Об асимптотике спектра тензорного произведения операторов с почти регулярными маргинальными асимптотиками*

Растегаев Н. В.

СПбГУ, Лаборатория им. П.Л.Чебышева, 199178, 14 линия В.О., 29Б

Россия, Санкт-Петербург

rastmusician@gmail.com

Аннотация

Изучается асимптотика спектра компактного оператора в гильбертовом пространстве, являющегося тензорным произведением операторов с известными маргинальными асимптотиками. Методы работы А. Кароля, А. Назарова и Я. Никитина (Trans. AMS, 2008) обобщаются на операторы с почти регулярными маргинальными асимптотиками. Во многих (но не во всех) случаях удается показать, что тензорное произведение снова имеет почти регулярную спектральную асимптотику. Полученные результаты применяются к теории малых уклонений гауссовских случайных полей.

§1 Введение

Рассматриваются компактные неотрицательные самосопряженные операторы $\mathcal{T} = \mathcal{T}^* \geqslant 0$ в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ в гильбертовом пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$. Через $\lambda_n = \lambda_n(\mathcal{T})$ обозначены собственные числа оператора $\mathcal{T}$, упорядоченные по убыванию и повторяемые согласно кратностям. Для него рассматривается считающая функция

$$\mathcal{N}(t) = \mathcal{N}(t, \mathcal{T}) = \#\{n : \lambda_n(\mathcal{T}) > t\}.$$

Аналогично определяются $\widetilde{\lambda}_n$ и $\widetilde{N}(t)$ для $\widetilde{T}$.

Имея заданные при $t \to 0$ асимптотики $\mathcal{N}(t, \mathcal{T})$ и $\mathcal{N}(t, \widetilde{\mathcal{T}})$, мы хотим установить асимптотику $\mathcal{N}(t, \mathcal{T} \otimes \widetilde{\mathcal{T}})$. Полученные результаты легко обобщаются на случай тензорных произведений нескольких сомножителей.

Известные приложения подобных результатов встречаются в задачах, касающихся асимптотик квантования случайных величин и векторов (см. например [1], [2]), сложности в среднем линейных задач, то есть задач приближения непрерывного линейного оператора (см. например [3]), а также в рамках

*Представлено А. И. Назаровым

интенсивно развивающейся теории малых уклонения случайных процессов, а именно, для малых уклонений гауссовских случайных процессов в L_2-норме (см. например [4], [5]).

Абстрактные методы анализа асимптотики спектра тензорного произведения операторов, обобщаемые в данной работе, были разработаны в [4] и [5]. В [4] рассматривается случай, в котором собственные числа операторов-множителей имеют так называемое *регулярное* асимптотическое поведение:

$$\lambda_n \sim \frac{\psi(n)}{n^p}, \quad n \to \infty,$$

где $p > 1$, а ψ — *медленно меняющаяся* функция (в зарубежной литературе — SVF). В работе [5] данный подход переносится на случай, когда считающая функция собственных чисел имеет асимптотику медленно меняющейся функции.

В данной работе рассматриваются операторы с почти регулярной асимптотикой

$$\lambda_n(\mathcal{T}) \sim \frac{\psi(n) \cdot \mathfrak{s}(\ln(n))}{n^p}, \quad n \to +\infty, \tag{1}$$

где $p > 1$, ψ — медленно меняющаяся, а $\mathfrak{s}$ — непрерывная периодическая функция. Примерами таких операторов являются гриновские интегральные операторы с сингулярной арифметически самоподобной весовой мерой (см. [6], [7], [8]).

Для асимптотики (1) имеет место следующий факт, являющийся аналогом Леммы 3.1 из [4], который мы приведем без доказательства.

Предложение 1. *При любом $p > 0$ спектральная асимптотика* (1) *для оператора $\mathcal{T}$ эквивалентна асимптотике*

$$\mathcal{N}(t, \mathcal{T}) \sim \mathcal{N}_{as}(t) := \frac{\varphi(1/t) \cdot s(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \qquad t \to +0, \tag{2}$$

где φ — медленно меняющаяся функция, s — периодическая функция (периоду T функции s соответствует период T/p функции $\mathfrak{s}$). Более того, сходимость интеграла $\int_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}$ равносильна сходимости ряда $\sum_n \lambda_n^{1/p}(\mathcal{T})$.

Применение полученных результатов демонстрируется на примере задачи L_2-малых уклонений гауссовских случайных полей.

Изучение задачи малых уклонений было инициировано в работе [9] и продолжено множеством других исследователей. Истории задачи и основным результатам посвящены обзоры [10] и [11]. Ссылки на недавние результаты в области малых уклонений случайных процессов можно найти на сайте [12].

Изучение малых уклонений гауссовских полей типа тензорного произведения было начато в классической работе [13], где асимптотика логарифма L_2-малых уклонений была получена для броуновского листа

$$\mathbb{W}_d(x_1, \ldots, x_d) = W_1(x_1) \otimes W_2(x_2) \otimes \ldots \otimes W_d(x_d)$$

в единичном кубе (здесь W_k — независимые винеровские процессы). Этот результат был позже обобщен в работе [14] на некоторые другие маргинальные процессы. В работах [4] и [5] результаты о малых уклонениях широких классов гауссовских полей типа тензорного произведения были получены как следствие результатов о спектральной асимптотике соответствующих операторов.

Работа имеет следующую структуру. Мы приводим необходимую информацию о медленно меняющихся функциях в §2. В §3 мы устанавливаем предварительные факты, связанные с асимптотиками сверток почти меллиновского типа.

Спектральной асимптотике тензорных произведений операторов с маргинальными асимптотиками вида (2) посвящен §4. Основные результаты заключаются в том, что мы получаем главный член спектральной асимптотики тензорного произведения почти для всех возможных комбинаций параметров маргинальных асимптотик, налагая лишь незначительные технические ограничения в некоторых случаях. Результаты разделены на несколько случаев в зависимости от соотношений между параметрами спектральных асимптотик операторов $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$:

1. $\widetilde{p} > p$.
2. $\widetilde{p} = p$.
   - 2.1. $\int\limits_1^\infty \varphi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = \infty$.
     - 2.1.1. Функции s и $\widetilde{s}$ имеют общий период ($T = \widetilde{T}$).
     - 2.1.2. Периоды T и $\widetilde{T}$ функций s и $\widetilde{s}$ несоизмеримы.
   - 2.2. $\int\limits_1^\infty \varphi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} < \infty, \quad \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = \infty$.
   - 2.3. $\int\limits_1^\infty \varphi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} < \infty, \quad \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} < \infty$.

В случаях 1, 2.1.1 асимптотика тензорного произведения оказывается почти регулярной, в случае 2.1.2 – регулярной. В случаях 2.2 и 2.3 получается асимптотика более сложного вида.

В §5 мы связываем почти регулярную спектральную асимптотику с логарифмической асимптотикой малых уклонений гауссовских случайных полей.

Различные константы, значения которых нам не важны, мы обозначим C. Зависимость этих констант от параметров указывается в скобках.

§2 Вспомогательные сведения о медленно меняющихся функциях

Напомним, что положительная функция $\varphi(\tau)$, $\tau > 0$, называется *медленно меняющейся* (на бесконечности), если для любой постоянной $c > 0$

$$\varphi(c\tau)/\varphi(\tau) \to 1, \qquad \text{при } \tau \to +\infty. \tag{3}$$

Известны следующие простые свойства медленно меняющихся функций (доказательства можно найти, к примеру, в [15]).

Предложение 2. *Пусть φ — медленно меняющаяся функция. Тогда выполняются следующие свойства:*

1. *Сходимость в* (3) *равномерна по* $c \in [a, b]$ *при любых* $0 < a < b < +\infty$.
2. *Функция* $\tau \mapsto \tau^p \varphi(\tau)$, $p \neq 0$, *монотонна при больших значениях* τ.
3. *Существует эквивалентная медленно меняющаяся функция* $\psi \in C^2(\mathbb{R})$ *(то есть* $\varphi(\tau)/\psi(\tau) \to 1$ *при* $\tau \to \infty$*), такая что*

$$\tau \cdot (\ln(\psi))'(\tau) \to 0, \quad \tau^2 \cdot (\ln(\psi))''(\tau) \to 0, \qquad \tau \to \infty.$$

4. *Если* $\int_1^\infty \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} < \infty$, *то* $\varphi(\tau) \to 0$ *при* $\tau \to \infty$.

Следуя [4], мы определяем *свертку Меллина* двух медленно меняющихся функций φ и ψ:

$$(\varphi * \psi)(\tau) = \int\limits_1^\tau \varphi(\sigma)\psi(\tau/\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = h_{\varphi,\psi}(\tau) + h_{\psi,\varphi}(\tau),$$

где

$$h_{\varphi,\psi}(\tau) = \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma)\psi(\tau/\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Предложение 3 ([4], Теорема 2.2)**.** *Выполняются следующие свойства:*

1. *Если* $\int_1^\infty \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \infty$, *то* $\psi(\tau) = o(h_{\varphi,\psi}(\tau))$ *при* $\tau \to \infty$.
2. *Если* $\psi(\tau) = \psi_1(\tau)(1 + o(1))$ *при* $\tau \to \infty$, *то*

$$h_{\varphi,\psi}(\tau) = h_{\varphi,\psi_1}(\tau)(1 + o(1)), \quad \tau \to \infty.$$

Если вдобавок $\int_1^\infty \psi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} = \infty$, *то*

$$h_{\psi,\varphi}(\tau) = h_{\psi_1,\varphi}(\tau)(1 + o(1)), \quad \tau \to \infty.$$

3. $h_{\varphi,\psi}$ — *медленно меняющаяся функция.*
4. *Пусть* $\int_1^\infty \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} < \infty$, *и, кроме того,*

$$\int_1^\infty \varphi(\sigma) m_\psi(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} < \infty,$$

где

$$m_\psi(\sigma) = \sup_{\tau > \sigma^2} \frac{\psi(\tau/\sigma)}{\psi(\tau)}.$$

Тогда

$$h_{\varphi,\psi}(\tau) = \psi(\tau) \int\limits_1^\infty \varphi(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} \cdot (1 + o(1)), \qquad \tau \to \infty. \tag{4}$$

§3 Предварительные факты об асимптотике почти меллиновских сверток

В этом параграфе φ и $\widetilde{\varphi}$ — медленно меняющиеся функции, s и $\widetilde{s}$ — непрерывные, ограниченные, отделенные от нуля функции, имеющие периоды T и $\widetilde{T}$ соответственно, и представимые в виде

$$s(\tau) = e^{-\tau/p}\varrho(\tau), \qquad \widetilde{s}(\tau) = e^{-\tau/p}\widetilde{\varrho}(\tau),$$

где $p > 0$, ϱ и $\widetilde{\varrho}$ монотонны. Отсюда, в частности, следует, что s и $\widetilde{s}$ — функции ограниченной вариации.

