О спектре задачи Штурма-Лиувилля с арифметически самоподобным весом*

Растегаев Н. В.

СПбГУ, Лаборатория им. П.Л.Чебышева

Россия, Санкт-Петербург, 199178, 14 линия В.О., 29Б

rastmusician@gmail.com

Аннотация

Изучается спектральная асимптотика задачи Штурма-Лиувилля с сингулярной арифметически самоподобной весовой мерой. Полученные ранее результаты А. А. Владимирова и И. А. Шейпака, а также автора, опирающиеся на свойство спектральной периодичности, накладывают значительные ограничения на параметры самоподобия. В данной работе предлагается новый метод оценки считающей функции собственных значений. Это позволяет рассмотреть существенно более широкий класс самоподобных мер.

§1 Введение

В настоящей работе обобщаются результаты [1], [2] об асимптотике спектра задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\rho y, \\ y'(0) - \gamma_0 y(0) = y'(1) + \gamma_1 y(1) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

где ρ — вероятностная мера, первообразная которой представляет собой самоподобную функцию обобщенного канторовского типа (в частности, ρ сингулярна относительно меры Лебега).

Замечание 1. Хорошо известно, что изменение граничных условий задачи влечет возмущение квадратичной формы ранга два. Из общей вариационной теории (см. [3, §10.3]) следует, что считающие функции собственных значений граничных задач, отвечающих одному и тому же уравнению, но разным граничным условиям, не могут различаться более, чем на 2. Поэтому главный член асимптотики спектра от граничных условий не зависит.

Замечание 2. Вопрос об асимптотике спектра задачи (1), кроме самостоятельного интереса, возникает в задаче о малых уклонениях гриновских гауссовских процессов в $L_2(\rho)$ (см. [4]).

*Представлено А. И. Назаровым

Вопрос об асимптотическом поведении собственных значений задачи (1) восходит к работам М. Г. Крейна (см., например, [5]).

Из работы [6] следует, что если мера ρ содержит абсолютно непрерывную компоненту, то ее сингулярная составляющая не влияет на главный член асимптотики спектра.

В случае чисто сингулярной меры ρ из работы [7] видно, что считающая функция

$$N(\lambda) = \#\{n : \lambda_n < \lambda\}$$

собственных чисел краевой задачи для оператора $(-1)^l y^{(2l)}$ допускает оценку $o(\lambda^{\frac{1}{2l}})$ вместо обычной асимптотики $N(\lambda) \sim C\lambda^{\frac{1}{2l}}$ в случае меры, содержащей регулярную составляющую. Для некоторых специальных классов мер в [7] были получены лучшие оценки снизу для собственных чисел.

Точный степенной порядок D роста считающей функции $N(\lambda)$ в случае самоподобной меры ρ был установлен в [8] (см. также более ранние работы [9] и [10], где получены частные результаты, касающиеся классической канторовой лестницы).

В работах [11] и [12] показано, что считающая функция собственных значений задачи (1) имеет при $\lambda \to +\infty$ асимптотику

$$N(\lambda) = \lambda^D \cdot \big(s(\ln \lambda) + o(1)\big), \tag{2}$$

где s — некоторая непрерывная T-периодическая функция, показатель $D \in (0, \frac{1}{2})$. В случае неарифметичности типа самоподобия (см. Определение 1 ниже) первообразной меры ρ, функция s вырождается в константу.

В работе [4] этот результат обобщается на случай дифференциального оператора высшего четного порядка, и, кроме того, сформулирована следующая гипотеза.

Гипотеза 1. *Функция s является непостоянной для произвольного веса с арифметически самоподобной первообразной, не совпадающего с мерой Лебега.*

В работе [13] при помощи компьютерных вычислений доказано, что функция s действительно не может являться постоянной в том простейшем случае, когда обобщённая первообразная веса ρ представляет собой классическую канторову лестницу.

В работе [1] Гипотеза 1 была подтверждена для "ровных" лестниц (см. (4) ниже). Для таких лестниц была доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Коэффициент s из асимптотики* (2) *допускает представление*

$$\forall t \in [0, \nu] \quad s(t) = e^{-Dt}\,\sigma(t), \tag{3}$$

где σ — некоторая чисто сингулярная неубывающая функция.

