Об операторных оценках при усреднении гиперболических систем с периодическими коэффициентами*†

Ю. М. Мешкова ‡

25 апреля 2017 г.

Аннотация

Изучаются самосопряженные матричные сильно эллиптические дифференциальные операторы $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Коэффициенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Нас интересует поведение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\tau \in \mathbb{R}$, в пределе малого периода. Для этого оператора найден старший член аппроксимации по $(H^1 \to L_2)$-операторной норме, а также аппроксимация при учете корректора по $(H^2 \to H^1)$-операторной норме. Результаты применяются к усреднению решений неоднородного гиперболического уравнения $\partial_\tau^2\mathbf{u}_\varepsilon = -\mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{F}$.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, гиперболические системы, усреднение, операторные оценки погрешности.

Содержание

Введение **2**

Глава I. Абстрактная схема **6**

1 Предварительные сведения **6**

2 Аппроксимация оператора $A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})$ **9**

Глава II. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ **11**

3 Факторизованные периодические дифференциальные операторы второго порядка **12**

4 Разложение оператора $\mathcal{A}$ в прямой интеграл **14**

5 Эффективная матрица. Эффективный оператор **15**

*Представлено Т. А. Суслиной

†Исследование выполнено при поддержке Российского научного фонда, грант № 17-11-01069.

‡Лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет, 14 линия В. О., дом 29Б, Санкт-Петербург 199178 Россия. E-mail: `y.meshkova@spbu.ru`, `juliavmeshke@yandex.ru`.

6 Пороговые аппроксимации для оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$ **17**

7 Аппроксимация оператора $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})$ **20**

Глава III. Задача усреднения для гиперболических систем **21**

8 Аппроксимация оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ **21**

9 Усреднение решений неоднородных гиперболических систем **28**

Список литературы **33**

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Теории усреднения посвящена обширная литература; см., например, книги [BaPa, BeLPap, ZhKO, Sa]. Мы используем спектральный подход к задачам усреднения, основанный на теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений.

0.1 Класс операторов

Изучаются самосопряженные эллиптические матричные ДО в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, допускающие факторизацию:

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}/\varepsilon) b(\mathbf{D}), \quad \varepsilon > 0.$$

Здесь $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$ — $(m \times n)$-матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ имеет максимальный ранг. Считаем, что периодическая $(m \times m)$-матрица-функция $g(\mathbf{x})$ такова, что

$$g(\mathbf{x}) > 0; \quad g, g^{-1} \in L_\infty.$$

Коэффициенты оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ быстро осциллируют при $\varepsilon \to 0$.

0.2 Операторные оценки погрешности для эллиптических и параболических задач

В серии работ [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4] М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной был развит абстрактный теоретико-операторный (спектральный) подход к эллиптическим задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$. Этот подход основан на использовании масштабного преобразования, теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений.

Типичная эллиптическая задача усреднения состоит в изучении поведения решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ уравнения $\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{u}_\varepsilon = \mathbf{F}$, где $\mathbf{F} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, при $\varepsilon \to 0$. Оказывается, что решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ в некотором смысле сходятся к решению $\mathbf{u}_0$ усредненного уравнения $\mathcal{A}^0\mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_0 = \mathbf{F}$. Здесь

$$\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$$

— *эффективный оператор*, а g^0 — постоянная *эффективная матрица*. Правило нахождения g^0 хорошо известно в теории усреднения.

В [BSu1] установлено, что

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon - \mathbf{u}_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|\mathbf{F}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.1}$$

Эта оценка имеет точный порядок, зависимость постоянной C от данных задачи явно прослежена. Неравенство (0.1) означает, что при $\varepsilon \to 0$ резольвента $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится к резольвенте эффективного оператора по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon.$$

Результаты такого типа называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения.

В [BSu4] получена аппроксимация резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по $(L_2 \to H^1)$-операторной норме:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon.$$

В этой аппроксимации учтен *корректор* $K(\varepsilon)$. Он содержит быстро осциллирующий множитель, а потому зависит от ε. При этом $\|\varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2\to H^1} = O(1)$. В отличие от традиционного корректора в теории усреднения, оператор $K(\varepsilon)$ содержит сглаживающий оператор Π_ε (см. (8.6) ниже).

К параболическим задачам усреднения спектральный метод применялся в работах [Su1, Su2, Su3]. Старший член аппроксимации найден в [Su1, Su2]:

$$\|e^{-\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-\tau\mathcal{A}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon\tau^{-1/2}, \quad \tau > 0.$$

Аппроксимация при учете корректора получена в [Su3]:

$$\|e^{-\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-\tau\mathcal{A}^0} - \varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(\tau^{-1} + \tau^{-1/2}), \quad 0 < \varepsilon \leqslant \tau^{1/2}.$$

Другой подход (так называемый *модифицированный метод первого приближения* или *метод сдвига*) к получению операторных оценок погрешности был предложен В. В. Жиковым [Zh1, Zh2] и разработан им совместно с С. Е. Пастуховой [ZhPas1]. В этих работах изучались эллиптические задачи для операторов акустики и теории упругости. К параболическим задачам метод сдвига применялся в статье [ZhPas2]. Изложение дальнейших результатов В. В. Жикова и С. Е. Пастуховой можно найти в недавнем обзоре [ZhPas3].

0.3 Операторные оценки при усреднении гиперболических задач и нестационарного уравнения Шрёдингера

Для эллиптических и параболических систем операторные оценки погрешности хорошо изучены. Для нестационарного уравнения Шрёдингера и гиперболического уравнения ситуация иная. Старший член аппроксимации был найден в работе [BSu5]:

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-i\tau\mathcal{A}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(1 + |\tau|), \tag{0.2}$$

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(1 + |\tau|). \tag{0.3}$$

Впоследствии Т. А. Суслина [Su4] методами аналитической теории возмущений установила неулучшаемость оценки (0.2) относительно типа операторной нормы. Развивая построения [Su4], М. А. Дородный и Т. А. Суслина [DSu1, DSu2] показали, что оценка (0.3) точна относительно типа операторной нормы. В работах [DSu1, DSu2, Su4] также выделены специальные случаи, когда оценки (0.2), (0.3) допускают усиление относительно типа операторной нормы. В статьях [BSu1, DSu2] с помощью тождества $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) = \int_0^\tau \cos(\widetilde{\tau}\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\,d\widetilde{\tau}$ и аналогичного равенства для эффективного оператора из (0.3) в качестве (грубого) следствия выводится оценка

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(1 + |\tau|)^2, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{0.4}$$

Точность оценки (0.4) относительно типа операторной нормы не обсуждается. Результаты (0.3) и (0.4) применяются к усреднению решений гиперболических систем вида

$$\begin{cases}\partial_\tau^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) = -\mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \partial_\tau \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).\end{cases} \tag{0.5}$$

0.4 Аппроксимации с корректором для гиперболических систем

Операторных оценок при учете корректора для нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа ранее установлено не было. Поэтому остановимся на известных „классических“ результатах усреднения (не допускающих записи в операторных терминах). Эти результаты относятся к случаю операторов, действующих в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$. Аппроксимация решения гиперболической задачи с нулевыми начальными данными и ненулевой правой частью при учете корректора получена в [BeLPap, глава 2, п. 3.6]. В [BeLPap] установлена сильная сходимость к нулю разности решения и первого приближения по норме в $L_2((0,T);H_0^1(\mathcal{O}))$. Оценка погрешности не приводится. Случай нулевых начальных данных и ненулевой правой части рассматривался также в [BaPa, глава 4, §5]. В [BaPa] построено полное асимптотическое разложение и получена оценка порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ для разности решения задачи с быстро осциллирующими коэффициентами и первого приближения к нему по H^1-норме в пространственно-временном цилиндре $\mathcal{O} \times (0,T)$. При этом правая часть предполагалась C^∞-гладкой.

Естественно интересоваться аппроксимацией при учете корректора и для решений гиперболических систем с ненулевыми начальными данными, т. е. аппроксимацией операторного косинуса в подходящем смысле. Хочется ожидать, что в этом случае корректор будет иметь ту же структуру, что и для эллиптических и параболических систем. Однако в работе [BrOtFMu] установлено, что это имеет место только при специальном выборе начальных данных. В общем случае аппроксимация с корректором найдена в работах [BraLe, CaDiCoCalMaMarG]. Однако из-за дисперсии волн в неоднородной среде корректор нелокален. Гомогенизация волнового уравнения при учете дисперсионных эффектов изучалась в работах [ABriV, ConOrV, ConSaMaBalV] методом, основанным на разложении Флоке-Блоха и использовании теории возмущений. Однако операторные оценки погрешности в этих статьях не обсуждались.

0.5 Основные результаты работы

Цель работы — без дополнительных предположений усилить результат (0.4) относительно типа операторной нормы и получить аппроксимацию при учете корректора для решения гиперболической задачи (0.5) с $\boldsymbol{\varphi} = 0$ и ненулевыми $\mathbf{F}$ и $\boldsymbol{\psi}$.

Наш результат — оценка

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(1+|\tau|), \\ \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{0.6}$$

Также установлена аппроксимация при учете корректора:

$$\begin{aligned}\big\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2}) - \varepsilon \mathrm{K}(\varepsilon,\tau)\big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(1+|\tau|), \\ \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{0.7}$$

Корректор в общем случае содержит сглаживающий оператор. Мы выделяем случаи, когда можно использовать более простой корректор без сглаживателя, а также показываем, что можно заменить сглаживатель, естественно возникающий из нашей техники, оператором сглаживания по Стеклову. При усреднении задач в ограниченной области такой сглаживатель удобнее. Использование сглаживания по Стеклову заимствовано из работы [ZhPas1].

0.6 Метод исследования

Мы используем метод работ [BSu5, DSu2], последовательно проводя все построения применительно к операторному синусу. Для получения результата с корректором мы заимствуем также некоторые приемы из [Su3]. Обсудим доказательство оценки (0.6). *Масштабное преобразование* позволяет вывести (0.6) из неравенства

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})-(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\right)\varepsilon(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-1/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\leqslant C(1+|\tau|),\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \varepsilon>0.\end{aligned}\tag{0.8}$$

Здесь $\mathcal{A}=b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$. Для получения оценки (0.8) с помощью унитарного *преобразования Гельфанда* (см. п. 3.2 ниже) оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, действующим в пространстве L_2 на ячейке решетки периодов и зависящим от параметра $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$ (*квазиимпульса*). Мы выделяем одномерный параметр $|\mathbf{k}|$ и изучаем семейство $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ методами аналитической теории возмущений. При этом приходится следить за равномерностью построений по дополнительному параметру $\boldsymbol{\theta}:=\mathbf{k}/|\mathbf{k}|$. Большую часть рассмотрений удается провести в рамках абстрактной теоретико-операторной схемы.

0.7 Структура работы

Работа состоит из трех глав. В главе I (§1, 2) содержится необходимый абстрактный теоретико-операторный материал. Глава II посвящена периодическим ДО. В §3–5 введен рассматриваемый класс операторов, описано разложение в прямой интеграл и нахождение эффективных характеристик. В §6, 7 получены пороговые аппроксимации для сглаженной операторной функции $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})$, установлена оценка (0.8). В главе III (§8, 9) рассматриваются задачи усреднения для гиперболических систем. В §8 получены основные результаты работы в операторных терминах — оценки (0.6) и (0.7). Затем в §9 эти результаты применяются к усреднению решений неоднородных гиперболических систем.