Определим *почти меллиновскую свертку*

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) = \int\limits_1^\tau \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} =$$
$$= H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) + H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau),$$
$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)},$$
$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = \int\limits_{\sqrt{\tau}}^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}.$$

Здесь интеграл понимается как интеграл Лебега-Стилтьеса.

Лемма 1.

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) \asymp (\varphi * \widetilde{\varphi})(\tau), \quad \tau \to \infty,$$
$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) \asymp h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau), \quad \tau \to \infty,$$
$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) \asymp h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau), \quad \tau \to \infty.$$

Доказательство. Докажем оценку сверху для первого соотношения, остальные оценки получаются аналогично. Введем оператор

$$F_\sigma[\varphi](\xi) = \varphi(e^{j\widetilde{T}}\sigma) \text{ для } \xi \in [e^{j\widetilde{T}}, e^{(j+1)\widetilde{T}}), \tag{5}$$

делающий функцию φ ступенчатой.
Отметим, что

$$F_\sigma[\varphi](\tau) = \varphi(\tau)(1 + o(1)), \quad \tau \to \infty \tag{6}$$

равномерно по $\sigma \in [1, e^{\widetilde{T}}]$. Пусть $k \in \mathbb{N}$ такое, что $e^{(k-1)\widetilde{T}} < \tau \leqslant e^{k\widetilde{T}}$. Тогда

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) \leqslant C \int\limits_1^{e^{k\widetilde{T}}} F_{e^{k\widetilde{T}}/\tau}[\varphi]\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) F_1[\widetilde{\varphi}](\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}.$$

Заметим, что функция $F_{e^{k\widetilde{T}}/\tau}[\varphi](\frac{\tau}{\sigma})F_1[\widetilde{\varphi}](\sigma)$ постоянна по σ на каждом промежутке $(e^{j\widetilde{T}}, e^{(j+1)\widetilde{T}})$, $j = 0\dots k-1$. Мера $\dfrac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = d\ln(\widetilde{s}(\ln\sigma)\sigma^{1/p})$ периодична по логарифму, что позволяет нам заменить интеграл суммой. Получим

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) \leqslant C\int_1^{e^{\widetilde{T}}} \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} \sum_{j=0}^{k-1} F_{e^{k\widetilde{T}}/\tau}[\varphi](\frac{\tau}{e^{j\widetilde{T}}})F_1[\widetilde{\varphi}](e^{j\widetilde{T}}) \leqslant$$

$$\leqslant C\int_1^{e^{\widetilde{T}}} \frac{d\sigma}{\sigma} \sum_{j=0}^{k-1} F_{e^{k\widetilde{T}}/\tau}[\varphi](\frac{\tau}{e^{j\widetilde{T}}})F_1[\widetilde{\varphi}](e^{j\widetilde{T}}) =$$

$$= C\int\limits_1^{e^{k\widetilde{T}}} F_{e^{k\widetilde{T}}/\tau}[\varphi]\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)F_1[\widetilde{\varphi}](\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} \leqslant C\int\limits_1^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

□

Доказательство следующего предложения аналогично Теореме 2.2 из [4], и мы его опускаем.

Предложение 4. *Пусть* $\widetilde{\varphi}(\tau) = \psi_1(\tau)(1+o(1))$ *при* $\tau\to\infty$, *тогда*

$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = H[\varphi s, \psi_1\widetilde{s}](\tau)(1+o(1)).$$

Если, кроме того, $\int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty$, *то*

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = H_1[\varphi s, \psi_1\widetilde{s}](\tau)(1+o(1)).$$

Лемма 2. *Пусть* $\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty$, $\int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty$. *Тогда*

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau)(1+o(1)), \quad \tau\to\infty,$$

а почти меллиновская свертка асимптотически симметрична, т.е.

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) = (\widetilde{\varphi}\widetilde{s} * \varphi s)(\tau)(1+o(1)), \quad \tau\to\infty.$$

Доказательство. Второе соотношения напрямую следует из первого. Чтобы разобраться в первом, напишем

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = \tau^{-1/p}\int\limits_{\sqrt{\tau}}^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\rho\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)d(\widetilde{\rho}(\ln\sigma)).$$

Проведем замену σ на τ/σ и проинтегрируем по частям.

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = -\tau^{-1/p}\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\rho(\ln\sigma)d\left(\widetilde{\rho}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= \tau^{-1/p} \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\rho}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) d(\rho(\ln\sigma)) + \varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s(\ln\sigma)\widetilde{s}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\Big|_1^{\sqrt{\tau}} +$$

$$+ \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(\frac{\sigma\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} - \frac{(\tau/\sigma)\widetilde{\varphi}'(\tau/\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\tau/\sigma)}\Big)\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) s(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Первое слагаемое равно $H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau)$. Остается убедиться, что второе и третье слагаемые удовлетворяют оценке $o(H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau))$. Разберемся с подстановкой.

$$\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s(\ln\sigma)\widetilde{s}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\Big|_1^{\sqrt{\tau}} = \varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau})s(\ln\sqrt{\tau})\widetilde{s}(\ln\sqrt{\tau}) -$$
$$- \varphi(1)\widetilde{\varphi}(\tau)s(0)\widetilde{s}(\ln\tau).$$

Все периодические составляющие ограничены.

$$\widetilde{\varphi}(\tau) = o(h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau)) = o(H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau)), \quad \tau \to \infty$$

по п.1 Предложения 3 с учетом Леммы 1. Остается оценить

$$\varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau}) = \varphi(1)\widetilde{\varphi}(\tau) + \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \left(\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right)'_\sigma d\sigma =$$

$$= \varphi(1)\widetilde{\varphi}(\tau) + \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(\frac{\sigma\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} - \frac{(\tau/\sigma)\widetilde{\varphi}'(\tau/\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\tau/\sigma)}\Big)\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= \varphi(1)\widetilde{\varphi}(\tau) + \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(1 + \frac{\sigma\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\Big)\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma} -$$

$$- \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma)\Big(1 + \frac{(\tau/\sigma)\widetilde{\varphi}'(\tau/\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\tau/\sigma)}\Big)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\frac{d\sigma}{\sigma} =$$

$$= o(h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau)) + h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau)(1 + o(1)) - h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau)(1 + o(1)) =$$
$$= o(h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau)) = o(H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau)), \quad \tau \to \infty.$$

При оценке интегралов мы воспользовались п.2 Предложения 3 с учетом п.3 Предложения 2.

Аналогичным рассуждением с использованием Предложения 4 получаем оценку

$$\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \Big(\frac{\sigma\varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)} - \frac{(\tau/\sigma)\widetilde{\varphi}'(\tau/\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\tau/\sigma)}\Big)\varphi(\sigma)\widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) s(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} = o(H[\widetilde{\varphi}\widetilde{s}, \varphi s](\tau))$$

при $\tau \to \infty$, и лемма доказана. $\square$

Случай совпадающих периодов. Рассмотрим случай, когда функции s и $\widetilde{s}$ имеют совпадающие периоды ($T=\widetilde{T}$). Обозначим

$$(s\star\widetilde{s})(\eta):=\frac{1}{T}\int\limits_0^T s(\eta-\lambda)\widetilde{s}(\lambda)d\lambda.$$

Заметим, что определена и непрерывна производная

$$(s\star\widetilde{s})'(\eta)=\frac{1}{T}\int\limits_0^T s(\eta-\lambda)d(\widetilde{s}(\lambda))=-\frac{1}{p}(s\star\widetilde{s})(\eta)+e^{-\eta/p}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varrho(\eta-\lambda)d\widetilde{\varrho}(\lambda). \quad (7)$$

Непрерывность следует из непрерывности ϱ и $\widetilde{\varrho}$.

Лемма 3. *Пусть* $\int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=\infty$, *$s$ и $\widetilde{s}$ имеют общий период T. Тогда*

$$\int\limits_1^{\sqrt{\tau}}\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\sim h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau)(s\star\widetilde{s})(\ln\tau),\quad \tau\to\infty.$$

Если, кроме того, $\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau}=\infty$, *то*

$$\int\limits_1^{\tau}\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\sim (\varphi*\widetilde{\varphi})(\tau)(s\star\widetilde{s})(\ln\tau),\quad \tau\to\infty.$$

Доказательство. Для $e^{2(k-1)T}<\tau\leqslant e^{2kT}$ можно записать

$$\int\limits_1^{\sqrt{\tau}}\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\sim\int\limits_1^{e^{kT}}\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}=$$

$$=\sum_{j=0}^{k-1}\int\limits_1^{e^T}\varphi(e^{-jT}\cdot\frac{\tau}{\sigma})s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(e^{jT}\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}=$$

$$=\int\limits_1^{e^T}s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\sum_{j=0}^{k-1}\varphi(e^{-jT}\cdot\frac{\tau}{\sigma})\widetilde{\varphi}(e^{jT}\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}=$$

$$=\int\limits_1^{e^T}s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)T^{-1}\int\limits_1^{e^{kT}}F_{e^{-(k-1)T}\cdot\frac{\tau}{\sigma}}[\varphi](e^{kT}/\xi)F_\sigma[\widetilde{\varphi}](\xi)\frac{d\xi}{\xi}\frac{d\sigma}{\sigma},$$

где оператор F введен в (5). Учитывая асимптотику (6) и п.2 Предложения 3, получаем

$$\int\limits_1^{\sqrt{\tau}}\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma}\sim h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(e^{kT})(s\star\widetilde{s})(\ln\tau)\sim h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau)(s\star\widetilde{s})(\ln\tau).$$

Второе утверждение леммы получается аналогично, с учетом $\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty$. $\square$

Лемма 4. *Пусть* $\int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty$, *$s$ и $\widetilde{s}$ имеют общий период T. Тогда*

$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) \sim h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau)\Big(\frac{1}{p}(s \star \widetilde{s}) + (s \star \widetilde{s})'\Big)(\ln\tau), \quad \tau \to \infty.$$

Если, кроме того, $\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty$, *то*

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) \sim (\varphi * \widetilde{\varphi})(\tau)\Big(\frac{1}{p}(s \star \widetilde{s}) + (s \star \widetilde{s})'\Big)(\ln\tau), \quad \tau \to \infty.$$

Доказательство. Доказательство в точности такое же, как и в предыдущей лемме. Нужно только убедиться, что

$$\int\limits_1^{e^T} s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = \tau^{-1/p}\int\limits_0^T \varrho(\ln\tau - \lambda)d\widetilde{\varrho}(\lambda),$$

что очевидно, если в левом интеграле провести замену $\lambda = \ln\sigma$. $\square$

Случай несоизмеримых периодов. Пусть теперь функции s и $\widetilde{s}$ не имеют общего периода.