Отсюда утверждение о непостоянстве функции $s(t)$ следует немедленно. Этот результат позднее обобщен в работе [14] на случай уравнения четвертого порядка.

В работе [2] результат из [1] обобщен на более широкий класс лестниц, удовлетворяющих условиям (5).

Целью настоящей работы является обобщение Теоремы 1 на произвольные лестницы, обладающие арифметическим самоподобием и ненулевыми промежуточными интервалами.

Работа имеет следующую структуру. В §2 приводятся необходимые определения самоподобных функций обобщенного канторовского типа, выводятся их свойства, определяется исследуемый класс функций и формулируется основной результат. В §3 устанавливаются вспомогательные факты, касающиеся свойств спектра. Наконец, в §4 доказывается вариант Теоремы 1 для выделенного класса лестниц.

§2 Самоподобные функции. Формулировка основного результата

Пусть $m \geqslant 2$, $\{I_i = [a_i, b_i]\}_{i=1}^m$ — подотрезки $[0,1]$, не пересекающиеся по внутренности, $b_j \leqslant a_{j+1}$, $\{\rho_i\}_{i=1}^m$ — набор положительных чисел, таких что $\sum\limits_{i=1}^m \rho_i = 1$, $\{e_i\}_{i=1}^m$ — булевские величины.

Определим семейство аффинных преобразований

$$S_i(t) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i)\, t, & e_i = 0, \\ b_i - (b_i - a_i)\, t, & e_i = 1, \end{cases}$$

сжимающих $[0,1]$ на I_i и меняющих ориентацию, если $e_i = 1$.

Определим оператор $\mathcal{S}$, действующий в пространстве $L_\infty[0,1]$ следующим образом:

$$\mathcal{S}(f) = \sum_{i=1}^m \left(\chi_{I_i}(e_i + (-1)^{e_i} f \circ S_i^{-1}) + \chi_{\{x > b_i\}} \right) \rho_i.$$

График функции $\mathcal{S}(f)$ на каждом из отрезков I_i подобен графику f, а на промежуточных интервалах она постоянна.

Предложение 1. (см., напр., [15, Лемма 2.1]) $\mathcal{S}$ — *сжимающее отображение в* $L_\infty[0,1]$.

Отсюда по теореме Банаха о неподвижной точке существует (единственная) функция $C \in L_\infty[0,1]$ такая, что $\mathcal{S}(C) = C$. Такую функцию $C(t)$ будем называть *обобщенной канторовой лестницей* с m ступеньками.

Функцию $C(t)$ можно искать как равномерный предел последовательности $\mathcal{S}^k(f)$ для $f(t) \equiv t$, что позволяет считать ее непрерывной и монотонной, причем $C(0) = 0$, $C(1) = 1$. Производная функции $C(t)$ в смысле обобщенных функций — сингулярная мера ρ без атомов, самоподобная по Хатчинсону (см. [16]), т.е. для любого измеримого множества E удовлетворяющая соотношению

$$\rho(E) = \sum_{i=1}^m \rho_i \cdot \rho(S_i^{-1}(E \cap I_i)).$$

Более общие способы построения самоподобных функций описаны в [15].

Замечание 3. Не умаляя общности, можно считать, что $a_1 = 0$, $b_m = 1$, в противном случае меру можно растянуть, что приведет к домножению спектра на константу.

Определение 1. Самоподобие будем называть *арифметическим*, если логарифмы величин $\rho_i(b_i - a_i)$ соизмеримы. Иначе говоря,

$$\rho_i(b_i - a_i) = \tau^{k_i}, \quad i = 1...m,$$

для некоторой постоянной τ и $k_i \in \mathbb{N}$, таких, что НОД$(k_i, i = 1 \dots m) = 1$.

Будем называть обобщенную канторову лестницу *ровной*, если

$$\forall i = 2, \dots, m \quad \rho_i = \rho_1 = \frac{1}{m}, \quad b_i - a_i = b_1 - a_1, \quad a_i - b_{i-1} = a_2 - b_1 > 0. \quad (4)$$

Именно такой класс лестниц рассмотрен в работе [1].