0.8 Благодарность

Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за внимание к работе и многочисленные замечания, способствовавшие улучшению качества изложения.

0.9 Обозначения

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы, если это не ведет к смешениям. Через $I=I_{\mathfrak{H}}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $A:\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, что через $\operatorname{Dom} A$ обозначается область определения A. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp:=\mathfrak{H}\ominus\mathfrak{N}$.

Символ $\langle\cdot,\cdot\rangle$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$, $|\cdot|$ — норма вектора в $\mathbb{C}^n$; $\mathbf{1}_n$ — единичная матрица размера $n\times n$. Для $(m\times n)$-матрицы a символ $|a|$

означает норму матрицы как линейного оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$; a^* означает эрмитово сопряженную $(n \times m)$-матрицу.

Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ порядка s и степени суммирования 2 обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ обозначается класс Шварца $\mathbb{C}^n$-значных функций в $\mathbb{R}^d$. При $n=1$ обычно пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но, если это не ведет к смешениям, мы иногда применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матриц-функций. Символ $L_p((0,T);\mathfrak{H})$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, означает L_p-пространство $\mathfrak{H}$-значных функций на интервале $(0,T)$.

Далее, $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j=1,\dots,d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$. Для оператора Лапласа используем обозначение $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \dots + \partial^2/\partial x_d^2$.

Через C, $\mathcal{C}$, C, $\mathfrak{C}$, c, $\mathfrak{c}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные. Через β с различными индексами ниже обозначаются абсолютные постоянные.

Глава I. Абстрактная схема

1 Предварительные сведения

1.1 Квадратичные операторные пучки

Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $X_0 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — плотно определенный замкнутый оператор, и пусть оператор $X_1 : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ ограничен. На области определения $\operatorname{Dom} X(t) = \operatorname{Dom} X_0$ введем оператор $X(t) := X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. *Наш основной объект* — семейство самосопряженных в $\mathfrak{H}$ положительных операторов

$$A(t) := X(t)^* X(t), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Семейство $A(t)$ порождено замкнутой в $\mathfrak{H}$ квадратичной формой $\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$. Обозначим $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$. Положим

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0, \quad \mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*.$$

Предполагается, что точка $\lambda_0 = 0$ изолирована в спектре оператора A_0, причем

$$0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty, \quad n \leqslant n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leqslant \infty.$$

Через d_0 обозначим расстояние от точки нуль до остального спектра оператора A_0, через $F(t,s)$ — спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[0,s]$. Фиксируем число $\delta > 0$ такое, что $8\delta < d_0$. Положим

$$t_0 := \delta^{1/2} \|X_1\|^{-1}_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*}. \tag{1.2}$$

Тогда (см. [BSu1, (1.1.3)]) $F(t,\delta) = F(t,3\delta)$ и $\operatorname{rank} F(t,\delta) = n$ при $|t| \leqslant t_0$. Мы часто будем писать $F(t)$ вместо $F(t,\delta)$. Через P и P_* обозначим соответственно ортопроекторы в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и в $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$.

1.2 Операторы Z и R

Пусть $\mathcal{D} := \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$, и пусть $u \in \mathfrak{H}_*$. Рассмотрим уравнение на элемент $\psi \in \mathcal{D}$ (ср. [BSu1, глава I, (1.7)]):

$$X_0^*(X_0 \psi - u) = 0, \tag{1.3}$$

которое понимается в слабом смысле. Иными словами, $\psi \in \mathcal{D}$ удовлетворяет тождеству

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = (u, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}.$$

Уравнение (1.3) имеет единственное решение ψ, и $\|X_0\psi\|_{\mathfrak{H}_*} \leqslant \|u\|_{\mathfrak{H}_*}$. Пусть теперь $\omega \in \mathfrak{N}$ и $u = -X_1\omega$. Соответствующее решение уравнения (1.3) обозначим через $\psi(\omega)$. Определим ограниченный оператор $Z : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ равенствами

$$Z\omega = \psi(\omega), \quad \omega \in \mathfrak{N}; \quad Zx = 0, \quad x \in \mathfrak{N}^\perp.$$

Заметим, что

$$ZP = Z, \quad PZ = 0. \tag{1.4}$$

Определим теперь оператор R (см. [BSu1, глава I, п. 1.2]) следующим образом:

$$R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*, \quad R\omega = X_0\psi(\omega) + X_1\omega \in \mathfrak{N}_*.$$

Другое описание оператора R дается формулой

$$R = P_* X_1|_{\mathfrak{N}}.$$

1.3 Спектральный росток

Спектральным ростком операторного семейства (1.1) при $t = 0$ называется (см. [BSu1, глава I, п. 1.3]) самосопряженный оператор

$$S := R^*R : \mathfrak{N} \to \mathfrak{N},$$

для которого также справедливо представление $S = PX_1^*P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$. Отсюда следует оценка

$$\|S\| \leqslant \|X_1\|^2. \tag{1.5}$$

Спектральный росток S *невырожден*, если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$ или, эквивалентно, $\operatorname{rank} R = n$.

В соответствии с аналитической теорией возмущений (см. [Ka]), при $|t| \leqslant t_0$ найдутся такие вещественно-аналитические функции $\lambda_l(t)$ и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\phi_l(t)$, что

$$A(t)\phi_l(t) = \lambda_l(t)\phi_l(t), \quad l = 1, \dots, n, \quad |t| \leqslant t_0,$$

причем $\phi_l(t)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $F(t)\mathfrak{H}$. При достаточно малом t_* ($\leqslant t_0$) и $|t| \leqslant t_*$ справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\begin{aligned} &\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \dots, \quad \gamma_l \geqslant 0, \quad \mu_l \in \mathbb{R}, \quad l = 1, \dots, n; \\ &\phi_l(t) = \omega_l + t\phi_l^{(1)} + t^2\phi_l^{(2)} + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Элементы $\omega_l = \phi_l(0)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

В [BSu1, глава I, п. 1.6] установлено, что числа γ_l и элементы ω_l, $l = 1, \dots, n$, являются собственными для оператора S:

$$S\omega_l = \gamma_l\omega_l, \quad l = 1, \dots, n. \tag{1.7}$$

Величины γ_l и ω_l, $l = 1, \dots, n$, называют *пороговыми характеристиками на краю спектра* для операторного семейства $A(t)$.

1.4 Пороговые аппроксимации

Будем предполагать, что при некотором $c_* > 0$ выполнено соотношение

$$A(t) \geqslant c_* t^2 I, \quad |t| \leqslant t_0. \tag{1.8}$$

Это эквивалентно тому, что собственные числа $\lambda_l(t)$ оператора $A(t)$ подчинены оценкам

$$\lambda_l(t) \geqslant c_* t^2, \quad |t| \leqslant t_0, \quad l = 1, \dots, n.$$

Учитывая (1.6), заключаем, что $\gamma_l \geqslant c_*$, $l = 1, \dots, n$, а тогда в силу (1.7) росток S невырожден:

$$S \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{1.9}$$

Как показано в [BSu1, глава I, теорема 4.1],

$$\|F(t) - P\| \leqslant C_1 |t|, \quad |t| \leqslant t_0; \quad C_1 := \beta_1 \delta^{-1/2} \|X_1\|. \tag{1.10}$$

Кроме (1.10), нам потребуется также более точная аппроксимация спектрального проектора, полученная в [BSu2, (2.10)]:

$$F(t) = P + tF_1 + F_2(t), \quad \|F_2(t)\| \leqslant C_2 t^2, \quad |t| \leqslant t_0; \quad C_2 := \beta_2 \delta^{-1} \|X_1\|^2. \tag{1.11}$$

Согласно [BSu2, (2.15)] оператор F_1 имеет вид

$$F_1 = ZP + PZ^*. \tag{1.12}$$

Из (1.4) и (1.12) следует, что

$$F_1 P = ZP. \tag{1.13}$$

В [BSu1, глава I, теорема 5.2] установлена следующая оценка:

$$\|(A(t) + sI)^{-1} F(t) - (t^2 SP + sI)^{-1} P\| \leqslant C_3 |t| (c_* t^2 + s)^{-1}, \quad s > 0, \quad |t| \leqslant t_0; \tag{1.14}$$

$$C_3 := \beta_3 \delta^{-1/2} \|X_1\| (1 + c_*^{-1} \|X_1\|^2). \tag{1.15}$$

В [BSu5, теорема 2.4] доказана аппроксимация:

$$\|A(t)^{1/2} F(t) - (t^2 S)^{1/2} P\| \leqslant C_4 t^2, \quad |t| \leqslant t_0; \tag{1.16}$$

$$C_4 := \beta_4 \delta^{-1/2} \|X_1\|^2 (1 + c_*^{-1/2} \|X_1\|). \tag{1.17}$$

Отсюда и из (1.5) следует, что

$$\|A(t)^{1/2} F(t)\| \leqslant |t| \|S\|^{1/2} + C_4 t^2 \leqslant (\|X_1\| + C_4 t_0) |t|, \quad |t| \leqslant t_0. \tag{1.18}$$

Также нам потребуется оценка для оператора $A(t)^{1/2} F_2(t)$, полученная в [BSu4, (2.23)]:

$$\|A(t)^{1/2} F_2(t)\|_{\mathfrak{H} \to \mathfrak{H}} \leqslant C_5 t^2, \quad |t| \leqslant t_0; \quad C_5 := \beta_5 \delta^{-1/2} \|X_1\|^2. \tag{1.19}$$

1.5 Аппроксимация оператора $A(t)^{-1/2} F(t)$ при $t \neq 0$

Лемма 1.1. *При $|t| \leqslant t_0$ и $t \neq 0$ выполнено*

$$\|A(t)^{-1/2} F(t) - (t^2 S)^{-1/2} P\| \leqslant C_6. \tag{1.20}$$

Постоянная C_6 определена ниже в (1.23) и зависит лишь от δ, $\|X_1\|$ и c_*.

Доказательство. Справедливо тождество

$$A(t)^{-1/2}F(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(A(t)+\zeta I)^{-1}F(t)\,d\zeta, \quad t \neq 0. \tag{1.21}$$

(См., например, [ViGKo, глава III, §3, п. 4]). Аналогично,

$$(t^2S)^{-1/2}P = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(t^2S+\zeta I_{\mathfrak{N}})^{-1}P\,d\zeta = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(t^2SP+\zeta I)^{-1}P\,d\zeta. \tag{1.22}$$

Вычитая (1.22) из (1.21) и учитывая (1.14), получаем

$$\begin{aligned}\|A(t)^{-1/2}F(t) - (t^2S)^{-1/2}P\| &\leqslant \frac{C_3}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}|t|(c_*t^2+\zeta)^{-1}\,d\zeta \\ &\leqslant \frac{C_3}{\pi}c_*^{-1}|t|^{-1}\int_0^{t^2}\zeta^{-1/2}\,d\zeta + \frac{C_3}{\pi}|t|\int_{t^2}^\infty \zeta^{-3/2}\,d\zeta.\end{aligned}$$

Вычисляя полученные интегралы, приходим к оценке (1.20) с постоянной

$$C_6 := 2C_3\pi^{-1}(c_*^{-1}+1). \tag{1.23}$$

□

2 Аппроксимация оператора $A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})$

2.1 Старший член аппроксимации

Предложение 2.1. *При $|t| \leqslant t_0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ выполнено*

$$\left\|\left(A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2}) - (t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)\right)P\right\| \leqslant C_7(1+|\tau||t|). \tag{2.1}$$

Постоянная C_7 зависит лишь от δ, $\|X_1\|$ и c_*.