Лемма 5. *Если периоды T и $\widetilde{T}$ несоизмеримы, то*

$$\int\limits_1^\tau s(\ln(\omega/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = (\mathfrak{C} + o(1))\ln\tau, \qquad \tau \to +\infty$$

равномерно по $\omega \in \mathbb{R}$, где

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{T}\int\limits_0^T s(t)dt \cdot \frac{1}{\widetilde{T}}\int\limits_0^{\widetilde{T}} \widetilde{s}(t)dt. \tag{8}$$

Доказательство. Шаг 1. Докажем оценку

$$\int\limits_1^\tau s(\ln(\tau/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = (\mathfrak{C} + o(1))\ln\tau, \qquad \tau \to +\infty. \tag{9}$$

Проведем замену $t = \ln\tau$, $r = \ln\sigma$.

$$\int\limits_1^\tau s(\ln(\tau/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = \int\limits_0^t s(t-r)e^{-r/p}d\widetilde{\varrho}(r) =: Q(t).$$

Определим $\widetilde{T}$-периодическую функцию

$$q(t) := \int_0^T s(r)\widetilde{s}(t+T-r)dr = \int_t^{t+T} s(t-r)\widetilde{s}(r)dr.$$

Заметим, что определена и непрерывна ее производная

$$q'(t) = \int_0^T s(r)d\widetilde{s}(t+T-r) = \int_t^{t+T} s(t-r)d\widetilde{s}(r) = -\frac{1}{p}\cdot q(t) + \int_t^{t+T} s(t-r)e^{-r/p}d\widetilde{\varrho}(r).$$

Поэтому

$$Q(t+T) - Q(t) = \int_t^{t+T} s(t-r)e^{-r/p}d\widetilde{\varrho}(r) = q'(t) + \frac{1}{p}\cdot q(t) =: q_1(t),$$

где $q_1(t)$ — непрерывная $\widetilde{T}$-периодическая функция. Отсюда

$$Q(t+nT) = Q(t) + \sum_{k=0}^{n-1} q_1(t+kT). \tag{10}$$

По эргодической теореме Окстоби (см. [20]) имеем

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} q_1(t+kT) = \frac{1}{\widetilde{T}}\int_0^{\widetilde{T}} q_1(t)dt \tag{11}$$

равномерно по t. Из (10) и (11) получаем оценку

$$Q(t) = (\mathfrak{C} + o(1))t, \qquad t \to +\infty,$$

где

$$\mathfrak{C} = \frac{1}{T\widetilde{T}}\int_0^{\widetilde{T}} q_1(t)dt = \frac{1}{p}\cdot\frac{1}{T}\int_0^T s(t)dt\cdot\frac{1}{\widetilde{T}}\int_0^{\widetilde{T}}\widetilde{s}(t)dt.$$

Подставляем $t = \ln\tau$, и формула (9) доказана.

Шаг 2. Для любого значения τ можно подобрать $k(\tau) \in \mathbb{Z}$, такое что

$$0 \leqslant \tau - \omega - Tk(\tau) < T.$$

Тогда

$$\int_1^\tau s(\ln(\omega/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = \int_{\omega+Tk(\tau)}^{\tau} s(\ln(\omega/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} +$$
$$+ \int_1^{\omega+Tk(\tau)} s(\ln((\omega+Tk(\tau))/\sigma))\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}.$$

Первое слагаемое равномерно ограничено, а второе допускает оценку

$$(\mathfrak{C} + o(1))\ln(\omega + Tk(\tau)) = (\mathfrak{C} + o(1))\ln\tau, \qquad \tau \to +\infty.$$

□

§4 Спектральная асимптотика тензорных произведений

Лемма 6. *В формуле* (2) *функция* s *имеет вид*

$$s(\tau) = e^{-\tau/p}\varrho(\tau),$$

где ρ *— монотонная функция, и значит* s *— функция ограниченной вариации.*

Доказательство. Асимптотика может быть переписана следующим образом:

$$\frac{s(\ln(1/t))}{t^{1/p}} = \frac{\mathcal{N}(t)}{\varphi(1/t)}(1+\varepsilon(t)), \quad \varepsilon(t) \to 0 \text{ при } t \to +0.$$

Сделав замену t на $e^{-kT}t$, получаем

$$\frac{s(\ln(1/t))}{(e^{-kT}t)^{1/p}} = \frac{\mathcal{N}(e^{-kT}t)}{\varphi(e^{kT}/t)}(1+\varepsilon(e^{-kT}t)).$$

Отсюда

$$\frac{s(\ln(1/t))}{t^{1/p}} = \lim_{k\to+\infty} e^{-\frac{kT}{p}}\frac{\mathcal{N}(e^{-kT}t)}{\varphi(e^{kT}/t)},$$

причем сходимость равномерна на отрезке $[1, e^T]$. Таким образом, для фиксированного $\varepsilon > 0$ мы получаем выражение

$$s(\ln(1/t)) = t^{\frac{1}{p}+\varepsilon} \cdot \lim_{k\to+\infty} \frac{e^{-\frac{kT}{p}-kT\varepsilon}\mathcal{N}(e^{-kT}t)}{(e^{kT}/t)^{-\varepsilon}\varphi(e^{kT}/t)}.$$

Заметим, что числитель дроби монотонно убывает по t, а функция в знаменателе монотонно растет по t при достаточно больших значениях k по п.2 Предложения 2. Введем обозначение

$$\varrho_\varepsilon(\ln(1/t)) := \lim_{k\to+\infty} \frac{e^{-\frac{kT}{p}-kT\varepsilon}\mathcal{N}(e^{-kT}t)}{(e^{kT}/t)^{-\varepsilon}\varphi(e^{kT}/t)}.$$

Как равномерный предел монотонных функций, ϱ_ε монотонна. Функция s имеет вид

$$s(\tau) = e^{-(\frac{1}{p}+\varepsilon)\tau}\varrho_\varepsilon(\tau).$$

Перейдя к пределу по $\varepsilon \to 0$ и обозначив $\varrho(\tau) := \lim\limits_{\varepsilon\to0}\varrho_\varepsilon(\tau)$, получаем выражение

$$s(\tau) = e^{-\tau/p}\varrho(\tau),$$

где ρ — тоже монотонная функция. □

Замечание 1. Для некоторых гриновских интегральных операторов с сингулярной арифметически самоподобной весовой мерой (см. [16], [17], [18]), удается показать, что $\varrho(\tau)$ — непрерывная чисто сингулярная функция, то есть ее обобщенная производная есть мера, сингулярная относительно меры Лебега.

Далее считаем, что все возникающие в асимптотиках периодические функции непрерывны (таким образом выполняются все предварительные требования §3), а согласно п.3 Предложения 2, все медленно меняющиеся функции можно считать C^2-гладкими.

Теорема 1. *Пусть оператор $\mathcal{T}$ в пространстве $\mathcal{H}$ имеет спектральную асимптотику* (2)*, а оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$ в пространстве $\widetilde{\mathcal{H}}$ имеет асимптотику*

$$\widetilde{\mathcal{N}}(t) := \widetilde{\mathcal{N}}(t, \widetilde{\mathcal{T}}) = O(t^{-1/\widetilde{p}}), \quad t \to 0+, \qquad \widetilde{p} > p.$$

Тогда оператор $\mathcal{T} \otimes \widetilde{\mathcal{T}}$ в пространстве $\mathcal{H} \otimes \widetilde{\mathcal{H}}$ имеет асимптотику

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) := \mathcal{N}(t, \mathcal{T} \otimes \widetilde{\mathcal{T}}) \sim \frac{\varphi(1/t) \cdot s^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \quad t \to +0, \tag{12}$$

где

$$s^*(\tau) := \sum_k s(\tau + \ln(\widetilde{\lambda}_k)) \cdot \widetilde{\lambda}_k^{1/p} \tag{13}$$

— периодическая функция с периодом T (ряд сходится, поскольку $\widetilde{p} > p$).

Доказательство. Поскольку собственные числа тензорного произведения операторов равны произведениям их собственных чисел, имеем

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) = \#\{k, j : \lambda_k \widetilde{\lambda}_j > t\} = \sum_k \#\{j : \lambda_j > t/\widetilde{\lambda}_k\} = \sum_k \mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k).$$

Таким образом,

$$\frac{t^{1/p}}{\varphi(1/t)} \sum_k \mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k) = \sum_k \left(\frac{(t/\widetilde{\lambda}_k)^{1/p} \mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k)}{\varphi(\widetilde{\lambda}_k/t) s(\ln(\widetilde{\lambda}_k/t))} \right) \left(\frac{\varphi(\widetilde{\lambda}_k/t)}{\varphi(1/t)} \right) s(\ln(\widetilde{\lambda}_k/t)) \widetilde{\lambda}_k^{1/p}.$$

Первый множитель равномерно ограничен и стремится к единице при $t \to 0+$ ввиду (2). Второй множитель также стремится к единице, кроме того, поскольку для любого ε функция $\tau^{\varepsilon}\varphi(\tau)$ возрастает при $\tau > \tau_0(\varepsilon)$ по п.2 Предложения 2, имеет место оценка

$$\frac{\lambda^{\varepsilon}\varphi(\lambda\tau)}{\varphi(\tau)} = \frac{(\lambda\tau)^{\varepsilon}\varphi(\lambda\tau)}{\tau^{\varepsilon}\varphi(\tau)} \leqslant 1 \quad \text{при } \lambda\tau > \tau_0(\varepsilon), \lambda < 1.$$

Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ равномерно по $t < 1$ выполняется оценка

$$\frac{\varphi(\widetilde{\lambda}_k/t)}{\varphi(1/t)} \leqslant C(\varepsilon) \widetilde{\lambda}_k^{-\varepsilon},$$

откуда

$$\frac{\varphi(\widetilde{\lambda}_k/t)}{\varphi(1/t)} \widetilde{\lambda}_k^{1/p} \leqslant C(\varepsilon) \cdot k^{-\widetilde{p}(1/p - \varepsilon)},$$

что при выборе достаточно малого ε (т.ч. $\widetilde{p}(1/p - \varepsilon) > 1$) дает нам оценку, необходимую для применения теоремы Лебега о мажорированной сходимости. Переходя к пределу, получаем (12). □

Замечание 2. При произвольном выборе функции s и оператора $\widetilde{\mathcal{T}}$ функция $s^*(\tau)$, вообще говоря, может вырождаться в константу. Мы можем, например, потребовать $s(\tau) + s(\tau + T/2) = 1$, $T = 2p \ln 2$, а оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$ взять конечномерным с тремя собственными числами 2^p, 2^p и 2^{2p}. Тогда

$$s^*(\tau) = s(\tau + p\ln 2) \cdot 2 + s(\tau + p\ln 2) \cdot 2 + s(\tau + 2p\ln 2) \cdot 2^2 = \\ = 4(s(\tau) + s(\tau + T/2)) = const.$$

Однако, если $s(\tau)=\exp(-\tau/p)\varrho(\tau)$, где $\varrho(\tau)$ — неубывающая чисто сингулярная функция (как в Замечании 1), то никакая линейная комбинация сдвигов не будет постоянной. Более того, можно отметить, что в этом случае функция $s^*(\tau)$ тоже имеет вид

$$s^*(\tau)=\exp(-\tau/p)\varrho^*(\tau), \quad \varrho^*(\tau)=\sum_k \varrho(\tau+\ln\widetilde{\lambda}_k),$$

и $\varrho^*(\tau)$ является чисто сингулярной функцией в силу монотонности $\varrho(\tau)$.

