c_1 - \varepsilon < J_1(u) := \frac{(s_1 - u)^{-1} \int_u^{s_1} f d\lambda}{f(\frac{s_1}{1})}.$$

Найдётся точка $s_{m_2},\ s_{m_2} < \frac{s_1}{2}$, такая что

$$\frac{(s_1 - s_{m_2})^{-1} \int_{s_{m_2}}^{s_1} f d\lambda}{f(\frac{s_1}{1})} > c_1 - \varepsilon.$$

Полагая, что последовательность точек $\{s_{m_j}\}$, $s_{m_j} < \frac{s_{m_{j-1}}}{2}$, $j = 2..., k$, построена таким образом, что

$$\frac{(s_{m_j} - s_{m_{j-1}})^{-1} \int_{s_{m_{j-1}}}^{s_{m_j}} f d\lambda}{f(\frac{s_{m_j}}{m_j})} > c_{m_j} - \varepsilon,$$

введём на интервале $(0, s_{m_k})$ непрерывную неубывающую функцию

$$J_{k+1}(u) := \frac{(s_{m_k} - u)^{-1} \int_u^{s_{m_k}} f d\lambda}{f(\frac{s_{m_k}}{m_k})}$$

и выберем точку $s_{m_{k+1}} < \frac{s_{m_k}}{2}$, такую что

$$\frac{(s_{m_k} - s_{m_{k+1}})^{-1} \int_{s_{m_{k+1}}}^{s_{m_k}} f d\lambda}{f(\frac{s_{m_k}}{m_k})} > c_{m_k} - \varepsilon.$$

Поскольку для определённой по индукции последовательности $\{s_{m_k}\}_k$ справедливо $s_{m_k} \downarrow 0$, то, полагая $w_k := s_{m_k}$, $k \geq 1$, получим, что и.р. $\mathcal{W} = (w_k)$ не усредняет $\mathcal{N}_f$.

Равносильность $\imath v) \Leftrightarrow v)$ доказана в [2].

$\imath v) \Rightarrow v\imath)$. Допустим, что найдётся константа $C \geq 1$, такая что $f^{**} \leq Cf$. Тогда для функции $\psi(t) := \int_0^t f d\lambda$, $t \in I$, можно записать:

$$\frac{\psi(t)}{\psi(t/2)} = \frac{\int_0^t f d\lambda}{\int_0^{t/2} f d\lambda} = 1 + \frac{\int_{t/2}^t f d\lambda}{\int_0^{t/2} f d\lambda} \geq 1 + \frac{f(t)}{f^{**}(t/2)} \geq 1 + \frac{f(t)}{2f^{**}(t)} \geq 1 + \frac{f(t)}{2Cf(t)} = 1 + \frac{1}{2C},$$

что и доказывает импликацию.
Докажем обратную импликацию: $v\imath) \Rightarrow \imath v)$. Поскольку $f^*(t) \geq 1/t \int_t^{2t} f^* d\lambda$, $t \in (0, 2^{-1}]$, импликация вытекает из соотношений

$$\liminf_{t\to 0} \frac{\int_t^{2t} f^* d\lambda}{\psi(t)} > 0 \Leftrightarrow \limsup_{t\to 0} \frac{\psi(t)}{\int_t^{2t} f^* d\lambda} < \infty \Leftrightarrow \limsup_{t\to 0} \frac{f^{**}(t)}{1/t \int_t^{2t} f^* d\lambda} < \infty \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \limsup_{t\to 0} \frac{f^{**}(t)}{f^*(t)} < \infty,$$

что и означает выполнение условия $\imath v)$.

Равносильность $v\imath) \Leftrightarrow \imath)$ следует из того, что $\imath v) \Leftrightarrow v\imath)$, $\imath\imath) \Leftrightarrow \imath v)$ и $\imath\imath) \Leftrightarrow \imath)$.
□

Следствие 1.5. Функция $f = f^* \in L^1(I)$ является регулярной, тогда и только тогда, когда регулярной является функция f^{**}.

Доказательство. То, что регулярна f^{**}, если регулярна f, очевидно. Докажем обратное. Обозначим $\psi^{**}(t) := \int_0^t f^{**} d\lambda$, $t \in I$, и отметим, что по теореме

1.4 *iv*) $f^{**} \in M_\psi$, поэтому найдётся $c > 0$, такое что $c^{-1}\|x\|_{M_\psi} \le \|x\|_{M_{\psi^{**}}} \le c\|x\|_{M_\psi}$ для всякого $x \in M_\psi$. Далее по монотонности нормы $\|\cdot\|_{M\ \psi}$, поскольку $f = f^* \le f^{**}$ и в силу леммы 1.3 и теоремы 1.4.v) для подходящих $k > 0$ и $p \in (0,1)$ получаем:

$$\|\rho_s\|_{M_\psi \to M_\psi} = \|\rho_s f\|_{M_\psi} \le \|\rho_s f^{**}\|_{M_\psi} \le c\|\rho_s f^{**}\|_{M_{\psi^{**}}} = c\|\rho_s\|_{M_{\psi^{**}} \to M_{\psi^{**}}} \le c{\cdot}ks^{-p},\ s \in I.$$

Теперь вновь применима теорема 1.4.v), согласно которой f регулярна.
$\square$

В [26],[34] рассматривался вопрос о связи свойств слабой регулярности и регулярности суммируемых функций на I.

Теорема 1.6.

1). Для любой функции $f \in L^1(I)$ и любого $\varepsilon > 0$ существует слабо регулярная функция $g \in L^1(I)$, такая что $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$ и при этом

$$g^*(t/2) \le (2+\varepsilon)\cdot g^*(t),\ t \in I.$$

2). Для функции $f = f^* \in L^1(I)$ существует эквивалентная ей функция $g = g^*$, такая что

$$g^*(t/2) \le 2\cdot g^*(t),\ t \in I,$$

тогда и только тогда, когда $f \simeq h^{**}$ для некоторой функции $h = h^* \in L^1(I)$.

3). Для функции $f \in L^1(I)$ существуют функция $g \in L^1(I)$ и $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < 2$, такие что $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$ и при этом

$$g^*(t/2) \le (2-\varepsilon)\cdot g^*(t),\ t \in I,$$

тогда и только тогда, когда $f^* \simeq f^{**}$, то есть когда f - регулярная функция.

Доказательство. Доказывем утверждение 1). Не умаляя общности, можно считать функцию f^* $\mathcal{D}$-измеримой: $f^*(t) = \sum_{n\ge1} a_n \cdot \mathbf{1}_{D_n}$.

Запишем f^* в виде $f^* = \sum_{n\ge0} b_n \cdot f_n$, где $f_n = \mathbf{1}_{(0,2^{-n}]}$, $n \ge 0$, зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $c = 2+\varepsilon$. Определим множество $\Phi(c) := \{g = g^* \in L^1(I) :\ g^*(t/2) \le c\cdot g^*(t),\ t \in I\}$ и отметим его следующие очевидные свойства:

a). $g_1, g_2 \in \Phi(c),\ \alpha_1, \alpha_2 > 0 \Rightarrow \alpha_1\cdot g_1 + \alpha_2\cdot g_2 \in \Phi(c)$;

b). Если последовательность $\{g_n\} \subset \Phi(c)$ и $g_n \uparrow x \in L^1(I)$, то $x \in \Phi(c)$.

Положим теперь $g_0 = 1$ и далее

$$g_n(t) := \begin{cases} 1, & \text{если } 0 < t \le 2^{-n}; \\ c^{k-n}, & \text{если } 2^{-k-1} < t \le 2^{-k} : k = 0,1,...,n-1, \end{cases} t \in (0,1],$$

$n = 1, 2, \ldots$ и определим $g := \sum_{n\geq 0} b_n \cdot g_n$. По построению $g_n \in \Phi(c)$, значит, согласно a) и b), $g \in \Phi(c)$. Кроме того, очевидные неравенства $f_n \leq g_n,\ n \geq 1$, влекут, что $f^* \leq g$, откуда следует включение $\mathcal{M}_f \subseteq \mathcal{M}_g$. Если теперь мы установим, что

$$\int_0^t g d\lambda \leq \frac{c-1}{c-2} \int_0^t f d\lambda,\ t \in I, \qquad ({}_1.3)$$

то будет доказано обратное включение и тем самым п.1) теоремы 1.6.

Поскольку для любого $t \in I$ выполняются равенства

$$\int_0^t g d\lambda = \sum_{n\geq 0} b_n \int_0^t g_n d\lambda;\ \int_0^t f d\lambda = \sum_{n\geq 0} b_n \int_0^t f_n d\lambda,$$

то (1.3) следует из неравенств

$$\int_0^t g_n d\lambda \leq \frac{c-1}{c-2} \int_0^t f_n d\lambda,\ n \geq 0,$$

к доказательству которых мы переходим.

По определению имеем

$$\int_0^t f_n d\lambda = \begin{cases} t, & \text{при } 0 < t \leq 2^{-n}; \\ 2^{-n}, & \text{при } 2^{-n} < t \leq 1. \end{cases}.$$

$$\int_0^t g_n d\lambda = \begin{cases} t & \text{при } 0 < t \leq 2^{-n}; \\ 2^{-n} + c^{-1}(t - 2^{-n}) & \text{при } 2^{-n} < t \leq 2^{-n+1}; \\ 2^{-n} + c^{-1}2^{-n} + c^{-2}(t - 2^{-n+1}) & \text{при } 2^{-n+1} < t \leq 2^{-n+2}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ 2^{-n} + c^{-1}2^{-n} + c^{-2}(t - 2^{-n+1}) + \ldots + c^{-n}(t - 2^{-1}) & \text{при } 2^{-1} < t \leq 1. \end{cases}.$$

Таким образом. $\int_0^t g_n d\lambda = \int_0^t f_n d\lambda$, если $0 < t \leq 2^{-n}$, и

$$\int_0^t g_n d\lambda = 2^{-n}[1 + c^{-1}(1 + 2/c + 2^2/c^2 + \ldots)] = 2^{-n}\frac{c-1}{c-2} = \frac{c-1}{c-2} \int_0^t f_n d\lambda,$$

где $2^{-n} < t \leq 1$. Утверждение 1) теоремы 1.6 доказано.

2). По лемме 0.1 для всякой функции $h \in L^1(I)$ выполняется неравенство $h^{**}(t/2) \leq 2h^{**}(t),\ t \in I$, откуда утверждение 2) следует в одну сторону. Обратно, пусть $f^* \simeq g^*$, где функция $g^* \in L^1(I)$ такая, что $g^*(t/2) \leq 2 \cdot g^*(t),\ t \in I$. Не умаляя общности, можно считать, что g^* $\mathcal{D}$-измеримая функция: $g^*(t) = \sum_{n\geq 1} a_n \cdot \mathbf{1}_{D_n} :\ D_n = (2^{-n}, 2^{-n+1}],\ 0 < a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_n \uparrow \infty,\ \sum_{n\geq 1} 2^{-n} a_n < \infty$. Неравенства $a_{m+n} \leq 2^m a_n$, справедливые для функции g^* при любых $m, n \geq 1$, гарантируют выполнение условия $t_0 g^*(t_0) \leq 4 t_1 g^*(t_1)$ при любых $0 < t_0 \leq t_1 \leq 1$.

Положим $\varphi(0) = 0,\ \varphi(t) = tg^*(t)$ при $0 < t \le 1$ и $\varphi(t) = tg^*(1)$ при $t > 1$. В силу предидущих неравенств для g^* функция φ квазивогнута на полуоси $[0,\infty)$ и эквивалентна там своей наименьшей вогнутой мажоранте

$$\tilde\varphi:\ 2^{-1}\tilde\varphi \le \varphi \le \tilde\varphi, \qquad ({}_1.4)$$

[20]. Так как $\lim_{t\to 0}\tilde\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} 2^{-n}a_n = 0$, то и $\lim_{t\to 0}\varphi(t) = 0$. Тогда вогнутая функция $\tilde\varphi$ на промежутке $[0,1]$ записывается в виде $\tilde\varphi(t) = \int_0^t h d\lambda$, где $h = h^* \in L^1(I,\Lambda,\lambda)$.. Теперь из $({}_1.4)$ выводим, что $f^*(t) \simeq g^*(t) \simeq \frac{\varphi(t)}{t} \simeq \frac{\tilde\varphi(t)}{t} = h^{**},\ t\in I$. Утверждение 2) теоремы 1.6 доказано.

3). Если обозначить $\psi(t) = tf^{**}(t),\ t\in I$, то по теореме 1.4 получим, что эквивалентность $f^*\simeq f^{**}$ равносильна выполнению условия $\liminf_{t\to 0}\frac{\psi(t)}{\psi(t/2)} > 1$, или, по другому, $\liminf_{t\to 0}\frac{f^{**}(t)t}{f^{**}(t/2)t/2} > 1,\ t\in I$. Заменяя при надобности f эквивалентной ей функцией и подбирая подходящее $0<\delta<1$, можно переписать последнее неравенство как $\frac{f^{**}(t)t}{f^{**}(t/2)t/2} > 1+\delta,\ t\in I$, т.е. $f^{**}(t/2) \le \frac{2}{1+\delta}f^{**}(t),\ t\in I$. Переобозначая константы, получаем: $f^{**}(t/2) \le 2(1-\varepsilon)f^{**}(t),\ t\in I,\ 0<\varepsilon<1$. Теорема 1.6 доказана полностью.
□

Следствие 1.7. Пусть f любая функция из $L^1(I)$. Для всякого $\gamma,\ 0<\gamma<1$, найдётся функция $g\in L^1(I)$, такая что $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_f$ и при этом функция $h := g^\gamma$ регулярна.

Доказательство. В соответствие с теоремой 1.6.1) подберём ε, такое что при некотором $\delta,\ 0<\delta<1$, справедливо неравенство $(2+\varepsilon)^\gamma < 2-\delta$. Тогда, если слабо регулярная функцию $g = g^* \in L^1(I)$ такова, что $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_f$ и $g(t/2) \le (2+\varepsilon)g(t),\ t\in I$, то, полагая $h = g^\gamma$, получим

$$h(t/2) = [g(t/2)]^\gamma \le (2+\varepsilon)^\gamma[g(t)]^\gamma < (2-\delta)h(t),\ t\in I,$$

и остаётся воспользоваться критерием 3) теоремы 1.6.

Теорема 1.8. Функция $f\in L^1(I)$ регулярна, тогда и только тогда, когда любая такая функция g, что $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_f$ слабо регулярна.

Доказательство. Пусть f регулярна. По теореме 1.4 равенство $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_f$ влечёт, что неравенства $\liminf_{t\to 0}\frac{\psi_g(2t)}{\psi_g(t)} > 1$ и $\liminf_{t\to 0}\frac{\psi_f(2t)}{\psi_f(t)} > 1$ могут выполняться лишь одновременно. Значит и g регулярна, а значит и слабо регулярна.

Для доказательства теоремы в обратную сторону рассмотрим дополнительную конструкцию.

Зафиксируем функцию $h = h^* \in L^1,\ \int_0^1 h d\lambda = 1$, положим $\psi_h(t) = \int_0^t h d\lambda,\ t\in I$, и для всякого $n\ge 1$ обозначим

$q_h(n)$:= *количество точек последовательности* $\{\psi_h(2^{-k})\}_{k\ge 1}$, *содержащихся в двоичном промежутке* $D_n = (2^{-n}, 2^{-n+1}]$.

Из вогнутости функции ψ_h следует, что $q_h(n) \geq 1,\ n \geq 1$. Очевидно, что из равенств $q_g(n) = q_h(n),\ n \geq 1$, для функций $g = g^* \in L^1(I)$ и $h = h^* \in L^1(I)$ следует, что $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_h$.

Лемма 1.9. Для любой последовательности $\{q_n\}_{n\geq 1}$ положительных целых чисел найдётся функция $g = g^* \in L^1(I, \Lambda, \lambda)$, такая что $q_n = q_g(n),\ n \geq 1$.

Доказательство. Допустим, что на каждом D_n построена система точек $\{u_i^n :\ 2^{-n} < u_{q_n}^n < ... < u_1^n \leq 2^{-n+1};\ n \geq 1\}$ таким образом, что при их линейной нумерации в порядке следования на I от точки 1 к точке 0 получается строго убывающая к нулю последовательность $\{v_k\}_{k\geq 0}$, причём

$$v_0 = 1,\ v_k - v_{k+1} \geq \frac{v_{k-1} - v_k}{2},\ k \geq 1. \qquad ({}_1.5)$$

Из $({}_1.5)$ следует, что $\mathcal{D}$-измеримая функция g, определённая равенством

$$g(t) := \sum_{k\geq 1} 2^k (v_{k-1} - v_k) 1_{D_k}(t),\ t \in I, \qquad ({}_1.6)$$

содержится в $L^1(I)$, неотрицательна и невозрастает на I. Кроме того, справедливы равенства

$$\int_0^{2^{-k}} g d\lambda = \sum_{i\geq k+1} 2^i 2^{-i} (v_{i-1} - v_i) = v_k,\ k \geq 1, \qquad ({}_1.7)$$

так что, если определить $\psi_g(0) = 0,\ \psi_g(t) = \int_0^t g d\lambda,\ t \in I$, и в качестве последовательности $\{q_n\}$ взять последовательность $\{q_{\psi_g}(n)\}$, то придём к равенству $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_f$.

Для построения по последовательности $\{q_n\} = \{q_f(n)\}$ системы точек $\{u_i^n\}$ введём следующую терминологию. Назовём двоичный полусегмент D_n *одноточечным*, если $q_n = 1$ и *многоточечным* в противном случае. Максимальный по включению элемент в множестве всех последовательностей вида $\{(D_n, D_{n+1}, ..., D_{n+l-1}) :\ q_n = q_{n+1} = q_{n+l-1} = 1,\ l \geq 1\}$ *назовём одноточечным блоком длины* l. Полусегмент D_{n-1} назовём *начальным* для этого блока. Рассмотрим теперь расстановку точек $\{u_i^n\}$ для следующих четырёх случаев.

$\mathcal{U}_1$. Для одноточечного блока $(D_1, D_2, ..., D_l)$ длины $l,\ 1 \leq l \leq \infty$ (если такой имеется) положим $u_i^n = 2^{-i+1},\ 1 \leq i \leq l$.

$\mathcal{U}_2$. Построим точки $\{u_i^n\}$ для многоточечного полусегмента D_n, не являющегося начальным. Положим $u_i^n = 2^{-n}(1 + 2^{-i+1}),\ 1 \leq i \leq q_n$.

$\mathcal{U}_3$. Если многоточечный полусегмент D_n является начальным для одноточечного блока $\{D_{n+1}, ..., D_{n+l-1}, ...\}$ бесконечной длины, то положим $u_i^n = 2^{-n}(1 + 2^{-i+1}),\ 1 \leq i \leq q_n$, и далее $u_i^{n+i} = u_{q_n}^n \cdot 2^{-i},\ i \geq 1$.

$\mathcal{U}_4$. Рассмотрим теперь полусегмент D_n, являющийся начальным для одноточечного блока конечной длины l. Расставим сперва единственные точки на каждом из полусегментов этого блока: $u_1^{n+i} = 2^{-n-i}(1+2^{-l+i-1}),\ i = 1,...,l$. Укажем теперь расстановку точек на D_n в зависимости от соотношения между l и q_n.

$$u_i^n = \begin{cases} \text{если } q_n < l+3, \text{ то } 2^{-n}(1+2^{-i+1}) \text{ при } i = 1,2,...,q_n - 1 \text{ и } 2^{-n}(1+2^{-l-1}) \text{ при } i = q_n; \\ \\ \text{если } \ q_n \geq l+3, \text{ то } 2^{-n}(1+2^{-i+1}), \text{ при } i = 1,2,...,q_n. \end{cases} .$$

Очевидно, что множество $\mathcal{U} = \bigcup\{u_i^n\}$ полностью определено правилами расстановки $\mathcal{U}_1 - \mathcal{U}_4$. Последовательность точек $\{v_n\}$, полученная как было показано выше из точек $\mathcal{U}$ путём их линейной перенумерации, очевидно, строго убывает к нулю, $v_0 = 1$. Выполнение неравенств $({}_1.5)$ легко проверяется.
□

Лемма 1.10 Для того чтобы $\mathcal{D}$-измеримая функция $f = f^*$ была регулярной, необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{q_{\psi_f}(n)\}$ была ограниченной.

Доказательство. Достаточность. Предположим, что найдётся целое d, такое что $\{q_{\psi_f}(n)\} \leq d,\ n \geq 1$. Для произвольного $t \in (0, 2^{-1}]$ выберем $k \geq 1$, такое что $2^{-k-1} < t \leq 2^{-k}$. Пусть $v_{k-1} \in D_n$. По построению $v_{k-1} - v_k \geq 2^{-n-q_{\psi_f}(n)}$. С другой стороны по $({}_1.6)$ $f(2t) = f(2^{-k+1}) = 2^k(v_{k-1} - v_k)$, откуда по $({}_1.7)$

$$\psi(t) \leq \psi(2^{-k}) = v_k < v_{k-1} \leq 2^{-n+1} \leq 2^{q_{\psi_f}(n)+1}(v_{k-1} - v_k) = 2^{q_{\psi_f}(n)+1} 2^{-k} f(2t) \leq 2^{d+2} t f(2t);$$

$$\frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1 + \frac{\int_t^{2t} f d\lambda}{\psi(t)} \geq 1 + \frac{t f(2t)}{\psi(t)} \geq 2^{-d-2},$$

то есть $\liminf \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} > 1$, и тем самым f регулярна.

Докажем необходимость. Допустим, что $\lim_{k\to\infty} q_{\psi_f}(n_k) = \infty$. По построению имеем:

$$u^{n_k}_{q_{\psi_f}(n_k)-1} - u^{n_k}_{q_{\psi_f}(n_k)} \leq 2^{-n_k} 2^{-q_{\psi_f}(n_k)+2};\ u^{n_k}_{q_{\psi_f}(n_k)} > 2^{-n_k};\ u^{n_k}_{q_{\psi_f}(n_k)} - u_1^{n_k+1} \geq 2^{-n_k+3}. \qquad ({}_1.8)$$

Обозначим $u^{n_k}_{q_{\psi_f}(n_k)} = v_{m_k}$; $u^{n_k}_{q_{\psi_f}(n_k)-1} = v_{m_k-1}$. Из $({}_1.8)$ получаем:

$$\frac{\psi(2\cdot 2^{-m_k})}{\psi(2^{-m_k})} = \frac{v_{m_k-1}}{v_{m_k}} = 1 + \frac{v_{m_k-1} - v_{m_k}}{v_{m_k}} \leq 1 + 2^{-q_{\psi_f}(n_k)+2},$$

откуда $\liminf \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$, то есть по теореме 1.4 f регулярной быть не может.
□

Следствие 1.11. Ввиду ($_0$.4) условие $\mathcal{D}$-измеримости в лемме 1.10 может быть опущено.

Закончим доказательство теоремы 1.8. Напомним, что в предположении $\lim \frac{\psi(2t)}{\psi(t)} = 1$ нужно найти функцию $h = h^* \in L^1(I, \Lambda, \lambda)$, не являющуюся слабо регулярной и такую что $\mathcal{M}_h = \mathcal{M}_f$, где $\psi(t)$ вогнутая функция из доказательства предыдущей леммы, $f(t) = \frac{d\psi}{dt}$. Покажем, что в качестве такой функции может быть взята сама функция f.

В обозначениях доказательства необходимости в предыдущей лемме из неравенств ($_1$.8) для функции $f = f^*$ получаем:

$$\frac{f(2^{-m_k})2^{-m_k-1}}{f(2^{-m_k}+1)2^{-m_k}} = \frac{v_{m_k} - v_{m_k+1}}{v_{m_k-1} - v_{m_k}} \geq \frac{2^{-n_k-3}}{2^{-n_k}2^{-q_{\psi_f}(n_k)+2}}.$$

Тем самым $\frac{f(2^{-m_k})}{f(2^{-m_k+1})} \geq 2^{q_{\psi_f}(n_k)-5}$ и, поскольку в силу леммы 1.11 $\limsup_{k\to\infty} q_{\psi_f}(n_k) = \infty$, то f не может быть слабо регулярной. Теорема 1.8 доказана полностью.

□

Замечание 1.12. 1). Регулярность функции f есть топологический инвариант банахова пространства Марцинкевича M_f. Иными словами, если для двух функций f и g справедливо равенство $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$ и при этом f регулярна, то и g регулярна.
2). Поскольку равенство $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_g$ влечёт равенство $\mathcal{M}_f = \mathcal{M}_g$, то, применив теорему 1.6.3), получим, что если для двух функций f и g порождаемые ими с.и. совпадают и при этом одна из них регулярна, то регулярна и другая.

Следующий результат о регулярности сформулирован в терминах операторов усреднения по интервальным разбиениям.

Теорема 1.13 (ср. с теоремой 5.12). Пусть $f = f^* \in L^1$, $\mathcal{B} = (b_n)$ - некоторое и.р. Следующие условия равносильны.

1). f регулярна и $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B})}$;

2). Функция $E(f|\mathcal{B})$ регулярна.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2) прямо вытекает из замечания 1.12.2).

Доказываем 2) $\Rightarrow$ 1). Обозначим $g := E(f|\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{M}_f$. Предположим сначала, что $f^{**} \in \mathcal{N}_g$. Тогда $f^{**} \in \mathcal{M}_g \subseteq \mathcal{M}_f$, откуда по теореме 1.4 следует регулярность f.

Допустим теперь, что $f^{**} \notin \mathcal{N}_g$. Запишем g в виде $g = \sum_{n\geq 1} \alpha_n 1_{(b_n, b_{n-1}]}$, где $\alpha_n = \frac{\int_{b_n}^{b_{n-1}} f d\lambda}{b_{n-1} - b_n}$, $n \geq 1$. Согласно допущению, найдётся последовательность

$\{n_k\}_{k\geq 0},\ n_0=0$, такая что $b_{n_k}\downarrow 0$ и

$$\frac{f^{**}(b_{n_k})}{g(b_{n_k})}\geq 2^k,\ \text{или}\ \frac{f^{**}(s_k)}{g(s_k)}\geq 2^k,\ k\geq 0. \qquad ({}_1.9)$$

где мы, упрощая обозначения, положили $b_{n_k}:=s_k,\ k\geq 0$. Будем считать, не умаляя общности, что $s_1<2^{-1}$. Пользуясь неравенствами $({}_1.9)$, построим по индукции последовательность $\{k_m\}$ натуральных чисел, такую что для и.р. $\mathcal{U},\ \mathcal{U}=(u_m)$, где $u_0=1,\ u_m=s_{k_m},\ m\geq 1$, справедливо соотношение $E(f|\mathcal{U})\notin\mathcal{N}_g$. Так как по определению $\mathcal{U}$ крупнее $\mathcal{B}$, то получаем $E(f|\mathcal{U})=E(g|\mathcal{U})\in\mathcal{M}_g$, и, поскольку g регулярна, то $\mathcal{M}_g=\mathcal{N}_g$, - противоречие.

Положим $k_1=1$ и пусть для $m\geq 1$ натуральное число k_m уже построено. На промежутке $[0,u_m)$ рассмотрим функцию $\Phi,\ \Phi(u):=\frac{(u_m-u)^{-1}\int_u^{u_m}fd\lambda}{g(u_m)}$. Очевидно, что Φ невозрастает и непрерывна на $[0,u_m)$, а по $({}_1.9)$ $\Phi(0)\geq 2^{k_m}$. Выберем число k_{m+1} настолько большим, чтобы выполнялись неравенства $k_{m+1}>k_m,\ \Phi(s_{k_{m+1}})>2^{k_m}-1$.