Доказательство. При $t=0$ оператор под знаком нормы в (2.1) понимается как предел при $t \to 0$. Раскладывая синус в ряд Тейлора, легко видеть, что этот предел равен нулю.

Пусть теперь $t \neq 0$. Положим

$$E(\tau) := e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}F(t) - e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P; \tag{2.2}$$

$$\Sigma(\tau) := e^{i\tau(t^2S)^{1/2}P}E(\tau) = e^{i\tau(t^2S)^{1/2}P}e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}F(t) - (t^2S)^{-1/2}P. \tag{2.3}$$

Тогда

$$\Sigma(0) = A(t)^{-1/2}F(t) - (t^2S)^{-1/2}P$$

и

$$\frac{d\Sigma(\tau)}{d\tau} = ie^{i\tau(t^2S)^{1/2}P}\left((t^2S)^{1/2}P - A(t)^{1/2}F(t)\right)e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}F(t). \tag{2.4}$$

В силу (1.8) и (1.16) для оператор-функции (2.4) выполнена оценка

$$\left\|\frac{d\Sigma(\tau)}{d\tau}\right\| \leqslant C_4t^2\|A(t)^{-1/2}\| \leqslant C_4c_*^{-1/2}|t|, \quad |t| \leqslant t_0, \quad t \neq 0.$$

Тогда с учетом (1.20) и (2.3) имеем

$$\|E(\tau)\| = \|\Sigma(\tau)\| \leqslant C_4c_*^{-1/2}|t||\tau| + \|\Sigma(0)\| \leqslant C_8(1+|\tau||t|), \quad |t| \leqslant t_0, \quad t \neq 0; \tag{2.5}$$

$$C_8 := \max\{C_4c_*^{-1/2}; C_6\}. \tag{2.6}$$

(Ср. с доказательством теоремы 2.5 из [BSu5].) Отсюда

$$\|A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})F(t) - (t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)P\| \leqslant C_8(1+|\tau||t|). \tag{2.7}$$

С помощью (1.8) и (1.10) из (2.7) выводим неравенство

$$\begin{aligned} &\left\|\left(A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2}) - (t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)\right)P\right\| \\ &\leqslant C_8(1+|\tau||t|) + \|A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})(F(t)-P)\| \\ &\leqslant C_7(1+|\tau||t|), \quad |t|\leqslant t_0; \quad C_7 := C_8 + c_*^{-1/2}C_1. \end{aligned} \tag{2.8}$$

□

2.2 Аппроксимация по „энергетической“ норме

Здесь мы устанавливаем другую аппроксимацию для оператора $A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2})$ (по „энергетической“ норме).

Предложение 2.2. *При $\tau\in\mathbb{R}$ и $|t|\leqslant t_0$ справедлива оценка*

$$\left\|A(t)^{1/2}\left(A(t)^{-1/2}\sin(\tau A(t)^{1/2}) - (I+tZ)(t^2S)^{-1/2}\sin(\tau(t^2S)^{1/2}P)\right)P\right\| \leqslant C_9(|t|+|\tau|t^2). \tag{2.9}$$

Постоянная C_9 зависит лишь от δ, $\|X_1\|$ и c_*.

Доказательство. Заметим, что

$$A(t)^{1/2}e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}P = A(t)^{1/2}e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}F(t)P + e^{-i\tau A(t)^{1/2}}(P-F(t))P. \tag{2.10}$$

В силу (1.10)

$$\|e^{-i\tau A(t)^{1/2}}(P-F(t))P\| \leqslant C_1|t|, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\leqslant t_0. \tag{2.11}$$

Далее,

$$\begin{aligned} &A(t)^{1/2}e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}F(t)P \\ &= A(t)^{1/2}F(t)\left(e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}F(t) - e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P\right)P \\ &+ A(t)^{1/2}F(t)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P. \end{aligned} \tag{2.12}$$

В силу (1.18), (2.2) и (2.5) при $t\neq 0$ выполнено

$$\begin{aligned} &\left\|A(t)^{1/2}F(t)\left(e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2}F(t) - e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P\right)P\right\| \\ &\leqslant C_8(\|X_1\|+C_4t_0)(|t|+|\tau|t^2), \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\leqslant t_0, \quad t\neq 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

При $t=0$ оператор под знаком нормы в (2.13) будем понимать как предел при $t\to 0$. Имеем $e^{-i\tau A(t)^{1/2}}F(t)\to P$ при $t\to 0$. Далее, в силу (1.9) и (1.16) справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|A(t)^{1/2}F(t)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P - e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}P\| \\ &\quad = \|A(t)^{1/2}F(t)(t^2S)^{-1/2}P - P\| \leqslant c_*^{-1/2}C_4|t|, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\leqslant t_0. \end{aligned}$$

С учетом этих соображений предел левой части (2.13) при $t\to 0$ равен нулю.

Далее, согласно (1.11) и (1.13)

$$
\begin{aligned}
&A(t)^{1/2}F(t)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P - A(t)^{1/2}(I+tZ)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P \\
&\quad = A(t)^{1/2}F_2(t)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P.
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

На основании (1.9) и (1.19) получаем

$$
\|A(t)^{1/2}F_2(t)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P\| \leqslant c_*^{-1/2}C_5|t|, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\leqslant t_0. \tag{2.15}
$$

Объединяя (2.10)–(2.15), находим

$$
\begin{aligned}
&\left\|A(t)^{1/2}\left(e^{-i\tau A(t)^{1/2}}A(t)^{-1/2} - (I+tZ)e^{-i\tau(t^2S)^{1/2}P}(t^2S)^{-1/2}P\right)P\right\| \leqslant C_9(|t|+|\tau|t^2), \\
&\qquad \tau\in\mathbb{R}, \quad |t|\leqslant t_0; \quad C_9 := C_1 + c_*^{-1/2}C_5 + C_8(\|X_1\| + C_6t_0).
\end{aligned} \tag{2.16}
$$

(Ср. с доказательством теоремы 3.1 из [Su3].) $\square$

2.3 Аппроксимация оператора $A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P$

Введем теперь параметр $\varepsilon > 0$. Нам потребуется исследовать поведение оператора

$$
A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2})P
$$

при малом ε. Заменим τ на $\varepsilon^{-1}\tau$ в (2.1):

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2}) - (t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)\right)P\right\| \leqslant C_7(1+\varepsilon^{-1}|\tau||t|), \\
&\qquad |t|\leqslant t_0, \quad \varepsilon>0, \quad \tau\in\mathbb{R}.
\end{aligned}
$$

Домножая левую часть на „сглаживающий“ множитель $\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2}$ и учитывая неравенства

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant 1, \\
&|\tau||t|(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant |\tau|,
\end{aligned}
$$

приходим к следующему результату.

Теорема 2.3. *При $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, $|t|\leqslant t_0$ выполнена оценка*

$$
\left\|\left(A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2}) - (t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)\right)\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2}P\right\| \leqslant C_7(1+|\tau|).
$$

Заменив в (2.9) τ на $\varepsilon^{-1}\tau$ и умножив получившийся оператор на $\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}$, получаем следующее утверждение.

Теорема 2.4. *При $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$, $|t|\leqslant t_0$ выполнена оценка*

$$
\begin{aligned}
&\left\|A(t)^{1/2}\left(A(t)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau A(t)^{1/2}) - (I+tZ)(t^2S)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(t^2S)^{1/2}P)\right)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1}P\right\| \\
&\leqslant C_9\varepsilon(1+|\tau|).
\end{aligned}
$$

Глава II. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$

В настоящей главе мы описываем класс матричных ДО второго порядка, допускающих факторизацию вида $\mathcal{A} = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$, где $\mathcal{X}$ — однородный ДО первого порядка. Этот класс был выделен и изучен в [BSu1]. Там же можно найти более подробное изложение (см. главу II).

3 Факторизованные периодические дифференциальные операторы второго порядка

3.1 Решетки Γ и $\widetilde{\Gamma}$

Пусть Γ — решетка в $\mathbb{R}^d$, порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$:

$$\Gamma := \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{d} \nu_j \mathbf{a}_j, \quad \nu_j \in \mathbb{Z} \right\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} \zeta_j \mathbf{a}_j, \quad -\frac{1}{2} < \zeta_j < \frac{1}{2} \right\}.$$

Базис $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$, двойственный к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}_l, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi\delta_{lj}$. Этот базис порождает решетку $\widetilde{\Gamma}$, двойственную к Γ:

$$\widetilde{\Gamma} := \left\{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b} = \sum_{j=1}^{d} \mu_j \mathbf{b}_j, \quad \mu_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Через $\widetilde{\Omega}$ обозначим первую зону Бриллюэна решетки $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega} := \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma} \right\}. \tag{3.1}$$

Пусть $|\Omega|$ — мера Лебега ячейки Ω: $|\Omega| = \operatorname{mes}\Omega$, и пусть $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{mes}\widetilde{\Omega}$. Положим $2r_1 := \operatorname{diam}\Omega$. Через r_0 обозначим радиус шара, вписанного в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$. Отметим, что

$$2r_0 = \min_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}|. \tag{3.2}$$

С решеткой Γ связано дискретное преобразование Фурье

$$v(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} \widehat{v}_{\mathbf{b}} e^{i\langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \tag{3.3}$$

которое унитарно отображает $l_2(\widetilde{\Gamma})$ на $L_2(\Omega)$:

$$\int_{\Omega} |v(\mathbf{x})|^2 \, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\widehat{v}_{\mathbf{b}}|^2. \tag{3.4}$$

Ниже через $\widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Имеем

$$\|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} = \sum_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 |\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{3.5}$$

причем сходимость ряда в правой части (3.5) равносильна включению $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Из (3.1), (3.4) и (3.5) следует, что

$$\|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant \sum_{\mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} |\mathbf{k}|^2 |\widehat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2 = |\mathbf{k}|^2 \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{3.6}$$

3.2 Преобразование Гельфанда

Первоначально преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ определяется на функциях из класса Шварца формулой

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k},\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle} \mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \quad \mathbf{v}\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad \mathbf{x}\in\Omega, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}.$$

При этом

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \int_{\Omega} |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x},$$

и $\mathcal{U}$ продолжается по непрерывности до унитарного оператора

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\, d\mathbf{k}.$$

Включение $\mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ при п. в. $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и

$$\int_{\widetilde{\Omega}} \int_{\Omega} \left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 + |\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x})|^2 \right)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} < \infty.$$

Под действием преобразования Гельфанда оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ переходит в оператор умножения на ту же функцию в слоях прямого интеграла. Действие оператора $\mathbf{D}$ на $\mathbf{v}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $\mathbf{D}+\mathbf{k}$ на $\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)\in\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$.