Рассмотрим теперь случай, когда операторы имеют совпадающие степенные показатели спектральной асимптотики.

Теорема 2. *Пусть оператор $\mathcal{T}$ имеет спектральную асимптотику (2), а оператор $\widetilde{\mathcal{T}}$ — асимптотику*

$$\mathcal{N}(t,\widetilde{\mathcal{T}})\sim\widetilde{\mathcal{N}}_{as}(t):=\frac{\widetilde{\varphi}(1/t)\cdot\widetilde{s}(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \qquad t\to+0. \tag{14}$$

Здесь $\widetilde{\varphi}$ — медленно меняющаяся функция, $\widetilde{s}$ имеет период $\widetilde{T}$. Тогда для любого $\varepsilon>0$ выполняются оценки

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t)\lessgtr\frac{\alpha_{\pm}(\varepsilon)}{t^{1/p}}\cdot\left[S(t,\varepsilon)+\widetilde{S}(t,\varepsilon)+\int\limits_{\alpha_{\mp}(\varepsilon)/\varepsilon}^{\varepsilon\tau}\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}\right]$$

равномерно по $t>0$. Здесь интеграл понимается как интеграл Лебега-Стилтьеса, $\tau=\alpha_{\pm}(\varepsilon)/t$. При $\varepsilon\tau<a_{\mp}(\varepsilon)/\varepsilon$ интеграл считаем равным нулю. Коэффициенты $\alpha_{\pm}(\varepsilon)\to1$ при $\varepsilon\to0$, а функции $S(t,\varepsilon)$, $\widetilde{S}(t,\varepsilon)$ имеют следующие асимптотики при $t\to+0$:

$$S(t,\varepsilon)\sim\varphi(1/t)\cdot\sum_{\widetilde{\lambda}_k\geqslant\varepsilon}s(\ln(1/t)+\ln(\widetilde{\lambda}_k))\widetilde{\lambda}_k^{1/p},$$

$$\widetilde{S}(t,\varepsilon)\sim\widetilde{\varphi}(1/t)\cdot\Big(\sum_{\lambda_k\geqslant\varepsilon}\widetilde{s}(\ln(\tau)+\ln(\lambda_k))\lambda_k^{1/p}+\varphi(1/\varepsilon)s(\ln(1/\varepsilon))\widetilde{s}(\ln(\tau\varepsilon))\Big). \tag{15}$$

Доказательство. Доказательство следует схеме Теоремы 3.3 в [4]. Докажем оценку сверху, оценка снизу может быть получена аналогично.

$$t^{1/p}\mathcal{N}_{\otimes}(t)=t^{1/p}\sum_{\widetilde{\lambda}_k<\varepsilon}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k)+S(t,\varepsilon),$$

где

$$S(t,\varepsilon)=t^{1/p}\sum_{\widetilde{\lambda}_k\geqslant\varepsilon}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k).$$

Асимтотика $S(t,\varepsilon)$ получается из Теоремы 1 для конечномерного оператора $\widetilde{\mathcal{T}}$.

Обозначим за $\widetilde{\mu}$ обратную функцию к $\widetilde{\mathcal{N}}_{as}$. Тогда $\widetilde{\lambda}_k/\widetilde{\mu}(k)\to1$ при $k\to\infty$, а значит

$$\alpha_-(\varepsilon)\widetilde{\mu}(k)\leqslant\widetilde{\lambda}_k\leqslant\alpha_+(\varepsilon)\widetilde{\mu}(k) \quad \text{при } \widetilde{\lambda}_k<\varepsilon$$

для некоторых $\alpha_\pm(\varepsilon)$, причем $\alpha_\pm(\varepsilon)\to 1$ при $\varepsilon\to 0$.

Пользуясь монотонностью $\mathcal{N}$, получаем

$$\sum_{\widetilde{\lambda}_k<\varepsilon}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k)\leqslant\sum_{\widetilde{\mu}(k)<\alpha_-^{-1}(\varepsilon)\varepsilon}\mathcal{N}\Big(\frac{t}{\alpha_+(\varepsilon)\widetilde{\mu}(k)}\Big),$$

а из монотонности функции $k\mapsto\mathcal{N}\big(\frac{t}{\alpha_+(\varepsilon)\widetilde{\mu}(k)}\big)$ получается

$$t^{1/p}\sum_{\widetilde{\lambda}_k<\varepsilon}\mathcal{N}(t/\widetilde{\lambda}_k)\leqslant t^{1/p}\mathcal{N}\Big(\frac{\alpha_-(\varepsilon)t}{\alpha_+(\varepsilon)\varepsilon}\Big)+t^{1/p}\int\limits_0^{\varepsilon\alpha_-^{-1}(\varepsilon)}\mathcal{N}\Big(\frac{t}{\alpha_+(\varepsilon)\mu}\Big)(-d\widetilde{\mathcal{N}}_{as}(\mu)).\quad(16)$$

Первое слагаемое оценивается как $O(\varepsilon^{1/p}\varphi(1/t))$, а потому, добавляя его к слагаемому $S(t,\varepsilon)$, получаем $\alpha_+(\varepsilon)S(t,\varepsilon)$. Далее, рассматриваем $-d\widetilde{\mathcal{N}}_{as}(\mu)$ как меру Лебега-Стилтьеса, и записываем

$$-d\widetilde{\mathcal{N}}_{as}(\mu)=\frac{1}{\mu}\widetilde{\varphi}(1/\mu)\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu))\Big(\frac{-\mu d(\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu))}+\frac{\widetilde{\varphi}'(1/\mu)}{\mu\widetilde{\varphi}(1/\mu)}d\mu\Big).\qquad(17)$$

Плотность второго слагаемого стремится к нулю при $\mu\to 0$, тогда как первое слагаемое

$$\frac{-\mu d(\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu))}=\frac{d\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu))}{\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu))}=d(\ln(\widetilde{\varrho}(\lambda))),$$

где $\lambda=\ln(1/\mu)$, является положительной периодической мерой, так как

$$\ln(\varrho(\tau+T))=\ln(\varrho(\tau))+\frac{T}{p}.$$

Значит, при малых значениях ε вклад второго слагаемого в (17) в интеграл из (16) пренебрежимо мал, и этот интеграл можно оценить через

$$\alpha_+(\varepsilon)t^{1/p}\int\limits_0^{\varepsilon\alpha_-^{-1}(\varepsilon)}\mathcal{N}\Big(\frac{t}{\alpha_+(\varepsilon)\mu}\Big)\widetilde{\varphi}(1/\mu)(-d(\widetilde{\varrho}(\ln(1/\mu)))).$$

Разбивая на два интеграла и заменяя переменные, получаем оценку

$$\alpha_+(\varepsilon)t^{1/p}\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\mathcal{N}(s)\widetilde{\varphi}(\tau s)d(\widetilde{\varrho}(\ln(\tau s)))+\alpha_+(\varepsilon)t^{1/p}\int\limits_{\alpha_-(\varepsilon)/\varepsilon}^{\varepsilon\tau}\mathcal{N}(\sigma/\tau)\widetilde{\varphi}(\sigma)d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)).$$

Замена во втором интеграле $\mathcal{N}$ на $\alpha_+(\varepsilon)\mathcal{N}_{as}$ дает в точности третье слагаемое желаемой оценки. Первый же интеграл дает слагаемое $\widetilde{S}(t,\varepsilon)$. Кроме того,

$$\frac{\widetilde{\varphi}(\alpha_+(\varepsilon)s/t)}{\widetilde{\varphi}(1/t)}\to 1\quad\text{при } t\to 0$$

раномерно по $s\in[\varepsilon,\lambda_1(\mathcal{T})]$. Таким образом,

$$\widetilde{S}(t,\varepsilon)\sim\widetilde{\varphi}(1/t)\int\limits_\varepsilon^{+\infty}\mathcal{N}(s)d(\widetilde{s}(\ln(\tau s))s^{1/p}).$$

Ясно, что $\mathcal{N}(s)=0$ при $s>\lambda_1(\mathcal{T})$. Интегрируя по частям, получаем асимптотику (15). $\square$

В Теоремах 3-5 мы предполагаем, что

$$\int\limits_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \int\limits_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty. \tag{18}$$

Теорема 3. *Пусть операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяют условиям Теоремы 2. Пусть, кроме того, выполняется соотношение* (18)*, а периоды s и $\widetilde{s}$ совпадают и равны T. Тогда*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\phi(1/t)\cdot s_\otimes(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где $\phi(s) := (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$ — медленно меняющаяся функция,

$$s_\otimes(\eta) = \frac{(s\star\widetilde{s})(\eta)}{p} + (s\star\widetilde{s})'(\eta) = e^{-\eta/p}\frac{1}{T}\int\limits_0^T \varrho(\eta-\sigma)d\widetilde{\varrho}(\sigma) \tag{19}$$

— непрерывная положительная T-периодическая функция.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$ и рассматриваем полученную в Теореме 2 оценку. Согласно п.1 Предложения 3 имеем

$$S(t,\varepsilon) = o(\phi(1/t)), \quad \widetilde{S}(t,\varepsilon) = o(\phi(1/t)), \qquad t \to +0.$$

Далее, можем расширить промежуток интегрирования, поскольку, учитывая $\tau = \alpha_\pm(\varepsilon)/t$ и пользуясь п.1 Предложения 3, имеем

$$\int\limits_{\varepsilon\tau}^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} \sim$$

$$\sim \widetilde{\varphi}(\tau)\int\limits_1^{1/\varepsilon} \varphi(\sigma)s(\ln\sigma)\widetilde{s}(\ln(\tau/\sigma))\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma))} = o(\phi(1/t)), \quad t \to +0,$$

$$\int\limits_1^{\alpha_\mp(\varepsilon)/\varepsilon} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} \sim$$

$$\sim \varphi(\tau)\int\limits_1^{\alpha_\mp(\varepsilon)/\varepsilon} \widetilde{\varphi}(\sigma)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = o(\phi(1/t)), \quad t \to +0.$$

Таким образом

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \lessgtr \frac{\alpha_\pm(\varepsilon)}{t^{1/p}}(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau)(1+o(1)). \tag{20}$$

Применяя теперь Лемму 4, получаем

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \lessgtr \alpha_\pm(\varepsilon)\frac{\phi(\tau)}{t^{1/p}}\Big(\frac{(s\star\widetilde{s})}{p} + (s\star\widetilde{s})'\Big)(\ln(\tau))(1+o(1)), \quad t \to +0.$$