Теперь, когда последовательность $\{k_m\}_{m\geq 1}$ построена, положим $v_m=\min[2u_m,\tau_m]$, где τ_m - ближайшая справа от u_m точка разбиения $\mathcal{B},\ m\geq 1$.
Пусть $h=h^*=E(g|\mathcal{U})$. Для монотонных функций g и h по построению выполняются неравенства

$$\frac{h(v_m/2)}{g(v_m)}\geq 2^{k_m}-1,\ m\geq 1.$$

Следовательно, $h(\frac{t}{2})\notin\mathcal{N}_g$, значит и $h\notin\mathcal{N}_g$, вопреки теореме 1.4.

Значит $f^{**}\in\mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B})}$, что, как показано выше, влечёт регулярность f. Теперь, поскольку $f^{**}\simeq f$, получаем равенство $\mathcal{N}_f=\mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B})}$.
$\square$

Замечание 1.14. 1. Отметим, что для любой неограниченной функции $f=f^*\in L^1(I)$ найдётся разбиение $\mathcal{B}$, такое что функция $E(f|\mathcal{B})$ не является не только регулярной, но даже слабо регулярной.
2. Из замечания 1.12.2) видно, что аналогичное теореме 1.13 утверждение верно не только для главных с.и., но и для главных м.и. А именно справедлива

Теорема 1.13.′ Пусть $f=f^*\in L^1,\ \mathcal{B}=(b_n)$ - некоторое и.р. Следующие условия равносильны.

1). f регулярна и $\mathcal{M}_f=\mathcal{M}_{E(f|\mathcal{B})}$;

2). Функция $E(f|\mathcal{B})$ регулярна.

Функция $f,\ f\in L^1(I)$, называется *функцией ограниченной вариации на I*

$\Big($обозначение : $f \in BMO(I)\Big)$, если

$$||f||_{BMO(I)} := \sup_{[a,b]\subseteq I} |\frac{1}{b-a}\int_a^b f(s) - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(u)du|ds < \infty.$$

Теорема 1.15. Для функции $g = g^* \in L^1(I)$ следующие условия равносильны.

$(\imath)$ $g \in BMO(I)$;

$(\imath\imath)$ $g^{**}(t) - g(t) \le C,\ t \in I$, где $0 < C$ - константа ;

$(\imath\imath\imath)$ $g(\frac{t}{2}) - g(t) \le K,\ t \in I$, где $0 < K$ - константа ;

$(\imath v)$ $g(t) = \log_2 f(t),\ t \in I$, где $f = f^* \in L^1(I)$ слабо регулярная функция.

Доказательство. Равносильность $(\imath)$ и $(\imath\imath)$ доказана в [19]. Для доказательства импликации $(\imath\imath) \Rightarrow (\imath\imath\imath)$ нам понадобится следующее утверждение, являющееся вариантом *закона медиан*, хорошо известного в математической статистике. Его доказательство, которое мы опускаем, легко усматривается из сравнения площадей соответствующих подграфиков.

Лемма 1.16. Пусть $g = g^* \in L^1(I)$. Для каждого $t \in I$ выполняется неравенство

$$\min_a \int_0^t |g(s) - a|ds = \int_0^t |g(s) - g(\frac{t}{2})|ds.$$

Пусть выполнено утверждение $(\imath\imath)$. Тогда $\|g(t)\|_{BMO} < \infty$ в силу $\imath)$, так что, пользуясь определением класса $BMO(I)$ и леммой 1.16, для любого $t \in I$ имеем

$$|g^{**}(t) - g(\frac{t}{2})| = |\frac{1}{t}\int_0^t [g(s) - g(\frac{t}{2})]ds| \le \frac{1}{t}\int_0^t |g(s) - g(\frac{t}{2})|ds \le$$

$$\frac{1}{t}\int_0^t |g(s) - \frac{1}{t}\int_0^t g(u)du|ds \le \|g(t)\|_{BMO}.$$

Отсюда, применяя неравенство треугольника, получаем импликацию $(\imath\imath) \Rightarrow (\imath\imath\imath)$. Далее, если положить $f = \exp_2 g$, то с учётом уже доказанных импликаций получим импликацию $(\imath\imath\imath) \Rightarrow (\imath v)$. Остаётся доказать, что из $(\imath v)$ следует $(\imath\imath)$. В силу $({}_0.4)$ можно считать, что $f := \sum_{n\ge1} \alpha_n \cdot 1_{D_n}$, где $D_n = [2^{-n}, 2^{-n+1})$ и $1 \le \alpha_1 \le ... \le \alpha_n \le \alpha_{n+1} \le Q \cdot \alpha_n,\ n \ge 1,\ Q > 1$.

Положим $\beta_n = \log_2\ \alpha_n,\ n \ge 1;\ g = \sum_{n\ge1} \beta_n \cdot 1_{D_n}$. Для каждого $n \ge 1$ имеет место неравенство $\beta_{n+1} \le \tilde{Q} + \beta_n$, где $\tilde{Q} = \log_2\ Q > 0$, откуда получаем

$$g^{**}(2^{-n}) = \sum_{k\ge n+1} \beta_k \cdot 2^{-k} \le \sum_{k\ge1} \beta_n \cdot 2^{-k} + \tilde{Q} \cdot \sum_{k\ge1} k \cdot 2^{-k} = \beta_n + C = g(2^{-n}) + C,\ n \ge 1$$

где $C = \tilde{Q} \cdot \sum_{k\ge1} k \cdot 2^{-k} < \infty$.

Теперь для каждого $t \in D_n$ имеем: $g^{**}(t) \leq g^{**}(2^{-n}) \leq g(2^{-n}) + C = g(t) + C$.
□

Следствие 1.17. Для каждого $g = g^* \in BMO(I)$ при подходящих положительных константах C_1 и C_2 выполняется неравенство

$$g(t) \leq C_1 - C_2 \cdot \ \ln\ t,\ t \in I.$$

Доказательство. Пусть $g(t) = \log_2\ f(t)$, где $f = f^* \in L^1,\ f(\frac{t}{2}) \leq Q \cdot f(t),\ t \in I$. Не умаляя общности, можно предполагать, что $f(1) = 1$, т.е. $g(1) = 0$. Выберем число $\gamma,\ 0 < \gamma < 1$, такое что $Q^\gamma < 2$ и положим $h = f^\gamma$. Так как $h(\frac{t}{2}) \leq Q^\gamma \cdot h(t),\ t \in I$, то по теореме 1.6 мы получаем, что h регулярная функция. Значит для подходящей константы $K > 1$ выполняется неравенство

$$\frac{h(t)}{\int_0^t h d\lambda} \geq \frac{1}{K \cdot t},\ t \in I.$$

Интегрируя это неравенство по t от s до 1, где s произвольное число, $s \in I$, получим

$$\ln\ s^{-\frac{1}{K}} \leq \ln\ \frac{\int_0^1 hdt}{\int_0^s hdt}\ ,$$

откуда $s \cdot h^{**}(s) = \int_0^s hd\lambda \leq (\int_0^1 hd\lambda) \cdot s^{\frac{1}{K}}$. Тем самым $f^\gamma(s) = h(s) \leq h^{**}(s) \leq (\int_0^1 hd\lambda) \cdot s^{(\frac{1}{K}-1)}$. Остаётся прологарифмировать полученное неравенство и переобозначить константы.
□

Теорема 1.18. Для любой регулярной функции $f = f^* \in L^1(I)$ найдётся показатель $\delta = \delta(f),\ 0 < \delta < 1$, такой что при подходящей константе $C > 0$ справедливы неравенства $f^{**}(t) \leq Ct^{-\delta},\ t \in I$.

Доказательство. Пусть $f^{**} \leq Kf^*,\ K \geq 1$. Не умаляя общности, будем считать, что f не равна константе, т.е., что $K > 1$. Имеем:

$$f^*(t)[\int_0^t fd\lambda]^{-1} \geq [Kt]^{-1},\ t \in I.$$

Интегрируя это неравенство по промежутку $[r, 1]$, где r - любое число из I, получим

$$\int_r^1 \frac{f^*(t)}{\int_0^t f^* d\lambda} d\lambda \geq K^{-1} \int_r^1 \frac{dt}{t} = \ln[(\frac{1}{r})^{\frac{1}{K}}].$$

Записывая левую часть в виде

$$\int_r^1 \frac{d\int_0^t f^* d\lambda}{\int_0^t f^* d\lambda} = \ln \frac{\int_0^1 f^* d\lambda}{\int_0^r f^* d\lambda},$$

получим, что

$$\frac{\int_0^1 f^* d\lambda}{\int_0^r f^* d\lambda} \geq (\frac{1}{r})^{\frac{1}{K}}.$$

Отсюда $f^{**}(r) \le Cr^{-\delta}$, где $C = \int_0^1 f^* d\lambda,\ \delta = 1 - \frac{1}{K}$.
$\square$

§2. Две абсолютные константы для перекладывания отрезков. [30]

Вычислены две абсолютные константы для перекладывания на I счётного семейства отрезков в порядке невозрастания их длин от 1 к 0.

Пусть $\vec{a}$ - любой с.в. и пусть и.р. $\mathcal{B} = (b_n)$ и его монотонная перестановка $\mathcal{B}^* = (b_n^*)$ принадлежат стохастическим векторам $\vec{a}$ и $\vec{a}^*$, соответственно.

Теорема 2.1.. "Золотое сечение"$\alpha := \frac{5^{1/2}+1}{2}$ является наименьшей из всех констант $\delta > 1$, удовлетворяющих следующему условию.

$$\begin{cases} \text{Для любого целого } n \geq 1 \text{ найдётся целое } m \geq 0, \text{ такое что} \\ \delta^{-1} \cdot b_m^* < b_n < \delta \cdot b_m^*. \end{cases} \qquad ({}_2.1)$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что для α выполнено равенство

$$\alpha - \alpha^{-1} = 1. \qquad ({}_2.2)$$

Предположим теперь, что "золотое сечение"α не удовлетворяет условию $({}_2.1)$ и пусть $\vec{a} = (a_n)$ - тот стохастический вектор, на котором при $\delta = \alpha$ это условие нарушается. Из этого предположения, поскольку неравенства в $({}_2.1)$ можно записать как $|\log_\alpha b_n - \log_\alpha b_m^*| < 1$, следует, что найдётся такое целое $N > 0$, что для любого целого $m \geq 0$ справедливо неравенство

$$|\log_\alpha b_N - \log_\alpha b_m^*| \geq 1. \qquad ({}_2.3)$$

Зафиксируем целое $m \geq 0$, такое что

$$b_{m+1}^* < b_N \leq b_m^*. \qquad ({}_2.4)$$

В силу $({}_2.3)$ $\alpha b_{m+1}^* \leq b_N \leq \alpha^{-1} b_m^*$, что вместе с $({}_2.2)$ даёт $a_{m+1}^* = b_m^* - b_{m+1}^* \geq \alpha b_N - \alpha^{-1} b_N = b_N$. Отсюда, а также из монотонности стохастического вектора $\vec{\alpha}$ и из расположения точек и.р. $\mathcal{B}$ на I получаем неравенства

$$a_1^* \geq a_2^* \geq ... \geq a_{m+1}^* \geq b_N > a_{N+j}, \ j \geq 1. \qquad ({}_2.5)$$

Обозначим через γ такую биекцию натурального ряда, что

$$a_n^* = a_{\gamma(n)}, \ n \geq 1. \qquad ({}_2.6)$$

Из $({}_2.5)$ и $({}_2.6)$ следует, что при любых $i = 1, ..., m+1$, и любых целых $j \geq 1$ справедливо: $a_{\gamma(i)} = a_i^* \neq a_{N+j}$. Иными словами

$$\gamma(i) \neq N + j, \ i = 1, ..., m+1; \ j \geq 1. \qquad ({}_2.7)$$

Наконец, из $({}_2.7)$ выводим, что $\gamma(i) \leq N, \ i = 1, ..., m+1$. Отсюда сразу получаем противоречие с $({}_2.4)$: $1 - b_{m+1}^* = 1 - b_1^* + b_1^* - b_2^* ... + b_m^* - b_{m+1}^* = a_1^* + ... + a_{m+1}^* = a_{\gamma(1)} + ... + a_{\gamma(m+1)} \leq a_1 + ... + a_N = 1 - b_1 + b_1 - b_2 + ... + b_{N-1} - b_N = 1 - b_N$.

Итак, α удовлетворяет условию $({}_2.1)$. Покажем, что для любого $\delta\ :\ \ 1 \le \delta < \alpha$, найдётся стохастический вектор $\vec{a}$, для которого это условие не выполняется.

Зафиксируем $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \min[\frac{\alpha-1}{\delta} + \alpha - 2, 10^{-1}]$, и рассмотрим стохастический вектор с координатами $a_1 = 2 - \alpha, a_2 = \alpha - 1 - \varepsilon, a_n = \varepsilon \cdot 2^{-n+2},\ n \ge 3$. Простым подсчётом легко убедиться в том, что $a_2 > a_1 > a_3 > a_4 > ...$; отсюда $a_1^* = \alpha - 1 - \varepsilon, a_2^* = 2 - \alpha, a_n^* = a_n,\ n \ge 3$. Теперь в силу $({}_2.2)$ имеем: $\delta^{-1}b_0^* = \delta^{-1} > \alpha^{-1} = \alpha - 1 = b_1 = \delta\cdot(\frac{\alpha-1}{\delta} + \alpha - 2 + 2 - \alpha) > \delta\cdot(2 - \alpha + \varepsilon) = \delta\cdot b_1^*$.

Таким образом $\delta^{-1}b_0^* > b_1 > \delta b_1^* > \delta b_2^* > ... > \delta b_n^* > ...$, и ни для какого целого $m \ge 0$ двойное неравенство $\delta^{-1}b_m^* < b_1 < \delta b_m^*$ не выполняется.
$\square$

Пусть $\vec{a},\ \vec{a}^*,\ \mathcal{B} = (b_n),\ \mathcal{B}^* = (b_n^*)$ обозначают то же, что и выше. Для функции $f = f^* \in L^1(I)$ введём в рассмотрение три М-функции: $\psi(t) = \int_0^t f d\lambda;\ \psi_{\mathcal{B}}(t) = \int_0^t E(f|\mathcal{B})d\lambda,\ \psi_{\mathcal{B}^*}(t) = \int_0^t E(f|\mathcal{B}^*)d\lambda,\ t \in I.$

Отметим, что если $\delta \ge \alpha$, то из теоремы 2.1 легко вытекает справедливость неравенства
$$\psi_{\mathcal{B}}(t) \le \delta \cdot \psi_{\mathcal{B}^*}(t),\ t \in I. \qquad ({}_2.8)$$
Поэтому, если задаться вопросом о наименьшей константе в $({}_2.8)$, то естественно предположить, что она равна α. Тем любопытнее следующая

Теорема 2.2. Наименьшей из всех констант $\delta > 1$, удовлетворяющих $({}_2.8)$, является число $\beta := 4/3 < \alpha$.

Доказательство. Покажем, что константа β удовлетворяет условию $({}_2.8)$. Сначала докажем, что если для числа 4/3 выполняются неравенства
$$\psi_{\mathcal{B}}(b_n) \le 4/3 \cdot \psi_{\mathcal{B}^*}(b_n),\ n \ge 0, \qquad ({}_2.9)$$
то выполняется условие $({}_2.8)$ с β вместо δ.

Обозначим $\varphi(t) := 4/3 \cdot \psi_{\mathcal{B}^*}(b_n),\ b_n < t \le b_{n-1},\ n \ge 1$. Из того, что $\varphi(b_n) = 4/3 \cdot \psi_{\mathcal{B}^*}(b_n),\ n \ge 0$, следует, что график вогнутой функции $4/3 \cdot \psi_{\mathcal{B}^*}(t)$, соединяющий точки $(b_n, \varphi(b_n))$, должен лежать не ниже графика неубывающей функции $\varphi(t)$, являющегося ломаной, соединяющей те же точки. Иными словами. $\varphi(t) \le 4/3 \cdot \psi_{\mathcal{B}^*}(t),\ t \in I$. Поэтому, если выполняется $({}_2.9)$, то для всякого $t \in (b_{n+1}, b_n],\ n \ge 0$, имеем
$$\psi_{\mathcal{B}}(t) = \frac{t - b_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}\psi(b_n) + \frac{b_n - t}{b_n - b_{n+1}}\psi(b_{n+1}) \le 4/3\frac{t - b_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}\psi_{\mathcal{B}^*}(b_n) +$$
$$+ 4/3\frac{b_n - t}{b_n - b_{n+1}}\psi_{\mathcal{B}^*}(b_{n+1}) = \frac{t - b_{n+1}}{b_n - b_{n+1}}\varphi(b_n) + \frac{b_n - t}{b_n - b_{n+1}}\varphi(b_{n+1}) = \varphi(t) \le 4/3 \cdot \psi_{\mathcal{B}^*}(t).$$

Итак, доказываем ($_2$.9). Зафиксируем целое $N \geq 0$. Если $b_N = b_m^*$ при некотором $m \geq 0$, то

$$\psi_{\mathcal{B}}(b_N) = \psi(b_N) = \psi(b_m^*) = \psi_{\mathcal{B}^*}(b_m^*) \leq 4/3\psi_{\mathcal{B}^*}(b_m^*) = 4/3\psi_{\mathcal{B}^*}(b_N).$$

Пусть теперь $b_N \neq b_m^*$ ни при каком целом $m \geq 0$. Зафиксируем такое $m \geq 0$, что $b_{m+1}^* < b_N < b_m^*$, и переобозначим: $d = b_{m+1}^*,\ b = b_m^*,\ w = b_N$.

Нам понадобятся следующие три леммы.

Лемма 2.3. Если числа $u > 0$ и $v > 0$ таковы, что $u^{-1}+v^{-1} < 4$, то $u+v > 1$.

Доказаельство. Допустим, что $u + v \leq 1$. Тогда $(u + v)(u^{-1} + v^{-1}) = 1 + uv^{-1} + vu^{-1} + 1 < 4 \Leftrightarrow uv^{-1} + vu^{-1} < 2$. Если обозначить $a := uv^{-1}$, то $vu^{-1} = a^{-1}$, и мы получили бы $a + a^{-1} < 2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 < 0 \Leftrightarrow (a-1)^2 < 0$, что невозможно.
□

Лемма 2.4. Справедливы неравенства

$$w[(w-d)^{-1} + (b-w)^{-1}] \geq 4. \qquad ({}_2.10)$$

Доказательство. Допустим противное: $[\frac{w-d}{w}]^{-1} + [\frac{b-w}{w}]^{-1} < 4$. Тогда по лемме 2.3 имеем $\frac{b-d}{w} = \frac{b-w}{w} + \frac{w-d}{w} > 1$. Отсюда получаем

$$a_1^* \geq a_2^* \geq ... \geq a_{m+1}^* = b - d > w = b_N > a_{N+j},\ j \geq 1,$$

т.е. справедливы неравенства ($_2$.5). Из них, как и при доказательстве теоремы 2.1, выводим противоречие с неравенством $b_N > b_{m+1}^*$.
□

Лемма 2.5. Неравенство ($_2$.10) влечёт неравенство

$$w[\frac{w-d}{b-d}w + \frac{b-w}{b-d}d]^{-1} \leq \frac{4}{3} \qquad ({}_2.11)$$

Доказательство. Преобразуем ($_2$.10) равносильно:

$$w[(w-d)^{-1}+(b-w)^{-1}] \geq 4 \Leftrightarrow \frac{w}{w-d}+\frac{w}{b-w} \geq 4 \Leftrightarrow w(w-d+b-w) \geq 4(w-d)(b-w) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow w(b-d) \geq 4(w-d)(b-w) \Leftrightarrow 3(w-d)(b-w) \leq \frac{3}{4}w(b-d).$$

Преобразуем равносильно ($_2$.11):

$$w[\frac{w-d}{b-d}w + \frac{b-w}{b-d}d]^{-1} \leq \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}w(b-d) \leq (w-d)w + (b-w)d.$$

Таким образом ($_2$.10) влечёт ($_2$.11), если

$$3(w-d)(b-w) \leq (w-d)w+(b-w)d \Leftrightarrow \frac{w}{b-w}+\frac{d}{w-d} \geq 3 \Leftrightarrow \frac{w}{b-w}+\frac{d}{w-d}+\frac{w-d}{w-d} \geq 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{w}{b-w} + \frac{w}{w-d} \geq 4.$$

Последнее как раз и означает выполнение неравенства ($_2$.10).
$\square$

Вместе с соотношениями $\psi(b) \geq \psi(w)$, $\frac{\psi(d)}{d} \geq \frac{\psi(w)}{w}$, выполняющимся для функции $\psi(t)$, $t \in (0,1]$, неравенство ($_2$.11) даёт

$$\frac{\psi_{\mathcal{B}}(w)}{\psi_{\mathcal{B}^*}(w)} = \frac{\psi(w)}{\frac{w-d}{b-d}\psi(b) - \frac{b-w}{b-d}\psi(d)} \leq \frac{\psi(w)}{\frac{w-d}{b-d}\psi(w) - \frac{b-w}{b-d}\frac{d}{w}\psi(w)} =$$

$$= w[\frac{w-d}{b-d}w + \frac{b-w}{b-d}d]^{-1} \leq \frac{4}{3}.$$

Итак, показано, что условие ($_2$.8) выполняется, если заменить в нём δ на β. Покажем, что для любого γ, $1 \leq \gamma < \beta$, найдутся и.р. $\mathcal{B} = (b_n)$ и $M-$функция ψ, для которых при некоторых $t \in (0,1]$ и $\delta = \gamma$ неравенство ($_2$.8) не выполняется.

Определим функцию $\varphi(t)$, $\varphi(t) = t \cdot 1_{[0,2/3]}(t) + 2/3 \cdot 1_{[2/3,1]}(t)$, $t \in (0,1]$. Зафиксируем ε, $0 < \varepsilon < \min[1/3, (8-6\gamma)(6-3\gamma)]$, и положим $b_0 = 1$, $b_1 = 2/3$, $b_n = \varepsilon \cdot 2^{-n}$, $n \geq 2$. Тогда $\varphi_{\mathcal{B}} = \varphi$, причём простым подсчётом устанавливаем, что $b_0^* = 1$, $b_1^* = \varepsilon/2 + 1/3$, $b_n^* = b_n$, $n \geq 2$; $\frac{\varphi_{\mathcal{B}}(2/3)}{\varphi_{\mathcal{B}^*}(2/3)} = \frac{(8-6\varepsilon)}{(6-3\varepsilon)} > \gamma$.

Полагая $\psi = 3/2 \cdot \varphi$, получим искомые и.р. $\mathcal{B} = (b_n)$, $M-$функцию ψ и точку $t = 2/3$.
$\square$

§3. Бистохастические проекторы и интерполяция идеалов между L^1 и L^∞ [13], [14], [17]

Доказано, что усредняемость векторного идеала по счётным разбиениям гарантирует его мажорантность.

Предложение 3.1. Если векторный идеал X, $X \subseteq L^1(I)$, усредняется любым не более, чем счётным разбиением, то идеал X симметричный.

Доказательство. 1). Нужно доказать импликацию

$$x \in X,\ y \text{ равноизмерима с } x \Rightarrow y \in X. \tag{$_3$.1}$$

Не умаляя общности, можно считать, что $x, y \geq \mathbf{0}$. Более того, обе функции x и y можно считать элементарными. Действительно, для любых x и y найдутся такие элементарные функции x_1 и y_1, что

$$\mathbf{0} \leq x_1 \leq x \leq x_1 + \mathbf{1},\ \mathbf{0} \leq y_1 \leq y \leq y_1 + \mathbf{1}, \tag{$_3$.2}$$

так что, если для элементарных функций импликация ($_3$.1) справедлива, то из ($_3$.2) следует, что она справедлмва и для любых функций x и y.

2). Если элементарная функция $x \in X$ измерима относительно конечного разбиения: $x = \sum_{i=1}^n r_i \cdot 1_{B_i},\ y = \sum_{i=1}^n r_i \cdot 1_{C_i};\ C_i, B_i \in \Lambda,\ \lambda(C_i) = \lambda(B_i);\ i = 1, ..., n$, то $x, y \leq \bar{r} \cdot \mathbf{1} \in X$, где $\bar{r} := \max_{i=1}^n r_i$, и тем самым $y \in X$.

3). Пусть $x = \sum_{i=1}^\infty r_i \cdot 1_{B_i}$, где $\sigma(B_i,\ i \geq 1)$ счётное бесконечное разбиение отрезка I, и пусть y - равноизмеримая с x функция из $L^1(I)$, $y = \sum_{i=1}^\infty r_i \cdot 1_{C_i}$, где $0 < \lambda(C_i) = \lambda(B_i),\ 1 \leq i < \infty$.

Предположим сначала, что далёкие множества B_i и C_j не пересекаются, т.е. найдётся номер n_0, такой что $\lambda(B_i \cap C_j) = 0$ при $i, j \geq n_0$. По п.2) достаточно показать, что функция

$$\bar{y}(t) := \begin{cases} \sum_{i \geq n_0} r_i \cdot 1_{C_i}(t), & \text{если } t \in \bigcup_{i \geq n_0} C_i; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}.$$

содержится в X, причём известно, что в X содержится функция

$$\bar{x}(t) := \begin{cases} \sum_{i \geq n_0} r_i \cdot 1_{B_i}(t), & \text{если } t \in \bigcup_{i \geq n_0} B_i; \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}.$$

Заметим, что $\bar{x}(t) = 0$ при $t \in C_i,\ i \geq n_0$.

Рассмотрим разбиение $\mathcal{F} := \sigma\Big(F_0, F_i;\ i \geq n_0\Big)$, где $F_i := B_i \cup C_i,\ i \geq n_0,\ F_0 := I \setminus \bigcup_{i \geq n_0} F_i$. По условию $E(\bar{x}|\mathcal{F}) \in X$; с другой стороны для всякого $t \in F_i,\ i \geq n_0$, справедливо равенство

$$E(\bar{x}|\mathcal{F})(t) = \frac{1}{\lambda(F_i)} \int_{F_i} \bar{x} d\lambda = \frac{1}{2\lambda(B_i)} \int_{B_i \cup C_i} \bar{x} d\lambda = \frac{1}{2\lambda(B_i)} \int_{B_i} \bar{x} d\lambda = \frac{r_i}{2}.$$

Если же $t \in F_0$, то $E(\bar{x}|\mathcal{F})(t) = 0$. Итак, $\mathbf{0} \le \bar{y} \le 2E(\bar{x}|\mathcal{F})$, откуда $\bar{y} \in X$.