В работе [2] формула (3) доказана для арифметически самоподобных лестниц со следующими условиями:

$$\forall i = 2, \dots, m \quad a_i - b_{i-1} > 0, \;\; k_i = k_1 = 1. \quad (5)$$

Сформулируем основной результат нашей работы.

Теорема 2. *Пусть лестница арифметически самоподобна, и $a_i - b_{i-1} > 0$ для всех $i = 2, \dots, m$. Тогда имеет место формула* (3).

Замечание 4. Для описанного класса лестниц показатель D и период функции $s(t)$ определяются следующими соотношениями, полученными в [11]:

$$\sum_{i=1}^{m} \tau^{k_i D} = 1, \quad T = -\ln \tau. \quad (6)$$

§3 Вспомогательные свойства спектра

Будем рассматривать формальную граничную задачу

$$\begin{cases} -y'' = \lambda \rho y, \\ y'(a) - \gamma_0 y(a) = y'(b) + \gamma_1 y(b) = 0. \end{cases} \quad (7)$$

Ее обобщенным решением называется функция $y \in W_2^1[a, b]$, удовлетворяющая интегральному тождеству

$$\int_a^b y'\eta'\, dx + \gamma_0 y(a)\eta(a) + \gamma_1 y(b)\eta(b) = \lambda \int_a^b y\eta\, \rho(dx)$$

для любой функции $\eta \in W_2^1[a, b]$. Подставляя в интегральное тождество функции $\eta \in \mathring{W}_2^1[a, b]$, устанавливаем, что производная y' является первообразной сингулярной меры без атомов $\lambda \rho y$, откуда следует, что $y \in C^1[a, b]$.

Нам требуется следующий частный случай Утверждения 11 из [17].

Предложение 2. *Пусть* $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — *последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи* (7) *с произвольной мерой* ρ. *Тогда независимо от выбора индекса* $n \in \mathbb{N}_0$ *собственное значение* λ_n *является простым, причём отвечающая ему собственная функция не обращается в нуль на границе отрезка* $[0, 1]$ *и имеет внутри этого отрезка в точности* n *различных нулей.*

В частности, Предложение 2 выполняется для произвольных определенных выше самоподобных мер, а также для их нетривиальных сужений на подотрезки $[0, 1]$.

Обозначим через $\lambda_n([a, b])$, $n \geqslant 0$, собственные числа задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\rho y, \\ y'(a) = y'(b) = 0, \end{cases}$$

а через

$$N(\lambda, [a, b]) = \#\{n : \lambda_n([a, b]) < \lambda\}$$

их считающую функцию. Заметим, что во всех случаях $\lambda_0([a, b]) = 0$.

Из самоподобия меры ρ следует такое утверждение.

Лемма 1.

$$\lambda_n(I_i) = \tau^{-k_i}\lambda_n([0, 1]),$$
$$N(\lambda, I_i) = N(\tau^{k_i}\lambda, [0, 1]).$$

Доказательство. Второе утверждение напрямую следует из первого. Чтобы доказать первое утверждение, рассмотрим отвечающую собственному числу $\lambda_n(I_i)$ собственную функцию y_n и построим функцию z на $[0, 1]$ по следующей формуле:

$$z = y_n \circ S_i,$$

где S_i — определенное в §2 афинное сжатие. Ясно, что z удовлетворяет граничным условиям Неймана на концах отрезка $[0, 1]$, и для него выполняется следующее соотношение:

$$z'' = (y_n'' \circ S_i) \cdot (b_i - a_i)^2 = \lambda_n(I_i)(b_i - a_i)^2 \cdot (\rho \circ S_i) \cdot (y_n \circ S_i).$$

Заметим также, что

$$C \circ S_i = \mathcal{S}(C) \circ S_i = \rho_i \cdot (e_i + (-1)^{e_i} C) + \sum_{j=1}^{i-1} \rho_j,$$

откуда взятием производной получаем

$$\rho \circ S_i = \rho_i (b_i - a_i)^{-1} \rho,$$

а значит,

$$z'' = \lambda_n(I_i)\rho_i(b_i - a_i)\rho z = \lambda_n(I_i)\tau^{k_i}\rho z.$$

Таким образом, функция z отвечает собственному числу $\lambda_n(I_i)\tau^{k_i}$ задачи Неймана на отрезке $[0, 1]$ и имеет на нем ровно n корней, а значит, утверждение доказано. $\square$

Докажем теперь основное утверждение этого параграфа.