Заметим, кроме того, что $\phi(\tau) = \phi(1/t)(1 + o(1))$ при $t \to +0$. Отсюда

$$\limsup_{t\to+0} \mathcal{N}_\otimes(t) \left(\frac{\phi(1/t)\cdot s_\otimes(\ln(1/t))}{t^{1/p}}\right)^{-1} \leqslant \alpha_+(\varepsilon)\cdot \sup_{t\in[1,e^T]} \frac{s_\otimes(\ln(\alpha_+(\varepsilon)) + \ln(1/t))}{s_\otimes(\ln(1/t))},$$

$$\liminf_{t\to+0} \mathcal{N}_\otimes(t) \left(\frac{\phi(1/t)\cdot s_\otimes(\ln(1/t))}{t^{1/p}}\right)^{-1} \geqslant \alpha_-(\varepsilon)\cdot \inf_{t\in[1,e^T]} \frac{s_\otimes(\ln(\alpha_-(\varepsilon)) + \ln(1/t))}{s_\otimes(\ln(1/t))}. \tag{21}$$

Функция $s_\otimes$ равномерно непрерывна на отрезке, значит, супремум и инфимум в правых частях (21) стремятся к единице с уменьшением ε. Переходим к пределу по $\varepsilon \to +0$, и теорема доказана. $\square$

Замечание 3. Вопрос о непостоянстве $s_\otimes$ остается открытым. Даже если предположить, что $s(\tau) = \exp(-\tau/p)\varrho(\tau)$, $\widetilde{s}(\tau) = \exp(-\tau/p)\widetilde{\varrho}(\tau)$, а функции ϱ и $\widetilde{\varrho}$ чисто сингулярны, мы имеем $s_\otimes(\tau) = \exp(-\tau/p)\varrho_\otimes(\tau)$, где

$$\varrho_\otimes(\tau) = \frac{1}{T}\int\limits_0^T \varrho(\tau-\lambda)d\widetilde{\varrho}(\lambda).$$

Ясно, что $\varrho'_\otimes = \varrho' \star \widetilde{\varrho}'$ — свертка сингулярных мер. Однако свертка сингулярных мер часто оказывается абсолютно непрерывной относительно меры Лебега (см., например, [19]).

Теорема 4. *Пусть операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяют условиям Теоремы 2. Пусть, кроме того, выполняется соотношение* (18), *а у функций s и $\widetilde{s}$ нет общего периода, то есть их периоды T и $\widetilde{T}$ несоизмеримы. Тогда*

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\psi(1/t)\phi(1/t)}{t^{1/p}}, \quad t\to+0,$$

где $\phi(s) = (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$, $\psi(t)$ — некоторая ограниченная и отделенная от нуля медленно меняющаяся функция.

Доказательство. Повторим доказательство Теоремы 3 до выражения (20). Далее, получим оценку, которую можно применить вместо Леммы 4.

Введем функцию $r(\tau)$ согласно следующему равенству:

$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) = \phi(\tau)r(\ln\tau).$$

Функция r ограничена и отделена от нуля по Лемме 1. Убедимся в том, что она равномерно непрерывна. Имеем

$$r(\ln\tau+\delta) - r(\ln\tau) = r(\ln\tau+\delta)\Big(\frac{\phi(\tau e^\delta)}{\phi(\tau)} - 1\Big) +$$

$$+\frac{1}{\phi(\tau)}\cdot\int\limits_1^\tau \left(\frac{\varphi(\frac{\tau e^\delta}{\sigma})s(\ln\frac{\tau e^\delta}{\sigma})}{\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)} - 1\right)\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} +$$

$$+\frac{1}{\phi(\tau)}\cdot\int\limits_\tau^{\tau e^\delta}\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}.$$

Покажем, что каждое слагаемое здесь стремится к нулю при $\delta \to 0$ равномерно по τ. Не умаляя общности считаем, что $0 < \delta \leqslant \delta_0$ для некоторого δ_0. Для первого слагаемого напишем формулу конечных приращений:

$$\frac{\phi(\tau e^\delta) - \phi(\tau)}{\phi(\tau)} = (\tau e^\delta - \tau)\frac{\phi'(\zeta)}{\phi(\tau)} = (e^\delta - 1) \cdot \frac{\tau}{\zeta} \cdot \frac{\phi(\zeta)}{\phi(\tau)} \cdot \frac{\zeta\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)},$$

где $\zeta \in [\tau, \tau e^\delta]$. Множитель $\dfrac{\tau}{\zeta}$ ограничен. Для последних двух множителей существуют пределы

$$\frac{\phi(\zeta)}{\phi(\tau)} \to 1, \quad \frac{\zeta\phi'(\zeta)}{\phi(\zeta)} \to 0, \quad \tau \to \infty,$$

поэтому они тоже ограничены. Таким образом,

$$\left|\frac{\phi(\tau e^\delta)}{\phi(\tau)} - 1\right| \leqslant C(e^\delta - 1) \to 0, \quad \delta \to 0$$

равномерно по $\tau \in \mathbb{R}_+$.

Аналогично показывается, что во втором слагаемом равномерно стремится к нулю выражение

$$\frac{\varphi(\frac{\tau e^\delta}{\sigma})s(\ln\frac{\tau e^\delta}{\sigma})}{\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right)} - 1,$$

так как φ — медленно меняющаяся, s — непрерывная, периодическая, ограниченная и отделенная от нуля. Остальные сомножители во втором слагаемом дают ограниченную поправку согласно Лемме 1.

В третьем слагаемом аналогично Лемме 1 получаем оценку

$$\int\limits_{\tau}^{\tau e^\delta} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} = O(\phi(\tau e^\delta) - \phi(\tau)), \quad \tau \to \infty,$$

и потому оно стремится к нулю так же, как первое. Таким образом, равномерная непрерывность доказана.

Докажем теперь, что $r(\ln\tau)$ — медленно меняющаяся функция. Из определения имеем

$$\begin{aligned} r(\ln\tau + T)\phi(\tau e^T) - r(\ln\tau)\phi(\tau) = \int\limits_{\tau}^{\tau e^T} \varphi\left(e^T \cdot \frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} + \\ + \int\limits_{1}^{\tau} \left(\varphi\left(e^T \cdot \frac{\tau}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\right) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma)\widetilde{s}(\ln\sigma)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)}. \end{aligned} \tag{22}$$

Левая часть (22) с учетом соотношения $\phi(\tau e^T) = \phi(\tau)(1 + o(1))$ переписывается

$$r(\ln\tau + T)\phi(\tau e^T) - r(\ln\tau)\phi(\tau) = \big(r(\ln\tau + T) - r(\ln\tau)\big)\phi(\tau) + o(\phi(\tau)), \quad \tau \to \infty. \tag{23}$$

В правой части (22) при $\tau \to \infty$ первый интеграл допускает оценку

$$\begin{gathered}\int\limits_{\tau}^{\tau e^T} \varphi\left(e^T \cdot \frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln \frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma) \widetilde{s}(\ln \sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln \sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln \sigma)} \sim \\ \sim \widetilde{\varphi}(\tau) \int\limits_{1}^{e^T} \varphi(\frac{e^T}{\sigma}) s\left(\ln \frac{1}{\sigma}\right) \widetilde{s}(\ln(\tau\sigma)) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln(\tau\sigma)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(\tau\sigma))} = o(\phi(\tau)).\end{gathered} \tag{24}$$

Для оценки второго интеграла используется Предложение 4. Поскольку $\varphi(\tau e^T) = \varphi(\tau)(1 + o(1))$ при $\tau \to \infty$, имеем

$$\begin{gathered}\int\limits_{1}^{\tau} \varphi\left(e^T \cdot \frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln \frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma) \widetilde{s}(\ln \sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln \sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln \sigma)} = \\ = \int\limits_{1}^{\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s\left(\ln \frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma) \widetilde{s}(\ln \sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln \sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln \sigma)}(1 + o(1)).\end{gathered}$$

По Лемме 1 интеграл в правой части можно оценить как $O(\phi(\tau))$, а значит

$$\int\limits_{1}^{\tau} (\varphi\left(e^T \cdot \frac{\tau}{\sigma}\right) - \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)) s\left(\ln \frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma) \widetilde{s}(\ln \sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln \sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln \sigma)} = o(\phi(\tau)), \quad \tau \to \infty. \tag{25}$$

Из (23), (24), (25) следует, что

$$r(\ln \tau + T) - r(\ln \tau) = o(1), \quad \tau \to \infty.$$

Совершенно аналогично получается, что

$$r(\ln \tau + \widetilde{T}) - r(\ln \tau) = o(1), \quad \tau \to \infty.$$

Значит для произвольных $z_1, z_2 \in \mathbb{Z}$ выполняется

$$r(\ln \tau + z_1 T + z_2 \widetilde{T}) - r(\ln \tau) = o(1), \quad \tau \to \infty.$$

Поскольку периоды несоизмеримы, множество $\{z_1 T + z_2 \widetilde{T} | z_1, z_2 \in \mathbb{Z}\}$ плотно в $\mathbb{R}$, а значит, из равномерной непрерывности r для любого $c \in \mathbb{R}$ имеем

$$r(\ln \tau + c) - r(\ln \tau) = o(1), \quad \tau \to \infty.$$

Отсюда, учитывая, что r ограничена и отделена от нуля, получаем, что функция $\psi(\tau) := r(\ln(\tau))$ является медленно меняющейся. □

При некоторых дополнительных условиях можно показать, что $\psi = const$.

Теорема 5. *Пусть операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяют условиям Теоремы 4. Потребуем дополнительно, чтобы для функций φ и $\widetilde{\varphi}$ были ограничены следующие величины:*

$$\left|\frac{\sigma \ln(\sigma) \varphi'(\sigma)}{\varphi(\sigma)}\right| \leqslant C, \quad \left|\frac{\sigma \ln(\sigma) \widetilde{\varphi}'(\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\sigma)}\right| \leqslant C, \qquad \sigma \geqslant 1. \tag{26}$$

Тогда
$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{\mathfrak{C}\phi(1/t)}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$
где $\phi(s) = (\varphi * \widetilde{\varphi})(s)$, *а константа* $\mathfrak{C}$ *определена в* (8).

Доказательство. Мы хотим получить оценку
$$(\varphi s * \widetilde{\varphi}\widetilde{s})(\tau) \sim \mathfrak{C}\phi(\tau), \quad \tau \to \infty. \tag{27}$$
Оценим сперва $H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau)$. Для этого проинтегрируем по частям и применим Лемму 5.