4). Рассмотрим общий случай. Обозначим опять $F_i := B_i \cup C_i, \ i \ge 1$. Так как $\lambda(\bigcup_{i\ge j} F_i) \le \sum_{i\ge j}[\lambda(B_i) + \lambda(C_i)] = 2\sum_{i\ge j}\lambda(B_i) \downarrow_{j\to\infty} 0$, то найдётся номер n_0 такой, что $\lambda(\bigcup_{i\ge n_0} F_i) < \frac{1}{2}$.
По 1-му принципу непрерывности Ляпунова в множестве $I \setminus \bigcup_{i\ge n_0} F_i$ найдутся попарно дизъюнктные подмножества $B_i', \ i \ge n_0$, такие что $\lambda(B_i') = \lambda(B_i), \ i \ge n_0$. Но тогда функции y' и x' равноизмеримы, где

$$y'(t) := \begin{cases} r_i, & \text{если } \ t \in B_i', \ i \ge n_0; \\ 0, & \text{если } t \notin \bigcup_{i\ge n_0} B_i'. \end{cases};$$

$$x'(t) := \begin{cases} r_i, & \text{если } \ t \in B_i, \ i \ge n_0; \\ 0, & \text{если } t \notin \bigcup_{i\ge n_0} B_i. \end{cases}.$$

Поскольку $x \in X$, то в силу 3) $y' \in X$. С другой стороны y' равноизмерима с функцией

$$\tilde{y}(t) := \begin{cases} r_i, & \text{если } t \in C_i, \ i \ge n_0; \\ 0, & \text{если } t \notin \bigcup_{i\ge n_0} C_i. \end{cases}.$$

Опять же в силу 3) $\tilde{y} \in X$. Отсюда и из 2) следует, что $y \in X$.
$\square$

Теорема 3.2. Пусть X векторный идеал в $L^1(I)$ $\Big($банахов идеал$\Big)$ усредняемый любым не более, чем счётным разбиением. Тогда

I. Вместе с каждой своей функцией идеал X содержит её орбиту и, тем самым, по теореме Кальдерона X является мажорантным идеалом.

II. $\Big($Соответственно, если $||E(\cdot|\mathcal{F})||_{X\to X} \le 1$ для каждого не более, чем счётного разбиения $\mathcal{F}$, то $(X, ||\cdot||_X)$ - строго мажорантный идеал$\Big)$.

Доказательство. Доказываем для часть I. По теореме 3.1. X - симметричный идеал; нужно доказать, что он мажорантный.

Докажем сначала импликацию $y^* \prec x^* \in X \Rightarrow y \in X$ для элементарных функций $y^* \in L^1(I)$.

Лемма 3.3. Пусть $[a, b]$ произвольный конечный отрезок вещественной оси, f и g - положительные функции на $[a, b]$, удовлетворяющие следующим условиям.

1. $f, g \in L^1(a, b)$;
2. Для некоторого натурального n

$$\left\{ \begin{array}{r} g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot 1_{\triangle_j}, \text{ где } \alpha_1 \ge \alpha_2 \ge ... \ge \alpha_n \ge 0; \ \triangle_j := [t_{j-1}, t_j], \ j = 1, ..., n; \\ a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b; \ t_j \le \frac{t_{j-1}+t_{j+1}}{2}, \ j = 1, 2, ..., n. \end{array} \right. \quad ({}_3.3)$$

3.
$$\begin{cases} \int_{\triangle_j} fd\lambda \geq \int_{\triangle_j} gd\lambda, \ j = 1, ..., n-1; \\ \int_a^b fd\lambda > \int_a^b gd\lambda; \ \int_{t_1}^b fd\lambda < \int_{t_1}^b gd\lambda. \end{cases}$$

Тогда на $[a, b]$ найдётся функция $\bar{f}$, равноизмеримая с f и такая, что

$$\int_{\triangle_j} \bar{f} d\lambda \geq \int_{\triangle_j} gd\lambda, \ j = 1, ..., n.$$

Доказательство разобьём на две части.

I. Докажем, что в условиях леммы 3.3 найдётся функция $f' \sim f$, такая что

$\int_{\triangle_j} f' d\lambda \geq \int_{\triangle_j} gd\lambda, \ j = 1, ..., n-1, \ \int_{t_1}^b f' d\lambda \geq \int_{t_1}^b gd\lambda.$

Прежде всего заметим, что из условий леммы 3.3 вытекает неравенство $\int_{\triangle_n} fd\lambda < \int_{\triangle_n} gd\lambda$. Кроме того можно считать, что на отрезке $\triangle_n$ функция f невозрастает, ибо всегда можно монотонно переставить f на $\triangle_n$, не меняя её на $[a, t_{n-1}]$; полученная при этом функция будет равноизмерима с f.

Из неравенств $({}_3.3)$ вытекает, что $t_1 - a \leq b - t_{n-1} \leq b - t_1$. Определим следующие две функции от r:

$$\begin{cases} u(r) := \int_{b-r}^b fd\lambda + \int_{a+r}^{t_1} fd\lambda - \int_a^{t_1} gd\lambda; \\ v(r) := \int_a^{a+r} fd\lambda + \int_{t_1}^{b-r} fd\lambda - \int_{t_1}^b gd\lambda, \end{cases} \quad r \in [0, t_1 - a].$$

Отметим следующие очевидные свойства этих функций.

а). Обе непрерывны на $[0, t_1 - a]$;

б). $u(0) = \int_{\triangle_1} fd\lambda - \int_{\triangle_1} gd\lambda \geq 0;$
$v(0) = \int_{t_1}^b fd\lambda - \int_{t_1}^b gd\lambda < 0;$

в). На $[0, t_1 - a]$ справедливо тождественное равенство

$$u(r) + v(r) = \int_a^b fd\lambda - \int_a^b gd\lambda \equiv \ const > 0.$$

Предположим, что нашлась точка $r_0 \in [0, t_1 - a]$, такая что $u(r_0) \geq 0, \ v(r_0) \geq 0$. Тогда перестановка функции f на отрезках равной длины $[a, a + r_0]$ и $[b - r_0, b]$ даёт искомую функцию f'.
Докажем, что такая точка r_0 всегда найдётся. Если это не так, то из свойств а) - в) функций u и v следует, что $u(r) > 0$ для любого $r \in [0, t_1 - a]$. В частности $u(t_1 - a) > 0$, т.е.

$$\int_{b-t_1+a}^b fd\lambda - \int_a^{t_1} g\lambda > 0.$$

Поскольку g невозрастает на $[a,b]$, то тем более

$$\int_{b-t_1+a}^{b} fd\lambda - \int_{b-t_1+a}^{b} gd\lambda > 0. \qquad ({}_3.4)$$

Так как $[b-t_1+a,b] \subset \triangle_n$, то из предыдущего неравенства и из неравенства $\int_{\triangle_n} fd\lambda < \int_{\triangle_n} gd\lambda$ следует, что

$$\int_{t_{n-1}}^{b-t_1+a} fd\lambda < \int_{t_{n-1}}^{b-t_1+a} gd\lambda. \qquad ({}_3.5)$$

Предположение, что $f(r) \leq g(r)$ для любого $r \in [b-t_1+a,b]$ противоречило бы неравенству (${}_3.4$). Значит найдётся точка $r' \in [b-t_1+a,b]$, для которой $f(r') > g(r') = \alpha_n$. Но тогда, поскольку f невозрастает на $\triangle_n$, то неравенство $f(r) > g(r)$ выполняется на всём промежутке $[t_{n-1}, r']$, содержащем промежуток $[t_{n-1}, b-t_1+a]$. Это противоречит неравенству (${}_3.5$). Часть I доказана.

II. Докажем лемму 3.3 индукцией по n. Для $n=2$ она вытекает из части I. Пусть лемма 3.3 справедлива для любого конечного промежутка при 3,...,$n-1$. Докажем её для n. Согласно части I построим на отрезке $[a,b]$ такую функцию $\tilde{f}$, равноизмеримую с f, что

$$\int_{t_1}^{b} \tilde{f} d\lambda \geq \int_{t_1}^{b} gd\lambda, \ \int_{\triangle_j} \tilde{f} d\lambda \geq \int_{\triangle_j} gd\lambda, \ j = 1,...,n-1.$$

Пусть k первое натуральное число из промежутка $[2, n-1]$, такое что

$$\int_{t_k}^{b} \tilde{f} d\lambda < \int_{t_k}^{b} gd\lambda.$$

(Если такого k не найдётся, то функция $\tilde{f}$ является искомой). Имеем: на отрезке $[t_{k-1}, b]$ для функций $\tilde{f}$ и g выполнены все условия леммы 3.3. По индукционному предположению найдётся такая функция $\hat{f}$, заданная на отрезке $[t_{k-1}, b]$ и равноизмеримая с сужением функции $\tilde{f}$ этот отрезок, что

$$\int_{\triangle_j} \hat{f} d\lambda \geq \int_{\triangle_j} gd\lambda, \ j = k, k+1, ..., n.$$

Но тогда заданная на $[a,b]$ функция

$$\bar{f}(w) := \begin{cases} \tilde{f}(w), & \text{если } \ w \in [a, t_{k-1}]; \\ \hat{f}(w), & \text{если } w \in [t_{k-1}, b] \end{cases}$$

является искомой.
□

Лемма 3.4. Пусть f и g заданы на промежутке $[a,b]$ вещественной оси, удовлетворяют условиям 1 и 2 леммы 3.3 и условию

$$4. \ \int_{a}^{t_j} fd\lambda > \int_{a}^{t_j} gd\lambda, \ j = 1, ..., n.$$

Тогда найдётся функция $\bar{f}$, заданная на $[a,b]$ и равноизмеримая там с f, такая что

$$\int_{\triangle_j} \bar{f} d\lambda \geq \int_{\triangle_j} g d\lambda,\ j = 1, ..., n.$$

Доказательство (индукция по n). Пусть $n = 2$. Если $\int_{\triangle_2} f d\lambda \geq \int_{\triangle_2} g d\lambda$, то полагаем $\bar{f} = f$. В противном случае существование искомой функции $\bar{f}$ вытекает непосредственно из Леммы 3.3.

Пусть лемма 3.4 справедлива для любого конечного промежутка при $3, ..., n-1$. Докажем, что она выполняется и при n.

Докажем сначала, что неравенство

$$\int_{\triangle} f d\lambda < \int_{\triangle} g d\lambda$$

можно считать выполняющимся лишь на последнем отрезке $\triangle_n$. (Если оно не выполняется ни на одном отрезке $\triangle_j$, $j = 1, ..., n$, то полагаем $\bar{f} = f$.) Действительно, пусть j_0 есть наибольшее натуральное число, меньшее n, такое что $\int_{\triangle_{j_0}} f d\lambda < \int_{\triangle_{j_0}} g d\lambda$. Рассмотрим функции f и g на отрезке $[a, t_{j_0}]$. Поскольку все условия леммы 3.3 для них на этом отрезке выполнены, то, согласно индукционному предположению, найдётся функция f_{j_0}, заданная на $[a, t_{j_0}]$ и равноизмеримая с сужением f на этот отрезок, такая что

$$\int_{\triangle_i} f_{j_0} \geq \int_{\triangle_i} g d\lambda,\ i = 1, ..., j_0.$$

Положим теперь

$$\bar{f}_{j_0}(s) := \begin{cases} f_{j_0}(s), & \text{если } \ s \in [a, t_{j_0}]; \\ f(s), & \text{если } s \in [t_{j_0}, b]. \end{cases}$$

Тогда $\bar{f}_{j_0}$ равноизмерима с f на $[a,b]$, причём $\bar{f}_{j_0}$ удовлетворяет всем условиям леммы 3.4, и неравенство

$$\int_{\triangle} \bar{f}_{j_0} d\lambda < \int_{\triangle} g d\lambda$$

может выполняться лишь на отрезке $\triangle_n$.

Итак, мы считаем, что для функций f и g выполнены неравенства

$$\int_{\triangle_j} f d\lambda \geq \int_{\triangle_j} g d\lambda,\ j = 1, ..., n-1. \qquad ({}_3.6)$$

Поэтому можно считать, что

$$\int_{t_1}^{b} f d\lambda < \int_{t_1}^{b} g d\lambda \qquad ({}_3.7).$$

Действительно, если $\int_{t_1}^{b} f d\lambda \geq \int_{t_1}^{b} g d\lambda$, то для функций f и g, рассматриваемых на отрезке $[t_1, b]$, выполняются (с учётом неравенств ($_3$.6)) все условия доказываемой леммы. По индукционному предположению существует функция f_1, заданная на $[t_1, b]$, равноизмеримая там с f и такая, что

$$\int_{\triangle_i} f_1 d\lambda \geq \int_{\triangle_i} g d\lambda,\ j = 2, ..., n.$$

Но тогда функция

$$\bar{f}(s) := \begin{cases} f(s), & \text{если } \ s \in [a, t_1]; \\ f_1(s), & \text{если } s \in [t_1, b] \end{cases}$$

является искомой.

Итак мы считаем, что для функций f и g выполнены неравенства ($_3$.6) и ($_3$.7). Но тем самым мы оказываемся в условиях леммы 3.3, согласно которой искомая функция $\bar{f}$ существует.
□

Лемма 3.5. Пусть $[a, b]$ произвольный конечный промежуток вещественной оси, и пусть неотрицательные и суммируемые на нём функции f и g удовлетворяют условиям

$$g = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot 1_{\triangle_j},\ \text{где } \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq ... \geq \alpha_n > 0.$$

$$\triangle_j = [t_{j-1}, t_j],\ j = 1, 2, ..., n; a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b,$$

и для всякого $t \in [a, b]$

$$\int_a^t f d\lambda > \int_a^t g d\lambda.$$

Тогда найдётся функция $\bar{f}$, заданная на $[a, b]$ и равноизмеримая там с f, такая что

$$\int_{\triangle_j} \bar{f} d\lambda \geq \int_{\triangle_j} g d\lambda,\ j = 1, ..., n.$$

Доказательство. В случае, когда система $\{\triangle_j\}_{j=1}^n$ разбиения отрезка $[a, b]$ на промежутки постоянства функции g удовлетворяет условию ($_3$.3) леммы 3.3, справедливость леммы 3.5 вытекает непосредственно из леммы 3.4.

В случае произвольной системы $\{\triangle_j\}_{j=1}^n$ разбиения отрезка $[a, b]$ мы всегда можем построить новое, более мелкое разбиение $\{\triangle'_j := [t'_{j-1}, t'_j]\}_{j=1}^m$, для которого неравенства

$$t'_j \leq \frac{t'_{j-1} + t'_{j+1}}{2},\ j = 1, ..., m$$

выполняются. Функция g постоянна и на элементах нового разбиения, и все условия леммы 3.4 выполнены. Поэтому найдётся функция $\bar{f}$,заданная на $[a, b]$, равноизмеримая там с f и, такая что

$$\int_{\triangle'_j} \bar{f} d\lambda \geq \int_{\triangle'_j} g d\lambda,\ j = 1, ..., m.$$

Но, поскольку новое разбиение мельче исходного, то неравенства

$$\int_{\triangle_j} \bar{f} d\lambda \geq \int_{\triangle_j} g d\lambda,\ j = 1, ..., n$$

также выполняются.
□

Лемма 3.6. Пусть $0 \leq x, y \in L^(I)1$ и пусть для любого $t \in I$ выполняется неравенство

$$\int_0^t x d\lambda > \int_0^t y d\lambda.$$

Тогда найдётся последовательность $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq I,\ 1 = r_1 > r_2 > ...,\ \lim_{n\to\infty} r_n = 0$, такая что для любого $n = 1, 2, ...$ и для любого $t \in (r_n, 1]$ выполняется неравенство

$$\int_{r_n}^t x d\lambda > \int_{r_n}^t y d\lambda.$$

Доказательство. Предположим, что требуемой последовательности не существует. Возьмём на I произвольную последовательность $1 = r'_1 > r'_2 > ...,\ \lim_{n\to\infty} r'_n = 0$. Согласно предположению найдётся номер N, такой что при $n \geq N$ множества

$$\mathcal{D}_n = \{t \in (r'_n, 1] : \int_{r'_n}^t x d\lambda \leq \int_{r'_n}^t y d\lambda$$

не пусты.

Обозначим $\delta_n := \sup \mathcal{D}_n$; очевидно, что $\delta_n \in \mathcal{D}_n,\ n \geq N$. Докажем, что

$$\delta := \liminf \delta_n > 0.$$

Если это не так, то найдётся монотонно убывающая к нулю подпоследовательность δ_{n_k}. Согласно нашему предположению, она не удовлетворяет свойству, требуемому в лемме. Поэтому найдутся натуральное i и точка $\gamma \in (\delta_{n_i}, 1]$, такие что

$$\int_{\delta_{n_i}}^{\gamma} x d\lambda \leq \int_{\delta_{n_i}}^{\gamma} y d\lambda.$$

Тогда получаем

$$\int_{r'_{n_i}}^{\gamma} x d\lambda = \int_{r'_{n_i}}^{\delta_{n_i}} x d\lambda + \int_{\delta_{n_i}}^{\gamma} x d\lambda \leq \int_{r'_{n_i}}^{\delta_{n_i}} y d\lambda + \int_{\delta_{n_i}}^{\gamma} y d\lambda = \int_{r'_{n_i}}^{\gamma} y d\lambda,$$

что противоречит определению δ_{n_i}.

Итак, $\delta > 0$; пусть $\delta_{m_k} \to \delta$. Переходя к пределу в неравенстве

$$\int_{r'_{n_k}}^{\delta_{m_k}} x d\lambda \leq \int_{r'_{n_k}}^{\delta_{m_k}} y d\lambda,$$

получим, вопреки условиям леммы, что

$$\int_0^\delta x d\lambda \leq \int_0^\delta y d\lambda.$$

□

Лемма 3.7. Пусть $x = x^*, y = y^* \in L^1(I)$ и при этом y - счётнозначная функция, измеримая относительно и.р. $\mathcal{F}$. Предположим, что для всякого $t \in I$ справедливо неравенство

$$\int_0^t x d\lambda \geq \int_0^t y d\lambda.$$

Тогда найдётся заданная на I и равноизмеримая там с x функция $\bar{x}$, такая что

$$y \leq E(\bar{x}|\mathcal{F}).$$

Доказательство. Прибавляя к x сколь угодно малую положительную константу, мы можем считать, что в условии леммы выполняется строгое неравенство. Согласно лемме 3.6, на промежутке $(0,1]$ найдётся строго монотонно убывающая к нулю последовательность точек $\{r_n\}_{n=0}^\infty,\ r_0 = 1$, такая что для сужений x_n и y_n функций x и y, соответственно, на промежутки $\triangle_n = [r_n, r_{n-1}]$ неравенство

$$\int_{r_n}^t x_n d\lambda > \int_{r_n}^t y_n d\lambda$$

справедливо для любого $t \in [r_n, r_{n-1}],\ n \geq 1$. Обозначим через $\mathcal{F}_n$ разбиение отрезка $\triangle_n$ на промежутки постоянства функции y_n, а через x_n сужение функции x на $\triangle_n,\ n = 1, 2, ...$ Мы оказываемся в условиях леммы 3.5, согласно которой для всякого $n = 1, 2, ...$ найдётся заданная на $\triangle_n$ и равноизмеримая там с x_n функция $\bar{x}_n$, такая что

$$y_n \leq E(\bar{x}_n|\mathcal{F}_n). \tag{3.8}$$

Определим теперь на $[0,1]$ функцию $\bar{x}$, полагая $\bar{x}(0) = \bar{x}(1) = 0,\ \bar{x}(s) = \bar{x}_n(s),$ если $s \in \triangle_n,\ n = 1, 2, ...$ Положим

$$\bar{\mathcal{F}} = \{F : F \in \mathcal{F}_n \text{ для некоторого } n = 1, 2, ...\}.$$

Очевидно, что разбиение $\bar{\mathcal{F}}$ отрезка $[0,1]$ мельче, чем разбиение $\mathcal{F}$. Поскольку из (3.8) следует, что $y \leq E(\bar{x}|\bar{\mathcal{F}})$, то тем самым $y \leq E(\bar{x}|\mathcal{F})$. Так как $\bar{x}$ и x равноизеримы на I, то лемма доказана.

□

Переходим непосредственно к доказательству теоремы 3.2. Как и в предыдущей лемме, не умаляя общности, мы считаем, что $x = x^*,\ y = y^*$ и для всякого $t \in I$ справедливо неравенство

$$\int_0^t x d\lambda < \int_0^t y d\lambda.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Найдётся счётнозначная функция $y_\varepsilon = y_\varepsilon^*$, такая, что

$$\mathbf{0} \le y_\varepsilon \le y \le y_\varepsilon + \varepsilon \cdot \mathbf{1}. \tag{3.9}$$

Очевидно, что для функций y_ε и x выполнены все условия леммы 3.7, согласно которой найдётся такая функция x_ε, равноизмеримая с x, что

$$y_\varepsilon \le E(x_\varepsilon | \mathcal{F}_\varepsilon), \tag{3.10}$$

где $\mathcal{F}_\varepsilon$ разбиение I, порождённое всеми промежутками постоянства функции y_ε.

Из неравенств (3.9) и (3.10) вытекает неравенства

$$0 \le y \le E(x_\varepsilon | \mathcal{F}_\varepsilon) + \varepsilon \cdot \mathbf{1}. \tag{3.11}$$

Поскольку по теореме 3.1 X есть симметричный идеал, то $x_\varepsilon \in X$, и так как по предположению $E(x_\varepsilon | \mathcal{F}_\varepsilon) \in X$, то $y \in X$. Часть 1 теоремы 3.2 доказана.
□

2. Доказываем часть 2. Если $(X, ||\cdot||_X)$ банахово идеальное векторное подпространство в $L^1(I)$, такое что $||E(\cdot|\mathcal{F}||_X \le 1$ для любого счётного разбиения $\mathcal{F}$, то из соотношения $y \prec x$ в силу (3.9) – (3.11) выводим

$$||y||_X \le ||E(x_\varepsilon|\mathcal{F}_\varepsilon) + \varepsilon \cdot \mathbf{1}||_X \le ||E(x_\varepsilon|\mathcal{F}_\varepsilon)||_X \cdot ||x_\varepsilon||_X + ||\varepsilon \cdot \mathbf{1}||_X \le ||x_\varepsilon||_X + \varepsilon \cdot ||\mathbf{1}||_X.$$

Поскольку ε произвольно мало, часть 2 теоремы 3.2 доказана.
□

Теорема 3.8. Пусть $(X, \|\cdot\|_X)$ банахов идеал, такой что $\|E(\cdot|\mathcal{F})\|_X \le 1$ для любого не более чем счётного разбиения $\mathcal{F}$. Тогда на X можно задать эквивалентную симметричную норму $||\cdot||^1$, превращающую $(X, ||\cdot||^1)$ в строго мажорантный идеал.

Доказательство. Докажем сначала существование такой константы $K > 0$, для которой верна импликация

$$x,\ y \in X,\ y \prec x \Rightarrow ||y||_X \le K \cdot ||x||_X.$$

Допустим, что такой константы не существует. Так как для любого $r > 0$ соотношение $y \prec x$ влечёт соотношение $r \cdot y \prec r \cdot x$, то найдутся две такие последовательности $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ и $\{y_n\}_{n=1}^\infty$ элементов из X, что

$$y_n = y_n^* \prec x_n = x_n^*,\ ||x||_X \le 2^{-n},\ ||y_n||_X \ge n,\ n = 1, 2, ...$$

Положим $x_0 := \sum_{n=1}^\infty x_n$, где сходимость ряда понимается почти всюду. Из банаховости пространства $(X, ||\cdot||)$ следует, что $x_0 \in X$, откуда по теореме о мажорированной сходимости следует, что $y_0 := \sum_{n=1}^\infty y_n \in L^1$ и $y_0 \prec x_0$. Тогда по теореме 3.2 $y_0 \in X$.

С другой стороны $\mathbf{0} \leq y_n \leq y_0,\ n \geq 1$, откуда $||y_0||_X \geq ||y_n||_X \geq n,\ n \geq 1$, - противоречие.

Продолжим доказательство теоремы 3.8. Для всякого $x \in X$ положим

$$||x||^1 := \sup\{||y||_X :\ y \prec x.\}$$

Как только что показано, $||x||^1 \leq K \cdot ||x||_X$ для некоторого $K > 0$. Докажем, что для $||\cdot||^1$ выполнено неравенство треугольника. Пусть $x_1,\ x_2 \in X,\ \varepsilon > 0$. По определению существует элемент $y \in X$, такой что $y \prec x_1 + x_2$ и $||x_1 + x_2||^1 \leq ||y||_X + \varepsilon$. Согласно [20], найдутся $y_1,\ y_2 \in L^1$, такие что $y_i \prec x_i,\ i = 1, 2$ и $y = y_1 + y_2$. Отсюда и из теоремы 3.2 следует, что $y_i \in X,\ i = 1, 2$. Теперь имеем

$$||x_1 + x_2||^1 \leq ||y||_X + \varepsilon \leq ||y_1||_X + ||y_2||_X + \varepsilon \leq ||x_1||^1 + ||x_2||^1 + \varepsilon,$$

где ε произвольно мало. Тем самым неравенство треугольника для $||\cdot||^1$ доказано.

Остальные аксиомы монотонной симметричной строго мажорантной нормы для $||\cdot||^1$ проверяются тривиальным образом. Поскольку для всякого $x \in X$ справедливо $x \prec x$, то $||x||_X \leq ||x||^1$, и тем самым обе нормы эквивалентны.
□

Замечание 3.9. Строгая усредняемость банахова идеала $(X, ||\cdot||_X)$ по любой σ-подалгебре в Λ влечёт, что X - симметричный по составу элементов идеал, хотя, вообще говоря, исходная норма $||\cdot||_X$ может не быть симметрична. Действительно, пусть $(X, ||\cdot||_X)$ любое строго интерполяционное пространство. Для каждого $x \in X$ положим

$$||x||^* := ||x||_X + \sup\{\int_I |x|\mathbf{P}_{i=1}^n E(1_{(0,\frac{1}{2}]}|\mathcal{A}_i)d\lambda\},$$

где супремум берётся по всем σ-подалгебрам $\mathcal{A}_i$ в $\Lambda,\ i = 1, 2, ..., n;\ n = 1, 2, ...$, а через $\mathbf{P}_{i=1}^n E(f|\mathcal{A}_i)$ обозначается $E(E(...E(f|\mathcal{A}_n))$. Нетрудно проверить, что $||\cdot||^*$ - монотонная банахова норма на X, эквивалентная $||\cdot||_X$, причём из свойств усреднений вытекает, что $||E(\cdot|\mathcal{A}||^* = 1$ для любой σ-подалгебры $\mathcal{A}$ в Λ. Между тем ясно, что $||1_{(0,\frac{1}{2}]}||^* > ||1_{(\frac{1}{2},1]}||^*$.
□

§4. Усреднения главных симметричных идеалов по счётным разбиениям. [21], [16]

В этом параграфе выясняются условия, при выполнении которых счётное разбиение усредняет главный с.и. $\mathcal{N}_f$ *и с.п.* $\mathcal{M}^1_f$.

В силу замечания 0.11.2) счётное разбиение можно считать интервальным.

Итак, пусть даны и.р. $\mathcal{B} = (b_n)$, принадлежащее с.в. $\vec{\beta} = (\beta_n)$, и главный с.и. $\mathcal{N}_f$, порождённый функцией f, $f = f^* \in L^1(I)$.

Теорема 4.1. Для того чтобы и.р. $\mathcal{B}$ усредняло $\mathcal{N}_f$, необходимо, а если $\mathcal{B}$ монотонное, то и достаточно, чтобы для подходящей константы $Q > 1$ выполнялись неравенства

$$f^{**}(b_n) \le Q \cdot f(Q^{-1} \cdot b_n),\ n \ge 1. \qquad ({}_4.1)$$

Доказательство достаточности мы начнём со следующего утверждения.

Предложение 4.2. Если и.р. $\mathcal{B}$ монотонно и для подходящей константы $Q > 1$ выполняются неравенства

$$f^{**}(b_n) \le Qf(b_n),\ n \ge 1, \qquad ({}_4.2)$$

то разбиение $\mathcal{B}$ усредняет главный с.и. $\mathcal{N}_f$.