Теорема 3. *Пусть* $J_1 = [c_1, d_1]$, $J_2 = [c_2, d_2]$ *— подотрезки* $[0, 1]$, *и пусть* $c_2 - d_1 \geqslant 0$, *а* $\rho|_{[d_1,c_2]} \equiv 0$. *Обозначим* $J := [c_1, d_2]$. *Тогда функция*

$$F(\lambda) := N(\lambda, J) - N(\lambda, J_1) - N(\lambda, J_2) \tag{8}$$

имеет разрывы в точках $\lambda_n(J)$, $\lambda_n(J_1)$, $\lambda_n(J_2)$. *При этом элементы наборов* $\{\lambda_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$ *и* $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$ *нестрого чередуются, и в точках* $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$ *функция* F *меняет значение с* 0 *на* -1, *а в точках* $\{\lambda_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$, *не содержащихся в* $\{\lambda_n(J_1)\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\lambda_n(J_2)\}_{n=0}^{\infty}$, *меняет значение с* -1 *на* 0.

Доказательство. Зафиксируем отвечающую собственному значению $\lambda_n(J_1)$ собственную функцию y_n. Построим функцию $z \in C(J)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} &z = y_n \text{ на отрезке } J_1, \\ &z \equiv y_n(d_1) \text{ на отрезке } [d_1, c_2], \end{aligned}$$

наконец, на отрезке J_2 определим z как решение задачи Коши

$$\begin{cases} -z'' = \lambda_n(J_1)\rho z, \\ z(c_2) = y_n(d_1), \\ z'(c_2) = 0. \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что получившаяся функция непрерывно дифференцируема и является решением задачи

$$\begin{cases} -z'' = \lambda_n(J_1)\rho z, \\ z'(c_1) = z'(d_2) + \gamma z(d_2) = 0, \end{cases}$$

где $\gamma := -\dfrac{z'(d_2)}{z(d_2)}$ (если $z(d_2) = 0$, то полагаем $\gamma = \infty$).

Обозначим через n_1 и n_2 число корней функции z внутри отрезков J_1 и J_2 соответственно. Число $\lambda_n(J_1)$ является собственым числом задачи Неймана-Робена (или задачи Неймана-Дирихле при $\gamma = \infty$) на отрезке J, имеющим внутри него $n_1 + n_2$ корней, а поскольку в силу вариационного принципа собственные числа задачи монотонно зависят от γ, то можно, учитывая Предложение 2, написать следующие оценки:

$$\begin{aligned} \lambda_{n_1+n_2}(J) <&\lambda_n(J_1) < \lambda_{n_1+n_2+1}(J) &&\text{при } \gamma > 0 \text{ или } \gamma = \infty, \\ \lambda_{n_1+n_2-1}(J) <&\lambda_n(J_1) \leqslant \lambda_{n_1+n_2}(J) &&\text{при } \gamma \leqslant 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что по определению считающей функции

$$N(\lambda_j(J), J) = j, \quad N(\lambda_j(J) + 0, J) = j + 1,$$

для всех $j \geqslant 0$, что позволяет переписать оценки (9) в виде следующей формулы:

$$N(\lambda_n(J_1), J) \quad = \quad \begin{cases} n_1 + n_2 & \text{при } \gamma \leqslant 0, \\ n_1 + n_2 + 1 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{10}$$

Рассмотрим теперь функцию $z|_{J_2}$. Она является собственной функцией Неймана-Робена с параметром γ на J_2, отвечающей собственному числу $\lambda_n(J_1)$ и имеющей n_2 корней, а значит, рассуждением, аналогичным предыдущему, получаем формулу

$$N(\lambda_n(J_1), J_2) \quad = \quad \begin{cases} n_2 & \text{при } \gamma \leqslant 0, \\ n_2 + 1 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{11}$$