$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi}\widetilde{s}](\tau) = \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma) d\left(\int\limits_1^{\sigma} s(\ln\frac{\tau}{\xi})\widetilde{s}(\ln\xi)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\xi))}{\widetilde{\varrho}(\ln\xi)}\right) =$$

$$= \varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau})\int\limits_1^{\sqrt{\tau}} s(\ln\frac{\tau}{\xi})\widetilde{s}(\ln\xi)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\xi))}{\widetilde{\varrho}(\ln\xi)} -$$

$$- \int\limits_1^{\sqrt{\tau}} \left(\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\right)'_{\sigma}\int\limits_1^{\sigma} s(\ln\frac{\tau}{\xi})\widetilde{s}(\ln\xi)\frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\xi))}{\widetilde{\varrho}(\ln\xi)}d\sigma =$$

$$= \varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau})(\mathfrak{C}+o(1))\ln(\sqrt{\tau}) - \int\limits_1^{\sqrt{\tau}}\left(\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\right)'_{\sigma}(\mathfrak{C}+o(1))\ln\sigma d\sigma.$$

Преобразуем главный член асимптотики обратным интегрированием по частям:

$$\mathfrak{C}\Big(\varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau})\ln(\sqrt{\tau}) - \int\limits_1^{\sqrt{\tau}}\left(\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\right)'_{\sigma}\ln\sigma d\sigma\Big) = \mathfrak{C}h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau).$$

Оценим теперь добавки, вносимые каждым из $o(1)$.

$$\mathfrak{C}h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau) + \int\limits_1^{\sqrt{\tau}}\left(\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\right)'_{\sigma}\ln\sigma\cdot o(1)d\sigma =$$

$$= \mathfrak{C}\int\limits_1^{\sqrt{\tau}}\Big[1+\Big(\frac{\sigma\ln(\sigma)\widetilde{\varphi}'(\sigma)}{\widetilde{\varphi}(\sigma)}+\frac{\ln(1/\sigma)}{\ln(\tau/\sigma)}\cdot\frac{(\tau/\sigma)\ln(\tau/\sigma)\varphi'(\tau/\sigma)}{\varphi(\tau/\sigma)}\Big)o(1)\Big]\cdot\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\frac{d\sigma}{\sigma} =$$
$$= (\mathfrak{C}+o(1))h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau).$$

по п.2 Предложения 3, т. к. выражение в круглых скобках ограничено благодаря дополнительным условиям (26). По той же причине имеем

$$\varphi(\sqrt{\tau})\widetilde{\varphi}(\sqrt{\tau})\ln(\sqrt{\tau})\cdot o(1) = o(1)\cdot\Big(h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau)+\int\limits_1^{\sqrt{\tau}}\left(\varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right)\widetilde{\varphi}(\sigma)\right)'_{\sigma}\ln\sigma d\sigma\Big) = o(h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau)).$$

Получаем оценку

$$H[\varphi s, \widetilde{\varphi s}](\tau) = (\mathfrak{C} + o(1))h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau). \tag{28}$$

Аналогично, учитывая Лемму 2, получаем

$$H_1[\varphi s, \widetilde{\varphi s}](\tau) = H[\widetilde{\varphi s}, \varphi s](\tau)(1 + o(1)) = (\mathfrak{C} + o(1))h_{\varphi,\widetilde{\varphi}}(\tau). \tag{29}$$

Из асимптотик (28) и (29) получаем искомую асимптотику (27). $\square$

Замечание 4. Из дополнительных ограничений (26) следует, что для некоторой $C > 0$ выполняются оценки

$$\varphi(e)(\ln\sigma)^{-C} \leqslant \varphi(\sigma) \leqslant \varphi(e)(\ln\sigma)^{C}, \quad \widetilde{\varphi}(e)(\ln\sigma)^{-C} \leqslant \widetilde{\varphi}(\sigma) \leqslant \widetilde{\varphi}(e)(\ln\sigma)^{C}$$

при $\sigma \geqslant e$. Дополнительные ограничения очевидно имеют место для медленно меняющихся функций вида $(1 + \ln(\tau))^{\varkappa}$. В общем случае вопрос о постоянстве функции ψ в Теореме 4 остается открытым.

Рассмотрим теперь случаи, когда один или оба интеграла медленно меняющихся функций конечны.

Теорема 6. *Пусть операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяют условиям Теоремы 2, и пусть*

$$\int_1^\infty \varphi(\tau)\frac{d\tau}{\tau} < \infty, \quad \int_1^\infty \widetilde{\varphi}(\tau)\frac{d\tau}{\tau} = \infty,$$

а периоды s и $\widetilde{s}$ совпадают и равны T. Кроме того, пусть для $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ выполняется п.4 Предложения 3. Тогда

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{h_{\tilde{\varphi},\varphi}(1/t)\cdot s_\otimes(\ln(1/t)) + \widetilde{\varphi}(1/t)\cdot \widetilde{s}^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}},$$

где $s_\otimes$ определена в (19), *а*

$$\widetilde{s}^*(\tau) = \sum_n \widetilde{s}(\tau + \ln(\lambda_n))\lambda_n^{1/p} \tag{30}$$

(ср. (13)*).*

Замечание 5. Сумма в (30) сходится по Предложению 1.

Доказательство. Фиксируем $\varepsilon > 0$. По п.1 Предложения 3 получаем

$$S(t,\varepsilon) = o(h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(1/t)), \quad t \to +0.$$

По п.4 Предложения 2 имеем

$$\widetilde{S}(t,\varepsilon) \sim \widetilde{\varphi}(1/t)\cdot\Big(\sum_n \widetilde{s}(\ln\tau + \ln\lambda_k)\lambda_k^{1/p} + \nu(\varepsilon)\Big),$$

где $\nu(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Остается оценить интегральное слагаемое.

$$\int\limits_{\alpha_\mp(\varepsilon)/\varepsilon}^{\varepsilon\tau} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{s}(\ln\sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} =$$

$$= \int\limits_{1}^{\sqrt{\tau}} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{s}(\ln\sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} -$$

$$- \int\limits_{1}^{\alpha_\mp(\varepsilon)/\varepsilon} \varphi\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{\varphi}(\sigma) s\left(\ln\frac{\tau}{\sigma}\right) \widetilde{s}(\ln\sigma) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln\sigma))}{\widetilde{\varrho}(\ln\sigma)} +$$

$$+ \int\limits_{1/\varepsilon}^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma) \widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s(\ln\sigma) \widetilde{s}(\ln(\tau/\sigma)) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma))}.$$

Первое слагаемое оценивается по Лемме 4. Второе слагаемое можно оценить как $O(\varphi(\tau)) = o(h_{\widetilde{\varphi},\varphi}(\tau))$ при $\tau \to \infty$. Остается лишь третье слагаемое, которое оценивается аналогично п.4 Предложения 3:

$$\int\limits_{1/\varepsilon}^{\sqrt{\tau}} \varphi(\sigma) \widetilde{\varphi}\left(\frac{\tau}{\sigma}\right) s(\ln\sigma) \widetilde{s}(\ln(\tau/\sigma)) \frac{d(\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma)))}{\widetilde{\varrho}(\ln(\tau/\sigma))} \leqslant C\widetilde{\varphi}(\tau) \int\limits_{1/\varepsilon}^{\infty} \varphi(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma}, \quad \tau \to \infty.$$

Здесь

$$\int\limits_{1/\varepsilon}^{\infty} \varphi(\sigma) \frac{d\sigma}{\sigma} \to 0, \quad \varepsilon \to 0,$$

а значит, это слагаемое не вносит вклада в асимптотику. □

Замечание 6. Аналогично Теореме 4, если периоды T и $\widetilde{T}$ несоизмеримы, вместо $s_\otimes(\ln(\tau))$ в асимптотике возникает ограниченная и отделенная от нуля медленно меняющаяся функция, равная константе в тех же частных случаях, что и в Теореме 5.

Теорема 7. *Пусть операторы $\mathcal{T}$ и $\widetilde{\mathcal{T}}$ удовлетворяют условиям Теоремы 2, и пусть*

$$\int\limits_{1}^{\infty} \varphi(\tau) \frac{d\tau}{\tau} < \infty, \quad \int\limits_{1}^{\infty} \widetilde{\varphi}(\tau) \frac{d\tau}{\tau} < \infty,$$

а для $(\varphi, \widetilde{\varphi})$ и $(\widetilde{\varphi}, \varphi)$ выполняется п.4 Предложения 3. Тогда

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{\varphi(1/t) \cdot s^*(\ln(1/t)) + \widetilde{\varphi}(1/t) \cdot \widetilde{s}^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}},$$

где s^* определена в (13), $\widetilde{s}^*$ определена в (30).

Эта теорема доказывается аналогично предыдущей.

Замечание 7. В отличие от предыдущих теорем, асимптотика в последних двух случаях содержит два слагаемых. Одно из них может подавляться другим, в этом случае получается снова почти регулярная асимптотика, однако в общем случае нельзя предсказать их поведение, и возможна ситуация, когда ни одно из слагаемых не превалирует. В этом случае асимптотика может не являться почти регулярной.

Пример 1. Пусть при $t \to +0$

$$\mathcal{N}(t, \mathcal{T}) \sim \frac{\ln^{\varkappa_1}(1/t) \cdot s(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \;\; \mathcal{N}(t, \widetilde{\mathcal{T}}) \sim \frac{\ln^{\varkappa_2}(1/t) \cdot \widetilde{s}(\ln(1/t))}{t^{1/p}}.$$

Не умаляя общности, можно считать, что $\varphi(\tau) = (1 + \ln(\tau))^{\varkappa_1}$, $\widetilde{\varphi}(\tau) = (1 + \ln(\tau))^{\varkappa_2}$. Асимптотика меллиновской свертки в этом случае посчитана в Примере 1 работы [4]. Рассмотрим все возможные случаи.

Случай 1. $\varkappa_1 \geqslant -1, \varkappa_2 \geqslant -1$**.** В этом случае применимы Теорема 3, если у периодических функций есть общий период, и Теорема 5 иначе.

Если у функций s и $\widetilde{s}$ есть общий период T, то

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{\phi(1/t) \cdot s_{\otimes}(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где функция $s_{\otimes}$ определена в (19),

$$\phi(\tau) = \begin{cases} \mathbf{B}(\varkappa_1 + 1, \varkappa_2 + 1)(1 + \ln(\tau))^{\varkappa_1 + \varkappa_2 + 1}, & \varkappa_1 > -1, \varkappa_2 > -1, \\ \ln(\ln(\tau)) \cdot (1 + \ln(\tau))^{\varkappa_2}, & \varkappa_1 = -1, \varkappa_2 > -1, \\ 2\ln(\ln(\tau)) \cdot (1 + \ln(\tau))^{-1}, & \varkappa_1 = \varkappa_2 = -1, \end{cases}$$

где $\mathbf{B}$ — бета-функция Эйлера. Отметим, что получившаяся асимптотика также почти регулярна.

Если же периоды T и $\widetilde{T}$ несоизмеримы, то

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{\mathfrak{C}\phi(1/t)}{t^{1/p}}, \quad t \to +0,$$

где константа $\mathfrak{C}$ определена в (8), и получившаяся асимптотика регулярна.