Доказательству предпошлём ряд лемм, в которых функция f фиксирована.

Лемма 4.3. $E(f|\mathcal{B}) \in \mathcal{N}_f$.

Доказательство. При фиксированном n, $n \ge 1$, для всех t, $t \in (b_n, b_{n-1}]$, имеем

$$E(f|\mathcal{B})(t) = \frac{1}{b_{n-1} - b_n}\int_{b_n}^{b_{n-1}} f d\lambda = \frac{1}{b_{n-1} - b_n}[b_{n-1}f^{**}(b_{n-1}) - b_n f^{**}(b_n)]. \qquad ({}_4.3)$$

Если $\frac{b_{n-1}}{b_{n-1}-b_n} \le 2$, то, продолжая (${}_4.3$), получим

$$... \le \frac{b_{n-1}}{b_{n-1} - b_n} f^{**}(b_{n-1}) \le 2f^{**}(b_{n-1}) \le 2Qf(b_{n-1}) \le 2Qf(t).$$

Если же $\frac{b_{n-1}}{b_{n-1}-b_n} > 2$, то (${}_4.3$) по лемме 0.1 продолжим так

$$... \le \frac{1}{b_{n-1} - b_n}[b_{n-1}f^{**}(b_n) - b_n f^{**}(b_n)] = f^{**}(b_n) \le f^{**}(2^{-1} \cdot b_{n-1}) \le 2f^{**}(b_{n-1}) \le 2Qf(b_{n-1}) \le$$

$$\le 2Qf(t).$$

Итак, $E(f|\mathcal{B})(t) \le 2Qf(t),\ t \in I.$
□

Замечание 4.4. Лемма 4.3 верна без предположения о монотонности $\mathcal{B}$.

Всюду далее при доказательстве части I мы будем считать функцию f $\mathcal{D}_2-$измеримой. Соотношения $({}_0.4)$ показывают, что это предположение не умаляет общности.

Лемма 4.5. Для любой подпоследовательности $\bar{\beta} = \{\beta_{k_i}\}_{i\geq 1}$ координат с.в. $\vec{\beta} = (\beta_n)$ найдётся натуральное $N_{\bar{\beta}}$, такое что при $n \geq N_{\bar{\beta}}$ выполняются неравенства

$$f^{**}(\sum_{i\geq n}\beta_{k_i}) \leq 4\cdot Q\cdot f(\sum_{i\geq n}\beta_{k_i}),\ n\geq N_{\bar{\beta}}. \qquad ({}_4.4)$$

Доказательство. Пусть $\vec{\beta}^* = (\beta^*_m)$ обозначает с.в. монотонного и.р. $\mathcal{B}^* := (b^*_m)$. Для и.р. $\mathcal{B}_1$, принадлежащего с.в. $\tilde{\beta} = (\beta_{k_i}, 1 - \sum_{n\neq k_i,\ i\geq 1}\beta_n)$ и являющегося выборкой $\bar{\beta}$, найдётся и.р. $\mathcal{B} := (b_n) \sim \mathcal{B}^*$, такое что точки и.р. $\mathcal{B}_1 = (\sum_{i\geq n}\beta_{k_i})$ совпадают с точками b_n при $n \geq N_{\bar{\beta}}$, где число $N_{\bar{\beta}}$ определено выборкой. Но монотонная перестановка и.р. $\mathcal{B}$ есть и.р. $\mathcal{B}^*$, поэтому применима теорема 2.1. Так как $2 > \frac{5^{1/2}+1}{2}$, полагая в $({}_2.1)$ $\delta = 2$, в силу неравенств $({}_0.2)$ и $({}_4.2)$ выводим:

$$f^{**}(\sum_{i\geq n}\beta_{k_i}) = f^{**}(b_n) \leq f^{**}(2^{-1}\cdot b^*_m) \leq 2\cdot f^{**}(b^*_m) \leq 2\cdot Q\cdot f(b^*_m) \leq$$

$$\leq 4\cdot Q\cdot f(b_n) = 4\cdot Q\cdot f(\sum_{i\geq n}\beta_{k_i}),\ n\geq N_{\bar{\beta}}.$$

□

Следствие 4.6. Предположим, что и.р. $\mathcal{S}$, $\mathcal{S} = \sigma(s_n,\ n\geq 0)$, принадлежит с.в. $\vec{\mathfrak{b}}$, который крупнее, чем $\vec{\beta} = (\beta_n)$. Тогда при подходящей константе $Q \geq 1$ выполняется:

$$f^{**}(s_n) \leq 4Qf(s_n),\ n\geq 0. \qquad ({}_4.5)$$

Доказательство прямо вытекает из предыдущей леммы, ибо каждая точка s_n разбиения $\mathcal{S}$ равна $\sum_{k\geq 1}\beta_{n_k}$ для подходящей последовательности $\{\beta_{n_k}\}$ координат с.в. $\vec{\beta}$.
□

Продолжаем доказательство предложения 4.2.

Лемма 4.7. Пусть $\mathcal{F} = \sigma(F_n,\ n\geq 1)$ разбиение промежутка I, принадлежащее перестановке $\vec{\gamma}$ стохастического вектора $\vec{\beta}$. Тогда $E(f|\mathcal{F}) \in \mathcal{N}_f$.

Доказательство. Достаточно доказать, что $h := [E(f|\mathcal{F})]^* \in \mathcal{N}_f$. Пусть $\mathcal{S} = (s_n)$ и.р., относительно которого измерима элементарная функция $h = h^*$. Если $\mathcal{S} \in \vec{\alpha}$, то с.в. $\vec{\alpha}$ крупнее, чем с.в. $\vec{\gamma}$ и, стало быть с.в. $\vec{\alpha}$ крупнее, чем с.в. $\vec{\beta}$. Значит применимо предыдущие следствие, в силу которого выполняется неравенство $({}_4.5)$. Но тогда по лемме 4.3 и по замечанию 4.4 функция

$H := E(f|\mathcal{S})$ лежит в $\mathcal{N}_f$.

С другой стороны, согласно предложению 0.4 $h = E(\tilde{f}|\mathcal{S})$, где $\tilde{f} = f \circ \pi$ - равноизмеримая с f функция, а π - автоморфизм промежутка I, такой что $\mathcal{S} = \mathcal{F} \circ \pi$ (такой автоморфизм найдётся, [1]). Теперь из свойств оператора усреднения, из максимального неравенства леммы 0.1 для f^{**}, из монотонности f и из неравенств ($_4$.5) выводим, что для любого $n,\ n \geq 1$, при $t \in (s_n, s_{n-1}]$ справедливы соотношения

$$\frac{h(t)}{H(t)} = \frac{h(s_{n-1})}{H(s_{n-1})} \leq \frac{h^{**}(s_{n-1})}{H(s_{n-1})} = \frac{s_{n-1}^{-1}\int_0^{s_n^{-1}} E(\tilde{f}|\mathcal{S})d\lambda}{H(s_{n-1})} = \frac{s_{n-1}^{-1}\int_0^{s_n^{-1}} \tilde{f}d\lambda}{H(s_{n-1})} \leq$$

$$\leq \frac{f^{**}(s_n^{-1})}{H(s_{n-1})} \leq \frac{f^{**}(s_{n-1})}{f(s_{n-1})} \leq 4Q,$$

откуда $h \in \mathcal{N}_f$.
□

Пользуясь этой леммой и вновь применяя автоморфизм полусегмента I, легко получить, что

$$E(g|\mathcal{B}) \in \mathcal{N}_f \qquad (_4.6)$$

для любой такой элементарной функции g, что

$$g^* \leq Cf,\ C > 0. \qquad (_4.7)$$

Теперь уже, используя равномерную аппроксимацию элементарными функциями и положительность оператора усреднения, включение ($_4$.6) можно перенести на все функции g, удовлетворяющие неравенству ($_4$.7) с подходящей положительной константой C. Предложение доказано.

Для окончания доказательства достаточности в теореме 4.1 определим при каждом $m,\ m \geq 1$, $\mathcal{D}$-измеримую невозрастающую функцию $f_{(m)},\ f_{(m)}(t) = f(2^{-m}t),\ t \in I$. Для каждой из функций $f_{(m)}$ условие ($_4$.1) предложения 4.2 выполнено с константой $Q_m,\ Q_m \leq 2^m Q$, и потому к каждой из них применимы все предыдущие рассуждения. Остаётся заметить, что $\mathcal{N}_f = \mathcal{N}_{f_{(m)}},\ m \geq 1$. Достаточность в теореме доказана.

Необходимость прямо вытекает из леммы 0.6 и следующего предложения.

Предложение 4.8. Предположим, что для функции $f,\ f = f^* \in L^1(I)$ и и.р. $\mathcal{B},\ \mathcal{B} = (b_n)$ (здесь оно не обязано быть монотонным) при любом $m \geq 1$ справедливо

$$\sup_{n\geq 0} \frac{f^{**}(b_n)}{f(\frac{b_n}{m})} = \infty. \qquad (_4.8)$$

Тогда существует и.р. $\mathcal{V},\ \mathcal{V} = (v_k)$, крупнее чем $\mathcal{B}$ и такое, что $E(f|\mathcal{V}) \notin \mathcal{N}_f$.

Доказательство. Очевидно, что если выполнено условие ($_4$.8), то найдётся подпоследовательность $\{u_m := b_{n_m},\ n_0 = 0\}$ последовательности $\{b_n\}$, такая что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{f^{**}(u_m)}{f(\frac{u_m}{m})} = \infty. \qquad ({}_4.9)$$

Определим подпоследовательность $\{v_k\}$ последовательности $\{u_m\}$ по индукции. Положим $v_0 = b_{n_0} = u_{m_0} = 1$, и пусть точка $v_k = u_{m_k},\ k \geq 0$, уже построена. Так как функция $f^{**}(t),\ t \in I$, монотонна и непрерывна в окрестности точки 0, то в силу ($_4$.9) можно выбрать точку $u_{m_{k+1}}$ столь близкую к нулю, что

$$0 < u_{m_{k+1}} < \frac{v_k}{k} \quad \text{и} \quad \frac{\frac{\int_{u_{m_{k+1}}}^{v_k}}{v_k - u_{m_{k+1}}}}{f(\frac{v_k}{k})} > \frac{f^{**}(v_k)}{f(\frac{v_k}{k})} - 1.$$

Закончим индукцию, полагая $v_{k+1} := u_{m_{k+1}}$. Получаем, что

$$\lim_{j\to\infty} \frac{E(f|\mathcal{V})(v_k)}{f(\frac{v_k}{k})} = \infty$$

, и тем самым $E(f|\mathcal{V}) \notin \mathcal{N}_f$. Предложение доказано.

Поскольку и.р. $\mathcal{V}$ крупнее, чем и.р. $\mathcal{B}$, то по лемме 0.11.4) и $E(f|\mathcal{B}) \notin \mathcal{N}_f$, т.е. необходимость в теореме 4.1 доказана.
□

Пусть $\mathcal{F}$ - счётное разбиение. Функцию $f \in L^1(I)$ будем называть $\mathcal{F}$-*регулярной*, если монотонное и.р. $\mathcal{F}^*$ усредняет главный с.и. $\mathcal{N}_f$.

Для и.р. $\mathcal{B} = (b_n)$ и функции $f,\ f = f^* \in L^1(I)$, положим

$$f_{\mathcal{B}} := \sum_{n\geq 1} f(b_{n-1}) \cdot 1_{(b_n, b_{n-1}]}.$$

Теорему 4.1 можно сформулировать так:

Теорема 4.9. Для и.р. $\mathcal{B}$ и функции $f,\ f = f^* \in L^1(I)$, следующие три условия равносильны:

1). Функция f является $\mathcal{B}$-регулярной;

2). $f^{**}_{\mathcal{B}^*} \simeq f^*_{\mathcal{B}^*}$;

3). $f^{**}_{\mathcal{B}^*} \in \mathcal{N}_f$.

Из 0.11.3) следует, что сюда можно присоединить и четвёртое условие:

4). f является $\mathcal{B}^*_{(2)}$-регулярной.

Теорема 4.10. Для и.р. $\mathcal{B}$ и функции $f,\ f = f^* \in L^1(I)$, следующие три условия равносильны:

1). Функция f является $\mathcal{B}$-регулярной;

2). $f^{**}_{\mathcal{B}^*} \simeq f^*_{\mathcal{B}^*}$;

3). $f^{**}_{\mathcal{B}^*} \in \mathcal{N}_f$.

Из 0.11.3) следует, что сюда можно присоединить и четвёртое условие:

4). f является $\mathcal{B}^*_{(2)}$-регулярной.

Лемма 4.11. Пусть $f = f^* \in L^1(I)$ любая функция, а $\mathcal{F}$ любое счётное разбиение. Для того, чтобы f была $\mathcal{F}$-регулярна, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось включение

$$E(\mathcal{M}_f|\mathcal{F}^*) \subseteq \mathcal{N}_f. \qquad ({}_4.10)$$

Доказательство. Из $({}_4.10)$ очевидным образом следует $\mathcal{F}$-регулярность f. Если же f является $\mathcal{F}$-регулярной, т.е., если $E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F}^*) \subseteq \mathcal{N}_f$, то по теореме 5.6.

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{M}_f|\mathcal{F}^*)} = \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F}^*)} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{N}_f} = \mathcal{N}_f.$$

□

Пусть функция $f = f^* \in L^1(I)$, M_f её пространство Марцинкевича, M^1_f замыкание по норме $\|\cdot\|_{M_f}$ с.и. $\mathcal{N}_f$ в с.п. M_f.

Теорема 4.12. Для любого и.р. $\mathcal{B}$, где $\mathcal{B} = \sigma(B_n),\ B_n = (b_n, b_{n-1}],\ n \geq 1,\ b_0 = 1$, следующие условия равносильны.

$$1)\ \mathcal{B} \text{ усредняет с.и. } \mathcal{N}_f;\ 2)\ \mathcal{B} \text{ усредняет с.п. } \mathcal{M}^1_f.$$

.

Доказательство. Докажем 1)⇒2). Пусть $g \in M^1_f$, т.е. найдётся последовательность $\{g_n\}_{n\geq 1} \subseteq \mathcal{N}_f$, тавая что $\|g_n - g\|_{M_f} \to_{n\to\infty} 0$. В силу непрерывности по норме бистохастического проектора $E(\cdot|\mathcal{B})$ в пространстве $(M_f,\ \|\cdot\|_{M_f})$ справедливо предельное равенство

$$\lim_{n\to\infty} |\ \|E(g|\mathcal{B}) - E(g_n|\mathcal{B})\|_{M_f}\ | = 0.$$

Но по условию $E(g_n|\mathcal{B}) \in \mathcal{N}_f,\ n \geq 1$, тем самым $E(g|\mathcal{B}) \in M^1_f$.

Импликацию 2)⇒1) будем доказывать в негативной форме, а именно докажем, что если $\mathcal{B}$ не усредняет с.и. $\mathcal{N}_f$, то $\mathcal{B}$ не усредгяет также и с.п. M^1_f. (Модификация доказательства теоремы 4.1, [16]).

Пусть $\mathcal{B}$ не усредняет $\mathcal{N}_f$, т.е. вопреки равенству (${}_4.1$)

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{f^{**}(b_n)}{f(b_n)}=\infty.$$

Будем считать, не умаляя общности, что $b_0 = 1,\ b_1 = \frac{1}{2}$. Обозначим через $\{s_m\}_{m\geq 0} := \{b_{n_m}\}$ такую подпоследовательность последовательности $\{b_n\}$, что $1 = s_0 > \frac{1}{2} = s_1 > s_2 > ... > s_m > ...;\ s_m \downarrow 0$ и при этом

$$\frac{f^{**}(\frac{1}{2})}{f(1)} =: a_1 < a_m := \frac{f^{**}(s_m)}{f(\frac{s_m}{m})}\uparrow_{m\uparrow\infty}\infty.$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и положим $m_1 = 1, t_1 = 2s_{m_1}$. На промежутке $[0, \frac{1}{2}]$ определим функцию

$$\Phi_1(v) = [f(\frac{s_{m_1}}{m_1})(s_{m_1}-v)]^{-1}\int_v^{s_{m_1}} f(u)du.$$

Очевидно, что $\Phi_1(v)$ непрерывна, убывает и $\Phi_1(0) = a_{m_1}$. Найдётся номер m_2, такой что

$$s_{m_2}\leq\frac{s_{m_1}}{4m_1},\ \Phi_1(2s_{m_2})\geq a_{m_1}-\varepsilon.$$

Обозначим $t_2 = 2s_{m_2}$. Тогда

$$a_{m_1}-\varepsilon\leq\Phi_1(t_2)=[f(\frac{s_{m_1}}{m_1})(s_{m_1}-t_2)]^{-1}\int_{t_2}^{s_{m_1}} f(u)du\leq[f(\frac{s_{m_1}}{m_1})(s_{m_1}-t_2)]^{-1}\int_{t_2}^{t_1} f(u)du.$$

Продолжая и дальше таким образом, построим номера $\{m_i\}_{i=1}^k :\ \ 1 = t_1 = 2s_{m_1} > s_{m_1} > t_2 = 2s_{m_2} > ... > s_{m_k}$.
Если обозначить $\Phi_k := [f(\frac{s_{m_k}}{m_k})(s_{m_k}-v)]^{-1}\int_v^{s_{m_k}} f(u)du,\ 0\leq v\leq s_{m_k}$, то заданная на $[0, s_{m_k}]$ функция $\Phi_k(v)$ непрерывна, убывает и $\Phi_k(0) = a_{m_k}$. Положим $t_k := 2s_{m_k}$. Как и выше найдётся номер m_{k+1}, такой что выполняются условия

$$i)\ s_{m_{k+1}}\leq\frac{s_{m_k}}{4m_k};\ ii)\ s_{m_k}-t_{k+1}<t_k-s_{m_k}\Leftrightarrow s_{m_k}<\frac{t_k+t_{k+1}}{2},$$

где $t_{k+1} := 2s_{m_{k+1}}$;

$$iii)\ a_{m_k}-\varepsilon\leq\Phi_k(s_{m_{k+1}})\leq[f(\frac{s_{m_k}}{m_k})(s_{m_k}-s_{m_{k+1}})]^{-1}\int_{s_{m_{k+1}}}^{s_{m_k}} f(u)du$$

$$\leq[f(\frac{s_{m_k}}{m_k})(s_{m_k}-t_{k+1})]^{-1}\int_{t_{k+1}}^{t_k} f(u)du.$$

Построение последовательности номеров $\{m_k\}$ завершено.

Из $i)$ вытекает, что $m_k^{-1}s_{m_k} > t_{k+1}$, откуда с учётом $iii)$ имеем: $m_k^{-1}s_{m_k}\in(t_{k+1}, t_k),\ k\geq 1$. Кроме того

$$(s_{m_k}-t_{k+1})^{-1}\leq 3(t_k-t_{k+1})^{-1},\ k\geq 1. \qquad ({}_4.11)$$

Действительно, $s_{m_k+1} \leq \frac{s_{m_k}}{4m_k} \leq \frac{s_{m_k}}{4},\ k \geq 1$, откуда $2s_{m_k} - 2s_{m_{k+1}} \leq 3s_{m_k} - 6s_{m_{k+1}}$, или $t_k - t_{k+1} \leq 3(s_{m_k} - t_{k+1})$.
Определим и.р. $\mathcal{T} = \sigma(T_k)$, где $T_k = (t_{k+1}, t_k],\ k \geq 1$, и усреднение

$$E(f|\mathcal{T}) = \sum_{k\geq 1} \alpha_k 1_{(t_{k+1},t_k]},\ \text{где } \alpha_k = \frac{1}{t_k - t_{k+1}} \int_{t_{k+1}}^{t_k} f du,\ k \geq 1.$$

Отметим, что по построению чисел $s_{m_k},\ k \geq 1$, имеем:

$$c_k := \frac{\alpha_k}{f(\frac{s_{m_k}}{m_k})} \to \infty. \tag{$_4$.12}$$

Наша цель - показать, что $inf\{\|E(f|\mathcal{T}) - y\|_{\mathcal{M}_f}\ :\ \ y \in \mathcal{N}_f\} > 0$. При этом в силу леммы 0.16 и того, что $E(f|\mathcal{T}) = (E(f|\mathcal{T}))^*$, достаточно установить, что $inf\{\|E(f|\mathcal{T}) - y\|_{\mathcal{M}_f}:\ y = y^* \in \mathcal{N}_f\} > 0$.

Зафиксируем $y = y^* \in \mathcal{N}_f$ и обозначим через $k(y)$ наименьший из таких номеров k, что

$$vraisup_{t\in I} \frac{y(t)}{f(\frac{t}{m_k})} < \infty,$$

где $\{m_k\}$ - последовательность номеров, построенная выше. Положим

$$c := vraisup_{t\in I} \frac{y(t)}{f(\frac{t}{m_{k(y)}})};$$

$$H(c) = \{t \in I:\ \frac{E(f|\mathcal{T})(t)}{f(\frac{t}{m_{k(y)}})} \geq 2c;$$

$$\tau_k = \lambda T_k,\ \eta_k = \lambda(T_k \cap H(c)),\ k \geq 1.$$

Покажем теперь, что найдётся такой номер k_1 что

$$\frac{\eta_k}{\tau_k} \geq \frac{1}{2}. \tag{$_4$.13}$$

при $k > k_1$. Действительно, из ($_4$.11) следует существование такого номера k_0, что при $k > k_0$

$$c_k = \frac{\alpha_k}{f(\frac{s_{m_k}}{m_k})} = \frac{E(f|\mathcal{T})(s_{m_k})}{f(\frac{s_{m_k}}{m_k})} \geq 2c.$$

Значит при $k > k_1 := \max[k_0, k(y)]$

$$\frac{E(f|\mathcal{T})(s_{m_k})}{f(\frac{s_{m_k}}{m_{k(y)}})} \geq \frac{E(f|\mathcal{T})(s_{m_k})}{f(\frac{s_{m_k}}{m_k})} \geq 2c.$$

Иными словами, $s_{m_k} \in H(c)$. Но из монотонности f отсюда вытекает включение $[s_{m_k}, t_k] \subset H(c)$, которое влечёт

$$\frac{\eta_k}{\tau_k} \geq \frac{t_k - s_{m_k}}{t_k - t_{k+1}} \geq \frac{1}{2}$$

при $k > k_1$. Неравенство $({}_4.13)$ доказано.

Продолжим доказательство теоремы. Для всех $t \in H(c)$ имеем: $E(f|\mathcal{T})(t) - y(t) \geq E(f|\mathcal{T})(t) - cf(\frac{t}{n_{k(y)}}) \geq E(f|\mathcal{T})(t) - \frac{E(f|\mathcal{T})(t)}{2} = \frac{E(f|\mathcal{T})(t)}{2}$. Отсюда

$$\|E(f|\mathcal{T}) - y\|_{M_f} = \sup_{0<t\leq 1} \frac{\int_0^t (E(f|\mathcal{T}) - y)^*(u)du}{\int_0^t f(u)du} \geq \frac{1}{2} \sup_{0<t\leq 1} \frac{\int_{(0,t)\cap H(c)} E(f|\mathcal{T})d\lambda}{\int_0^t f d\lambda}. \qquad ({}_4.14)$$

Возьм1м номер k_1, обеспечивающий выполнение $({}_4.13)$. Поскольку $\eta_k \geq \frac{\tau_k}{2}$ при $k \geq k_1$, то

$$\int_{(0,t_{k_1})\cap H(c)} E(f|\mathcal{T})d\lambda = \sum_{k=k_1}^{\infty} \int_{T_k \cap H(c)} E(f|\mathcal{T})d\lambda = \sum_{k\geq k_1} \alpha_k \eta_k \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} \sum_{k=k_1}^{\infty} \tau_k \frac{\int_{T_k} E(f|\mathcal{T})d\lambda}{\tau_k} = \frac{1}{2} \int_0^{t_{k_1}} f(u)du.$$

Продолжая неравенство $({}_4.14)$, получим

$$\|E(f|\mathcal{T}) - y\|_{M_f} \geq \frac{1}{2} \sup_{0<t\leq 1} \frac{\int_{(0,t)\cap H(c)} E(f|\mathcal{T})d\lambda}{\int_0^t f d\lambda} \geq \frac{1}{2} \frac{\int_{(0,t_{k_1})\cap H(c)} E(f|\mathcal{T})d\lambda}{\int_0^{t_{k_1}} f(u)du} \geq \frac{1}{4}.$$

Итак, $\inf\{\|E(f|\mathcal{T}) - y\|_{M_f} : \ y = y^* \in \mathcal{N}_f\} \geq \frac{1}{4}$.
Значит и.р. $\mathcal{T}$ не усредняет с.п. M_f^1. Но $\mathcal{T}$ кратно и.р. $\mathcal{S} := \sigma(s_{m_k})$, а последнее крупнее, чем $\mathcal{B}$. По замечанию 0.11;3), 5) и.р. $\mathcal{B}$ также не усредняет с.п. M_f^1.
□

§5. О симметричном идеале, порождённом усреднением по счётному разбиению главного симметричного идеала. [25], [27], [32], [33], [35]

В теоремах 5.10 - 5.12 указаны условия на и.р. $\mathcal{B}$ и функцию f, при выполнении которых с.и. $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}$, порождённый образом усреднения по $\mathcal{B}$ главного с.и. $\mathcal{N}_f$, сам является главным с.и.

Пусть $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$ обозначают не более, чем счётные разбиения промежутка I, а $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ - и.р. Для дальнейшего нам понадобятся следующая очевидная

Лемма 5.1. Для с.и. $X,\ X \subseteq L^1(I)$, справедливы следующие утверждения.

1). Если $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$, то $\mathcal{N}_{E(X|\mathcal{F}_1)} \subseteq \mathcal{N}_{E(X|\mathcal{F}_1)}$ и $\mathcal{M}_{E(X|\mathcal{F}_1)} \subseteq \mathcal{M}_{E(X|\mathcal{F}_1)}$;

2). Если $\mathcal{F}_1 \sim \mathcal{F}_2$, то $\mathcal{N}_{E(X|\mathcal{F}_1)} = \mathcal{N}_{E(X|\mathcal{F}_1)}$ и $\mathcal{M}_{E(X|\mathcal{F}_1)} = \mathcal{M}_{E(X|\mathcal{F}_1)}$;

3). Если $\mathcal{B}_1 \simeq \mathcal{B}_2$, то $\mathcal{N}_{E(X|\mathcal{B}_1)} = \mathcal{N}_{E(X|\mathcal{B}_1)}$ и $\mathcal{M}_{E(X|\mathcal{B}_1)} = \mathcal{M}_{E(X|\mathcal{B}_1)}$;

4). $\mathcal{N}_{E(X|\mathcal{B})} = \mathcal{N}_{E(X|\mathcal{B}_{(2)})}$.