Заметим, также, что в силу Предложения 2

$$n = N(\lambda_n(J_1), J_1) = n_1. \tag{12}$$

Складывая формулы (10), (11), (12), приходим к выводу, что

$$F(\lambda_n(J_1)) = N(\lambda_n(J_1), J) - N(\lambda_n(J_1), J_1) - N(\lambda_n(J_1), J_2) = 0.$$

Если $\lambda_n(J_1)$ — одновременно точка разрыва двух считающих функций, то $\gamma = 0$, а значит она оказывается точкой разрыва всех трех. Поэтому во всех случаях

$$F(\lambda_n(J_1) + 0) = -1,$$

так как при увеличении аргумента изменяется на единицу либо только слагаемое $N(\lambda_n(J_1), J)$, либо все три слагаемых изменяются на единицу одновременно.

Точно так же, начиная строить для $\lambda_n(J_2)$ функцию z с J_2 и продолжая на оставшиеся части отрезка, получаем

$$F(\lambda_n(J_2)) = 0, \quad F(\lambda_n(J_2) + 0) = -1.$$

Во всех остальных точках разрывов (в точках разрывов $N(\lambda, J)$, не являющихся разрывами других слагаемых) функция F может только увеличиваться и только на 1, а потому наборы $\{\lambda_n(J)\}$ и $\{\lambda_n(J_1)\} \cup \{\lambda_n(J_2)\}$ должны нестрого чередоваться, и для n, для которых $\lambda_n(J) \notin \{\lambda_n(J_1)\} \cup \{\lambda_n(J_2)\}$, выполняется

$$F(\lambda_n(J)) = -1, \quad F(\lambda_n(J) + 0) = 0.$$

Кроме того, $F(0) = 0$, и в нуле сосредоточены три собственных числа $\lambda_0(J) = \lambda_0(J_1) = \lambda_0(J_2)$, а первая ненулевая точка разрыва — это собственное значение $\lambda_1(J)$. Таким образом, чередование начинается с элемента набора $\{\lambda_n(J_1)\} \cup \{\lambda_n(J_2)\}$. $\square$

Замечание 5. В доказательстве Теоремы 3 не используется условие $a_i - b_{i-1} > 0$, поэтому она верна и в случае лестницы, имеющей пустые промежуточные отрезки. Кроме того, в нем используются осцилляционные свойства собственных функций (Предложение 2), но не используется самоподобие меры ρ.

В случае, когда $m = 2$, $k_1 = k_2 = 1$, из Теоремы 3 с учетом Леммы 1 следует, в частности, соотношение

$$N(\tau^{-1}\lambda_n) = 2N(\lambda_n)$$

и соответствующее ему свойство

$$\tau\lambda_{2n} = \lambda_n,$$

которое в работах [1], [2], [14] называется спектральной периодичностью.

§4 Доказательство основного результата

Для доказательства Теоремы 2 нам потребуются следующие факты:

Предложение 3. ([1, Утверждение 4.1.3]) *Пусть $f \in L_2[0,1]$ — ограниченная непостоянная неубывающая функция, $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность неубывающих ступенчатых функций, а $\{\mathfrak{A}_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность множеств точек разрыва функций f_n. Пусть также при $n \to \infty$ выполняется асимптотическое соотношение*

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2) \cdot \|f - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1).$$

Тогда монотонная функция f является чисто сингулярной (т.е. f' сингулярна относительно меры Лебега).

Предложение 4. ([1, Утверждение 5.2.1]) *Пусть $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ — последовательность занумерованных в порядке возрастания собственных значений граничной задачи с самоподобным весом*

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\rho y, \\ y'(0) = y'(1) = 0, \end{cases}$$

а $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ — аналогичная последовательность для отвечающей тому же уравнению граничной задачи

$$y'(0) - \gamma_0 y(0) = y'(1) + \gamma_1 y(1) = 0,$$

где γ_0, $\gamma_1 \geqslant 0$. Тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\ln\mu_n - \ln\lambda_n| < +\infty.$$

Замечание 6. Более общие результаты о регуляризованных произведениях собственных значений рассматривались также в [18].