Случай 2. $\varkappa_1 < -1 \leqslant \varkappa_2$**.** В этом случае применима Теорема 6, причем прямым вычислением можно убедиться, что

$$h_{\widetilde{\varphi}, \varphi}(\tau) = o(\widetilde{\varphi}(\tau)), \quad \tau \to \infty,$$

а значит,

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{\ln^{\varkappa_2}(1/t) \cdot \widetilde{s}^*(\ln(1/t))}{t^{1/p}}, \tag{31}$$

где $\widetilde{s}^*$ определена в (30), и получившаяся асимптотика вновь почти регулярна.

Случай 3. $\varkappa_1 < \varkappa_2 < -1$**.** В этом случае применима Теорема 7, причем

$$\varphi(\tau) = o(\widetilde{\varphi}(\tau)), \quad \tau \to \infty,$$

значит, снова имеет место асимптотика (31).

Случай 4. $\varkappa_1 = \varkappa_2 < -1$. В этом случае применима Теорема 7, причем оба слагаемых имеют одинаковый порядок роста, а значит,

$$\mathcal{N}_{\otimes}(t) \sim \frac{\ln^{\varkappa_1}(1/t)\big(s^*(\ln(1/t)) + \widetilde{s}^*(\ln(1/t))\big)}{t^{1/p}},$$

где s^* определена в (13), $\widetilde{s}^*$ определена в (30). В случае, когда у функций s и $\widetilde{s}$ есть общий период, эта асимптотика оказывается почти регулярной, однако в случае, когда периоды несоизмеримы, получается почти регулярная асимптотика с квазипериодической компонентой.

§5 Асимптотика малых уклонений

Напомним некоторые факты из теории малых уклонений в L_2 гауссовских случайных функций.

Пусть есть гауссовская случайная функция $X(x)$, $x \in \mathcal{O} \subseteq \mathbb{R}^m$, с нулевым средним и ковариационной функцией $G_X(x,u)$, $x, u \in \mathcal{O}$. Пусть μ — конечная мера на $\mathcal{O}$. Положим

$$\|X\|_\mu = \Big(\int_{\mathcal{O}} X^2(x) d\mu(x)\Big)^{1/2}$$

Логарифмической асимптотикой малых уклонений в L_2 называется асимптотика $\ln \mathbf{P}\{\|X\|_\mu \leqslant \varepsilon\}$ при $\varepsilon \to 0$.

Согласно хорошо известному разложению Кархунена-Лоева выполняется равенство по распределению

$$\|X(x)\|_\mu^2 \overset{d}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2,$$

где ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины, а $\lambda_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, $\sum_n \lambda_n < \infty$ — собственные числа интегрального уравнения

$$\lambda f(x) = \int_{\mathcal{O}} G_X(x,u) f(u) d\mu(u). \tag{32}$$

Таким образом, задача сводится к изучению асимптотического поведения при $\varepsilon \to 0$ величины $\ln \mathbf{P}\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2 \leqslant \varepsilon^2\}$. Согласно [21] ответ зависит только от главного члена асимптотики последовательности λ_n.

Случай чисто степенной асимптотики $\lambda_n \sim Cn^{-p}$, $p > 1$, известен из работ [22], [23], [24], [25]. В работе [4] рассматривается случай регулярного асимптотического поведения, а в работе [8] — почти степенной случай с периодическим множителем.

Рассмотрим более общий случай, пусть

$$\lambda_n(\mathcal{T}) = \phi(n) := \frac{\psi(n) \cdot \theta(\ln(n))}{n^p}, \tag{33}$$

где $p > 1$, а функция θ равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, ограничена, отделена от нуля, причем функция $\phi(t)$ монотонна на $\mathbb{R}$.

Функция $\phi(n)$ удовлетворяет условиям Теоремы 2 из статьи [26], которая для данного случая выглядит так:

Предложение 5.

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\phi(n)\xi_n^2 \leqslant r\right\} \sim \frac{\exp(L(u)+ur)}{\sqrt{2\pi u^2 L''(u)}}, \quad r \to 0, \tag{34}$$

где

$$L(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln f(u\phi(n)), \quad f(t) := (1+2t)^{-1/2},$$

$u = u(r)$ — *любая функция, удовлетворяющая*

$$\lim_{r\to 0}\frac{L'(u)+r}{\sqrt{L''(u)}} = 0.$$

Начнем с анализа асимптотики $L'(u)$ при $u \to +\infty$. В нашем случае

$$uL'(u) = -\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u\psi(n)\theta(\ln(n))}{n^p + 2u\psi(n)\theta(\ln(n))} \to -\infty, \quad u \to +\infty.$$

Поскольку $\phi(t)$ — убывающая функция, можно оценить

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{u\psi(n)\theta(\ln(n))}{n^p + 2u\psi(n)\theta(\ln(n))} \geqslant \int_1^{\infty}\frac{u\psi(t)\theta(\ln(t))\,dt}{t^p + 2u\psi(t)\theta(\ln(t))} \geqslant$$

$$\geqslant \sum_{n=2}^{\infty}\frac{u\psi(n)\theta(\ln(n))}{n^p + 2u\psi(n)\theta(\ln(n))} \sim -uL'(u),$$

и потому

$$uL'(u) \sim I_1(u) := -\int_1^{\infty}\frac{u\psi(t)\theta(\ln(t))\,dt}{t^p + 2u\psi(t)\theta(\ln(t))}.$$

Заменив промежуток интегрирования на $(0,\infty)$ и выполнив подстановку

$$t = t(z) := z\phi^{-1}(1/u) = z\gamma(u),$$

$$\gamma(u) := \phi^{-1}(1/u) \sim u^{1/p}\varphi(u)\vartheta(\ln(u)), \quad u \to \infty,$$

где φ — медленно меняющаяся, а ϑ — равномерно непрерывная, ограниченная, отделенная от нуля функция, получим

$$I_1(u) = -\gamma(u)\cdot\int_0^{\infty}\frac{dz}{2 + z^p\cdot\dfrac{(\gamma(u))^p}{u\psi(t(z))\theta(\ln(t(z)))}} + O(1), \quad u \to \infty.$$

Из выражения $1/u = \phi(\gamma(u))$ мы получаем формулу

$$(\gamma(u))^p/u = \psi(t(z)/z)\theta(\ln(t(z)/z)).$$

Подставляя ее в интеграл и учитывая определение $\gamma(u)$, получаем

$$I_1(u) = -\gamma(u)\cdot\int_0^{\infty}\frac{dz}{2 + z^p\cdot\dfrac{\psi(\gamma(u))\theta(\ln(\gamma(u)))}{\psi(z\gamma(u))\theta(\ln(z\gamma(u)))}} + O(1), \quad u \to \infty.$$

Легко видеть, что

$$\theta(\ln(z\gamma(u))) = \theta\Big(\frac{\ln(u)}{p} + \ln(z)\Big)(1 + o(1)), \quad u \to \infty.$$

Заметим также, что согласно п.2 Предложения 2, для любого $\varepsilon > 0$ отношение $\psi(t)/t^\varepsilon$ убывает при больших t, а значит при $z > 1$

$$\frac{\psi(t)}{\psi(zt)} = \frac{1}{z^\varepsilon} \cdot \frac{\psi(t)}{t^\varepsilon} \cdot \frac{(zt)^\varepsilon}{\psi(zt)} \geqslant \frac{C(\varepsilon)}{z^\varepsilon}.$$

Это дает нам мажоранту, позволяющую использовать теорему Лебега. В результате имеем

$$I_1(u) = -u^{1/p}\vartheta(u) \cdot \int\limits_0^\infty \frac{dz}{2 + z^p \cdot \dfrac{\theta(\ln(u)/p)}{\theta(\ln(u)/p + \ln(z))}} + O(1), \quad u \to \infty. \tag{35}$$

Поскольку интеграл — равномерно непрерывная, ограниченная и отделенная от нуля функция $\ln(u)$, получаем

$$L'(u) \sim -u^{-\frac{p-1}{p}}\varphi(u)\vartheta_1(\ln(u)), \quad u \to \infty, \tag{36}$$

где φ — медленно меняющаяся функция из асимптотики γ, а ϑ_1 — равномерно непрерывная, ограниченная и отделенная от нуля функция.

Аналогично получаем

$$u^2 L''(u) \sim 2\int\limits_1^\infty \frac{(u\psi(t)\theta(\ln(t)))^2\,dt}{(t^p + 2u\psi(t)\theta(\ln(t)))^2} \asymp u^{1/p}\varphi(u), \tag{37}$$

$$L(u) \sim -\frac{1}{2}u^{1/p}\varphi(u)\vartheta(\ln(u)) \cdot \int\limits_0^\infty \ln\left(1 + \frac{2\theta(\ln(u)/p + \ln(z))}{z^p\theta(\ln(u)/p)}\right) dt.$$

Поскольку $L''(u) > 0$, уравнение $L'(u) + r = 0$ имеет для достаточно малых r единственное решение $u(r)$, такое, что $u(r) \to \infty$ при $r \to 0$. Более того, соотношение (36) дает

$$u(r) \sim r^{-\frac{p}{p-1}}\eta(1/r)\vartheta_2(\ln(1/r)), \quad r \to 0, \tag{38}$$

где η — медленно меняющаяся, а ϑ_2 — равномерно непрерывная, ограниченная и отделенная от нуля функции.