5). Если для с.и. $X \subseteq L^1(I)$ через X^* обозначается $\{x^* :\ x \in X\}$, то для всякого счётного разбиения $\mathcal{F}$ справедливо включение

$$\Big(\mathcal{N}_{E(X^*|\mathcal{F}^*)}\Big)^* \subset \Big(\mathcal{N}_{E(X|\mathcal{F})}\Big)^*.$$

$\square$

Напомним обозначение §4: для и.р. $\mathcal{B} = (b_n)$ и монотонной функции $f = f^*$

$$f_{\mathcal{B}} := \sum_{n \geq 1} f(b_{n-1}) \cdot 1_{(b_n, b_{n-1}]}.$$

Ясно, что $f_{\mathcal{B}} = (f_{\mathcal{B}})^*$. Также легко устанавливаются следующие соотношения.

$$(f^*)_{\mathcal{B}} \leq E(f^*|\mathcal{B}) = \Big(E(f^*|\mathcal{B})\Big)^* = \Big(E(f^*|\mathcal{B})\Big)_{\mathcal{B}} \leq \Big(E(f^*|\mathcal{B})^{**}\Big)_{\mathcal{B}} \leq \Big(f^{**}\Big)_{\mathcal{B}}. \quad ({}_5.1)$$

Так как в дальнейшем не будет повода для недоразумений, левая и правая части (${}_5.1$) обозначаются $f^*_{\mathcal{B}}$ и $f^{**}_{\mathcal{B}}$, соответственно.

Замечание 5.2. Теорема 2.2 переписывается как неравенство

$$f^{**}_{\mathcal{B}} \leq \frac{4}{3} \cdot f^{**}_{\mathcal{B}^*}, \qquad ({}_5.2)$$

имеющее место для любой функции $f \in L^1(I)$ и любого и.р $\mathcal{B}$, причём $\frac{4}{3}$ - абсолютная (наименьшая) константа в этом неравенстве.

□

Теорема 5.3. Пусть $f \in L^1(I)$, $\mathcal{B}$ - и.р. Справедливо равенство

$$f_{\mathcal{B}}^{**} = \sup\{E(f^*|\mathcal{S}) : \text{ и.р. } \mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}\}. \qquad ({}_5.3)$$

Доказательство. Возьмём любое число u, $u \in I$, и и.р. $\mathcal{S} := (s_n) \subset (b_n) := \mathcal{B}$. Выберем такой номер n, что $s_{n+1} < u \leq s_n$. В силу $({}_5.1)$

$$E(f^*|\mathcal{S})(u) = E(f^*|\mathcal{S})(s_n) \leq f^{**}(s_n) = f_{\mathcal{S}}^{**}(s_n) = f_{\mathcal{B}}^{**}(s_n) = f_{\mathcal{B}}^{**}(u),$$

так что левая часть здесь не превосходит правой. Докажем обратное неравенство, для чего зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое натуральное k, что $b_{k+1} < u \leq b_k$. Возьмём теперь $m > k$, такое что

$$(b_k - b_m)^{-1} \int_{b_m}^{b_k} f^* d\lambda \geq f^{**}(b_k) - \varepsilon.$$

Значит, если и.р. $\mathcal{S}_\varepsilon = (s_n)$ любое из таких укрупнений и.р. $\mathcal{B}$, для которых $s_i = b_k$, $s_{i+1} = b_m$ при некотором $i \geq 0$, то

$$E(f^*|\mathcal{S})(u) \geq f^{**}(b_k) - \varepsilon,$$

откуда в силу произвольности ε следует доказываемое утверждение.
□

Теорема 5.4. Пусть $\mathcal{F}$ счётное разбиение, $f \in L^1(I)$.

1). Справедливо неравенство

$$E(f|\mathcal{F})^* \leq 4/3 \cdot f_{\mathcal{F}^*}^{**}. \qquad ({}_5.4)$$

2). Константа 4/3 в $({}_5.4)$ не может быть уменьшена.

Доказательство. По предложению 0.6.1) имеем: $E(f|\mathcal{F})^* = E(\bar{f}|\mathcal{B})$, где и.р. $\mathcal{B} \sim \mathcal{F}$, $\bar{f} \sim f$. Таким образом, согласно формулам $({}_0.2)$, $({}_5.1), ({}_5.2)$,

$$E(f|\mathcal{F})^* = E(\bar{f}|\mathcal{B}) \leq \Big(E(\bar{f}|\mathcal{B})\Big)_{\mathcal{B}}^{**} \leq \Big(E(f^*|\mathcal{B})\Big)_{\mathcal{B}}^{**} = f_{\mathcal{B}}^{**} \leq 4/3 \cdot f_{\mathcal{B}^*}^{**} = 4/3 \cdot f_{\mathcal{F}^*}^{**},$$

откуда следует первая часть теоремы 5.4. Докажем её вторую часть. Допустим, что для любого счётного разбиения $\mathcal{F}$ и любой функции $f \in L^1(I)$ справедливо неравенство

$$E(f|\mathcal{F})^* \leq b \cdot f_{\mathcal{F}^*}^{**}, \qquad (*)$$

где $0 < b < 4/3$. В силу 0.6.1) и 0.6.2) неравенство $(*)$ выполняется для любого укрупнения $\mathcal{S}$ и.р. $\mathcal{F}^*$. Отсюда и из теоремы 5.3 вытекает справедливость неравенства $f_{\mathcal{B}}^{**} \leq b \cdot f_{\mathcal{F}^*}^{**}$ для любого и.р. $\mathcal{B}$, равноизмеримого с $\mathcal{F}^*$. Однако, это противоречит замечанию 5.2.
□

Из доказанной теоремы и леммы 0.14 вытекает

Следствие 5.5. Для любого счётного разбиения $\mathcal{F}$ и любой функции $f \in L^1(I)$ справедливо включение

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} \subseteq \mathcal{N}_{f^{**}_{\mathcal{F}^*}}.$$

Теорема 5.6. Для любого счётного разбиения $\mathcal{F}$ и любой функции $f \in L^1(I)$ справедливо равенство

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} = \mathcal{N}_{E(\mathcal{M}_f|\mathcal{F})}.$$

Доказательство. Включение $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} \subseteq \mathcal{N}_{E(\mathcal{M}_f|\mathcal{F})}$ вытекает из включения $\mathcal{N}_f \subseteq \mathcal{M}_f$. Поскольку мажорантные идеалы усредняются любой σ-подалгеброй, то обратное включение выполняется в силу соотношения

$$E(\mathcal{M}_f|\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})}, \qquad ({}_5.5)$$

которое в свою очередь прямо следует из предложения 0.6.1), леммы 3.7 и замечания 0.11.1).
□

Теорема 5.7. Любое счётное разбиение $\mathcal{F}$ усредняет с.и. $\mathcal{N}_{E(X|\mathcal{F})}$ каков бы ни был с.и. X.

Доказательство. Начнём со случая $X = \mathcal{N}_f$, для некоторой функции $f \in L^1(I)$. Достаточно доказать включение $E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})}|\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})}$. Имеем: так как $\mathcal{N}_f \subseteq \mathcal{M}_f$, то $E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{M}_f$. Остаётся воспользоваться $({}_5.5)$.

Переходим к общему случаю. Используя $({}_0.9)$ и уже рассмотренный случай, получаем

$$E(\mathcal{N}_{\mathcal{N}_{E(X|\mathcal{F})}}|\mathcal{F}) = E(\sum_{x\in X}\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_x|\mathcal{F})}|\mathcal{F}) = \sum_{x\in X} E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_x|\mathcal{F})}|\mathcal{F}) \subseteq$$

$$\subseteq \sum_{x\in X}\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_x|\mathcal{F})} = \mathcal{N}_{E(\sum_{x\in X}\mathcal{N}_x|\mathcal{F})} = \mathcal{N}_{E(X|\mathcal{F})}.$$

□

Следствие 5.8, [35]. Пусть X - с.и., $\mathcal{F}$ - проверочное разбиение, см определение в §6. Тогда $\mathcal{M}_X = \mathcal{N}_{E(X|\mathcal{F})}$. В частности, $\mathcal{M}_f = \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})}$.
□

Теорема 5.9. Для любого счётного разбиения $\mathcal{F}$ и любой функции $f \in L^1(I)$ выполняются равенства

$$\mathcal{M}_{E(\mathcal{M}_f|\mathcal{F})} = \mathcal{M}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} = \mathcal{M}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}.$$

Доказательство. Первое из равенств вытекает непосредсвенно из теоремы 5.6. Что касается второго, то в соответствии с предложением 0.6.1) и замечанием 5.2, а также формулами $({}_0.13)$, $({}_0.2)$, имеем

$$\mathcal{M}_{E(\mathcal{M}_f|\mathcal{F})} = \sum_{\tilde{f}\sim f,\ \tilde{\mathcal{F}}\sim\mathcal{F}} \mathcal{M}_{E(\mathcal{M}_{\tilde{f}}|\tilde{\mathcal{F}})} =$$

$$= \sum_{\tilde{f}\sim f,\ \text{и.р. } \tilde{\mathcal{B}}\sim\mathcal{F}} \mathcal{M}_{E(\mathcal{M}_{\tilde{f}}|\tilde{\mathcal{B}})} = \sum_{\text{и.р. } \tilde{\mathcal{B}}\sim\mathcal{F}} \mathcal{M}_{E(\mathcal{M}_{f^*}|\tilde{\mathcal{B}})} \subseteq \mathcal{M}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}.$$

Обратное включение очевидно.
□

Симметричный идеал, порождённый множеством $E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})$, в отличие от мажорантного идеала, натянутого на это же множество, отнюдь не всегда порождается функцией $E(f^*|\mathcal{F}^*)$. Следующая теорема характеризует случай, когда он всё же порождается этой функцией (ср. с теоремой 1.13).

Теорема 5.10 Для любого счётного разбиения $\mathcal{F}$ и любой функции $f \in L^1(I)$ равенство $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} = \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}$ выполняется, тогда и только тогда, когда функция $E(f^*|\mathcal{F}^*)$ является $\mathcal{F}$-регулярной (см. определение в §4 и теорему 4.10).

Доказательство. Предположим, что выполняется равенство в условии теоремы. Тогда по определению и по теореме 5.7 функция $E(f^*|\mathcal{F}^*)$ является $\mathcal{F}$-регулярной.

Обратно, пусть функция $E(f^*|\mathcal{F}^*)$ является $\mathcal{F}$-регулярной. Если для любых $\tilde{f} \sim f$, $\tilde{\mathcal{F}} \sim \mathcal{F}$ докажем, что $E(\tilde{f}|\tilde{\mathcal{F}}) \in \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}$, то в силу леммы 0.14 получим включение $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} \subseteq \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}$, обратное к которому тривиально. Этим путём мы придём к доказываемому равенству.
Применяя предложение 0.6.1) и формулы $({}_0.2)$, $({}_5.1)$ и $({}_5.2)$, получаем, что при подходящих $\bar{f} \sim f$, и.р. $\mathcal{B} \sim \mathcal{F}$ выполняются соотношения

$$E(\tilde{f}|\tilde{\mathcal{F}})^* = E(\bar{f}|\mathcal{B}) \le E(\bar{f}|\mathcal{B})^{**}_{\mathcal{B}} \le E(f^*|\mathcal{B})^{**}_{\mathcal{B}} = f^{**}_{\mathcal{B}} \le 4/3 \cdot f^{**}_{\mathcal{F}^*} =$$

$$= 4/3 \cdot E(f^*|\mathcal{F}^*)^{**}_{\mathcal{F}^*} \le 4/3 \cdot Q \cdot \rho_Q E(f^*|\mathcal{F}^*),$$

где Q - константа из $({}_4.1)$. Тем самым $E(\tilde{f}|\tilde{\mathcal{F}}) \in \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}$.
□

Перейдём к основным теоремам этого параграфа. В первых двух из них характеризуется случай, когда с.и. $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})}$ (или, что то же самое, $\mathcal{N}_{E(\mathcal{M}_f|\mathcal{F})}$) является главным. В последних двух прослеживается аналогия между свойствами регулярности и $\mathcal{B}$-регулярности функций из $L^1(I)$.

Теорема 5.11. Для любого счётного разбиения $\mathcal{F}$ и любой функции $f \in L^1(I)$ следующие условия равносильны.

1). Существует функция $g \in L^1(I)$, такая что $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} = \mathcal{N}_g$;

2). $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} = \mathcal{N}_{f^{**}_{\mathcal{F}^*}}$;

3). $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} = \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}$.

4). $f^{**}_{\mathcal{F}^*}$ - $\mathcal{F}$-регулярная функция;

5). $\mathcal{M}_{f^{**}_{\mathcal{F}^*}} = \mathcal{M}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}$;

6). $f^{**}_{\mathcal{F}^*} \in \mathcal{M}_f$.

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Если $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} = \mathcal{N}_g$, то по теореме 5.7 g - $\mathcal{F}$-регулярная функция, значит по теореме 4.10 $g^{**}_{\mathcal{F}^*} \simeq g^*_{\mathcal{F}^*}$. Кроме того по теореме 5.9 выполняется равенство $\mathcal{M}_g = \mathcal{M}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}$, значит $g^{**} \simeq E(f^*|\mathcal{F}^*)^{**}$, откуда $g^{**}_{\mathcal{F}^*} \simeq f^{**}_{\mathcal{F}^*}$. Тем самым $g^* \geq g^*_{\mathcal{F}^*} \simeq f^{**}_{\mathcal{F}^*}$, что доказывает включение $\mathcal{N}_{f^{**}_{\mathcal{F}^*}} \subseteq \mathcal{N}_g$. Обратное включение обеспечено теоремой 5.4.

Импликация 2) $\Rightarrow$ 1) тривиальна.

2) $\Rightarrow$ 3). По определению $f^*_{\mathcal{F}^*} \leq E(f^*|\mathcal{F}^*)$, так что $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})} \subseteq \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}$. Обратное включение тривиально.

Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) следует из теоремы 5.10 и равносильности $\mathcal{F}$-регулярности для функций $E(f^*|\mathcal{F}^*)$ и $f^{**}_{\mathcal{F}^*}$.

4) $\Rightarrow$ 5). Функции $f^{**}_{\mathcal{F}^*}$ и $E(f^*|\mathcal{F}^*)^{**}_{\mathcal{F}^*}$ совпадают, значит по теореме 4.10 $(f^{**}_{\mathcal{F}^*})^{**}_{\mathcal{F}^*} \simeq E(f^*|\mathcal{F}^*)^{**}_{\mathcal{F}^*}$, что в силу $\mathcal{F}^*$-ступенчатости функций $E(f^*|\mathcal{F}^*)$ и $f^{**}_{\mathcal{F}^*}$ влечёт эквивалентность $(f^{**}_{\mathcal{F}^*})^{**} \simeq E(f^*|\mathcal{F}^*)^{**}$, т.е. $\mathcal{M}_{f^{**}_{\mathcal{F}^*}} = \mathcal{M}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)}$.

5) $\Rightarrow$ 6). С учётом включения $\mathcal{M}_{E(f^*|\mathcal{F}^*)} \subseteq \mathcal{M}_f$ эта импликация тривиальна.

6) $\Rightarrow$ 2). Включение $f^{**}_{\mathcal{F}^*} \in \mathcal{M}_f$ можно записать в виде $f^{**}_{\mathcal{F}^*} \in E(\mathcal{M}_f|\mathcal{F}^*)$. Из теоремы 5.6 и леммы 5.1.2) выводим

$$\mathcal{N}_{f^{**}_{\mathcal{F}^*}} \subseteq \mathcal{N}_{E(\mathcal{M}_f|\mathcal{F}^*)} = \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F}^*)} = \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{F})}.$$

Обратное включение вытекает из теоремы 5.4.
□

Теорема 5.12 Пусть $f = f^* \in L^1$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^* = (b_n)$ - некоторое монотонное и.р. Следующие условия равносильны.

1. Функция f $\mathcal{B}$-регулярна;

2. Функция $E(f|\mathcal{B})$ $\mathcal{B}$-регулярна.

3. Функция $f_{\mathcal{B}}^{**}$ $\mathcal{B}$-регулярна.

4. $\mathcal{N}_{f_{\mathcal{B}}} = \mathcal{N}_{f_{\mathcal{B}}^{**}} = \mathcal{N}_{E(f_{\mathcal{B}}|\mathcal{B})}$;

5. $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})} = \mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B})}$.

6. Отметим, что если положить $f = f^*$, $\mathcal{F} = \mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, то из совпадения условия 3) теоремы 5.11 с условием 5) теоремы 5.12 вытекает, что все условия этих теорем равносильны между собой.

.

Доказательство. 1. $\Rightarrow$ 2. Для $\mathcal{B}$-регулярной функции f по формулам $({}_0.2)$ и $({}_5.1)$ имеем:

$$E(f|\mathcal{B})_{\mathcal{B}}^{**} = f_{\mathcal{B}}^{**} \simeq f_{\mathcal{B}} \leq E(f|\mathcal{B}) = E(f|\mathcal{B})_{\mathcal{B}} \leq E(f|\mathcal{B})_{\mathcal{B}}^{**},$$

так что функция $E(f|\mathcal{B})$ также $\mathcal{B}$-регулярна.

2. $\Rightarrow$ 3. Если $E(f|\mathcal{B})$ $\mathcal{B}$-регулярна, то по теореме 5.10 выполняется равенство $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})} = \mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B})}$. Но тогда применима теорема 5.11, пп. 1),4), согласно которой функция $f_{\mathcal{B}}^{**}$ $\mathcal{B}$-регулярна.

3. $\Rightarrow$ 4. Оба равенства прямо следуют из теоремы 4.10.

4. $\Rightarrow$ 1. Вытекает непосредственно из определения $\mathcal{B}$-регулярности, также см. 4.10.

1. $\Rightarrow$ 5. По теореме 4.10 $f_{\mathcal{B}^*}^{**} \simeq f_{\mathcal{B}}$. Далее, применяя теорему 5.11 пп. 2) - 4), получим $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})} \subseteq \mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B})}$. Обратное включение тривиально.

5. $\Rightarrow$ 2. Вытекает, например, из теоремы 5.11.

$\square$

Теорема 5.14, последняя в этом параграфе, показывает равносильность $\mathcal{B}$-регулярности функций $g := f_{\mathcal{F}^*}^{**}$ и $g_{\mathcal{B}^*}^{**}$. В этом отношении ещё раз проявляется отмеченная выше аналогия между свойствами $\mathcal{B}$-регулярности и регулярности, ибо регулярность функций f и f^{**} равносильна, следствие 1.5. В следующей ниже теореме 5.13 показываются причины этой аналогии.

Напомним, что с функцией $f = f^* \in L^1(I)$ посредством вогнутой функции $\psi(t) := \int_0^t f d\lambda,\ t \in I$, связана последовательность натуральных чисел $q_{\psi(\mathcal{D})}(k)$:

$$q_{\psi(\mathcal{D})}(k) = \textit{ количество точек последовательности } \{\psi(2^{-n})\}_{n=0}^{\infty}$$
$$\textit{на промежутке } D_k,\ k \geq 1.$$

В лемме 1.10 было показано, что f регулярна, тогда и только тогда, когда последовательность натуральных чисел $q_{\psi(\mathcal{D})}(k)$ ограничена. Выведем аналог этого утверждения для $\mathcal{B}$-регулярности. В силу 0.11.3) можно заменить $\mathcal{B}$ на двоичное и.р. $\mathcal{B}^*_{(2)} := (2^{-m_n})$.

Определим последовательность

$$\{q_{\psi(\mathcal{B}^*_{(2)})}(k)\}_{k=1}^{\infty} = \text{ количество точек последовательности } \{\psi(2^{-m_n})\}_{n=0}^{\infty}$$

$$\text{на промежутке } D_k,\ k \geq 1.$$

Теорема 5.13. Функция $f^{**}_{\mathcal{B}^*}$ является $\mathcal{B}^*$-регулярной, тогда и только тогда, когда ограничена последовательность натуральных чисел $\{q_{\psi(\mathcal{B}^*_{(2)})}(k)\}_{k=1}^{\infty}$.

Доказательство. Поскольку $f^{**}_{\mathcal{B}^*_{(2)}} = \Big(E(f^*|\mathcal{B}^*_{(2)})\Big)^{**}_{\mathcal{B}_{(2)}}$, можно взять в качестве f функцию $E(f^*|\mathcal{B}^*_{(2)})$. Принимая во внимание теорему 5.11, леммы 0.3 и 5.1, замечание 4.10.4), а также $\mathcal{B}^*_{(2)}$-ступенчатость функций $f^{**}_{\mathcal{B}^*_{(2)}}$ и $E(f^*|\mathcal{B}^*_{(2)})$ достаточно доказать равносильность следующих двух условий.
1). Существует $C > 1$, такое что

$$\int_0^{s_n} f^{**}_{\mathcal{S}} d\lambda \leq C \cdot \psi(s_n),\ n \geq 0;$$

2). Существуют натуральное p и вещественное $\gamma,\ 0 < \gamma < 1$, такие что

$$\psi(s_{n+p}) \leq \gamma \cdot \psi(s_n),\ n \geq 0, \tag{$_5$.6}$$

где через $\mathcal{S} := (s_n)$ обозначается и.р. $\mathcal{B}_{(2)}$.

Докажем, что условие 2) влечёт условие 1). Неравенство ($_5$.6) можно переписать в форме

$$\psi(s_{n+kp+i}) \leq \gamma^k \cdot \psi(s_{n+i}),\ n \geq 0,\ k \geq 0,\ i = 0, 1, ..., p-1.$$

Отсюда для любого $n \geq 0$ выводим:

$$\int_0^{s_n} f^{**}_{\mathcal{S}} d\lambda = \int_0^{s_n} \sum_{k=n}^{\infty} f^{**}(s_k) 1_{(s_{k+1}, s_k]} d\lambda = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{p-1} f^{**}(s_{n+kp+i})(s_{n+kp+i} - s_{n+kp+i+1}) \leq$$

$$\leq \sum_{k=0}^{\infty} \gamma^k \sum_{i=0}^{p-1} \psi(s_{n+i}) \leq \frac{p}{1-\gamma} \cdot \psi(s_n),$$

и полагаем $C = \frac{p}{1-\gamma}$.

Докажем, что условие 1) влечёт условие 2). Из 1) для любого натурального n получаем:

$$\frac{\int_0^{s_{n+1}} f^{**}_{\mathcal{S}} d\lambda}{\int_0^{s_n} f^{**}_{\mathcal{S}} d\lambda} = 1 - \frac{\psi(s_n)}{\int_0^{s_n} f^{**}_{\mathcal{S}} d\lambda}(1 - \frac{s_{n+1}}{s_n}) \leq 1 - \frac{1}{2C} := \gamma \in (0, 1).$$

Таким образом при любом натуральном p выполняются неравенства

$$\psi(s_{n+p}) \leq \int_0^{s_{n+p}} f_{\mathcal{S}}^{**} d\lambda \leq \gamma \cdot \int_0^{s_{n+p-1}} f_{\mathcal{S}}^{**} d\lambda \leq ...$$

$$\leq \gamma^p \cdot \int_0^{s_n} f_{\mathcal{S}}^{**} d\lambda \leq C \cdot \gamma^p \cdot \psi(s_n).$$

Остаётся лишь выбрать такое p, для которого $C \cdot \gamma^p < 1$.
$\square$

Кроме того, что теорема 5.13 может оказаться полезной при проверке условий теоремы 5.11, она представляет и самостоятельный интерес, позволяя легко строить главные с.и., усредняемые или не усредняемые любым наперёд заданным двоичным и.р. Это использовано при доказательстве теоремы 6.8. и доказательстве необходимости в теореме 6.4.

Теорема 5.14. Пусть $\mathcal{F}$ любое счётное разбиение, $f \in L^1(I)$ - любая функция. Функции $g := f_{\mathcal{F}^*}^{**}$ и $g_{\mathcal{F}^*}^{**}$ одновременно либо являются, либо не являются $\mathcal{F}$-регулярными.

Доказательство. То, что $\mathcal{F}$-регулярность g влечёт $\mathcal{F}$-регулярность $g_{\mathcal{F}^*}^{**}$ прямо следует из теоремы 4.10.2). Докажем обратное.

Не умаляя общности, можно считать, что $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}_{(2)}^* := (2^{-m_n})$, см. замечание 0.11.3). Положим $\psi_1(t) := \int_0^t g_{\mathcal{F}^*}^{**} d\lambda;\ \psi_2(t) := \int_0^t g_{\mathcal{F}^*} d\lambda = \int_0^t f_{\mathcal{F}^*}^{**} d\lambda,\ t \in I$. Согласно теореме 5.13, достаточно показать, что ограниченность последовательности $\{q_{\psi_1(\mathcal{F}_{(2)}^*)}(k)\}_{n=0}^{\infty}$ влечёт ограниченность последовательности $\{q_{\psi_2(\mathcal{F}_{(2)}^*)}(k)\}_{n=0}^{\infty}$.

Допустим противное:

$$\limsup_{k\to\infty} q_{\psi_2(\mathcal{F}_{(2)}^*)}(k) = \infty, \text{ тогда как } \limsup_{k\to\infty} q_{\psi_1(\mathcal{F}_{(2)}^*)}(k) \leq K \qquad ({}_5.7)$$

для некоторого натурального K. Можно считать K настолько большим, что

$$2K^2 + 1 \leq 2^{K^2-1}. \qquad ({}_5.8)$$

При любом $n \geq 0$ выполняются равенства

$$\int_0^{2^{-m_n}} g_{\mathcal{F}^*}^{**} d\lambda = \int_0^{2^{-m_n}} \sum_{i\geq n} g^{**}(2^{-m_i}) \cdot 1_{(2^{-m_{i+1}}, 2^{-m_i}]} =$$

$$= \sum_{i\geq n} g^{**}(2^{-m_i})(2^{-m_i} - 2^{-m_{i+1}}) = \sum_{i\geq n}(1 - 2^{m_i - m_{i+1}}) \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda.$$

Так как $m_{i+1} - m_i \geq 1$ для любого $i \geq 0$, то

$$2^{-1} \leq 1 - 2^{m_i - m_{i+1}} \leq 1,\ i \geq 0,$$

так что можно записать

$$2^{-1} \cdot \sum_{i \geq n} \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda \leq \int_0^{2^{-m_n}} g^{**}_{\mathcal{F}^*} d\lambda \leq \sum_{i \geq n} \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda, \ n \geq 0, \qquad ({}_5.9)$$

Вследствие (${}_5.7$) найдётся такой промежуток $D_j = (2^{-j}, 2^{-j+1}]$, $j \geq 1$, на котором находится не менее $K^2 + 1$ точек последовательности $\{\int_0^{2^{-m_n}} g d\lambda\}_{n=0}^{\infty}$. Возьмём такое натуральное n, что

$$2^{-j+1} \geq \int_0^{2^{-m_n}} g d\lambda \geq \int_0^{2^{-m_{n+1}}} g d\lambda \geq ... \geq \int_0^{2^{-m_{n+K^2}}} g d\lambda > 2^{-j}. \qquad ({}_5.10)$$

По лемме 0.1 и в силу (${}_5.9$) и (${}_5.10$) имеем:

$$\frac{1}{2^{K^2}} \geq \frac{\int_0^{2^{-m_{n+K^2}}} g^{**}_{\mathcal{F}^*} d\lambda}{\int_0^{2^{-m_n}} g^{**}_{\mathcal{F}^*} d\lambda} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{\sum_{i \geq n+K^2} \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda}{\sum_{i \geq n} \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \Big(1 - \frac{\sum_{i=n}^{n+K^2-1} \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda}{\sum_{i \geq n} \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda}\Big) = \frac{1}{2} \cdot [1 - \Big(1 + \frac{\sum_{i \geq n+K^2} \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda}{\sum_{i=n}^{n+K^2-1} \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda}\Big)^{-1}]. \qquad ({}_5.11)$$

Но, согласно (${}_5.9$) и (${}_5.10$),

$$\sum_{i=n}^{n+K^2-1} \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda \leq K^2 \cdot 2^{-j+1}; \ \sum_{i \geq n+K^2} \int_0^{2^{-m_i}} g d\lambda \geq \int_0^{2^{-m_{n+K^2}}} g d\lambda > 2^{-j}.$$

Поэтому из (${}_5.11$) вытекает, что

$$\frac{1}{2^{K^2}} > \frac{1}{2}[1 - \Big(1 + \frac{2^{-j}}{K^2 \cdot 2^{-j+1}}\Big)^{-1}] = \frac{1}{2}(1 - \frac{2K^2}{2K^2+1}) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2K^2+1},$$

т.е. $2K^2 + 1 > 2^{K^2-1}$, вопреки (${}_5.8$). Полученное противоречие доказывает теорему 5.14.
□

Теорема 5.15. Пусть $f = f^* \in L^1(I)$, $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$. Равенства

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}|\mathcal{B})} = \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})} = \mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B})} \qquad ({}_5.11)$$

справедливы, тогда и только тогда, когда f $\mathcal{B}$-регулярна.