3.3 Факторизованные операторы второго порядка

Пусть $b(\mathbf{D})$ — матричный ДО первого порядка, имеющий вид $\sum_{j=1}^d b_j D_j$, где b_j, $j = 1,\dots,d$, — постоянные матрицы размера $m\times n$ (вообще говоря, с комплексными элементами). *Всегда считаем, что* $m \geqslant n$. Предположим, что символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j \xi_j$, $\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$, оператора $b(\mathbf{D})$ имеет максимальный ранг: $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$ при $0\neq\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d$. Это условие равносильно существованию таких постоянных α_0, $\alpha_1>0$, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}, \quad 0<\alpha_0\leqslant\alpha_1<\infty. \tag{3.7}$$

Отметим оценку, вытекающую из (3.7):

$$|b_j| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad j=1,\dots,d. \tag{3.8}$$

Пусть Γ-периодическая $(m\times m)$-матрица-функция $g(\mathbf{x})$ эрмитова, положительно определена, ограничена и ограниченно обратима:

$$g(\mathbf{x})>0; \quad g, g^{-1}\in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{3.9}$$

Рассмотрим действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ ДО $\mathcal{A}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{3.10}$$

Строгое определение оператора $\mathcal{A}$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] := (g b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Используя преобразование Фурье и (3.7), (3.9), легко проверить, что

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Таким образом, форма $\mathfrak{a}[\cdot,\cdot]$ замкнута и неотрицательна.

Оператор $\mathcal{A}$ допускает факторизацию вида $\mathcal{A} = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$, где

$$\mathcal{X} := g(\mathbf{x})^{1/2} b(\mathbf{D}) : L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m), \quad \operatorname{Dom}\mathcal{X} = H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n).$$

Оператор $\mathcal{X}$ замкнут.

4 Разложение оператора $\mathcal{A}$ в прямой интеграл

4.1 Форма $\mathfrak{a}(\mathbf{k})$ и оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

Положим

$$\mathfrak{H} := L_2(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad \mathfrak{H}_* := L_2(\Omega;\mathbb{C}^m) \tag{4.1}$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, заданный на области определения $\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$ формулой $\mathcal{X}(\mathbf{k}) = g(\mathbf{x})^{1/2} b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$. Самосопряженный в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ формально задан дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}+\mathbf{k}) \tag{4.2}$$

с периодическими граничными условиями. Строгое определение оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ дается через замкнутую квадратичную форму $\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] := \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n)$. С помощью дискретного преобразования Фурье (3.3) и (3.7), (3.9) нетрудно проверить, что

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n). \tag{4.3}$$

Отсюда и из компактности вложения $\widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n) \hookrightarrow L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ следует, что спектр оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ дискретен, а резольвента компактна.

В силу (3.6) и нижней оценки (4.3) выполнено

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_* |\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}; \quad c_* := \alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{4.4}$$

Положим

$$\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker} \mathcal{X}(0). \tag{4.5}$$

Тогда

$$\mathfrak{N} = \{\mathbf{u} = \mathbf{c} \in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n) : \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}. \tag{4.6}$$

Через P обозначим ортогональный проектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство (4.6):

$$P\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{4.7}$$

Из (3.2) и (3.6) при $\mathbf{k} = 0$ следует, что

$$\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant 4r_0^2 \|\mathbf{v}\|^2_{L_2(\Omega)}, \quad \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega;\mathbb{C}^n), \quad \int_\Omega \mathbf{v}\, d\mathbf{x} = 0.$$

Отсюда и из нижней оценки (4.3) при $\mathbf{k} = 0$ вытекает, что расстояние d_0 от точки нуль до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ удовлетворяет неравенству

$$d_0 \geqslant 4c_* r_0^2. \tag{4.8}$$

4.2 Прямой интеграл для оператора $\mathcal{A}$

С помощью преобразования Гельфанда оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$:

$$\mathcal{U}\mathcal{A}\mathcal{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}.$$

Это означает следующее. Если $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, то

$$\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k}, \cdot) \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n) \quad \text{при п. в. } \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \tag{4.9}$$

$$\mathfrak{a}[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot), \widetilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{4.10}$$

Обратно, если $\widetilde{\mathbf{v}} \in \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)\, d\mathbf{k}$ удовлетворяет (4.9) и интеграл в (4.10) конечен, то $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и выполнено (4.10).

4.3 Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в абстрактную схему

При $d > 1$ операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ зависят от многомерного параметра $\mathbf{k}$. Следуя [BSu1, глава II], мы выделяем одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$. Мы будем применять схему главы I. При этом все построения станут зависеть от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \in \mathbb{S}^{d-1}$, и необходимо следить за равномерностью оценок по параметру $\boldsymbol{\theta}$.

Пространства $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ определены в (4.1). Положим $X(t) = X(t, \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. Тогда $X(t, \boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где $X_0 = g(\mathbf{x})^{1/2} b(\mathbf{D})$, $\operatorname{Dom} X_0 = \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, и $X_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу-функцию $g(\mathbf{x})^{1/2} b(\boldsymbol{\theta})$. Положим $A(t) = A(t, \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. Тогда $A(t, \boldsymbol{\theta}) = X(t, \boldsymbol{\theta})^* X(t, \boldsymbol{\theta})$. Согласно (4.5) и (4.6) $\mathfrak{N} = \operatorname{Ker} X_0 = \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0)$, $\dim \mathfrak{N} = n$. Число d_0 подчинено оценке (4.8). Как показано в [BSu1, глава II, §3], условие $n \leqslant n_* = \dim \operatorname{Ker} X_0^*$ также справедливо.

Таким образом, все условия абстрактной схемы выполнены.

В п. 1.1 требовалось выбрать число $\delta < d_0/8$. Учитывая (4.4) и (4.8), примем

$$\delta := c_* r_0^2/4 = (r_0/2)^2 \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}. \tag{4.11}$$

Далее, в силу (3.7) для оператора $X_1(\boldsymbol{\theta}) = g(\mathbf{x})^{1/2} b(\boldsymbol{\theta})$ справедлива оценка

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{4.12}$$

Это позволяет в качестве t_0 (см. (1.2)) выбрать число, не зависящее от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$:

$$t_0 := \delta^{1/2} \alpha_1^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-1/2} = (r_0/2) \alpha_0^{1/2} \alpha_1^{-1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2}. \tag{4.13}$$

Очевидно, $t_0 \leqslant r_0/2$, и шар $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$ лежит внутри $\widetilde{\Omega}$. Существенно, что величины c_*, δ и t_0 (см. (4.4), (4.11), (4.13)) не зависят от параметра $\boldsymbol{\theta}$.

Из (4.4) следует невырожденность ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t, \boldsymbol{\theta})$ (который сейчас зависит от $\boldsymbol{\theta}$):

$$S(\boldsymbol{\theta}) \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{4.14}$$

Важно, что росток невырожден равномерно по $\boldsymbol{\theta}$.

5 Эффективная матрица. Эффективный оператор

5.1 Эффективная матрица

В соответствии с [BSu1, глава III, §1] спектральный росток $S(\boldsymbol{\theta})$ операторного семейства $A(t, \boldsymbol{\theta})$, действующий в $\mathfrak{N}$, представим в виде

$$S(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \tag{5.1}$$

где $b(\boldsymbol{\theta})$ — символ оператора $b(\mathbf{D})$, и g^0 — так называемая *эффективная матрица*. Постоянная положительная $(m \times m)$-матрица g^0 определяется следующим образом. Предположим, что Γ-периодическая $(n \times m)$-матрица-функция $\Lambda \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ является слабым решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{5.2}$$

Эффективная матрица g^0 определена равенством

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x},$$

где

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \tag{5.3}$$

Оказывается, что матрица g^0 автоматически положительно определена.

Из (5.2) несложно вывести, что

$$\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} m^{1/2} \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{5.4}$$

Нам также потребуются следующие оценки, установленные в [BSu3, (6.28) и п. 7.3]:

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} M_1; \quad M_1 := m^{1/2}(2r_0)^{-1}\alpha_0^{-1/2} \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}, \tag{5.5}$$

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} M_2; \quad M_2 := m^{1/2}\alpha_0^{-1/2} \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{5.6}$$

5.2 Эффективный оператор

В силу (5.1) и однородности символа $b(\mathbf{k})$ имеем

$$S(\mathbf{k}) := t^2 S(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \quad t = |\mathbf{k}|, \quad \boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}|. \tag{5.7}$$

Выражение $S(\mathbf{k})$ является символом ДО

$$\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \tag{5.8}$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ на области определения $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и называемого *эффективным оператором* для оператора $\mathcal{A}$.

Пусть $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ — операторное семейство в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, отвечающее эффективному оператору $\mathcal{A}^0$. Тогда $\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ при периодических граничных условиях: $\operatorname{Dom} \mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = \widetilde{H}^2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Отсюда с учетом (4.7) и (5.7) вытекает равенство

$$S(\mathbf{k})P = \mathcal{A}^0(\mathbf{k})P. \tag{5.9}$$

Оценивая квадратичную форму оператора $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$, можно показать, что

$$\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) \geqslant c_* |\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{5.10}$$

5.3 Свойства эффективной матрицы

Эффективная матрица g^0 подчинена оценкам, известным в теории усреднения как вилка Фойгта-Рейсса (см., например, [BSu1, глава III, теорема 1.5]).

Предложение 5.1. *Пусть g^0 — эффективная матрица. Тогда*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}, \tag{5.11}$$

где $\underline{g} := \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x}\right)^{-1}$ *и* $\overline{g} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$. *Если* $m = n$, *то* $g^0 = \underline{g}$.

Из неравенства (5.11) следует, что

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{5.12}$$

Выделим случаи, когда в (5.11) реализуется верхняя или нижняя грань, см. [BSu1, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7].

Предложение 5.2. *Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{5.13}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})$.

Предложение 5.3. *Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad k = 1, \dots, m, \tag{5.14}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})^{-1}$.

6 Пороговые аппроксимации для оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$

6.1 Аппроксимация оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})$ при $|\mathbf{k}| \leqslant t_0$

Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При разложении в прямой интеграл этому оператору отвечает операторное семейство $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$, заданное в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ дифференциальным выражением $|\mathbf{D} + \mathbf{k}|^2$ при периодических граничных условиях. Обозначим

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) := \varepsilon^2 (\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}. \tag{6.1}$$

Очевидно,

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) P = \varepsilon^2 (t^2 + \varepsilon^2)^{-1} P, \quad |\mathbf{k}| = t. \tag{6.2}$$

Мы будем применять результаты главы I к семейству операторов $A(t, \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$. Осталось только реализовать значения постоянных. Учитывая (4.12), выберем завышенные значения постоянных из (1.10), (1.11) и (1.15), не зависящие от $\boldsymbol{\theta}$:

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \beta_1 \delta^{-1/2} \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2}, \\
C_2 &:= \beta_2 \delta^{-1} \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}, \\
C_3 &:= \beta_3 \delta^{-1/2} \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} (1 + c_*^{-1/2} \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}).
\end{aligned}$$

Здесь постоянные c_* и δ определены в (4.4) и (4.11) соответственно. Далее, учитывая (4.12), согласно (1.17), (1.19) и (1.23) положим

$$\begin{aligned}
C_4 &:= \beta_4 \delta^{-1/2} \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} (1 + c_*^{-1/2} \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2}), \\
C_5 &:= \beta_5 \delta^{-1/2} \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}, \\
C_6 &:= 2 C_3 \pi^{-1} (c_*^{-1} + 1).
\end{aligned}$$

Наконец, по уже реализованным постоянным C_1, C_4, C_5 и C_6 согласно (2.6), (2.8) и (2.16) определим

$$\begin{aligned} &C_8 := \max\{C_4 c_*^{-1/2}; C_6\},\\ &C_7 := C_8 + c_*^{-1/2} C_1,\\ &C_9 := C_1 + c_*^{-1/2} C_5 + C_8(\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2} + C_6 t_0). \end{aligned}$$

Мы учли (4.12). Здесь t_0 — постоянная (4.13).