Подставляя (37) в (34), заключаем, что

$$\begin{aligned}
&\ln \mathbf{P}\left\{\sum_{n=1}^\infty \phi(n)\xi_n^2 \leqslant r\right\} \sim L(u) + ur = L(u) - uL'(u) \sim \\
&\sim -u^{1/p}\varphi(u)\vartheta(\ln(u)) \cdot \int\limits_0^\infty \left[\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{2\theta(\ln(u)/p + \ln(z))}{z^p\theta(\ln(u)/p)}\right) - \right. \\
&\left. - \frac{1}{2 + z^p \cdot \dfrac{\theta(\ln(u)/p)}{\theta(\ln(u)/p + \ln(z))}}\right] dz.
\end{aligned} \tag{39}$$

Нам остается лишь заметить, что стоящее под интегралом выражение

$$\frac{1}{2}\ln(1+2x) - \frac{x}{2x+1}$$

положительно, поэтому интеграл есть равномерно непрерывная положительная функция $\ln(u)$, ограниченная и отделенная от нуля. Подставляя полученную выше асимптотику u и заменяя r на ε^2, можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 8. *Пусть собственные числа* (32) *имеют вид* (33). *Тогда при* $\varepsilon \to 0$

$$\ln \mathbf{P}\left\{\|X\|_\mu \leqslant \varepsilon\right\} \sim -\varepsilon^{-\frac{2}{p-1}}\xi(1/\varepsilon)\zeta(\ln(1/\varepsilon)), \tag{40}$$

где ξ — медленно меняющаяся функция, ζ — равномерно непрерывная, ограниченная и отделенная от нуля функция. Более того, если функция θ в (33) *асимптотически $\frac{T}{p}$-периодическая, то функция ζ может быть выбрана $\frac{T(p-1)}{2p}$-периодической.*

Доказательство. Первое утверждение следует из (39) и (38), если заменить r на ε^2. Далее, если θ асимптотически $\frac{T}{p}$-периодическая, то функция ϑ асимптотически T-периодическая, а по теореме Лебега легко проверить, что асимптотически T-периодическими от $\ln(u)$ будут и интегралы в (35) и (39). Таким образом, функция ϑ_1 в (36) асимптотически T-периодическая, значит ϑ_2 в (38) асимптотически $\frac{T(p-1)}{p}$-периодическая. Остается лишь заметить, что из (38) следует

$$\ln(u) = \frac{p}{p-1}\ln(1/r)(1+o(1)), \quad r \to 0,$$

а значит в (39) интеграл и функция $\vartheta(\ln(u))$ являются асимптотически $\frac{T(p-1)}{p}$-периодическими функциями $\ln(1/r)$, и второе утверждение теоремы также доказано. $\square$

Пусть теперь есть два гауссовских процесса $X(x)$, $x \in \mathcal{O}_1 \subseteq \mathbb{R}^{m_1}$, и $Y(y)$, $y \in \mathcal{O}_2 \subseteq \mathbb{R}^{m_2}$, с нулевыми средними и ковариационными функциями $G_X(x,u)$, $x,u \in \mathcal{O}_1$, и $G_Y(y,v)$, $y,v \in \mathcal{O}_2$, соответственно. Рассмотрим новую гауссовскую функцию $Z(x,y)$, $x \in \mathcal{O}_1$, $y \in \mathcal{O}_2$, с нулевым средним и ковариацией $G_Z((x,y),(u,v)) = G_X(x,u)G_Y(y,v)$. Такая гауссовская функция очевидно существует, а интегральный оператор с ядром G_Z является тензорным произведением операторов с ядрами G_X и G_Y. Поэтому мы используем обозначение $Z = X \otimes Y$ и называем процесс Z тензорным произведением процессов X и Y. Обобщение на большее число множителей с получением $\bigotimes_{j=1}^d X_j$ достаточно ясно.

Пример 2. Продемонстрируем применение теорем из §4 на примере броуновского листа

$$\mathbb{W}_d(x_1,\ldots,x_d) = W_1(x_1)\otimes W_2(x_2)\otimes\ldots\otimes W_d(x_d)$$

в единичном кубе с нормой $L_2(\mu)$, где $\mu = \bigotimes\limits_{j=1}^{d}\mu_j$, и каждая из мер μ_j является самоподобной мерой обобщенного канторовского типа. Спектральные асимптотики операторов-множителей в этом случае известны из [6] и [7]:

$$\mathcal{N}_j(t) \sim \frac{s_j(\ln(1/t))}{t^{1/p_j}}, \quad t \to 0+,$$

где s_j — непрерывны и T_j-периодичны, $p_j > 1$. Данные степенные асимптотики рассмотрены в Примере 1 и отвечают случаю нулевых степенных показателей у медленно меняющихся функций.

Для некоторых мер μ_j функции s_j могут быть константами, но в работах [16], [18] приведены широкие классы мер, для которых доказано непостоянство периодических функций.

Пусть $\mathfrak{p} := p_1 = \min p_j$. Первым шагом мы применяем Теорему 1 для каждого оператора, для которого $p_j > \mathfrak{p}$, перемножая его с первым. В результате можно считать, не умаляя общности, что все оставшиеся операторы имеют одинаковую степень асимптотики.

Если среди оставшихся операторов хоть у одного вырождена периодическая компонента, у произведения она также будет вырождена. Если хотя бы два периода несоизмеримы, то у произведения соответствующих операторов периодическая компонента выродится в константу согласно Примеру 1, и в результате выродится в константу периодическая компонента всего произведения.

Если все степенные показатели совпадают, и все периоды соизмеримы, то в результате применения Примера 1 мы получим

$$\mathcal{N}_\otimes(t) \sim \frac{C \ln^{\mathfrak{d}-1}(1/t) s_\otimes^{(\mathfrak{d})}(\ln(1/t))}{t^{1/\mathfrak{p}}}, \quad t \to 0+,$$

где $\mathfrak{d}$ — число степенных показателей, равных $\mathfrak{p}$, $s_\otimes^{(\mathfrak{d})}$ получается итерированием формулы (19) нужное количество раз. Это позволяет применять для данного гауссовского поля Теорему 8, более того, прямыми вычислениями можно убедиться, что в формулах (38) и (40)

$$\eta(1/r) \sim \ln^{\frac{(\mathfrak{d}-1)\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}}(1/r), \quad r \to 0,$$

$$\xi(1/r) \sim \ln^{\frac{(\mathfrak{d}-1)\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}}(1/r), \quad r \to 0.$$

Таким образом, при $\varepsilon \to 0$ имеем

$$\ln \mathbf{P}\left\{\|\mathbb{W}_d\|_\mu \leqslant \varepsilon\right\} \sim -\varepsilon^{-\frac{2}{\mathfrak{p}-1}} \ln^{\frac{(\mathfrak{d}-1)\mathfrak{p}}{\mathfrak{p}-1}}(1/\varepsilon)\zeta(\ln(1/\varepsilon)),$$

где ζ — некоторая $\frac{T(\mathfrak{p}-1)}{2\mathfrak{p}}$-периодическая функция.

Разберем простейший случай, когда все меры одинаковые и канторовские. Для этого случая известны значения параметров

$$p = \log_2 6, \quad T = \ln 6.$$

Подставляя эти значения в асимптотику, при $\varepsilon \to 0$ получаем

$$\ln \mathbf{P}\left\{\|\mathbb{W}_d\|_\mu \leqslant \varepsilon\right\} \sim -\varepsilon^{-2\log_3 2} \ln^{(d-1)\log_3 6}(1/\varepsilon)\zeta(\ln(1/\varepsilon)),$$

где ζ — некоторая $\frac{\ln 3}{2}$-периодическая функция.

Замечание 8. Аналогичные результаты имеют место, если вместо винеровских рассмотреть другие независимые гриновские гауссовские процессы. Примеры хорошо известных гриновских гауссовских процессов можно найти в [8].

Благодарности

Автор выражает благодарность А. И. Назарову за постановку задачи и внимание, проявленное к работе, а также Д. Д. Черкашину за ценные замечания.

Основные результаты работы (Теоремы 1-7) получены при поддержке Российского научного фонда, грант №14-21-00035. Результаты §5 (Теорема 8) получены при поддержке гранта РФФИ (проект 16-01-00258а).

Литература

[1] Graf S., Luschgy H., Pagès G., Functional Quantization and Small Ball Probabilities for Gaussian Processes, Journal of Theoretical Probability, 2003, 16: 1047.

[2] Luschgy H., Pagès G., Sharp asymptotics of the functional quantization problem for Gaussian processes, Ann. Probab., 32, No.2, 2004, 1574–1599.

[3] A. Papageorgiou, G.W. Wasilkowski, On the average complexity of multivariate problems, Journal of Complexity, 6, No.1, 1990, 1–23.

[4] A. Karol', A. Nazarov, Ya. Nikitin, Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators, Trans. AMS, 360, 2008, No.3, 1443–1474.

[5] A. Karol', A. Nazarov, Small ball probabilities for smooth Gaussian fields and tensor products of compact operators, Mathematische Nachrichten, 287, No.5-6, 2014, 595–609.

[6] J. Kigami, M. L. Lapidus., Weyl's problem for the spectral distributions of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals, Comm. Math. Phys., 1991, T. 158, 93–125.

[7] M. Solomyak, E. Verbitsky, On a spectral problem related to self-similar measures, Bull. London Math. Soc., 1995, T. 27, No.3, 242–248.

[8] А. И. Назаров, Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских случайных процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры, Зап. научн. сем. ПОМИ, 311, 2004, 190–213.

[9] Г. Н. Сытая, О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве, Теория случайных процессов, 2, 1974, 93–104.

[10] M. A. Lifshits, Asymptotic behavior of small ball probabilities, Prob. Theory and Math. Stat., 1999. B.Grigelionis et al. (Eds), Proc. VII International Vilnius Conference, 1998, VSP/TEV, 453–468.

[11] W. V. Li, Q. M. Shao, Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications, Stochastic Processes: Theory and Methods. Handbook of Statistics, 19, 2001, C.R.Rao and D.Shanbhag (Eds), 533–597.

[12] Small Deviations for Stochastic Processes and Related Topics, Internet site, http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/

[13] E. Csàki, On small values of the square integral of a multiparameter Wiener process, Statistics and Probability. Proc. of the 3rd Pannonian Symp. on Math. Stat., 1982, D.Reidel, Boston, 19—26.

[14] W.V. Li, Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms, J. Theor. Probab., 5, No.1, 1992, 1–31.

[15] E. Seneta, Regularly Varying Functions, Lect. Notes Math., 508, 1976.

[16] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак, О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа, Функц. анализ и его прил., 47:4, 2013, 18–29.

[17] А. А. Владимиров, Осцилляционный метод в задаче о спектре дифференциального оператора четвертого порядка с самоподобным весом, Алгебра и анализ, 27:2, 2015, 83–95.

[18] Н. В. Растегаев, Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом обобщенного канторовского типа, Зап. научн. сем. ПОМИ, 425, 2014, 86–98.

[19] D. Damanik, A. Gorodetski, B. Solomyak, Absolutely continuous convolutions of singular measures and an application to the square Fibonacci Hamiltonian, Duke Math. J., 164, No.8, 2015, 1603–1640.

[20] John C. Oxtoby, Ergodic sets, Bull. Amer. Math. Soc. V.58, No.2 , 1952, 116–136.

[21] A. Nazarov, Log-level comparison principle for small ball probabilities, Statistics & Probability Letters, 79, No.4, 2009, 481–486.

[22] V. M. Zolotarev, Gaussian measure asymptotic in l_2 on a set of centered spheres with radii tending to zero, 12th Europ. Meeting of Statisticians, Varna, 1979, p.254.

[23] В. М. Золотарев, Асимптотическое поведение гауссовской меры в l_2, Проблемы устойчивости стохастических моделей, Москва, 1984, 54–58.

[24] R. M. Dudley, J. Hoffmann-Jørgensen, L. A. Shepp, On the lower tail of Gaussian seminorms, Ann. Prob., 7, 1979, 319–342.

[25] И. А. Ибрагимов, О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса, Зап. научн. семин. ЛОМИ, 85, 1979, 75–93.

[26] M. A. Lifshits, On the lower tail probabilities of some random series, Ann. Prob., 25, No.1, 1997, 424–442.