Доказательство. Пусть f $\mathcal{B}$-регулярна. Второе из равенств (${}_5.11$) выполнено по теореме 5.12.5); докажем первое. По теореме 5.7 для любой функции $f \in L^1(I)$ и.р. $\mathcal{B}$ усредняет с.и. $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}$:

$$E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}|\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})},$$

поэтому, заменяя в левой части (${}_5.11$) $E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}|\mathcal{B})$ на $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}$, получим

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}|\mathcal{B})} \subseteq \mathcal{N}_{\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}} = \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}.$$

С другой стороны, очевидным образом $E(E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})|\mathcal{B}) \subseteq E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}|\mathcal{B})$, так что

$$E(f|\mathcal{B}) \in E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}) = E(E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})|\mathcal{B}) \subseteq E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}|\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}|\mathcal{B})}.$$

Равенство $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}|\mathcal{B})} = \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B})}$ доказано.

Обратно, если выполняются равенства ($_5$.11), то второе из них по теореме 5.12.5) влечёт $\mathcal{B}$-регулярность f.

Замечание 5.16. Обозначим через $\mathfrak{X}$ совокупность всех с.и. пространства $L^1(I)$, а через $\mathfrak{N} := \{\mathcal{N}_g,\ g \in L^1(I)\}$ совокупность всех главных с.и. этого пространства. Рассмотрим отображение $\mathcal{T}_{\mathcal{B}} : \mathfrak{N} \to \mathfrak{X}$:

$$\mathcal{T}_{\mathcal{B}}(\mathcal{N}_g) := \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_g|\mathcal{B})},\ g \in L^1(I).$$

Теорема 5.15 означает, что область идемпотентности отображения $\mathcal{T}_{\mathcal{B}}$ совпадает с множеством всех $\mathcal{B}$-регулярных функций.
□

§6. Проверочные и универсальные σ-подалгебры. [18], [29], [35]

В этом параграфе изучается класс ***проверочных*** *σ-подалгебр, т.е. таких что мажорантность всякого с.и. можно проверять на единственном бистохастическом проекторе - операторе усреднения по любой из σ-подалгебр этого класса. Кроме того вводится класс* ***универсальных*** *σ-подалгебр, каждая из которых имеет свойство усреднять любой симметричный идеал.*

Из теоремы 3.2 следует, что, если некоторый идеал X, $X \subseteq L^1(I)$, усредняется любой $\sigma-$подалгеброй в Λ, то X - мажорантный с.и. Но из того, что отдельно взятая $\sigma-$подалгебра усредняет некоторый с.и. мажорантность последнего отнюдь не следует. Это даёт основания для следующего определения.

σ-подалгебра $\mathcal{A}$ называется *проверочной*, если из того, что $\mathcal{A}$ усредняет симметричный идеал X, следует, что X мажорантный идеал.

Очевидно, что всякая σ-подалгебра, равноизмеримая с проверочной, сама является проверочной. Из замечания 0.11.3),4) следует, что счётное разбиение является проверочным, тогда и только тогда, когда проверочным является его двоичная проекция, и что любое счётное разбиение более мелкое, чем проверочное, или эквивалентное более мелкому, чем проверочное, тоже является проверочным.

Теорема 6.1. Пусть (Ω, Σ, μ) - непрерывное вероятностное пространство. Всякая непрерывная σ-подалгебра $\mathcal{A}$ в Σ, имеющая в Σ непрерывное независимое дополнение, является проверочной.

Доказательство. 1. Докажем сначала, что $\mathcal{A}$ проверочная. Избегая громоздких обозначений, будем считать, что $(\Omega, \Sigma, \mu) = (I, \Lambda, \lambda) \times (I, \Lambda, \lambda)$ есть лебегов единичный квадрат, а σ-подалгебра $\mathcal{A}$ порождёна всеми лебеговыми "вертикальными полосами"квадрата, т.е. множествами вида $A \times I$, где $A \in \Lambda$. В случае общего вероятностного пространство доказательство дословно повторяет приведенные ниже рассуждения.

Отметим, что оператор усреднения по $\mathcal{A}$ действует как усреднение функции $f(t, s)$, $f \in L^1(I^2)$ по второй переменной:

$$E(f|\mathcal{A})(u, v) = \int_0^1 f(u, v)dv. \qquad ({}_6.1)$$

Допустим, что $\mathcal{A}$ усредняет с.и. $X \subseteq L^1(I^2)$, не являющийся мажорантным:

$$E(X|\mathcal{A}) \subseteq X. \qquad ({}_6.2)$$

С.и. $\tilde{X} \subseteq L^1(I)$, $\overset{e}{\sim}$ эквивалентный X, также не является мажорантным. По теореме 3.2 для $\tilde{X}$, найдутся и.р. $\tilde{\mathcal{P}} := \sigma(\tilde{P}_n,\ n \geq 1)$, на I и элемент $\tilde{x}$, $\tilde{x} \in \tilde{X}$, такие что

$$E(\tilde{x}|\tilde{\mathcal{P}}) \notin \tilde{X}. \qquad ({}_6.3)$$

Не умаляя общности, можно считать функцию $\tilde{x}$ элементарной и полагать $\tilde{x}_n := \tilde{x} \cdot 1_{\tilde{P}_n} = \sum_{i\geq 1} r_i^n \cdot 1_{\tilde{A}_i^n}$, где попарно дизъюнктные при $i \neq j$ подмножества $\tilde{A}_i^n \subseteq I$ положительной меры α_i^n, такие что $\bigcup_{i\geq 1} \tilde{A}_i^n = \tilde{P}_n,\ n \geq 1$. Пусть $\alpha_n := \lambda(\tilde{P}_n),\ n \geq 1$, а $\sigma(P_i^n,\ i \geq 1)$, обозначает существующее в силу предложения 0.4 счётное разбиение промежутка I на попарно дизъюнктные промежутки $\tilde{P}_i^n$ длины $\frac{\alpha_i^n}{\alpha_n},\ i, n \geq 1$.

Положим $P_n := \tilde{P}_n \times I;\ P_i^n := \tilde{P}_n \times \tilde{P}_i^n,\ i, n \geq 1$, Очевидно, что при любом $n \geq 1$ функции $x_n := \Sigma_{i\geq 1} r_i^n 1_{P_i^n}$ и $\tilde{x}_n$ равноизмеримы, откуда следует равноизмеримость функций $\tilde{x}$ и $x := \Sigma_{n\geq 1} x_n$, и, значит, $x \in X$. Обозначим через $\mathcal{P}$ разбиение $\sigma(P_n,\ n \geq 1)$ единичного квадрата. Применяя формулу $({}_6.1)$, приходим к противоречию с $({}_6.2)$: для $x \in X$

$$E(x|\mathcal{A}) = E(x|\mathcal{P}) \sim E(\tilde{x}|\tilde{\mathcal{P}}) \notin \tilde{X},$$

□

Перейдём к рассмотрению проверочных разбиений.

Лемма 6.3. Для любого $p,\ 0 < p < 1$ и.р. $\mathcal{B}^{(p)} := (p^n)$ является проверочным.

Доказательство. Нужно доказать, что, если $\mathcal{B}^{(p)}$ усредняет с.и $X,\ X \subseteq L^1(I, \Lambda, \lambda)$, то X - мажорантный идеал.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и предположим, что $y \prec z \in X$. Не умаляя общности, функцию y можно считать элементарной. По формуле $({}_0.2)$ $y^* \simeq E(\rho_p y^*|\mathcal{B}^{(p)})$, так что достаточно показать, что $E(\rho_p y^*|\mathcal{B}^{(p)}) \in X$. Но $\rho_p y^* \prec \rho_p z^* \in X$, откуда имеем: $\int_0^t \rho_p y^* d\lambda < \int_0^t x^*,\ t \in I$, где $x^* := \rho_p z^* + \varepsilon \cdot \mathbf{1} \in X$. Согласно лемме 3.7, найдётся такая функция $\tilde{x}$, равноизмеримая с x^* и, значит, содержащаяся в X, которая удовлетворяет неравенству $E(\rho_p y^*|\mathcal{B}^{(p)}) \leq E(\tilde{x}|\mathcal{B}^{(p)}) \in X$.
□

Теорема 6.4. Пусть $\mathcal{T} = (t_n)$ и.р., принадлежащее с.в. $\vec{a} = (a_n)$. Для того, чтобы оно было проверочным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось записываемое равносильным образом условие

$$\sup_{n\geq 1} \frac{a_n}{\sum_{k>n} a_k} \Big(= \sup_{n\geq 1} \frac{t_{n-1} - t_n}{t_n} \Big) < \infty, \text{ или, равносильно, } \sup_{n\geq 1} \frac{t_{n-1}}{t_n} < \infty. \qquad ({}_6.4)$$

Лемма 6.5. Выполнение условия $({}_6.4)$ равносильно существованию такого вещественного числа $p,\ 0 < p < 1$, что всякий промежуток $B_n^{(p)} = (p^n, p^{n-1}],\ n \geq 1$, и.р. $\mathcal{B}^p$ является $\mathcal{T}-$*занятым*, то есть содержит хотя бы одну точку последовательности $\{t_n\}$.

Доказательство. Необходимость. Предположим, что для любого p вида $p = 2^{-\nu^2},\ \nu = 1, 2, ...,$ существует $\mathcal{T}-$незанятый промежуток $B_m^{(2^{\nu^2})}$. Обозначим через t_{n-1}^ν и t_n^ν ближайшие к этому промежутку справа и слева точки последовательности $\{t_n\}$. Тогда $\limsup_{n\to\infty} \frac{t_{n-1}}{t_n} \geq \limsup_{\nu\to\infty} \frac{2^{-(\nu-1)^2}}{2^{-\nu^2}} = \limsup_{\nu\to\infty} 2^{2\nu-1} = \infty$ в противоречие с $({}_6.4)$.

Достаточность. Пусть найдётся вещественное p, $0 < p < 1$, для которого всякий промежуток вида $B_n^{(p)} = (p^n, p^{n-1},]$, $n \geq 1$, $\mathcal{T}$−занят. Для любой точки t_k последовательности $\{t_n\}$, рассмотрим два случая: 1) t_k, $t_{k-1} \in B_n^{(p)}$. Тогда $\frac{t_{k-1}}{t_k} \leq \frac{p^{n-1}}{p^n} = p < \infty$. 2). $t_k \in B_{n+1}^{(p)}$, $t_{k-1} \in B_n^{(p)}$. Тогда $\frac{t_{k-1}}{t_k} \leq \frac{p^{n-1}}{p^{n+1}} = p^{-2}$. Тем самым в обоих случаях $({}_6.4)$ выполнено.
□

С помощью этой леммы докажем *достаточность* в теореме 6.4. Обозначим через C левую часть в $({}_6.4)$ и положим $p = (C+1)^{-1}$. Разредим последовательность $\{t_n\}$, удалив из неё точки, содержащиеся в промежутках вида $B_{2n-1}^{(p)}$, а в промежутках вида $B_{2n}^{(p)}$ оставим лишь по одной её точке, $n \geq 1$. Оставшиеся точки перенумеруем заново в последовательность $\{t'_n\}$ в порядке убывания на I, считая что $t'_0 = 1$.

По предложению 0.6 достаточно показать проверочность интервального разбиения $\mathcal{T}' := (t'_n)$. В силу леммы 6.3 всякое разбиение, принадлежащее с.в. $\vec{p}_2 = (p^{2n})$ (нормированному коэффициентом $K := p^{-2} - 1$) является проверочным. Значит, если взять любой с.и. X, не являющийся мажорантным, то по замечанию 0.11.4) найдётся такой его элемент x, что

$$x = x \cdot 1_{\bigcup_{n\geq 1} B_{2n-1}^{(p^2)}} \text{ и } \sum_{n\geq 1} [\lambda(B_{2n-1}^{(p^2)})]^{-1} \int_{B_{2n-1}^{(p^2)}} x \cdot d\lambda 1_{B_{2n-1}^{(p^2)}} \notin X.$$

Теперь по выбору последовательности $\{t'_n\}$ и элемента x имеем:

$$E(x|\mathcal{T}') = K \sum_{n\geq 0} \frac{1}{t'_n - t'_{n+1}} \int_{t'_{n+1}}^{t'_n} x \cdot d\lambda \cdot 1_{(t'_{n+1}, t'_n]} \geq$$

$$\geq K\rho_{p^{-2}} \Big(\sum_{n\geq 1} [\lambda(B_{2n-1}^{(p^2)})]^{-1} \int_{B_{2n-1}^{(p^2)}} x \cdot d\lambda 1_{B_{2n-1}^{(p^2)}} \Big) \notin X,$$

чем достаточность доказана.

Необходимость. Предположим, что и.р. $\mathcal{T} = (t_n)$ принадлежащий монотонному с.в. $\vec{a} = (a_n)$, не удовлетворяющему условию $({}_6.4)$. Наша цель - построить функцию $f = f^* \in L^1(I)$ таким образом, чтобы с. и. $\mathcal{N}_f$ не был мажорантным, но усреднялся бы $\mathcal{T}$.

Согласно замечанию 0.11.3), не умаляя общности, можно заменить и.р. $\mathcal{T}$ его двоичной проекцией, - и.р. $\mathcal{T}_{(2)} := (2^{-m_n})$, где $0 = m_0 < m_1 < ... < m_n < ...$ и по предположению $\limsup_{n\to\infty}(m_{n+1} - m_n) = \infty$.

Возьмём последовательность натуральных чисел $\{q_n\}$, $q_n = m_{n+1} - m_n$, $n \geq 1$, и преобразуем её, полагая $q'_{m_n} = 1$, $q'_{m_n+1} = q_{m_n+1} + q_{m_n} - 1$, $q'_k = q_k$ при $k \neq$

$m_n,\ k \neq m_n + 1,\ n \geq 1.$

Подпоследовательность $\{q'_{m_n}\}$ неограниченной натуральной последовательности $\{q'_n\}$ по построению ограничена: $q'_{m_n} = 1$. Исходя из натуральной последовательности $\{q'_n\}$, построим невозрастающую функцию f в соответствии с правилами $\mathcal{U}_1)\ -\ \mathcal{U}_4)$ леммы 1.9. В силу леммы 1.10 f не регулярна и, значит, с.и. $\mathcal{N}_f$ не является мажорантным, но в силу теоремы 5.13 $\mathcal{T}_{(2)}$ усредняет с.и. $\mathcal{N}_f$.
□

Замечание 6.6. 1. В части необходимости в теореме 6.4 нельзя опустить условие монотонности с.в. $\vec{a}$. Это следует из того, что координаты любого с.в. можно переставить в таком порядке, что получившийся с.в. не будет удовлетворять условию ($_6$.4).

2. Из теоремы 6.4 и предложения 0.6 легко получить следующее утверждение.

Для того, чтобы разбиение $\mathcal{F}$ было проверочным, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f \in L^1(I)$ выполнялась эквивалентность

$$E(f^*|\mathcal{F}^*) \simeq f^*.$$

Следствие 6.7. Для любого и.р. $\mathcal{B} = (b_n)$ найдётся более мелкое проверочное и.р.

Доказательство. Для положительного v обозначим $[v] :=$ *целая часть* $v +$ $1,\ 0 < \frac{v}{[v]} < 1$. Пусть $\vec{\beta} = (\beta_n)$ обозначает с.в., которому принадлежит $\mathcal{B}$. Построим и.р $\mathcal{A} = (a_n)$, с.в. которого есть $\vec{\alpha} = (\alpha_n)$, так что $\sum_{k>n} \alpha_k = a_n,\ n \geq 1$, и затем воспользуемся достаточным критерием проверочности ($_6$.4).

Положим

$$a_0 := 1, a_1 := 1 - \frac{\beta_1}{[\frac{\beta_1}{b_1}]}, ..., a_{[\frac{\beta_1}{b_1}]} := 1 - [\frac{\beta_1}{b_1}] \cdot \frac{\beta_1}{[\frac{\beta_1}{b_1}]} = 1 - \beta_1 = b_1;$$

$$a_{[\frac{\beta_1}{b_1}]+1} := b_1 - \frac{\beta_2}{[\frac{\beta_2}{b_2}]}, ...,\ a_{[\frac{\beta_1}{b_1}]+[\frac{\beta_2}{b_2}]} := b_1 - [\frac{\beta_2}{b_2}] \cdot \frac{\beta_2}{[\frac{\beta_2}{b_2}]} := b_1 - \beta_2 = b_2, ...$$

$$a_{[\frac{\beta_1}{b_1}]+[\frac{\beta_2}{b_2}]+...+[\frac{\beta_{m-1}}{b_{m-1}}]+1} := b_{m-1} - \frac{\beta_m}{[\frac{\beta_m}{b_m}]}, ..., a_{[\frac{\beta_1}{b_1}]+[\frac{\beta_2}{b_2}]+...+[\frac{\beta_{m-1}}{b_{m-1}}]+[\frac{\beta_m}{b_m}]} :=$$

$$b_{m-1} - [\frac{\beta_m}{b_m}] \cdot \frac{\beta_m}{[\frac{\beta_m}{b_m}]} = b_{m-1} - \beta_m = b_m, ...$$

Поскольку интервальное разбиение $\mathcal{A} = (a_n)$ подразбивает своими точками $a_n,\ n \geq 1$, каждый промежуток $B_k,\ k \geq 1$, разбиения $\mathcal{B}$, то $\mathcal{A}$ мельче, чем $\mathcal{B}$. Кроме того, $0 < \sup_{m \geq 1} \frac{a_m}{\alpha_m} \leq \sup_{n \geq 1} \frac{\frac{\beta_n}{[\frac{\beta_n}{b_n}]}}{b_n} \leq 1$. Тем самым выполняется условие

$({}_{6}.4)$, значит $\mathcal{A}$ - проверочное разбиение.
$\square$

В [35], теорема 3.1, приведено доказательство следующего результата.

Теорема. Для того чтобы σ-подалгебра $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subseteq \Lambda$, усредняла любой идеал $X \subseteq L^1(I)$, необходимо и достаточно, чтобы она была конечным разбиением.

Характеризуя усредняющее свойство σ-подалгебр, ограничим класс идеалов.

Определение 6.2.

1. σ-подалгебра $\mathcal{A}$ в Λ называется *универсальной*, если она усредняет любой симметричный идеал $X \subseteq L^1(I)$.

2. σ-подалгебра $\mathcal{A}$ в Λ называется *сильно универсальной*, если она универсальна и оператор усреднения $E(\cdot|\mathcal{A})$ действует в любом банаховом симметричном идеале $(X, \|\cdot\|_X)$ как контрактивный проектор: $\|E(\cdot|\mathcal{A})\|_X \leq 1$.

Равноизмеримые σ-подалгебры могут быть универсальными лишь одновременно, что позволяет универсальность не более, чем счётных разбиений проверять на и.р. По определению никакая проверочная σ-подалгебра универсальной быть не может, и наоборот. С помощью теорем 4.1 и 6.4 легко построить пример счётного разбиения, не являющегося ни универсальной, ни проверочной σ-подалгеброй.

Отметим, что если σ-подалгебра $\mathcal{A}$ крупнее, чем некоторая универсальная, то и $\mathcal{A}$ является универсальной.

Тривиальными примерами дискретных универсальных σ-подалгебр являются конечные разбиения. Их *независимые дополнения*, как следует из формулы $({}_{7}.5)$, дают примеры непрерывных универсальных σ-подалгебр.

Теорема 6.8. Никакое счётное разбиение $\mathcal{B}$ не является универсальным.

Доказательство. Если $\mathcal{B}$ проверочное и.р., то универсальным оно заведомо не может быть, ибо тогда оно не усредняет немажорантные с.и. Допустим, что $\mathcal{B}$ проверочным не является. Чтобы построить функцию $f = f^* \in L^1(I)$, такую что $\mathcal{N}_f$ не усредняется $\mathcal{B}$, применим те же соображения, что и в доказательстве необходимости в теореме 6.4.

Как и при этом доказательстве можно считать $\mathcal{B}$ двоичным и.р.: $\mathcal{B} = (2^{-m_n})$, где по $({}_{6}.4)$ $0 = m_1 < m_2 < ... < m_n < ...,\ \limsup_{n\to\infty} m_{n+1} - m_n = \infty$.

Возьмём последовательность натуральных чисел $\{q_n\},\ q_n = m_{n+1} - m_n,\ n \geq 1$, и преобразуем её чуть иначе, чем раньше. Положим $q'_{m_n} = q_{m_n} + q_{m_n+1},\ q'_k =$

q_k при $k \neq m_n,\ n \geq 1$, так что $\limsup_{n\to\infty} q'_{m_n} = \infty$.

Исходя из новой натуральной последовательности $\{q'_n\}$, построим невозрастающую функцию f в соответствии с правилами $\mathcal{U}_1)\ -\ \mathcal{U}_4)$ леммы 1.9. Так как подпоследовательность $\{q'_{m_n}\}$ не ограничена, то в силу теоремы 5.13 и.р. $\mathcal{B}$ не усредняет с.и. $\mathcal{N}_f$.

$\square$

§7. Независимые дополнения для интервальных разбиений. [29], [35], [37], [38]

Продолжается начатое в [35] изучение независимого дополнение $\mathcal{B}^{\perp}$ *к интервальному разбиению* $\mathcal{B}$*, а также операторов усреднения* $E(\cdot|\mathcal{B}^{\perp})$*. Результаты применимы к любым счётным разбиениям.*

Всюду в этом параграграфе через $\mathcal{B} = \sigma(B_n = (b_n, b_{n-1}],\ 1 = b_0 > b_1 > ... > b_n \downarrow_{n\uparrow\infty} 0$ - обозначается интервальное разбиение лебегова промежутка I, стохастический вектор $\mathcal{B}$ обозначается $\vec{\beta} = (\beta_n),\ \beta_n = b_{n-1} - b_n,\ n \geq 1$, а через $\mathcal{B}^{\perp}$ обозначается независимое дополнение к $\mathcal{B}$ (которое всегда существует, см. [1].) Для получения основных результатов этого параграфа здесь приведены конструкции аналогичные §6, [35].

Для любого $n \geq 1$ определим возрастающую линейную функцию $\varphi_n(t) : B_n \to I_n$ формулой

$$\varphi_n(t) := \frac{t - b_n}{\beta_n},\ t \in B_n,$$

тогда обратная к φ линейная функция $\varphi_n^{-1} : I_n \to B_n$ определена формулой

$$\varphi_n^{-1}(s) = b_n + \beta_n \cdot s,\ s \in I_n.$$

С помощью нумерующего отображения $\nu : I \to \mathbb{N}$:

$$\nu(u) := \sum_{n\geq 1} n \cdot 1_{B_n}(u),\ u \in I,$$

определим функцию $\varphi(t) : I \to I$ формулой

$$\varphi(t) := \varphi_{\nu(t)}(t).$$

Ясно, что обратная к φ функция счётнозначна; её значения для любого $s \in I$ образуют множество

$$\{\varphi_n^{-1}(s)\}_{n\geq 1} = \{b_n + \beta_n \cdot s\}_{n\geq 1}.$$

Для любого $D \in \Lambda$ в силу линейной инвариантности меры Лебега справедливо

$$\lambda\varphi^{-1}(D) = \bigcup_{n\geq 1}\{\varphi^{-1}_{\nu(s)=n}(D \cap I_n)\} = \lambda \bigcup_{n\geq 1}(b_n + \beta_n \cdot D) = \sum_{n\geq 1}\lambda(b_n + \beta_n \cdot D) =$$

$$= \sum_{n\geq 1}\lambda(\beta_n \cdot D) = \sum_{n\geq 1}\beta_n \cdot \lambda D = \lambda D, \qquad ({}_7.1)$$

где под $b_n + \beta_n D$ понимаются попарно дизъюнктные множества $\{b_n + \beta_n \cdot d :\ d \in D\},\ n \geq 1$.
Тем самым φ есть метрический эндоморфизм на (I, Λ, λ). Отсюда следует

Лемма 7.1.Для любой функции $f \in L^1(I)$ функции f и $f \circ \varphi$ равноизмеримы.

Замечание 7.2.. 1. [35]. Образ

$$\mathcal{B}^{\perp} := \varphi^{-1}(\Lambda) \qquad ({}_7.2)$$

есть непрерывная σ-подалгебра в Λ, являющаяся независимым дополнением для $\mathcal{B}$.

2. Пусть $\lambda_{\mathcal{B}^{\perp}}$ есть сужение меры λ на $\mathcal{B}^{\perp}$. Эндоморфизм φ устанавливает изоморфизм между пространствами Лебега (в смысле [1]) (I, Λ, λ) и $(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda|_{\mathcal{B}^{\perp}})$, так что имеет место равенство

$$L^1(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda_{\mathcal{B}^{\perp}}) = \{x \in L^1(I) : \ x = x \circ \varphi\}.$$

3. Пространство $L^1(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda|_{\mathcal{B}^{\perp}})$ является подпространством в смысле Накано пространства $L^1(I)$, то есть $L^1(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda|_{\mathcal{B}^{\perp}})$ вложено в $L^1(I)$ с сохранением граней), [**?**]. При этом для любого с.и. X, $X \subseteq L^1(I)$, множество $X \cap L^1(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda|_{\mathcal{B}^{\perp}})$ есть с.и в $L^1(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda|_{\mathcal{B}^{\perp}})$. Однако, вообще говоря, неверно, что с.и. в $L^1(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda|_{\mathcal{B}^{\perp}})$ есть с.и. в $L^1(I)$. Пример такого с.и. даёт само пространство $L^1(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda|_{\mathcal{B}^{\perp}})$.
$\square$

Рассмотрим положительный линейный оператор оператор $E(\cdot|\mathcal{B}^{\perp}) : L^1(I, \Lambda, \lambda) \to L^1(I, \Lambda, \lambda)$, [35].

$$E(f|\mathcal{B}^{\perp})(t) := \sum_{i\geq 1} \beta_i \cdot f \circ \varphi_i^{-1}(t) = \sum_{i \geq 1} \beta_i \cdot f(b_i + \beta_i \cdot t), \ t \in I. \qquad ({}_7.3)$$

Замечания 7.3. Отметим некоторые свойства оператора $E(\cdot|\mathcal{B}^{\perp})$, вытекающие непосредственно из его определенияя.