Теорема 4. *В обозначениях Теоремы 3, если $c_2 - d_1 > 0$, то в логарифмической шкале множество, на котором функция F, определенная в (8), отлична от нуля, имеет конечную лебегову меру. Иначе говоря, если обозначить через $\{\mu_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$ упорядоченные по возрастанию элементы набора $\{\lambda_n(J_1)\} \cup \{\lambda_n(J_2)\}$, то*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\ln\lambda_n(J) - \ln\mu_n(J)| < +\infty.$$

Доказательство. Обозначим через $\nu_n(J_1)$ собственные числа задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\rho y, \\ y'(c_1) = y'(d_1) + \dfrac{2}{c_2 - d_1} \cdot y(d_1) = 0, \end{cases}$$

через $\nu_n(J_2)$ – собственные числа задачи

$$\begin{cases} -y'' = \lambda\rho y, \\ y'(c_2) - \dfrac{2}{c_2 - d_1} \cdot y(c_2) = y'(d_2) = 0. \end{cases}$$

Зафиксируем отвечающую $\lambda_n(J)$ собственную функцию y_n и рассмотрим ее сужение на отрезки J_1 и J_2. Поскольку $\rho|_{[d_1,c_2]} \equiv 0$, то $y_n|_{[d_1,c_2]}$ – линейная функция, а значит, выполняется соотношение

$$\frac{y_n(c_2)}{y_n'(c_2)} - \frac{y_n(d_1)}{y_n'(d_1)} = c_2 - d_1.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{y_n(c_2)}{y_n'(c_2)} \geqslant \frac{c_2 - d_1}{2} \text{ или } -\frac{y_n(d_1)}{y_n'(d_1)} \geqslant \frac{c_2 - d_1}{2},$$

а значит выполняется одна из следующих оценок:

$$0 \leqslant -\frac{y_n'(d_1)}{y_n(d_1)} \leqslant \frac{2}{c_2 - d_1},$$

либо

$$0 \leqslant \frac{y_n'(c_2)}{y_n(c_2)} \leqslant \frac{2}{c_2 - d_1},$$

что, в силу вариационного принципа, влечет $\lambda_k(J_1) \leqslant \lambda_n(J) \leqslant \nu_k(J_1)$ или $\lambda_k(J_2) \leqslant \lambda_n(J) \leqslant \nu_k(J_2)$, где k — число корней y_n, попавших внутрь отрезка J_1 или J_2 соответственно. Далее, поскольку наборы $\{\mu_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$ и $\{\lambda_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$ нестрого чередуются, начиная с $\mu_0(J)$, имеем $\mu_n(J) \leqslant \lambda_n(J)$. Более того, выполняется соотношение

$$\mu_n(J) = \max\{\mu_k(J) : \mu_k(J) \leqslant \lambda_n(J)\},$$

а поскольку $\lambda_k(J_{1,2})$ принадлежат $\{\mu_n(J)\}_{n=0}^{\infty}$, из соотношения $\lambda_k(J_{1,2}) \leqslant \lambda_n(J)$ следует $\lambda_k(J_{1,2}) \leqslant \mu_n(J)$. Получается, что для любого n найдется некоторое k, для которого выполняется одна из двух цепочек неравенств:

$$\lambda_k(J_1) \leqslant \mu_n(J) \leqslant \lambda_n(J) \leqslant \nu_k(J_1),$$

либо

$$\lambda_k(J_2) \leqslant \mu_n(J) \leqslant \lambda_n(J) \leqslant \nu_k(J_2).$$

Получается, что объединение непересекающихся отрезков $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [\mu_n(J), \lambda_n(J)]$ полностью содержится в объединении $\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [\lambda_n(J_1), \nu_n(J_1)]\Big) \cup \Big(\bigcup\limits_{n=0}^{\infty} [\lambda_n(J_2), \nu_n(J_2)]\Big)$. Отсюда с учетом Предложения 4 получаем оценку

$$\sum_{n=0}^{\infty} |\ln \lambda_n(J) - \ln \mu_n(J)| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |\ln \nu_n(J_1) - \ln \lambda_n(J_1)| +$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} |\ln \nu_n(J_2) - \ln \lambda_n(J_2)| < +\infty.$$