Применяя теорему 2.3, с учетом (5.9) и (6.2) получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) - \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}P\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\leqslant C_7(1+|\tau|),\quad \varepsilon>0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad |\mathbf{k}|\leqslant t_0. \end{aligned} \tag{6.3}$$

В соответствии с [BSu3, (4.2)] роль оператора Z играет оператор $Z(\boldsymbol{\theta}) = [\Lambda]b(\boldsymbol{\theta})P$. Здесь $[\Lambda]$ — оператор умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$. Имеем

$$tZ(\boldsymbol{\theta})P = \Lambda b(\mathbf{k})P = \Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})P.$$

Применяя теорему 2.4, заключаем, что

$$\begin{aligned} &\Big\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})\\ &\quad - (I+\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k}))\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\big)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)P\Big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\leqslant C_9\varepsilon(1+|\tau|),\quad \varepsilon>0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad |\mathbf{k}|\leqslant t_0. \end{aligned} \tag{6.4}$$

6.2 Аппроксимация при $|\mathbf{k}| > t_0$

При $|\mathbf{k}| > t_0$ оценки тривиальны. В силу (4.4) и (5.10) выполнено

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant c_*^{-1/2}t_0^{-1},\quad \|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant c_*^{-1/2}t_0^{-1},\\ \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega},\quad |\mathbf{k}|>t_0. \end{aligned} \tag{6.5}$$

Согласно (6.2),

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant 1,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{6.6}$$

Объединяя (6.5) и (6.6), оценим левую часть (6.3) при $|\mathbf{k}| > t_0$:

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) - \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}P\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\leqslant 2c_*^{-1/2}t_0^{-1},\quad \varepsilon>0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega},\quad |\mathbf{k}|>t_0. \end{aligned} \tag{6.7}$$

Собирая вместе (6.3) и (6.7), находим

$$\begin{aligned} \left\| \left(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) - \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\right)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}P\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ \leqslant C_7(1+|\tau|) + 2c_*^{-1/2}t_0^{-1},\quad \varepsilon>0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \end{aligned} \tag{6.8}$$

Оценим теперь оператор, стоящий под знаком нормы в (6.4). В силу (6.2) и элементарного неравенства $t^2+\varepsilon^2 \geqslant 2\varepsilon t_0$, $t>t_0$, выполнено

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant (2t_0)^{-1}\varepsilon,\quad \varepsilon>0,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega},\quad |\mathbf{k}|>t_0, \tag{6.9}$$

поэтому

$$\begin{gathered}\|\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant(2t_0)^{-1}\varepsilon,\\ \varepsilon>0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega},\quad |\mathbf{k}|>t_0.\end{gathered}\tag{6.10}$$

Согласно (4.2), (5.12) и (6.9)

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\leqslant(2t_0)^{-1}\varepsilon\|g^{1/2}b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\leqslant(2t_0)^{-1}\varepsilon\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &=(2t_0)^{-1}\varepsilon\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty},\quad \varepsilon>0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega},\quad |\mathbf{k}|>t_0.\end{aligned}\tag{6.11}$$

Чтобы оценить оператор

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)P,$$

представим его в виде

$$\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda P_m\big)\,b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)P,$$

где P_m — ортогональный проектор пространства $\mathfrak{H}_*=L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$ на подпространство констант. Согласно [BSu4, (6.22)], выполнено

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda P_m\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant C_\Lambda,\quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega},$$

где постоянная C_Λ зависит только от m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ. Таким образом, с учетом (5.12) и (6.9) имеем

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)P\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\leqslant(2t_0)^{-1}C_\Lambda\varepsilon\|b(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\leqslant(2t_0)^{-1}C_\Lambda\varepsilon\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &=(2t_0)^{-1}C_\Lambda\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\varepsilon,\quad \varepsilon>0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega},\quad |\mathbf{k}|>t_0.\end{aligned}\tag{6.12}$$

Объединяя (6.10)–(6.12), находим, что при $|\mathbf{k}|>t_0$ левая часть (6.4) оценивается через $\check{C}_9\varepsilon$, где $\check{C}_9:=(2t_0)^{-1}(1+\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}+C_\Lambda\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty})$. Отсюда и из (6.4) следует, что

$$\begin{aligned}&\big\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})\\ &\quad-(I+\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k}))\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\big)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)P\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\\ &\quad\leqslant C_9\varepsilon(1+|\tau|)+\check{C}_9\varepsilon,\quad \varepsilon>0,\quad \tau\in\mathbb{R},\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{aligned}\tag{6.13}$$

6.3 Устранение оператора P

Покажем теперь, что в операторе под знаком нормы в (6.8) можно заменить проектор P тождественным оператором так, что изменится только постоянная в оценке. Для этого оценим норму оператора $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}(I-P)$ с помощью дискретного преобразования Фурье:

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}(I-P)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}=\max_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}\varepsilon(|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-1/2}\leqslant\varepsilon r_0^{-1},\quad \varepsilon>0,\quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\tag{6.14}$$

Применяя спектральную теорему и элементарное неравенство $|\sin x|/|x| \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$, заключаем, что
$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon^{-1}|\tau|. \tag{6.15}$$
Аналогично,
$$\|\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon^{-1}|\tau|. \tag{6.16}$$
Объединяя (6.14)–(6.16), находим
$$\begin{aligned}\| \left(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) - \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}(I-P)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ \leqslant 2r_0^{-1}|\tau|.\end{aligned}$$

Отсюда и из (6.8) выводим, что
$$\begin{aligned}&\| \left(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) - \mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\leqslant C_{10}(1+|\tau|), \quad \varepsilon>0, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \mathbf{k}\in \operatorname{clos}\widetilde{\Omega}; \quad C_{10} := 2r_0^{-1} + C_7 + 2c_*^{-1/2}t_0^{-1}.\end{aligned} \tag{6.17}$$

Покажем теперь, что в старшем члене в оценке (6.13) оператор P может быть устранен. Для этого оценим оператор $\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)(I-P)$. Из (6.14) следует неравенство
$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)(I-P)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \max_{0\neq \mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \varepsilon^2(|\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \varepsilon r_0^{-1}, \quad \varepsilon>0, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}. \tag{6.18}$$

Тогда
$$\|\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2})\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)(I-P)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon r_0^{-1}. \tag{6.19}$$
Далее, согласно (4.2), (5.12) и (6.18)
$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)(I-P)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \varepsilon r_0^{-1}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{6.20}$$
Объединяя (6.13), (6.19) и (6.20), получаем
$$\begin{aligned}&\Big\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}) \\ &\quad - (I+\Lambda b(\mathbf{D}+\mathbf{k})P)\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{-1/2} \sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^0(\mathbf{k})^{1/2})\big)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\Big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\quad \leqslant C_{11}\varepsilon(1+|\tau|), \quad \varepsilon>0, \quad \tau\in\mathbb{R}, \quad \mathbf{k}\in\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}.\end{aligned} \tag{6.21}$$

Здесь $C_{11} := C_9 + \check{C}_9 + r_0^{-1}(1+\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty})$.

7 Аппроксимация оператора $\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})$

Пусть $\mathcal{A} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$ — оператор, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, и $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор. Напомним обозначение $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ и положим
$$\mathcal{R}(\varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1}.$$

С помощью преобразования Гельфанда этот оператор раскладывается в прямой интеграл по операторам (6.1):
$$\mathcal{R}(\varepsilon) = \mathcal{U}^{-1}\left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\, d\mathbf{k}\right)\mathcal{U}.$$

Применяя преобразование Гельфанда, из (6.17) выводим

$$\| \left(\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\right)\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{10}(1+|\tau|), \quad \varepsilon>0, \quad \tau\in\mathbb{R}. \tag{7.1}$$

Чтобы получить аппроксимацию по энергетической норме, нам потребуется оператор $\Pi = \mathcal{U}^{-1}[P]\mathcal{U}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Здесь $[P]$ — проектор в $\int_{\widetilde\Omega}\oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\,d\mathbf{k}$, действующий послойно как оператор P усреднения по ячейке Ω (см. (4.7)). Как показано в [BSu3, (6.8)], Π — псевдодифференциальный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ с символом $\chi_{\widetilde\Omega}(\boldsymbol{\xi})$, где $\chi_{\widetilde\Omega}$ — характеристическая функция множества $\widetilde\Omega$. То есть

$$(\Pi\mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2}\int_{\widetilde\Omega} e^{i\langle\mathbf{x},\boldsymbol{\xi}\rangle}\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})\,d\boldsymbol{\xi}.$$

Здесь $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Из (6.21) с помощью преобразования Гельфанда получаем, что

$$\left\|\mathcal{A}^{1/2}\left(\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2}) - (I+\Lambda b(\mathbf{D})\Pi)(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\right)\mathcal{R}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{11}\varepsilon(1+|\tau|), \quad \varepsilon>0, \quad \tau\in\mathbb{R}. \tag{7.2}$$

Глава III. Задача усреднения для гиперболических систем

8 Аппроксимация оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$

Если $\psi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая измеримая функция в $\mathbb{R}^d$, обозначим $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon>0$. Через $[\psi^\varepsilon]$ будем обозначать оператор умножения на функцию $\psi^\varepsilon(\mathbf{x})$. *Наш основной объект* — действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$, $\varepsilon>0$, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \tag{8.1}$$

Строгое определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ дается через квадратичную форму. Коэффициенты оператора (8.1) быстро осциллируют при $\varepsilon\to 0$.

Наша цель — аппроксимировать оператор $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ и применить результаты к усреднению решений задачи Коши для гиперболических систем.

8.1 Основные результаты. Старший член аппроксимации

Пусть T_ε — *унитарный в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *оператор масштабного преобразования:* $(T_\varepsilon\mathbf{u})(\mathbf{x}) := \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x})$, $\varepsilon>0$. Тогда справедливо тождество $\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2}T_\varepsilon^*\mathcal{A}T_\varepsilon$. Поэтому

$$\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) = \varepsilon T_\varepsilon^*\mathcal{A}^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau\mathcal{A}^{1/2})T_\varepsilon.$$

Для эффективного оператора имеет место аналогичное равенство. Далее,

$$(\mathcal{H}_0+I)^{-1/2} = \varepsilon T_\varepsilon^*(\mathcal{H}_0+\varepsilon^2 I)^{-1/2}T_\varepsilon = T_\varepsilon^*\mathcal{R}(\varepsilon)^{1/2}T_\varepsilon.$$

С учетом этих соображений из (7.1) выводим следующий результат.

Теорема 8.1. *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ — оператор* (8.1), *и пусть $\mathcal{A}^0$ — эффективный оператор* (5.8). *Пусть $\mathcal{H}_0 = -\Delta$. Тогда при $\varepsilon > 0$ и $\tau \in \mathbb{R}$ справедлива оценка*

$$\| \left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\right) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1/2} \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{10} \varepsilon (1 + |\tau|). \tag{8.2}$$

Постоянная C_{10} контролируется через r_0, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ и $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

В силу элементарного неравенства $|\sin x|/|x| \leqslant 1$ имеем

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2|\tau| \leqslant 2(1 + |\tau|). \tag{8.3}$$

Интерполируя между (8.2) и (8.3), при $0 \leqslant s \leqslant 1$ получаем

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\right) (\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2^{1-s} C_{10}^s \varepsilon^s (1 + |\tau|), \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{8.4}$$

Оператор $(\mathcal{H}_0 + I)^{s/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Действительно, для $\mathbf{u} \in H^s(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\|(\mathcal{H}_0 + I)^{s/2} \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \int_{\mathbb{R}^d} (|\boldsymbol{\xi}|^2 + 1)^s |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 \, d\boldsymbol{\xi} = \|\mathbf{u}\|^2_{H^s(\mathbb{R}^d)}, \tag{8.5}$$

где $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$.