1. По замечанию 7.2.2, для любой функции $f \in L^1(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda|_{\mathcal{B}^{\perp}})$ справедливо

$$E(f|\mathcal{B}^{\perp})(t) = \sum_{i\geq 1} \beta_i \cdot f(b_i + \beta_i \cdot t) = \sum_{i\geq 1} \beta_i \cdot (f \circ \varphi \circ \varphi_i^{-1})(t) = f(t), \ t \in I.$$

Следовательно, $E(L^1(I)|\mathcal{B}^{\perp}) = L^1(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda|_{\mathcal{B}^{\perp}})$. (Надлежит различать $E(\cdot|\mathcal{B}^{\perp})$ как оператор из $L^1(I)$ "в"$L^1(I)$ и $E(\cdot|\mathcal{B}^{\perp})$ как оператор из $L^1(I)$ "на"$L^1(I, \mathcal{B}^{\perp}, \lambda|_{\mathcal{B}^{\perp}})$).

2. Для всякой функции $f \in L^1(I)$ из равносильных утверждений $ii) \Leftrightarrow iii)$ теоремы 6.3.(2) [35] вытекает равенство

$$E(f \circ \varphi|\mathcal{B}) = \int_0^1 f d\lambda.$$

Аналогично имеют место равенства

$$E\Big(E(f|\mathcal{B}^{\perp})|\mathcal{B}\Big) = E\Big(E(f|\mathcal{B})|\mathcal{B}^{\perp}\Big) = \int_0^1 f d\lambda.$$

3. $E(\cdot|\mathcal{B}^{\perp})$ является бистохастическим проектором, а именно - оператором усреднения по σ-подалгебре $\mathcal{B}^{\perp}$, поэтому для любой функции $f \in L^1(I)$

$$E(f|\mathcal{B}^{\perp})^{**} \leq f^{**}.$$

При этом справедливо равенство

$$\Big(E(f^*|\mathcal{B}^{\perp})\Big)^{**} = E(f^{**}|\mathcal{B}^{\perp}). \tag{${}_7$.4}$$

Действительно,

$$\Big(E(f^*|\mathcal{B}^{\perp})\Big)^{**}(t) = \Big(\sum_{n\geq 1}\beta_n f^*(b_n+\beta_n t)\Big)^{**}(t) = \frac{1}{s}\int_0^s \sum_{n\geq 1}\beta_n f^*(b_n+\beta_n t)ds =$$

$$= \sum_{n\geq 1}\beta_n \frac{1}{s}\int_0^s f^*(b_n+\beta_n t)ds = \sum_{n\geq 1}\beta_n f^{**}(b_n+\beta_n t) = E(f^{**}|\mathcal{B}^{\perp})(t).$$

Отметим, что оператор усреднения задан на суммируемых функциях, поэтому правая часть равенства (${}_7$.4) не имеет смысла, если функция f^{**} суммируемой не является. В этом случае мы придаём выражению $E(f^{**}|\mathcal{B}^{\perp})$ смысл суммы $\sum_{n\geq 1}\beta_n f^{**}(b_n+\beta_n t)$.
□

Всюду в дальнейшем для множества $\mathcal{W} \subseteq L^1(I)$ через $E(\mathcal{W}|\mathcal{B})$ обозначается множество $\{E(w|\mathcal{B}):\ w \in \mathcal{W}\}$.

Лемма 7.4. Для оператора $E(\cdot|\mathcal{B}^{\perp})$ при любых $f \in L^1(I)$ и $0 < a \leq 1$ справедливо равенство

$$E(\rho_a f|\mathcal{B}^{\perp})(t) = \rho_a E(f|\mathcal{B}^{\perp})(t),\ t, a \in I. \tag{${}_7$.5}$$

Доказательство. По определению c/d-оператора имеем:

$$E(\rho_a f|\mathcal{B}^{\perp})(t) = \sum_{n\geq 1}\beta_n \cdot \rho_a f(b_n+\beta_n\cdot t) = \sum_{n\geq 1}\beta_n \cdot f(b_n+\beta_n\cdot a\cdot t),\ t\in I.$$

$$\rho_a E(f|\mathcal{B}^{\perp})(t) = E(f|\mathcal{B}^{\perp})(a\cdot t) = \sum_{n\geq 1}\beta_n\cdot f(b_n+\beta_n\cdot a\cdot t),\ t\in I.$$

□

Теорема 7.5. Пусть $f \in L^1(I),\ \mathcal{B} = \mathcal{B}^*$. Тогда $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})}$ есть главный с.и. в $L^1(I)$:

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})} = \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{B}^{\perp})}. \tag{${}_7$.6}$$

Доказательство. Фактически нужно доказать включение $E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^\perp) \subseteq \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{B}^\perp)}$, равносильное включению левой части ($_7$.6) в правую, ибо включение правой части ($_7$.6) в левую тривиально.

Допустим, что $g \in E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^\perp)$, т.е. $g = E(\tilde{f}|\mathcal{B}^\perp),\ \tilde{f} \in \mathcal{N}_f$. Согласно ($_7$.3),

$$g(t) = \sum_{n\geq 1} \beta_n \cdot \tilde{f}(b_n + \beta_n \cdot t) \leq$$

по неравенству Харди (см, например, [12], (9.1)) с учётом того, что последовательность (β_n) и функция $\tilde{f}^*$ монотонно не возрастают

$$\leq \sum_{n\geq 1} \beta_n \cdot \tilde{f}^*(b_n + \beta_n \cdot t),\ t \in I.$$

Так как найдутся $C > 1,\ a : 0 < a < 1$, такие что $\tilde{f}^* \leq C \cdot \rho_a f^*$, то в силу равенства ($_7$.5)

$$g^*(t) \leq C \cdot \sum_{n\geq 1} \beta_n \cdot \rho_a f^*(b_n + \beta_n \cdot t) = C \cdot E(\rho_a f^*|\mathcal{B}^\perp) = C \cdot \rho_a E(f^*|\mathcal{B}^\perp)(t),\ t \in I,$$

т.е. $\Big(E(\tilde{f}|\mathcal{B}^\perp)\Big)^* \in \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{B}^\perp)}$. Тем самым включение $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^\perp)} \subseteq \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{B}^\perp)}$ доказано.
□

Замечание 7.6. По замечанию 7.2.4 $(\mathcal{B}^\perp)\mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{B}^\perp)} = L^1(I, \Lambda, \lambda|_{\mathcal{B}^\perp}) \cap \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{B}^\perp)}$, и такое же равенство справедливо и для левой части ($_7$.6). Поэтому из теоремы 7.5 вытекает равенство

$$(\mathcal{B}^\perp)\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^\perp)} = (\mathcal{B}^\perp)\mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{B}^\perp)}.$$

□

Построим по индукции **$\mathcal{B}$-ичное представление точек промежутка I.** Исходное и.р. $\mathcal{B}$ единообразия ради обозначаем $\mathcal{B}^{(0)} = \sigma(B_n^{(0)} := (b_n^{(0)}, b_{n-1}^{(0)}])$ и называем разбиением нулевого ранга; его стохастический вектор обозначаем $\beta^{(0)} := [\beta_n^{(0)}];\ \beta_n^{(0)} := b_{n-1}^{(0)} - b_n^{(0)} > 0,\ n \geq 1;\ \sum_{n\geq 1} \beta_n^{(0)} = 1$.
Зафиксируем любую точку $u \in (0, 1]$ и обозначим $B_{i_0}^{(0)}(u)$ промежуток и.р. $\mathcal{B}^{(0)}$, содержащий u. Назовём i_0 *нулевой цифрой $\mathcal{B}$-ичного представления точки u.*
Пусть $(k-1)$-я цифра $\mathcal{B}$-ичного представления точки u определена, $k \geq 1$, т.е. счётное разбиение $(k-1)$-го ранга $\mathcal{B}^{(k-1)}$ построено. На k-м шаге строим счётное разбиение k-го ранга $\mathcal{B}^{(k)} = \varphi(\mathcal{B}^{(k-1)}) := \sigma(B_{i_0,\dots,i_k}^{(k)} := (b_{i_0,\dots i_{k-1},i_k}, b_{i_0,\dots,i_{k-1},i_k-1}])$, разбивая справа налево каждый промежуток предыдущего ранга $B_{i_0,\dots,i_{k-1}}^{(k-1)} = (b_{i_0,\dots,i_{k-1}}^{(k-1)},\ b_{i_0,\dots,i_{k-1}-1}^{(k-1)}]$ последовательностью его точек $b_{i_0,\dots,i_{k-1},i_k}^{(k)} := b_{i_0,\dots,i_{k-1},i_k-1}^{(k)} - \prod_{\nu=0}^k \beta_{i_\nu}$ при $i_k > 1$; $b_{i_0,\dots,i_{k-1},0}^{(k)} := b_{i_0,\dots,i_{k-1}-1}^{(k-1)}$.
Отметим, что с.в. счётного разбиения $\mathcal{B}^{(k)}$ есть $[\prod_{\nu=0}^k \beta_{i_\nu}] \in [\beta_n^{(0)}]^k$.
Если точка u содержится в $B_{i_0,\dots,i_k}^{(k)}$, то, обозначая этот промежуток через

$B^{(k)}_{i_0,...,i_k}(u)$, назовём число i_k *k-й цифрой $\mathcal{B}$-ичного представления точки u.* Тем самым каждой точке $u \in I$ взаимно-однозначно сопоставлена бесконечная последовательность: $u \leftrightarrow \{i_0(u), ..., i_k(u), ...\}$ натуральных цифр её $\mathcal{B}$-ичного представления.

Лемма 7.7. 1). Справедливы равенства

$$\mathcal{B}^{(k)} = \mathcal{B} \circ \varphi^{(k)},\ k \geq 0, \tag{$_7$.7}$$

где $\varphi^{(k)} := \underbrace{\varphi \circ \varphi \circ \cdots \circ \varphi}_{k}$.

2). Для любых с.и. X и Y из $L^1(I)$ и любого $k \geq 1$ справедлива равносильность

$$E(X \circ \varphi^{(k-1)}|\mathcal{B}^{(k-1)}) \subseteq Y \Leftrightarrow E(X|\mathcal{B}^{(k-1)}) \subseteq Y,$$

влекущая равносильность

$$E(X|\mathcal{B}) \subseteq Y \Leftrightarrow E(X|\mathcal{B}^{(k-1)}) \subseteq Y, \tag{$_7$.8}$$

3). σ-подалгебра $\mathbb{B} := \sigma(\bigcup_{k\geq 0} \mathcal{B}^{(k)})$ σ-алгебры Λ, порождённая всеми множествами счётных разбиений $\mathcal{B}^{(k)},\ k \geq 0$, совпадает с Λ.

Доказательство. 1). Прямо следует из определений .$\mathcal{B}^{(k)},\ k \geq 0$, и φ.

2) Поскольку $\varphi^{(k-1)}$ - эндоморфизм, то X и $X \circ \varphi^{(k-1)}$ - $\overset{e}{\sim}$эквивалентные с.и., $k \geq 1$, и в силу симметричности идеала Y равносильности 2) следуют аналогично замечанию 0.11.1).

3). Каждая точка $u \in I$ является пересечением убывающей последовательности стягивающихся к ней промежутков k-го ранга, имеющих диаметр $\prod_{\nu=0}^{k} \beta_{i_\nu}$, т.е. $u = \bigcap_{k=0}^{\infty} B^{(k)}_{i_0,...,i_k}(u)$. Обозначим через $\mathbb{R}_I$ множество всех рациональных точек промежутка I и зафиксируем любой открытый промежуток $(c, d) \subseteq I$. Для каждой его рациональной точки $r_n :\ r_n \in \mathbb{R}_I := \{r_j\}_{j\geq 1}$, через $K(r_n)$ обозначим наименьший ранг из промежутков последовательности $\{B^{(k)}_{i_0,...,i_k}(r_n)\}_{k\geq 1}$, целиком содержащихся в (c, d). Пусть u любая точка из (c, d) и пусть $u = \lim_{n(u)\to\infty} r_{n(u)}$. Очевидно, что

$$(c, d) = \bigcup_{r_{n(u)} \in \mathbb{R}_I} B^{(K(r_{n(u)}))}_{i_0,...,i_{K(r_{n(u)})}} \in \mathbb{B}.$$

Остаётся применить стандартную схему перенесения лебеговой меры λ с открытых интервалов на I.
□

Зафиксируем целое $k > 0$. Любую функцию $z = z(t) \in L^1(I, \mathcal{B}^{(k)}, \lambda),\ k > 0$, можно записать в виде $\sum_{i_0,i_1,...,i_k \geq 1} r_{i_0,i_1,...,i_k} 1_{B^{(k)}_{i_0,i_1,...,i_k}}(t)$. Переходя к исходному обозначению $\mathcal{B} = \sigma(B_j = (b_j, b_{j-1}],\ b_0 = 1,\ \beta_j = b_{j-1} - b_j,\ j \geq 1)$, для всякого $t \in I$ по определению ($_7$.3)

$$E(z|\mathcal{B}^{\perp})(t) = \sum_{j\geq 1} \beta_j \cdot z(b_j + \beta_j \cdot t) = \sum_{j\geq 1} \beta_j \cdot \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_k\geq 1} r_{i_0,i_1,\ldots,i_k} \cdot 1_{B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(t)}(b_j + \beta_j \cdot t).$$

Заметим, что если $j \neq i_0$, то $1_{B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(t)}(b_j + \beta_j \cdot t) = 0$. Поэтому предыдущее равенство можно продолжить

$$= \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_k\geq 1} \beta_{i_0} \cdot r_{i_0,i_1,\ldots,i_k} \cdot 1_{B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(t)}(b_{i_0} + \beta_{i_0} \cdot t). \qquad ({}_7.9)$$

Поскольку $1_{B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}}(b_{i_0} + \beta_{i_0} \cdot t) = 1 \Leftrightarrow (b_{i_0} + \beta_{i_0} \cdot t) \in B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}$, причём $r_{i_0,i_1,\ldots,i_k} = \frac{1}{\prod_{\nu=0}^{k} \beta_{i_\nu}} \cdot \int_{B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(t)} z d\lambda$, то сумма в ($_7$.9) равна

$$= \sum_{i_0,i_1,\ldots,i_k\geq 1} \frac{\beta_{i_0}}{\prod_{\nu=0}^{k} \beta_{i_\nu}} \cdot \int_{B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(t)} z d\lambda \cdot 1_{B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}}(t) =$$

$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k\geq 1} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k} \beta_{i_\nu}} \sum_{i_0\geq 1} \int_{B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(t)} z d\lambda \cdot 1_{B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(t)}(t) =$$

$$= \sum_{i_1,i_2,\ldots,i_k\geq 1} \frac{1}{\prod_{\nu=1}^{k} \beta_{i_\nu}} \int_{\bigcup_{i_0\geq 1} B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(t)} z d\lambda \cdot 1_{B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}(t)}(t) =$$

$$= \sum_{i_1,\ldots,i_k\geq 1} \frac{1}{\lambda(H_{i_1,\ldots,i_k})} \int_{H_{i_1,\ldots,i_k}} z d\lambda \cdot 1_{H_{i_1,\ldots,i_k}}(t),$$

где множества $H_{i_1,\ldots,i_k} := \bigcup_{i_0\geq 1} B_{i_0,i_1,\ldots,i_k}$ как и множества $B^{(k)}_{i_0,i_1,\ldots,i_k}$ попарно дизъюнктны, причём $\lambda(H_{i_1,\ldots,i_k}) = \sum_{i_0\geq 1} \lambda(B_{i_0,i_1,\ldots,i_k}) = \sum_{i_0\geq 1} \prod_{\nu=0}^{k} \beta_{i_\nu} = \prod_{\nu=1}^{k} \beta_{i_\nu}$. Теперь, поскольку $\sum_{i_1,\ldots,i_k\geq 1} \prod_{\nu=1}^{k} \beta_{i_\nu} = \prod_{\nu=1}^{k} \sum_{i_\nu\geq 1} \beta_{i_\nu} = 1$, можно сделать вывод, что выполняется равенство

$$E\Big(E(z|\mathcal{B}^{(k)})|\mathcal{B}^{\perp}\Big)(t) = E(z|\mathcal{H}_{i_1,\ldots,i_k})(t),\ t \in I, \qquad ({}_7.10)$$

где счётные разбиения $\mathcal{H}_{i_1,\ldots,i_k} = \sigma(H_{i_1,\ldots,i_k},\ i_1,\ldots,i_k \geq 1)$ и $\mathcal{B}^{(k-1)}$, принадлежа одному и тому же с.в. $\beta^k = [\prod_{\nu=1}^{k} \beta_{i_\nu}]$, равноизмеримы: $\mathcal{H}_{i_1,\ldots,i_k} \sim \mathcal{B}^{(k-1)}$. Значит по 0.6.3) для любой функции $x \in L^1(I)$ и для подходящей функции $y \in L^1(I),\ y \sim x$, выполняется

$$E\Big(E(x|\mathcal{B}^{(k)})|\mathcal{B}^{\perp}\Big) = E(x|\mathcal{H}_{i_1,\ldots,i_k}) \sim E(y|\mathcal{B}^{(k-1)}). \qquad ({}_7.11)$$

Тем самым для любых с.и. $X, Y \subseteq L^1(I)$ справедлива формула

$$E\Big(E(X|\mathcal{B}^{(k)})|\mathcal{B}^{\perp}\Big) \subseteq Y \Leftrightarrow E(X|\mathcal{H}_{i_1,\ldots,i_k}) \subseteq Y \Leftrightarrow E(X|\mathcal{B}^{(k-1)}) \subseteq Y. \qquad ({}_7.12)$$

По теореме Поля Леви, VII,4.3, [37], и в силу леммы 7.9.3) для всякого $x \in L^1(I)$ справедливо:

$$\text{п.в.} \lim_{k\to\infty} E(x|\mathcal{B}^{(k)}) = E(x|\mathbb{B}) = E(x|\Lambda) = x. \qquad ({}_7.13)$$

Отсюда и из II,7,2, [37], для всякого с.и. X из ($_7$.16) следует предельное равенство

$$\text{п.в. } \lim_{k\to\infty} E(X|\mathcal{B}^{(k)}) = E(X|\mathbb{B}) = E(X|\Lambda) = X. \qquad ({}_7.14)$$

Предположим, что для любого $x \in X$ ***найдётся элемент*** $y = y(x) \in L^1(I)$***, такой что для последовательности счётных разбиений*** $\{\mathcal{B}^{(k)})\}_{k\geq 1}$ ***выполняются неравенства***

$$E(x|\mathcal{B}^{(k)}) \leq y,\ k \geq 1, \qquad ({}_7.15)$$

(что по теореме Поля Леви равносильно (o)-сходимости $E(x|\mathcal{B}^{(k)}) \to x$.)

Тогда для любых с.и. X и Y можно воспользоваться теоремой о сходимости под знаком оператора усреднения, II,7,2, [37], Этим оправдан переход к пределу п.в. при $k \uparrow \infty$ в нижеследующей цепочке.

$$E(X|\mathcal{B}) \subseteq Y \overset{0.5.2)}{\Leftrightarrow} E(X \circ \varphi^{(k-1)}|\mathcal{B}^{(k-1)}) \subseteq Y \overset{(7.8)}{\Leftrightarrow} E(X|\mathcal{B}^{(k-1)}) \subseteq Y =$$

$$\overset{(7.12)}{=} E\Big(E(X|\mathcal{B}^{(k-1)})|\mathcal{B}^{\perp}\Big) \subseteq Y \overset{[37],II,7,2,;\ [12],(1.1)}{\Rightarrow} E\Big(\text{п.в.} \lim_{k\to\infty} E(X|\mathcal{B}^{(k-1)})|\mathcal{B}^{\perp}\Big) \subseteq Y \overset{(7.15),(7.14)}{\Rightarrow}$$

$$E\Big(X|\mathcal{B}^{\perp}\Big) \subseteq Y.$$

Тем самым доказана

Теорема 7.8. Пусть $\mathcal{B}$ любое и.р., Y - любой с.и. из $L^1(I)$, а X - с.и. из $L^1(I)$, удовлетворяющий предположению ($_7$.15). Справедлива импликация

$$E\Big(X|\mathcal{B}\Big) \subseteq Y \Rightarrow E\Big(X|\mathcal{B}^{\perp}\Big) \subseteq Y.$$

□

Следствие 7.9. Если и.р. $\mathcal{B}$ усредняет с.и.X, удовлетворяющий условию ($_7$.15), то и независимое дополнение $\mathcal{B}^{\perp}$ усредняет с.и. X.
□

Лемма 7.10. Пусть и.р. $\mathcal{B} = (b_n)$ усредняет главный с.и. $\mathcal{N}_f$. Тогда для любой функции $0 < g \in \mathcal{N}_f$ последовательность $\{E(g|\mathcal{B}^{(k)})\}_{k\geq 1}$ порядково ограничена некоторой функцией из $L^1(I)$, т.е. для $\mathcal{N}_f$ выполнено условие ($_7$.15).

Доказательство. 1. Напомним, что для функции $f = f^*$ мы обозначаем $f_{\mathcal{B}} := \sum_{n\geq 1} f(b_n) \cdot 1_{B_n}$. Теорема 4.1 влечёт, что если и.р. $\mathcal{B}$ усредняет главный с.и. $\mathcal{N}_f$, то $f_{\mathcal{B}} \simeq f^{**}_{\mathcal{B}}$. Отсюда и из того, что $f^*_{\mathcal{B}} \leq f^*$, следует, что $f^{**}_{\mathcal{B}} \in L^1(I)$.
По построению последовательности $\mathcal{B}^{(k)}$ для всякого $k \geq 1$ на любом промежутке $\mathcal{B}^{(k)}_{i_0,\dots,i_k}$, $i_0, \dots, i_k \geq 1$, выполняется неравенство $E(f|\mathcal{B}^{(k)})(t) \leq f^{**}(i_0),\ t \in \mathcal{B}^{(k)}_{i_0,\dots,i_k}$, из которго следует, что $E(f|\mathcal{B}^{(k)}) \leq f^{**}_{\mathcal{B}},\ k \geq 1$.

2. Возьмём теперь любую функцию $0 < g \in \mathcal{N}_f,\ g^*(t) \leq [q(g)]^{-1} \cdot f^*[t \cdot q(g)],\ t \in I$, где $q(g) < 1$. Выберем эндоморфизм π на I, такой что

$g = g^* \circ \pi$. Поскольку $f^{**}([q(g)]^{-1} \cdot t) \le q(g) \cdot f^{**}(t),\ t \in I$, то по п.1 $E(g|\mathcal{B}^{(k)}) = E(g^* \circ \pi|\mathcal{B}^{(k)}) \le q(g) \cdot f^{**}_{\mathcal{B}} \circ \pi \in L^1(I),\ k \ge 1$.
□

Следствие 7.11. Если и.р. $\mathcal{B}$ усредняет главный с.и. $\mathcal{N}_f$, то и независимое дополнение $\mathcal{B}^\perp$ усредняет $\mathcal{N}_f$. Если при этом $\mathcal{B}$ монотонно: $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$, то по ($_7$.6)

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^\perp)} = \mathcal{N}_{E(f^*|\mathcal{B}^\perp)} \subseteq \mathcal{N}_f. \qquad (_7.16),$$

□

Теорема 7.12. Пусть с.и. X содержится в пространстве $L\log^+ L(I)$, а Y - любой с.и. из $L^1(I)$. Если для и.р. $\mathcal{B}$ выполняется включение $E(X|\mathcal{B}) \subseteq Y$, то для независимого дополнения $\mathcal{B}^\perp$ справедливо включение $E(X|\mathcal{B}^\perp) \subseteq Y$.

Доказательство. Хорошо известно (см., например, [19], IV, 6), что $L\log^+ L(I) = \{x \in L^1(I) : x^{**} \in L^1(I)\}$. Отсюда следует, что для любого $x \in X$ выполняется условие ($_7$.17) с $y(x) = x^{**}$.
□

Замечание 7.13. Отметим, что $L\log^+ L(I) \subseteq L^p(I)$ для всякого $p > 1$.
□

Лемма 7.14 Проекторы $E(\cdot|\mathcal{B}^\perp)$ и $E(\cdot|\mathcal{B}^{(k)})$ коммутируют, т.е. для любого $x \in L^1(I)$ верны равенства

$$E(E(x|\mathcal{B}^\perp)|\mathcal{B}^{(k)}) = E(E(x|\mathcal{B}^{(k)})|\mathcal{B}^\perp),\ k \ge 1,$$

и, тем самым, по ($_7$.11) справедлива формула

$$E(E(x|\mathcal{B}^\perp)|\mathcal{B}^{(k)}) = E(E(x|\mathcal{B}^{(k)})|\mathcal{B}^\perp) \sim E(x|\mathcal{B}^{(k-1)}),\ k \ge 1. \qquad (_7.17)$$

Доказательство. Первое равенство очевидно, из него и из ($_7$.11) прямо следует ($_7$.19).
□

Теорема 7.15. Пусть X и Y - любые с.и. из $L^1(I)$, $\mathcal{B}$ - любое и.р. Если для независимого дополнения $\mathcal{B}^\perp$ выполняется включение $E(X|\mathcal{B}^\perp) \subseteq Y$, то справедливо включение $E(X|\mathcal{B}) \subseteq Y$.

Доказательство. Имеем

$$E(X|\mathcal{B}^\perp) \subseteq Y \overset{7.9.3)}{\Rightarrow} E(E(X|\mathcal{B}^\perp)|\lim_{k\uparrow\infty} \mathcal{B}^{(k)}) \subseteq Y \overset{VII,4.3,[37],\ (_7.14)}{\Rightarrow} \lim_{k\uparrow\infty} E(E(X|\mathcal{B}^\perp)|\mathcal{B}^{(k)}) \subseteq Y \Rightarrow$$

$$\overset{(_7.17)}{\Rightarrow} \lim_{k\uparrow\infty} E(E(X|\mathcal{B}^{(k)}))|\mathcal{B}^\perp) \subseteq Y \overset{(_7.12)}{\Rightarrow} \lim_{k\uparrow\infty} E(X|\mathcal{B}^{(k-1)}) \subseteq Y$$

$$\overset{(_7.8)}{\Leftrightarrow} \lim_{k\uparrow\infty} E(X \circ \varphi^{(k-1)}|\mathcal{B}^{(k-1)}) \subseteq Y \overset{7.9.1)}{\Leftrightarrow} \lim_{k\uparrow\infty} E(X \circ \varphi^{(k-1)}|\mathcal{B} \circ \varphi^{(k-1)}) \subseteq Y$$

$$\overset{0.5.2)}{\Leftrightarrow} \lim_{k\uparrow\infty} E(X|\mathcal{B}) \subseteq Y \Leftrightarrow E(X|\mathcal{B}) \subseteq Y.$$

□

Следствие 7.16. Если независимое дополнение $\mathcal{B}^{\perp}$ к и.р. $\mathcal{B}$ усредняет с.и. X, то и $\mathcal{B}$ усредняет X.
□

Вместе со следствием 7.11 выполняются

Следствие 7.17. И.р. $\mathcal{B}$ усредняет главный с.и. $\mathcal{N}_f$, тогда и только тогда, когда независимое дополнение $\mathcal{B}^{\perp}$ усредняет $\mathcal{N}_f$.
□

Следствие 7.18. Пусть функция $f = f^* \in L^1(I)$, а $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$ - монотонное и.р. Соедующие условия равносильны.

i). $f - \mathcal{B} -$ регулярная функция; ii). $E(f|\mathcal{B}) \in \mathcal{N}_f$; iii). $E(f|\mathcal{B}^{\perp}) \in \mathcal{N}_f$.

