Задача: как найти функционал, для которого тензор энергии-импульса имеет заданный вид

В.Р. Крым[1]

Аннотация

В общей теории относительности тензор энергии-импульса — это вариационная производная некоторого функционала по компонентам метрического тензора, и для него есть формула. Но в космологии тензор энергии-импульса вычисляется косвенно, а не по этой формуле. Возникает задача: как найти функционал, для которого тензор энергии-импульса имеет заданный вид.

Ключевые слова: теория относительности, космология, тензор энергии-импульса, дифференциальные уравнения в частных производных.

В физике часто используют тензор энергии-импульса T_{ij}. Его компоненты — это плотность массы, давление и другие (механические) напряжения в системе. Определяется он как [1, с. 351]

$$\frac{1}{2}\sqrt{-\det g}\,T_{ik} = \frac{\partial\sqrt{-\det g}\,L}{\partial g^{ik}} - \sum_{l=0}^{3}\frac{\partial}{\partial x^l}\frac{\partial\sqrt{-\det g}\,L}{\partial\dfrac{\partial g^{ik}}{\partial x^l}}. \tag{1}$$

Тогда δS принимает вид (по повторяющимся верхним и нижним индексам – суммирование)

$$\delta S = \frac{1}{2c}\int T_{ik}\delta g^{ik}\sqrt{-\det g}\,d\Omega = -\frac{1}{2c}\int T^{ik}\delta g_{ik}\sqrt{-\det g}\,d\Omega. \tag{2}$$

Т.е. тензор энергии-импульса — это вариационная производная функционала

$$S = \frac{1}{c}\int L\sqrt{-\det g}\,d\Omega \tag{3}$$

по компонентам метрического тензора.

Но в физике тензор энергии-импульса вычисляется косвенно, а не по этой формуле. В космологии всегда

$$(T^i_k) = \mathrm{Diag}(\rho c^2, -P, -P, -P) \tag{4}$$

[1] *Виктор Револьтович Крым, e-mail: vkrym12@rambler.ru*

(диагональная матрица), где ρ – плотность энергии, P – давление. Возникает задача: как найти функционал (3), для которого тензор энергии-импульса имеет такой вид.

Метрика Фридмана в декартовых координатах

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - a(t)^2\left((dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 + \frac{\kappa(rdr)^2}{1-\kappa r^2}\right), \tag{5}$$

т.е. $g_{00} = c^2$ и $g_{ij} = -a^2\big(\kappa\dfrac{x^i x^j}{1-\kappa r^2} + \delta_{ij}\big)$ для пространственных направлений $(i, j = 1, 2, 3)$. Так как эта матрица не диагональна, этими координатами пользоваться не будем.

Метрика Фридмана в полярных координатах имеет вид

$$ds^2 = c^2(dt)^2 - a(t)^2\left(\frac{dr^2}{1-\kappa r^2} + r^2\big(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\big)\right), \tag{6}$$

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} c^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{a(t)^2}{1-\kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -a(t)^2 r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Определитель $\det g = -\dfrac{c^2 a(t)^6 r^4 \sin^2\theta}{1-\kappa r^2}$. Обратная матрица

$$(g^{ij}) = \begin{pmatrix} c^{-2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1-\kappa r^2}{a(t)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{a(t)^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{a(t)^2 r^2 \sin^2\theta} \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Тензор энергии-импульса с нижними индексами $T_{ij} = T_i^k g_{kj}$:

$$(T_{ij}) = \begin{pmatrix} c^4\rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a(t)^2}{1-\kappa r^2}P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a(t)^2 r^2 P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a(t)^2 r^2(\sin^2\theta)P \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Получается, что левую часть уравнения (1) мы знаем.

Задача. Как найти функцию L, зависящую от компонент метрического тензора и их производных, являющуюся решением уравнения (1) с левой частью (9)? Т.е. как найти функционал (3), для которого тензор энергии-импульса равен (9)?

Самые изученные тензоры, зависящие от компонент метрического тензора и их производных — это тензор кривизны R^j_{ilk}, тензор Риччи $R_{ik} = R^l_{ilk}$ и скалярная кривизна $R = R_{ik}g^{ik}$. Они зависят еще и от вторых производных от компонент метрического тензора, но это неважно, потому что при вычислении вариации соответствующее слагаемое преобразуется в интеграл по гиперповерхности, вариация на это поверхности предполагается равной нулю и соответствующий интеграл равен нулю [1, с. 356]. Если в функционале (3) выбрать $L = R$, то в качестве тензора энергии-импульса получится $R_{ik} - \frac{1}{2}g_{ik}R$ (это левая часть уравнений Фридмана). А надо получить тензор энергии-импульса T_{ik} (9). Чтобы еще быть чем-то полезен, я выпишу этот тензор с верхними индексами, $T^{ij} = T^i_k g^{kj}$:

$$(T^{ij}) = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1-\kappa r^2}{a(t)^2}P & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2 r^2}P & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{a(t)^2 r^2 \sin^2\theta}P \end{pmatrix}. \qquad (10)$$

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теоретическая физика, т. 2. Теория поля. М.: Наука, 1988.