Из (8.4) и (8.5) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2^{1-s} C_{10}^s \varepsilon^s (1 + |\tau|), \\ 0 \leqslant s \leqslant 1, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad &\varepsilon > 0. \end{aligned}$$

В частности, эта оценка позволяет считать параметр τ (время) большим, а именно, рассматривать значения $|\tau| = O(\varepsilon^{-\alpha})$ при $0 < \alpha < s$.

Подытожим результаты.

Теорема 8.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 1$ и $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_s (1 + |\tau|) \varepsilon^s; \quad \mathcal{C}_s := 2^{1-s} C_{10}^s.$$

В частности, при $0 < s \leqslant 1$, $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < s$, выполнено неравенство

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2 \mathcal{C}_s \varepsilon^{s-\alpha}, \\ |\tau| = \varepsilon^{-\alpha}, \quad &0 < \varepsilon \leqslant 1. \end{aligned}$$

8.2 Основные результаты. Аппроксимация при учете корректора

Установим теперь аппроксимацию при учете корректора. Положим $\Pi_\varepsilon := T_\varepsilon^* \Pi T_\varepsilon$. Тогда Π_ε — псевдодифференциальный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$, т. е.

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i \langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} \widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi}) \, d\boldsymbol{\xi}. \tag{8.6}$$

Очевидно, $\Pi_\varepsilon \mathbf{D}^\sigma \mathbf{u} = \mathbf{D}^\sigma \Pi_\varepsilon \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^\kappa(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $|\sigma| \leqslant \kappa$. Отметим, что

$$\|\Pi_\varepsilon\|_{H^\kappa(\mathbb{R}^d) \to H^\kappa(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1, \quad \kappa \in \mathbb{Z}_+.$$

Следующие результаты установлены в [PSu, предложение 1.4] и [BSu4, п. 10.2].

Предложение 8.3. *При $\varepsilon > 0$ для любой функции $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ верна оценка*

$$\|\Pi_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_0^{-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Предложение 8.4. *Пусть $f(\mathbf{x})$ — такая Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, что $f \in L_2(\Omega)$. Тогда оператор $[f^\varepsilon]\Pi_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, причем*

$$\|[f^\varepsilon]\Pi_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Теорема 8.5. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое $(n \times m)$-матричное решение задачи* (5.2). *Пусть Π_ε — оператор* (8.6). *Тогда справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) \right) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C_{12} \varepsilon (1 + |\tau|), \quad \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8.7}$$

Постоянная C_{12} зависит только от m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Доказательство. С помощью преобразования Гельфанда из (7.2) получаем аппроксимацию по „энергетической“ норме:

$$\begin{aligned} &\left\| \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2} \left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) \right) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C_{11} \varepsilon (1 + |\tau|), \quad \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8.8}$$

Отметим, что в силу (3.7), (3.9) и (8.1)

$$c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2} \mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \tag{8.9}$$

где c_* — постоянная из (4.4).

Из (8.8) и (8.9) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\left\| \mathbf{D} \left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) \right) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant c_*^{-1/2} C_{11} \varepsilon (1 + |\tau|), \quad \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8.10}$$

Оценим теперь $(L_2 \to L_2)$-норму корректора. Пусть $\Pi_\varepsilon^{(m)}$ — псевдодифференциальный оператор в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$. С помощью предложения 8.4 и (5.5) получаем

$$\|\Lambda^\varepsilon \Pi_\varepsilon^{(m)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M_1. \tag{8.11}$$

Используя (5.12) и (8.11), находим

$$\begin{aligned} &\|\varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant \varepsilon \|\Lambda^\varepsilon \Pi_\varepsilon^{(m)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \|b(\mathbf{D}) (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant \varepsilon M_1 \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty} \|\sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon M_1 \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Объединяя (8.2), (8.10) и (8.12), получаем оценку (8.7) с постоянной $C_{12} := C_{10} + c_*^{-1/2} C_{11} + M_1 \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$. $\square$

С помощью интерполяции из теоремы 8.5 выведем следующий результат.

Теорема 8.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.5. *Тогда при* $0 \leqslant s \leqslant 1$ *и* $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ *имеет место оценка*

$$\left\| \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) \right\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_s (1 + |\tau|) \varepsilon^s. \tag{8.13}$$

Здесь $\mathfrak{C}_s := \widehat{C}_{12}^{1-s} C_{12}^s$, *где постоянная* $\widehat{C}_{12}$ *определена ниже и зависит только от* m, α_0, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

В частности, при $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < s$, *справедливо неравенство*

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) \right\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2 \mathfrak{C}_s \varepsilon^{s-\alpha}, \\ |\tau| = \varepsilon^{-\alpha}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1. \end{aligned} \tag{8.14}$$

Доказательство. Получим оценку левой части (8.13) при $s = 0$. В силу (3.7) и (8.1) имеем

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant |\tau| + \|\mathbf{D} \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant |\tau| + \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \end{aligned} \tag{8.15}$$

Аналогично, согласно (3.7), (5.8) и (5.12) выполнено

$$\|(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\tau| + \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{8.16}$$

Из (5.12) и (8.11) вытекает, что

$$\begin{aligned} &\|\varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon M_1 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} + \varepsilon \|\mathbf{D} \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon M_1 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} + \|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &+ \varepsilon \|\Lambda^\varepsilon \mathbf{D} b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{8.17}$$

В силу предложения 8.4, (5.6) и (5.12)

$$\|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M_2 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{8.18}$$

Далее, согласно (5.8), (5.12), (8.11)

$$\begin{aligned} &\varepsilon \|\Lambda^\varepsilon \mathbf{D} b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon M_1 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} \|\mathbf{D} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \tag{8.19}$$

Так как оператор $\mathcal{A}^0$ с постоянными коэффициентами коммутирует с дифференцированием $\mathbf{D}$, выполнено

$$\|\mathbf{D} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 1. \tag{8.20}$$

Отсюда и из (8.19) вытекает оценка

$$\varepsilon \|\Lambda^\varepsilon \mathbf{D} b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon M_1 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \tag{8.21}$$

Объединяя (8.15)–(8.18) и (8.21), находим

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)(\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) \right\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \widehat{C}_{12} (1 + |\tau|), \\ \tau \in \mathbb{R}, \quad \varepsilon > 0. \end{aligned} \tag{8.22}$$

Здесь $\widehat{C}_{12} := \max\{2; 2\alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} + (2M_1 + M_2) \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\}$. Интерполируя между (8.7) и (8.22), приходим к оценке (8.13). $\square$

8.3 Случай $\Lambda \in L_\infty$

Оказывается, что сглаживающий оператор Π_ε в корректоре может быть устранен, если наложить на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$ дополнительное условие.

Условие 8.7. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* $\Lambda(\mathbf{x})$ *задачи* (5.2) *ограничено, т. е.* $\Lambda \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Случаи, когда условие 8.7 выполнено автоматически, выделены в [BSu4, лемма 8.7].

Предложение 8.8. *Условие* 8.7 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений:*
1°) $d \leqslant 2$;
2°) *размерность* $d \geqslant 1$ *произвольна, а оператор* $\mathcal{A}_\varepsilon$ *имеет вид* $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ *— симметричная матрица с вещественными элементами*;
3°) *размерность* d *произвольна, и* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. справедливы соотношения* (5.14).

Через $[\Lambda]$ обозначим оператор умножения на матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$, действующий из $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. В [BSu4, лемма 8.3] было установлено следующее утверждение.

Предложение 8.9. *Пусть выполнено условие* 8.7. *Тогда оператор* $g^{1/2}b(\mathbf{D})[\Lambda]$ *непрерывно переводит* $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ *в* $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$, *причем*

$$\|g^{1/2}b(\mathbf{D})[\Lambda]\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{13},$$

где постоянная C_{13} *зависит лишь от* d, m, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ *и* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

С помощью предложения 8.9 докажем следующий результат.

Теорема 8.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.5, *и пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 8.7. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\right)(\mathcal{H}_0+I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_{14}\varepsilon(1+|\tau|).\end{aligned} \tag{8.23}$$

Постоянная C_{14} *зависит только от* d, m, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Непрерывность оператора под знаком нормы в (8.23) проверяется с помощью следующей леммы, установленной в [PSu, следствие 2.4].

Лемма 8.11. *Пусть справедливо условие* 8.7. *Тогда для любой функции* $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнено*

$$\int_{\mathbb{R}^d} |(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon(\mathbf{x})|^2 |u(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} \leqslant \mathfrak{c}_1\|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \mathfrak{c}_2\varepsilon^2\|\Lambda\|^2_{L_\infty}\|\mathbf{D}u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Постоянные $\mathfrak{c}_1$ *и* $\mathfrak{c}_2$ *зависят от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ *и* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Перейдем к доказательству теоремы 8.10. В силу теоремы 8.1, условия 8.7 и рассмотрений, аналогичных (8.12), имеем

$$\begin{aligned}&\left\|\left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\right)(\mathcal{H}_0+I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_{10}\varepsilon(1+|\tau|) + \varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}.\end{aligned} \tag{8.24}$$

Таким образом, с учетом (8.9) для доказательства теоремы 8.10 достаточно оценить норму оператора

$$\mathcal{E}(\varepsilon,\tau) := \varepsilon \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon - I)(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})(\mathcal{H}_0 + I)^{-1}.$$

Применяя масштабное преобразование, (3.10) и предложение 8.9, находим

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}(\varepsilon,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &= \|\mathcal{A}^{1/2}\Lambda b(\mathbf{D})(\Pi - I)(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_{13}\|b(\mathbf{D})(\Pi - I)(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\varepsilon^{-1}\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Учитывая, что $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$ — символ оператора Π, а $S(\boldsymbol{\xi})$ — символ оператора $\mathcal{A}^0$, получаем

$$\|\mathcal{E}(\varepsilon,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{13}\sup_{\boldsymbol{\xi}\in\mathbb{R}^d}(|\boldsymbol{\xi}|^2+1)^{1/2}|b(\boldsymbol{\xi})||S(\boldsymbol{\xi})|^{-1/2}(1-\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi}))\varepsilon^2(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^{-1}.$$

Используя (3.7), (4.14), (5.7) и оценку $\varepsilon^2(|\boldsymbol{\xi}|^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \varepsilon|\boldsymbol{\xi}|^{-1}$, заключаем, что

$$\|\mathcal{E}(\varepsilon,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_*^{-1/2}\alpha_1^{1/2}(1+r_0^{-2})^{1/2}C_{13}\varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \quad \tau\in\mathbb{R}. \tag{8.25}$$

Объединяя (8.9), (8.24) и (8.25), приходим к оценке (8.23) с постоянной $C_{14} := C_{10} + \|\Lambda\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2} + c_*^{-1}\alpha_1^{1/2}(1+r_0^{-2})^{1/2}C_{13}$. $\square$

Проверим теперь, что при условии 8.7 результат теоремы 8.6 остается в силе, если заменить сглаживание Π_ε тождественным оператором.