Доказательство. Если выполняется i), то по определению 4.1. $\mathcal{B}$ усредняет $\mathcal{N}_f$ т.е. $E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{N}_f$, откуда следует во первых, что $E(f|\mathcal{B}) \in \mathcal{N}_f$, а во вторых, - по Следствию 7.17, - что $E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp}) \subseteq \mathcal{N}_f$. Но по теореме 7.5 $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})} = \mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B}^{\perp})}$, значит выполнено условие iii) : $E(f|\mathcal{B}^{\perp}) \in \mathcal{N}_f$.

Обратным ходом выполняются импликации $iii) \overset{7.5}{\Rightarrow} E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp}) \subseteq \mathcal{N}_f \overset{7.17}{\Rightarrow} E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{N}_f$, что по определению означает $\mathcal{B}$-регулярность функции f.
□

Теорема 7.19. Пусть $f = f^* \in L^1(I)$, а $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$. Если функция f $\mathcal{B}$-регулярна, то выполняется равенство

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})}|\mathcal{B}^{\perp})} = \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})}. \tag{7.18}$$

Доказательство. Докажем вложение

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})} \subseteq \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})}|\mathcal{B}^{\perp})},$$

Имеем: $E(f|\mathcal{B}^{\perp}) \in E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})$, поэтому, будучи $\mathcal{B}^{\perp}$-измеримой функцией, $E(f|\mathcal{B}^{\perp})$ удовлетворяет включению $E(f|\mathcal{B}^{\perp}) \subseteq E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})}|\mathcal{B}^{\perp})$. Тем самым

$$E(f|\mathcal{B}^{\perp}) \in \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})}|\mathcal{B}^{\perp})}. \tag{7.19}$$

Отсюда по теореме 7.5

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})} = \mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B}^{\perp})} \subseteq \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^{\perp})}|\mathcal{B}^{\perp})}.$$

Отметим, что включение (7.19) справедливо без предположентя о $\mathcal{B}$-регулярности функции f.

Докажем обратное включение. Имеем: по теореме 7.5. $\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^\perp)} = \mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B}^\perp)}$, так что для $\mathcal{B}$-регулярной функции f по следствию 7.18

$$\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^\perp)}|\mathcal{B}^\perp)} = \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{E(f|\mathcal{B}^\perp)}|\mathcal{B}^\perp)} \subseteq \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_{\mathcal{N}_f}|\mathcal{B}^\perp)} = \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_f|\mathcal{B}^\perp)}.$$

□

Замечание 7.20. Пусть $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{N}$ обозначают то же, что и в замечании 5.16. Рассмотрим отображение $\mathcal{S}_{\mathcal{B}^\perp}(g) : \mathfrak{N} \to \mathfrak{X}$:

$$\mathcal{S}_{\mathcal{B}^\perp}(\mathcal{N}_g) := \mathcal{N}_{E(\mathcal{N}_g|\mathcal{B}^\perp)},\ g \in L^1(I).$$

Теорема 7.19 означает, что множество всех $\mathcal{B}$-регулярных функций содержится в области идемпотентности отображения $\mathcal{S}_{\mathcal{B}^\perp}$.
□

Теорема 7.21. Для любого и.р. $\mathcal{B} = \sigma(B_n),\ B_n = (b_n, b_{n-1}],\ n \geq 1,\ b_0 = 1,$ следующие условия равносильны.

1) $\mathcal{B}$ усредняет $\mathcal{M}^1_f$;

2) $\mathcal{B}^\perp$ усредняет $\mathcal{M}^1_f$;

3) $\mathcal{B}$ усредняет $\mathcal{N}_f$;

4) $\mathcal{B}^\perp$ усредняет $\mathcal{N}_f$.

Доказательство. В теореме 4.12.доказано, что если $\mathcal{B}$ усредняет $\mathcal{N}_f$, то $\mathcal{B}$ усредняет $\mathcal{M}^1_f$. В точности также можно доказать (заменой $E(\cdot|\mathcal{B})$ на $E(\cdot|\mathcal{B}^\perp)$) импликацию 4)⇒2).

По следствию 7.17 (и с учётом теоремы 4.12) 1)⇒3)⇒4), значит 1)⇒3)⇒4)⇒2). Отсюда по следствию 7.16 выполняется вся цепочка импликаций 1)⇒3)⇒4)⇒2)⇒1).
□

§8. Проверочность и универсальность независимых дополнений. [29], [35]

Дана полная классификация проверочных, универсальных и сильно универсальных σ-подалгебр в классе всех независимо дополняемых σ-подалгебр в Λ.

Теорема 8.1. Независимое дополнение к проверочному разбиению есть проверочная σ-подалгебра.

Доказательство I. Пусть $\mathcal{B}$ проверочное и.р. По определению для всякого с.и. X, $X \subseteq L^1(I)$, не являющегося мажорантным, справедливо: $E(X|\mathcal{B}) \nsubseteq X$. Тогда по следствию 7.16 $E(X|\mathcal{B}^\perp) \nsubseteq X$, и тем самым $\mathcal{B}^\perp$ тоже проверочная σ-подалгебра.

□

Теорема 8.2. Если и.р. $\mathcal{B} = \mathcal{B}^*$ не является проверочным, то и его независимое дополнение $\mathcal{B}^\perp$ не является проверочной σ-подалгеброй.

Доказательство. При доказательстве необходимости в теореме 6.4 в предположении, что монотонное и.р. $\mathcal{B} = (b_n)$ не удовлетворяет условию ($_6$.4), была построена функция $f = f^* \in L^1(I)$, такая что с. и. $\mathcal{N}_f$ не является мажорантным, но усредняется $\mathcal{B}$. Тогда по следствию 7.11 с.и $\mathcal{N}_f$ усредняется также и $\mathcal{B}^\perp$, тем самым $\mathcal{B}^\perp$ не является проверочной σ-подалгеброй.

□

Заметим теперь, что для любой σ-подалгебры смешанного типа независимое дополнение к ней всегда непрерывно и, следовательно, не может быть смешанного типа. Из теорем 6.1, 8.1 и 8.2 вытекает

Следствие 8.3. В классе независимо дополняемых σ-подалгебр проверочными являются только следующие.

1).Чисто непрерывные σ-подалгебры и σ-подалгебры смешанного типа.

2). Проверочные счётные разбиения, охарактеризованные в теореме 6.4, и независимые дополнения к ним.

□

Лемма 8.4. Пусть $\mathcal{B} = (b_n)$ монотонное и.р., не являющееся проверочным. Найдётся такая $\mathcal{B}^{(1)}$-измеримая (см. §7), но не $\mathcal{B}$-измеримая функция $f = f^* \in L^1(I)$, что $E(f|\mathcal{B}) \notin \mathcal{N}_f$.

Доказательство. Воспользуемся тем, что по ($_6$.4) для монотонного и.р. (то есть такого, что $\beta_n \downarrow_{n\uparrow\infty} 0$), не являющегося проверочным, выполняется равенство

$$\sup_{n\geq 1} \frac{b_{n-1}}{b_n} = \infty,$$

и построим по индукции подпоследовательность $\{b_{n_k}\}$ следующим образом. Положим $b_{n_0} = 1$. Если точка $b_{n_{k-1}}$, $k \geq 1$, уже построена, то выберем точку b_{n_k}, удовлетворяющую условиям

$$\begin{cases} b_{n_k-1} \leq \frac{1}{2} \cdot b_{n_{k-1}}; \\ \frac{b_{n_k-1}}{b_{n_k}} > b_{k+1}^{-2}; \qquad\qquad k \geq 1, \\ b_{n_k-1} \geq k \cdot s_k; \end{cases} \tag{${}_8.1$}$$

где $s_0 = 1$; $s_k = b_k^{(n_k-1)} = b_{n_k-1} - \beta_{n_k-1} \cdot \beta_k$, $k \geq 1$ (так что $s_k \downarrow_{k\uparrow\infty} 0$), а счётное разбиение $\mathcal{B}^{(1)} = \sigma(B_k^{(n)} = (b_k^{(n)}, b_{k-1}^{(n)}])$ построено так, как выше.

Определим последовательность $\{u_k\}$, полагая $u_1 = 1$, $u_{k+1} = (2^k b_{n_k-1})^{-1}$, $k > 1$. В силу того, что по (${}_8.1$) $b_{n_k} < s_k < b_{n_k-1}$, $k > 1$, имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(s_{k-1}-s_k) \leq 1-s_1+\sum_{k=1}^{\infty} u_{k+1}s_k \leq 1-s_1+\sum_{k=1}^{\infty} u_{k+1}b_{n_{k-1}-1} \leq 2-s_1 < \infty. \tag{${}_8.2$}$$

Отметим, что в силу первого из неравенств (${}_8.1$) можно записать

$$u_{k+1} > (2^{k-1}b_{n_k-1})^{-1} \geq (2^{k-1}b_{n_k-1})^{-1}b_{n_{k-1}-1} = u_k, \; k \geq 1. \tag{${}_8.3$}$$

Положим при $k \geq 1$

$$\begin{cases} f(t) = u_2, \text{ если } s_2 < t \leq s_0; \\ f(t) = u_k, \text{ если } s_k < t \leq s_{k-1}. \end{cases}$$

Из (${}_8.2$) следует, что $f = f^* \in L^1(I)$ $-\mathcal{B}^{(1)}$-измеримая функция.

По определению для последовательности $\{s_k\}$ выполняются неравенства $s_k < b_{n_k-1} < \frac{1}{2}b_{n_{k-1}} < s_{k-1}$, $k \geq 1$. Снова пользуясь определением $\{s_k\}$ и формулами (${}_8.1$), получаем

$$\frac{E(f|\mathcal{B})(b_{n_k-1})}{f(\frac{b_{n_k-1}}{k})} = \frac{E(f|\mathcal{B})(b_{n_k-1})}{f(b_{n_k-1})} = \frac{1}{u_k} \cdot \frac{u_{k+1}(s_k - b_{n_k}) + u_k(b_{n_k-1} - s_k)}{b_{n_k-1} - b_{n_k}} \geq$$

$$\geq \frac{u_{k+1}}{u_k} \cdot \frac{s_k - b_{n_k}}{b_{n_k-1} - b_{n_k}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_{n_{k-1}-1}}{b_{n_k-1}} \cdot b_k \geq \frac{b_{n_{k-1}-1}}{b_{n_{k-1}}} \cdot b_k \geq \frac{b_k}{b_k^2} \to_{k\to\infty} \infty,$$

значит в соответствии с леммой 0.13 $E(f|\mathcal{B}) \notin \mathcal{N}_f$.
□

Следствие 8.5. Для любого и.р. $\mathcal{B}$ найдётся с.и., не усредняемый независимым дополнением $\mathcal{B}^{\perp}$.

Доказательство. Если $\mathcal{B}$ проверочное и.р., то по теореме 8.1 искомым будет любой с.и., не являющийся мажорантным. Если же и.р. $\mathcal{B}$ проверочным не является, то по лемме 8.4 с.и. $\mathcal{N}_f$ не усредняется $\mathcal{B}$, где f $-\mathcal{B}^{(1)}$-измеримая

функция, построенная в этой лемме .
□

Следствие 8.6 В классе дополняемых σ-подалгебр универсальными являются только конечные разбиения и независимые дополнения к ним.

Доказательство. Конечные разбиения и независимые дополнения к ним очевидным образом являются универсальными. По теореме 6.8 никакое счётное разбиение универсальным не является. Если σ-подалгебра содержит непустую непрерывную часть, то по следствию 8.3 она проверочная и, следовательно, универсальной быть не может. Если же речь идёт о непрерывных $\sigma-$подалгебрах, имеющих в качестве независимого дополнения счётное разбиение, то применимо следствие 8.5.
□

Напомним, что универсальная σ-подалгебра $\mathcal{A}$ называется *сильно универсальнымой*, если для любого симметричного пространства $(X, \|\cdot\|_X)$ проектор $E(\cdot|\mathcal{A})$ на нём *контрактивен*, т.е. $\|E(\cdot|\mathcal{A})\|_{X\to X} \le 1$.

Замечание 8.7. Конечные разбиения являются не только универсальными, но и *сильно универсальными* σ-подалгебрами в Λ, [6]. Ниже будет показано, что это же верно и для σ-подалгебр, являющихся независимым дополнением к конечным разбиениям.
□

Для дальнейшего нам понадобится одно из метрически эквивалентных представлений непрерывной σ-подалгебры, являющейся независимым дополнением к не более чем счётному разбиению промежутка I.

Зафиксируем счётное разбиение $\mathcal{A}$ промежутка I, принадлежащее с.в. $\vec{\alpha} = (\alpha_n)$. Множество всех атомов в $\mathcal{A}$ обозначим через $\mathsf{A} := \{a_n\}$, множество всех подмножеств в A обозначим $\mathfrak{A}$, наконец, зададим меру α на $\mathfrak{A}$, полагая $\alpha(a_n) = \alpha_n,\ n \ge 1$. Прямое произведение пространств с мерой $(\Omega, \Sigma, \mu) := (\mathsf{A}, \mathfrak{A}, \alpha) \times (I, \Lambda, \lambda) = (\mathsf{A} \times I, \mathfrak{A} \times \Lambda, \alpha \times \lambda)$ будем называть *совместной реализацией разбиения $\mathcal{A}$ и его независимого дополнения $\mathcal{A}^\perp$*. Каждую точку $a_n \in \mathsf{A}$ будем отождествлять с множеством $A_{(n)} := a_n \times I \in \Sigma,\ n \ge 1$. Тем самым мы отождествляем не более чем счётное разбиение $\mathcal{A}$ (точнее - σ-алгебру $\mathfrak{A}$) с $\sigma-$подалгеброй в Σ, порождённой всеми множествами вида $A \times I,\ A \in \mathcal{A}$, а независимое дополнение к $\mathcal{A}$, - $\sigma-$подалгебру $\mathcal{A}^\perp$, - с $\sigma-$подалгеброй всех множеств из Σ вида $\mathsf{A} \times e,\ e \in \Lambda$. При совместной реализации оператор усреднения $E(\cdot|\mathcal{A}^\perp) : L^1(\Omega, \Sigma, \mu) \to L^1(I, \Lambda, \lambda)$ по $\mathcal{A}^\perp$ действует как интеграл по первой переменной: а именно по формуле

$$E(f|\mathcal{A}^\perp)(a, t) = \sum_{n\ge1} \alpha_n \cdot f(a_n, t);\ f \in L^1(\Omega, \Sigma, \mu),\ (a, t) \in \Omega. \qquad ({}_8.4),$$

в которой функция $E(f|\mathcal{A}^\perp)$ от двух переменных не зависит от первой из них.

Отметим, что описанная совместная реализация разбиения и его независимого дополнения единственна с точностью до изоморфизма пространств с мерой.

Теорема 8.8. Для любого конечного разбиения $\mathcal{B}$ его независимое дополнение $\mathcal{B}^{\perp}$ есть сильно универсальная σ-плдалгебра.

Доказательство. Пусть m есть мощность разбиения $\mathcal{B}$. Обозначим через $\vec{\beta} = (\beta_k)$ с.в., которому принадлежит разбиение $\mathcal{B}$. Рассмотрим случай рациональных координат этого с.в.:

$$\beta_k = \frac{n_k}{n},\ n, n_k > 0,\ k = 1, ..., m,\ \sum_{k=1}^{m} n_k = n.$$

Воспользуемся конструкцией совместной реализации разбиения и его дополнения. Введём n-мерный с.в. $\vec{\alpha} = (\frac{1}{n})$, введём принадлежащее ему конечное разбиение $\mathcal{A}$ и рассмотрим две совместные реализации, одну для $\mathcal{B}$ и $\mathcal{B}^{\perp}$, другую для $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^{\perp}$:

$$(\Omega, \Sigma, \mu) := (\mathsf{B}, \mathfrak{B}, \beta) \times (I, \Lambda, \lambda);\ (\bar{\Omega}, \bar{\Sigma}, \bar{\mu}) := (\mathsf{A}, \mathfrak{A}, \alpha) \times (I, \Lambda, \lambda).$$

Здесь $\mathsf{B} = \{b_k\}_{k=1}^{m}$ есть $m-$точечное множество атомов $\{b_1, b_2, ..., b_m\}$, $\mathfrak{B}$ - $\sigma-$алгебра всех его подмножеств, а мера β определена на $\mathfrak{B}$ равенствами $\beta(b_k) = \beta_k,\ k = 1, 2, ..., m$. Аналогичный смысл имеет тройка $(\mathsf{A}, \mathfrak{A}, \alpha)$, где $\mathsf{A} = \{a_k\}_{k=1}^{n}$ есть $n-$точечное множество атомов, $\mathfrak{A}$ - $\sigma-$алгебра всех его подмножеств, а мера α определена на $\mathfrak{A}$ равенствами $\alpha(a_k) = \alpha_k = \frac{1}{n},\ k = 1, 2, ..., n$.

Положим $k_3 := n_1 + n_2,\ k_4 := k_3 + n_3, ..., k_m = \sum_{i=1}^{m-1} n_i$ и разобьём A на попарно дизёюнктные подмножества $\mathsf{A}_1 = \{a_1, ..., a_{n_1}\},\ \mathsf{A}_2 = \{a_{n_1+1}, ..., a_{k_3}\}, \mathsf{A}_m = \{a_{k_3+1}, ..., a_{k_4}\} ...,\ \{a_{k_m+1}, ..., a_n\}$. Имеем: в A_1 содержится n_1 точек множества A, в A_2 содержится n_2 точек, ..., в A_m содержится n_m точек множества A.

Зададим на A биекцию $\varphi:\ \varphi(a_n) = a_1, ..., \varphi(a_k) = a_{k+1};\ k = 1, 2, ..., n-1$. Очевидно, что φ есть автоморфизм пространства с мерой $(\mathsf{A}, \mathfrak{A}, \alpha)$. Он порождает отображение $\bar{\varphi} : \bar{\Omega} \to \bar{\Omega}$, действующее по формуле $\bar{\varphi}(a, t) := (\varphi(a), t),\ (a, t) \in \bar{\Omega}$, которое в свою очередь является автоморфизмом пространства с мерой $(\bar{\Omega}, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$. Линейная изометрия $\bar{\Phi}$ пространства $L^1(\bar{\Omega}, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$ порождается автоморфизмом $\bar{\varphi}$ по формуле

$$\bar{\Phi}\bar{f}(a, t) = \bar{f}(\bar{\varphi}(a, t),\ \bar{f} \in L^1(\bar{\Omega}, \bar{\Sigma}, \bar{\mu}),\ (a, t) \in \bar{\Omega}.$$

Таким образом функции $\bar{f}$ и $\bar{\Phi}\bar{f}$ равноизмеримы.

Пусть теперь $(X, \|\cdot\|_X)$ с.п. в $L^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ и пусть $(\bar{X}, \|\cdot\|_{\bar{X}})$ $\overset{e}{\sim}$эквивалентный ему с.п. в $L^1(\bar{\Omega}, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$ (см. 0.10). Зафиксируем любой элемент $x \in X,\ \|x\|_X \leq 1$, и определим по нему элемент $\bar{x} \in L^1(\bar{\Omega}, \bar{\Sigma}, \bar{\mu})$ формулой

$$\bar{x}(a, t) = x(b_i, t),\ \text{если}\ a \in \mathsf{A}_i,\ i = 1, ..., m;\ t \in I.$$

Очевидно, что $\bar{x} \sim x$, откуда $\bar{x} \in \bar{X}$, $\|\bar{x}\|_{\bar{X}} \leq 1$. Рассмотрим элемент

$$\bar{y} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{\Phi}^i \bar{x}.$$

По предыдущему $\bar{y} \in \bar{X}$ и

$$\bar{y}(a,t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \bar{x}(a,t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{m} \sum_{a \in \mathcal{A}_i} \bar{x}(a,t) = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{n} x(b,t), \ (a,t) \in \bar{\Omega}.$$

Тем самым $\bar{y} \sim E(x|\mathcal{B}^{\perp})$ и, значит, $\|\bar{y}\|_{\bar{X}} = \|E(x|\mathcal{B}^{\perp})\|_X$.

С другой стороны,

$$\|\bar{y}\|_{\bar{X}} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \|\bar{\Phi}^i \bar{x}\|_{\bar{X}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \|\bar{x}\|_{\bar{X}} = \|\bar{x}\|_{\bar{X}} = \|x\|_X \leq 1.$$

Итак, $\|E(x|\mathcal{B}^{\perp})\|_X \leq 1$, чем исчерпан случай рациональных координат с.в. $\vec{\beta}$. Стандартными аргументами аппроксимации к нему же сводится случай произвольных координат с.в. $\vec{\beta}$.
□

Следствие 8.9. В классе дополняемых σ-подалгебр сильно универсальными являются только конечные разбиения и независимые дополнения к ним.
□

Литература

[1] Рохлин В.А. Об основных понятиях теории меры. Матем. Сборн. 25(67), 108–150 (1949).

[2] Lorentz G.G. Majorants in spaces of integrable functions. Amer.J.Math. 77(1955), 484-492.

[3] Вулих Б.З. Введение в теорию полуупорядоченных пространств, М. Наука, 1959. In Russian

[4] Lorentz G.G. Relations between function spaces, Proc. Amer. Math. Soc. 12 (1), 1961, 127-132.

[5] Amemiya J.. A generalization of Riesz-Fischer theorem, II. Journ.Mathem.Soc.Japan, no.3-4 (1963), 353-354.

[6] Митягин Б.С., Шварц А.С.Функторы в категориях банаховых пространств.Успехи Матем. Наук, 1964, т.19, 65-130. In Russion.

[7] Shimogaki T. Hardy-Littlwood majorants in function spaces. J.Math. Soc.Japan, 17(1965), 365 - 373.

[8] Ryff J.V. Orbits of L^1 functions under doubly stochastic transformations. Trans.Amer.Mathem.Soc. 117 (1963), 92 - 100.

[9] Calderon A.P. Spaces between L^1 and L^∞ and the theorem of Marcinkiewicz. Studia Mathem. 28(1966), 273 296.

[10] Рудин, Функциональный анализ. "Мир М. 1975.

[11] Russu G.I. Rearrangement invariant non-majorant function spaces. Math.Invest. 4,(1969), 82-93. In Russian.

[12] Chong K-M., Rice N.M. Equimeasurable rearrangements of functions. Queen's papers in pure and appl. mathem., № 28 (1971).

[13] Mekler A.A. On majorizing of functions by rearrangements. Systems of Processing and Transferring of Information, Trudi LIAP,1974, no.87, 108-114. In Russian.

[14] Mekler A.A. Intermediate spaces and bistohastic projections. Math. Investigations (= Matem.Issledovanija), Kishinev, 1975, v.10, no 1, 270-275.In Russian.

[15] Mekler A.A. On an equivalence relation for rearrangement invariant ideals in the space L_1. VI Symposium on excessiveness problem in information systems. Part 1, LIAP, 1974, 104-106. In Russian.

[16] Braverman M.S, Mekler A.A. On Hardy-Litlewood property in rearrangement invariant spaces. Sibirsk. Mat.Zhourn, v.17 (1977)№3, 522-540. In Russian.

[17] Mekler, A.A. Averaging operators over σ-subalgebras on ideals in $L_1(\mu)$. Ph.D. thesis, Leningrad, 1977.

[18] Mekler A.A. Averaged ideal spaces and interpolation between L_1 and L_∞. Invest. in theory of functions of many real variables. Yaroslavl, 1980, 126-139. In Russian.

[19] Bennett C. Sharpley R., Interpolation of Operators. Pure and Applied Mathematics, v. 129, Academic Press,1988.

[20] Krein S.G., Petunin Y.I., Semenov E.M. Interpolation of Linear Operators. Translations of Mathematical Monographs, vol. 54, American Mathematical Sociaty, Providence. R.I., 1982.

[21] Mekler A.A. Averaging operator for a countable partition on a principal r.i. ideal of space $L^1[0,1]$. Zapiski nauchn.seminarov LOMI, 1982.v.107,136-149. In Russian.

[22] Mekler A.A., Sokolovskaya N.F. On some properties of functions generating the Marcinkiewiecz spaces. Ordered Operators, Perm, 1982, 136-143. In Russian.

[23] Mekler A.A. On non-increasing functions of bounded mean oscillation, VIII Symposium of Excessiveness Problem in Informations Systems. LIAP,1983,v.1, 20-22. Russian.

[24] Mekler A.A. Averaging and interpolation by conditional mathtematical expectations. Ibidem, v.5, 107-108. In Russian.

[25] Mekler A.A. The binary normalization of the sequences which identificate rearrangement invariant ideals. Systems of Prjcessing and Transferring of Information. LIAP 172(1984), 88-93. In Russian.

[26] Mekler A.A. Invariant properties of functions that generate the Marcinkiewiecz spaces. Topics in Functional Analysis, Petrozavodsk, 1985, 33-39. In Russian.

[27] Mekler A.A. A supplement to the article "Averaging operator for a countable partition on a principal r.i.ideal of space $L^1[0,1]$". Zapiski nauchn.seminarov LOMI, 1986.v.149, 137 - 141. In Russian

[28] Mekler A.A. On a Mackenhaupt‘s condition for positive non-increasing functions. Operators and their Applications. LGPI, Leningrad, 1988, 65-71. In Russian.

[29] Mekler A.A. Averaged ideal spaces and interpolation between L_1 and L_∞, II. Qualitative and Approximate Methods of Solutions of Operator Equations. Yaroslavl, 1984, 56-70. In Russian.

[30] Абакумов Е.В., Меклер А.А. Interval exchange transformations and problem of identificftion of rearrangement invariant spaces. Izvestya VUZov, Matematika, 1988,no.2, 3-9. In Russian.

[31] Mekler A.A. On norming of prinzipal rearrangement invariant ideals. Systems of Processing and Transferring of Information, Trudi LIAP,1988, no.87, 107-110. In Russian.

[32] Mekler A.A. On rearrangement invariant and majorant Hulls of averages of rearrangement invariant and majorant ideals. J. Math. Anal., Applic. 171(2), 555–566 (1992).

[33] Mekler, A.A. On rearrangement invariant hull of average of an rearrangement invariant ideals. Proc. Sankt-Petersburg Math. Soc. 2, 285–299 (1993). In Russian

[34] Mekler A.A. On regularity and weak regularity of functions generating Marcinkiewiecz spaces. Proc.Intern Conf. "Function Spaces V Poznan, Poland, July 2000, ed. by Hudzik and Skrzypczak, Marcel Denker, Lect.Not.Pur.Appl.Math. Ser. 213, 379 - 387.

[35] Mekler A.A. On an averaging of rearrangement invariant ideals of the space $L^1(\Omega,\Sigma,\mu)$ by Non-Atomic σ-Subalgebras of Σ. Positivity (2010)14, 191-214.

[36] Mekler A.A. A unified approach to topological invariants of Lorentz–Orlicz–Marcinkiewicz spaces. Ordered Structures and Applications: Positivity VII Trends in Mathematics, 307–327, 2016, Springer International Publishing.

[37] Ширяев А.Н. Вероятность. "Наука М. 1980.

[38] J. Lindenstrauss, L.Tzafriri. Classicfl Banach Spaces. Lect.Notes Math., № 338, Springer-Verlag, 1973

[39] Rao, M.M. Contractive projections and prediction operators. Bull. Am. Math. Soc. 15, 1369–1373 (1969).

[40] Mekler A.A. On bounds preserving embeddings of linear lattices. Gerzen.Chtenia, №24(1971), 54-56.

Mekler Alexander A.
Member of St.-Petersburg Mathematical Sociaty
Wilsdruffer Str.7, 01067 Dresden, BRD/Germany
Mail: alexandre.mekler@mail.ru