Оценим оператор под знаком нормы в (8.23) по $(H^1\to H^1)$-норме. В силу (3.7), (5.8) и (5.12) имеем

$$\begin{aligned}&\|\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\quad\leqslant \varepsilon\|\Lambda\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(1+\|\mathbf{D}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)})\\ &\quad+\|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{8.26}$$

Из леммы 8.11 и (8.20) с учетом (5.8), (5.12) следует, что при $0<\varepsilon\leqslant 1$ выполнено

$$\|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\left(\mathfrak{c}_1+\mathfrak{c}_2\|\Lambda\|_{L_\infty}^2\right)^{1/2}. \tag{8.27}$$

Объединяя (8.15), (8.16), (8.20), (8.26) и (8.27), находим

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\quad\leqslant \widehat{C}_{14}(1+|\tau|), \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad \tau\in\mathbb{R},\end{aligned} \tag{8.28}$$

где

$$\widehat{C}_{14} := \max\Big\{2; \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\left(2\alpha_0^{-1/2} + 2\|\Lambda\|_{L_\infty} + \left(\mathfrak{c}_1+\mathfrak{c}_2\|\Lambda\|_{L_\infty}^2\right)^{1/2}\right)\Big\}.$$

Интерполируя между (8.23) и (8.28), приходим к следующему результату.

Теорема 8.12. *В условиях теоремы* 8.10 *при* $0\leqslant s\leqslant 1$ *и* $\tau\in\mathbb{R}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathrm{C}_s(1+|\tau|)\varepsilon^s.$$

Здесь $\mathrm{C}_s := \widehat{C}_{14}^{1-s}C_{14}^s$. *В частности, при* $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0<\alpha<s$, *имеет место неравенство*

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^{s+1}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} &\leqslant 2\mathrm{C}_s\varepsilon^{s-\alpha},\\ |\tau| = \varepsilon^{-\alpha}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1.&\end{aligned}$$

8.4 Случай, когда корректор обращается в нуль

Предположим, что $g^0 = \overline{g}$, т. е. справедливы соотношения (5.13). Тогда Γ-периодическое решение задачи (5.2) обращается в нуль: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$.

Предложение 8.13. *Пусть справедливы соотношения* (5.13). *Тогда в условиях теоремы* 8.5 *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| \left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) \right) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{12} \varepsilon (1 + |\tau|).$$

8.5 Оператор сглаживания по Стеклову. Другая аппроксимация при учете корректора

Покажем, что результат теоремы 8.5 остается в силе, если заменить Π_ε другим сглаживающим оператором.

Оператор S_ε, $\varepsilon > 0$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и определенный равенством

$$(S_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x} - \varepsilon \mathbf{z})\, d\mathbf{z}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \tag{8.29}$$

называют оператором сглаживания по Стеклову.

Следующие свойства оператора S_ε установлены в [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] (см. также [PSu, предложения 3.1 и 3.2]).

Предложение 8.14. *Для любой функции* $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *выполнено*

$$\| S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \| \mathbf{D} \mathbf{u} \|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Предложение 8.15. *Пусть* $f(\mathbf{x})$ *— такая* Γ*-периодическая функция в* $\mathbb{R}^d$*, что* $f \in L_2(\Omega)$. *Пусть* $[f^\varepsilon]$ *— оператор умножения на функцию* $f^\varepsilon(\mathbf{x})$. *Тогда оператор* $[f^\varepsilon] S_\varepsilon$ *непрерывен в* $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ *и*

$$\| [f^\varepsilon] S_\varepsilon \|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2} \| f \|_{L_2(\Omega)}, \quad \varepsilon > 0.$$

Также нам потребуется следующее утверждение, установленное в [PSu, лемма 3.5].

Предложение 8.16. *Пусть* Π_ε *— оператор* (8.6), *и пусть* S_ε *— оператор сглаживания по Стеклову* (8.29). *Пусть* Λ *—* Γ*-периодическое решение задачи* (5.2). *Тогда*

$$\varepsilon \| [\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D}) (\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon) \|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{15} \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \tag{8.30}$$

где постоянная C_{15} *зависит только от* d, m, r_0, r_1, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

С помощью предложения 8.16 получим следующий результат.

Теорема 8.17. *Пусть выполнены условия теоремы* 8.1. *Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодическое* $(n \times m)$*-матричное решение задачи* (5.2). *Пусть* S_ε *— оператор* (8.29). *Тогда справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\left\| \left(\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) S_\varepsilon) (\mathcal{A}^0)^{-1/2} \sin(\tau (\mathcal{A}^0)^{1/2}) \right) (\mathcal{H}_0 + I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C_{16} \varepsilon (1 + |\tau|), \quad \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{8.31}$$

Постоянная C_{16} *зависит только от* d, m, r_0, r_1, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ *и* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$.

Доказательство. Чтобы вывести оценку (8.31) из (8.7), воспользуемся (8.30):

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})(\mathcal{H}_0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad\leqslant C_{15}\varepsilon\|(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})(\mathcal{H}_0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^2(\mathbb{R}^d)}
\end{aligned}
\tag{8.32}
$$

Переходя к символам ДО и учитывая элементарное неравенство $|\sin x|/|x| \leqslant 1$, $x\in\mathbb{R}$, оцениваем правую часть (8.32) через $C_{15}\varepsilon|\tau|$. Отсюда и из (8.7) вытекает оценка (8.31) с постоянной $C_{16} := C_{12} + C_{15}$. □

Замечание 8.18. *Рассуждая по аналогии с доказательством теоремы* 8.6 *и используя свойства сглаживания по Стеклову, можно убедиться, что результаты вида* (8.13) *и* (8.14) *сохраняют силу, если* Π_ε *заменить на* S_ε.

9 Усреднение решений неоднородных гиперболических систем

9.1 Постановка задачи. Усреднение решений гиперболических систем

Применим результаты §8 к усреднению решений следующей задачи

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau),\\
\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0)}{\partial\tau} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).
\end{cases}
\tag{9.1}
$$

Здесь $\boldsymbol{\psi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ — заданные функции. Решение задачи (9.1) дается формулой

$$
\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\psi} + \int_0^\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin((\tau-\widetilde{\tau})\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}.
\tag{9.2}
$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение усредненной задачи

$$
\begin{cases}
\frac{\partial^2 \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau),\\
\mathbf{u}_0(\mathbf{x},0)=0, \quad \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0)}{\partial\tau} = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).
\end{cases}
\tag{9.3}
$$

Тогда

$$
\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) = (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\boldsymbol{\psi} + \int_0^\tau (\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin((\tau-\widetilde{\tau})(\mathcal{A}^0)^{1/2})\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{\tau})\,d\widetilde{\tau}.
\tag{9.4}
$$

Применяя теоремы 8.1, 8.5 и 8.17, учитывая (8.5) и используя тождества (9.2), (9.4), приходим к следующему результату.

Теорема 9.1. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (9.1), *и пусть* $\mathbf{u}_0$ *— решение эффективной задачи* (9.3).

1°. *Пусть* $\boldsymbol{\psi}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. *Тогда при* $\tau\in\mathbb{R}$ *и* $\varepsilon>0$ *справедлива оценка*

$$
\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{10}\varepsilon(1+|\tau|)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^1(\mathbb{R}^d))}\right).
$$

2°. *Пусть* $\boldsymbol{\psi} \in H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. *Пусть* $\Lambda(\mathbf{x})$ *— Γ-периодическое решение задачи* (5.2). *Пусть* Π_ε *— сглаживающий оператор* (8.6). *Через* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *обозначим первое приближение к решению* $\mathbf{u}_\varepsilon$:

$$\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) := \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau). \tag{9.5}$$

Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{12}\varepsilon(1+|\tau|)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Пусть S_ε *— оператор сглаживания по Стеклову* (8.29). *Положим*

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) := \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})S_\varepsilon \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau). \tag{9.6}$$

Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *имеем*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{16}\varepsilon(1+|\tau|)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Применяя теоремы 8.2 и 8.6, получаем следующий результат.

Теорема 9.2. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (9.1), *и пусть* $\mathbf{u}_0$ *— решение эффективной задачи* (9.3).
1°. *Пусть* $\boldsymbol{\psi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_s(1+|\tau|)\varepsilon^s\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Если дополнительно известно, что $\mathbf{F} \in L_1(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *то при* $0 < s \leqslant 1$, $|\tau| = \varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < s$, *выполнено неравенство*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\mathcal{C}_s\varepsilon^{s-\alpha}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right),\quad 0<\varepsilon\leqslant 1.$$

2°. *Пусть* $\boldsymbol{\psi} \in H^{1+s}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^{1+s}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, $0 \leqslant s \leqslant 1$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— первое приближение* (9.5). *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнено*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_s(1+|\tau|)\varepsilon^s\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^{1+s}(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Если, дополнительно, $\mathbf{F} \in L_1(\mathbb{R}_\pm;H^{1+s}(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 < s \leqslant 1$, *то при* $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \alpha < s$, *имеем*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\mathfrak{C}_s\varepsilon^{s-\alpha}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^{1+s}(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1(\mathbb{R}_\pm;H^{1+s}(\mathbb{R}^d))}\right),\quad 0<\varepsilon\leqslant 1.$$

На основании теоремы Банаха-Штейнгауза выводим отсюда следующий результат.

Теорема 9.3. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *— решение задачи* (9.1), *и пусть* $\mathbf{u}_0$ *— решение эффективной задачи* (9.3).
1°. *Пусть* $\boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. *Тогда*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0,\quad \tau\in\mathbb{R}.$$

2°. *Пусть* $\boldsymbol{\psi} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. *Пусть* $\mathbf{v}_\varepsilon$ *— первое приближение* (9.5). *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *выполнено*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} = 0.$$

Замечание 9.4. *С учетом замечания* 8.18 *результаты теорем* 9.2(2°) *и* 9.3(2°) *остаются верными, если заменить оператор* Π_ε *на сглаживание по Стеклову* S_ε, *т. е. использовать первое приближение* (9.6). *При этом изменятся только постоянные в оценках.*

Применяя теорему 8.12, с учетом замечания 8.18 делаем следующее наблюдение.

Замечание 9.5. *При условии* 8.7 *результаты теорем* 9.1, 9.2 *и* 9.3 *остаются в силе, если заменить сглаживающие операторы* Π_ε *и* S_ε *на тождественные, считая, что* $0 < \varepsilon \leqslant 1$.

9.2 Аппроксимация потоков

Получим теперь аппроксимацию „потоков“

$$\mathbf{p}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) := g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau). \tag{9.7}$$

Теорема 9.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 9.1(2°). *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon$ — *„поток“*(9.7). *Пусть* $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (5.3). *Тогда при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнены оценки*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{17}\varepsilon(1+|\tau|)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right), \tag{9.8}$$

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})S_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{18}\varepsilon(1+|\tau|)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right). \tag{9.9}$$

Постоянные C_{17} *и* C_{18} *зависят только от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. Согласно (8.8) и (9.2), (9.4) в условиях теоремы выполнено

$$\begin{aligned}&\left\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\left(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - (I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon)\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant C_{11}\varepsilon(1+|\tau|)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).\end{aligned} \tag{9.10}$$

Заметим, что в силу (3.7) и предложения 8.3 справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}(\Pi_\varepsilon - I)\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\alpha_1^{1/2}\|(\Pi_\varepsilon - I)\mathbf{D}\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\alpha_1^{1/2}r_0^{-1}\|\mathbf{D}^2\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{9.11}$$

Так как операторы $\mathbf{D}$ и $\mathcal{A}^0$ коммутируют, учитывая (9.4), находим

$$\|\mathbf{D}^2\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\tau|\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right). \tag{9.12}$$

Объединяя (9.7) и (9.10)–(9.12), заключаем, что

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \widehat{C}_{17}\varepsilon(1+|\tau|)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).\end{aligned} \tag{9.13}$$

Здесь $\widehat{C}_{17} := C_{11}\|g\|_{L_\infty}^{1/2} + \alpha_1^{1/2}r_0^{-1}\|g\|_{L_\infty}$.

Имеем

$$\varepsilon g^\varepsilon b(\mathbf{D})\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) = g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) + \varepsilon g^\varepsilon\sum_{l=1}^d b_l\Lambda^\varepsilon\Pi_\varepsilon^{(m)}D_l b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau). \tag{9.14}$$

Используя (3.7), (3.8), (8.11) и (9.12), оценим второе слагаемое в правой части (9.14):

$$\begin{aligned}&\left\|\varepsilon g^\varepsilon \sum_{l=1}^{d} b_l \Lambda^\varepsilon \Pi_\varepsilon^{(m)} D_l b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon|\tau|\alpha_1 d^{1/2} M_1 \|g\|_{L_\infty}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).\end{aligned} \tag{9.15}$$

Объединяя (5.3) и (9.13)–(9.15), приходим к оценке (9.8) с постоянной $C_{17} := \widehat{C}_{17} + \alpha_1 d^{1/2} M_1 \|g\|_{L_\infty}$.

Перейдем к доказательству неравенства (9.9). Применяя (9.10), находим

$$\begin{aligned}&\left\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\left(\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - (I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))\,S_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\right)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C_{11}\varepsilon(1+|\tau|)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right) \\ &+ \|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}(S_\varepsilon - I)\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{9.16}$$

В силу предложения 8.14 и (3.7), (8.1), (9.12) имеем

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}(S_\varepsilon - I)\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon|\tau|\alpha_1^{1/2} r_1 \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right). \tag{9.17}$$

Третье слагаемое в правой части (9.16) оценим с помощью (8.30), учитывая (3.7), (8.1) и (9.4):

$$\begin{aligned}&\varepsilon\|\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon - S_\varepsilon)\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\alpha_1^{1/2} C_{15}\|\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \varepsilon|\tau|\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\alpha_1^{1/2} C_{15}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right).\end{aligned} \tag{9.18}$$

Комбинируя (8.1) и (9.16)–(9.18), получаем

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - g^\varepsilon b(\mathbf{D})(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}))S_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \widehat{C}_{18}\varepsilon(1+|\tau|)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}+\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))}\right),\end{aligned} \tag{9.19}$$

где $\widehat{C}_{18} := C_{11}\|g\|_{L_\infty}^{1/2} + \alpha_1^{1/2} r_1 \|g\|_{L_\infty} + \alpha_1^{1/2} C_{15}\|g\|_{L_\infty}$.

Отметим, что из предложения 8.15 и (5.5) вытекает неравенство

$$\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M_1.$$

С учетом этого соображения, рассуждая по аналогии с (9.14) и (9.15), из (9.19) выводим оценку (9.9) с постоянной $C_{18} := \widehat{C}_{18} + \alpha_1 d^{1/2} M_1 \|g\|_{L_\infty}$. $\square$

Чтобы получить аппроксимацию потоков в случае, когда $\boldsymbol{\psi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при $0 \leqslant s \leqslant 2$, установим следующее простое утверждение.

Лемма 9.7. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$, $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (9.1), (9.3) *соответственно при* $\boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} = 0$. *Пусть* $\mathbf{p}_\varepsilon$ *— поток* (9.7). *Тогда*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{19}\|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}. \tag{9.20}$$

В операторных терминах,

$$\begin{aligned}\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{19}, \\ \varepsilon > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}.\end{aligned} \tag{9.21}$$

Постоянная C_{19} *зависит только от* m, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и от параметров решетки* Γ.

Доказательство. В силу (8.1) и (9.2) при $\mathbf{F}=0$ выполнено

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = \|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\boldsymbol{\psi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{9.22}$$

Далее, согласно (5.8), (5.12) и (9.4) при $\mathbf{F}=0$

$$\begin{aligned}\|\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \|\widetilde{g}^\varepsilon \Pi_\varepsilon^{(m)}(g^0)^{-1/2}(g^0)^{1/2}b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant \|\widetilde{g}^\varepsilon \Pi_\varepsilon^{(m)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{9.23}$$

Используя предложение 8.4 и (5.4), находим

$$\|\widetilde{g}^\varepsilon \Pi_\varepsilon^{(m)}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|g\|_{L_\infty}(|\Omega|^{-1/2}\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)}+1) \leqslant \|g\|_{L_\infty}(m^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}+1). \tag{9.24}$$

Объединяя (9.22)–(9.24), приходим к оценке (9.20) с постоянной

$$C_{19} := \|g\|_{L_\infty}^{1/2} + \|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(m^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}+1).$$

□

Теорема 9.8. 1°. *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ и $\mathbf{u}_0$ — решения задач* (9.1) *и* (9.3) *соответственно при $\boldsymbol{\psi}\in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$ при $0\leqslant s\leqslant 2$. Пусть $\mathbf{p}_\varepsilon$ — поток* (9.7), *и пусть $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция* (5.3). *Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ выполнено*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_s(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right). \tag{9.25}$$

Здесь $C_s := C_{19}^{1-s/2}C_{17}^{s/2}$. Если, дополнительно, $\mathbf{F}\in L_1(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, где $0\leqslant s\leqslant 2$, то при $|\tau|=\varepsilon^{-\alpha}$, $0<\alpha<1$, справедлива оценка

$$\begin{aligned}&\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant 2^{s/2}C_s\varepsilon^{s(1-\alpha)/2}\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right), \quad 0<\varepsilon\leqslant 1.\end{aligned} \tag{9.26}$$

2°. *Если $\boldsymbol{\psi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad \tau\in\mathbb{R}.$$

3°. *Если $\boldsymbol{\psi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}\in L_1(\mathbb{R}_\pm;L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 0<\alpha<1.$$

Доказательство. Переписывая в операторных терминах оценку (9.8) при $\mathbf{F}=0$ и интерполируя с (9.21), заключаем, что

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon(\mathcal{A}^0)^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^0)^{1/2})\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leqslant C_{19}^{1-s/2}C_{17}^{s/2}(1+|\tau|)^{s/2}\varepsilon^{s/2}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (9.2), (9.4) вытекает оценка (9.25).

Утверждение 2° получается на основании теоремы Банаха-Штейнгауза из (9.25).

Результат 3° выводится из (9.26) с помощью теоремы Банаха-Штейнгауза. □

Замечание 9.9. *Используя предложение* 8.15 *и рассуждая по аналогии с* (9.22)–(9.24), *легко видеть, что утверждение леммы* 9.7 *сохраняет силу, если Π_ε заменить на сглаживание по Стеклову S_ε. Отсюда и из* (9.9) *с помощью интерполяции выводим, что теорема* 9.8 *останется верной, если Π_ε заменить на S_ε. При этом изменится только постоянная в оценке.*

9.3 Специальный случай

Предположим, что $g^0 = \underline{g}$, т. е. справедливы соотношения (5.14). Согласно [BSu3, замечание 3.5] в этом случае матрица-функция (5.3) постоянна и совпадает с g^0, т. е. $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Следовательно,

$$\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau) = g^0 b(\mathbf{D})\Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot,\tau).$$

Заметим, что оператор с постоянными коэффициентами $\mathcal{A}^0$ коммутирует со сглаживанием Π_ε, поэтому в силу (5.8), (5.12) выполнено

$$\begin{aligned}\|g^0 b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon - I)\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|(\mathcal{A}^0)^{1/2}(\Pi_\varepsilon - I)\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|(\Pi_\varepsilon - I)(\mathcal{A}^0)^{1/2}\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Применяя предложение 8.3, учитывая (9.4) и принимая во внимание, что оператор $\mathcal{A}^0$ коммутирует с дифференцированием, заключаем, что

$$\|g^0 b(\mathbf{D})(\Pi_\varepsilon - I)\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_0^{-1} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \left(\|\mathbf{D}\boldsymbol{\psi}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{D}\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);L_2(\mathbb{R}^d))} \right).$$

Отсюда и из теоремы 9.6 вытекает следующий результат.

Предложение 9.10. *Пусть справедливы соотношения* (5.14). *Тогда в условиях теоремы* 9.6 *при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *имеем*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,\tau) - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C_{20}\varepsilon(1+|\tau|) \left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^2(\mathbb{R}^d))} \right).$$

Здесь $C_{20} := C_{17} + r_0^{-1}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}$.

Список литературы

[ABriV] Allaire G., Briane M., Vanninathan M., *A comparison between two-scale asymptotic expansions and Bloch wave expansions for the homogenization of periodic structures*, SeMA Journal **73** (2016), no. 3, 237–259.

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLPap] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, corrected reprint of the 1978 original. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2011.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), № 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), № 5, 69–90.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), № 6, 1–104.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Алгебра и анализ **18** (2006), № 6, 1–130.

[BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), № 6, 30–107.

[BrOtFMu] Brahim-Otsmane S., Francfort G. A., Murat F., *Correctors for the homogenization of the wave and heat equations*, J. Math. Pures Appl. **71** (1992), 197–231.

[BraLe] Brassart M., Lenczner M., *A two scale model for the periodic homogenization of the wave equation*, J. Math. Pures Appl. **93** (2010), no. 5, 474–517.

[CaDiCoCalMaMarG] Casado-Diaz J., Couce-Calvo J., Maestre F., Martin-Gomez J. D., *Homogenization and correctors for the wave equation with periodic coefficients*, Math. Models Methods Appl. Sci. **24** (2014), 1343—1388.

[ConOrV] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *On Burnett coefficients in periodic media*, Journal of Mathematical Physics **47**, 032902 (2006), no. 3.

[ConSaMaBalV] Conca C., SanMartin J., Balilescu L., Vanninathan M., *Optimal bounds on dispersion coefficient in one-dimensional periodic media*, Math. Models Methods Appl. Sci. **19** (2009), 1743–1764.

[DSu1] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений*, Функц. анализ и его прил. **50** (2016), № 4, 91–96.

[DSu2] Dorodnyi M., Suslina T., *Homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, arXiv:1606.05868 (2016).

[Ka] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), № 6, 139–177.

[Sa] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил. **38** (2004), № 4, 86–90.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, 2007, pp. 201–233.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.

[Su4] Suslina T., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. Appl. **446** (2017), no. 2, 1466–1523.

[ViGKo] Виленкин Н. Я., Горин Е. А., Костюченко А. Г. и др., *Функциональный анализ.* Серия „Справочная математическая библиотека“, Наука, М., 1964.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[Zh1] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), № 3, 305–308.

[Zh2] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН **406** (2006), № 5, 597–601.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.

[ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН **71 (429)** (2016), № 3, 27–122.