$\square$

Доказательство Теоремы 2. Из (2) имеем

$$N(\lambda) = \lambda^D \big(s(\ln\lambda) + \varepsilon(\lambda)\big),$$

где $\varepsilon(\lambda) \to 0$ при $\lambda \to \infty$. Для произвольного $k \in \mathbb{N}$ получаем

$$N(\tau^{-k}\lambda) = \tau^{-kD}\lambda^D(s(\ln\lambda) + \varepsilon(\tau^{-k}\lambda)),$$

откуда

$$s(\ln\lambda)\lambda^D = \lim_{k\to\infty} \tau^{kD} N(\tau^{-k}\lambda)$$

равномерно на отрезке. Введем обозначение

$$\sigma(t) := s(t)e^{Dt} = \lim_{k\to\infty} \tau^{kD} N(\tau^{-k}e^t), \quad t \in [0,T].$$

Определим более удобную для нас последовательность ступенчатых приближений этой функции.

Случай $m = 2$**.** Рассмотрим сперва для наглядности случай $m = 2$. Пусть, не умаляя общности, $k_1 \leqslant k_2$. Определим

$$f_j(t) := C\tau^{jD} \sum_{i=0}^{k_2-1} C_i N(\tau^{-i-j}e^t), \quad t \in [0,T].$$

Подберем коэффициенты C_i таким образом, чтобы выполнялось равенство

$$f_{j+1}(t) - f_j(t) = C\tau^{jD}\Big(N(\lambda) - N(\tau^{k_1}\lambda) - N(\tau^{k_2}\lambda)\Big),$$

где $\lambda = \tau^{-k_2-j}e^t$. Прямым вычислением с использованием (6) несложно убедиться, что

$$C_i = \begin{cases} \tau^{-(k_2-i)D} & k_2 - i = 1, \dots, k_1, \\ \tau^{-(k_2-i)D} \cdot \big(1 - \tau^{k_1 D}\big) & k_2 - i = k_1 + 1, \dots, k_2. \end{cases}$$

Вторая строчка не реализуется при $k_1 = k_2$. Заметим, что

$$\lim_{j\to+\infty} f_j(t) = C \sum_{i=0}^{k_2-1} C_i \tau^{-iD} \lim_{j\to+\infty} \tau^{(i+j)D} N(\tau^{-i-j}e^t) = \sigma(t) \cdot C \sum_{i=0}^{k_2-1} C_i \tau^{-iD},$$

поэтому если положить

$$C = \Big(\sum_{i=0}^{k_2-1} C_i \tau^{-iD}\Big)^{-1},$$

то будет выполнено

$$\sigma(t) = \lim_{j\to+\infty} f_j(t).$$

Заметим, что по Лемме 1

$$N(\lambda) - N(\tau^{k_1}\lambda) - N(\tau^{k_2}\lambda) = N(\lambda, [0,1]) - N(\lambda, I_1) - N(\lambda, I_2),$$

а значит, с учетом Теоремы 3 легко видеть, что

$$|f_{j+1}(t) - f_j(t)| \leqslant C\tau^{jD}, \tag{13}$$

а число разрывов f_j, как суммы k_2 слагаемых, каждое из которых имеет не более $N(\tau^{-k_2-j})$ разрывов, допускает оценку

$$\#\mathfrak{A}_j \leqslant k_2 N(\tau^{-k_2-j}) \leqslant \widetilde{C}\tau^{-jD}. \tag{14}$$

Все, что нам осталось для применения Предложения 3 — это доказать оценку

$$meas\{t \in [0,T] : f_j(t) \neq f_{j+1}(t)\} = o(1), \quad j \to \infty. \tag{15}$$

Обозначим через $\{\mu_n\}_{n=0}^{\infty}$ последовательность упорядоченных по возрастанию элементов набора $\{\lambda_n(I_1)\} \cup \{\lambda_n(I_2)\}$. Так как λ_n и μ_n нестрого чередуются, и чередование начинается с μ_0, имеем $\mu_n \leqslant \lambda_n$ для всех $n \geqslant 0$. Мы пытаемся оценить меру множества, где

$$N(\lambda, [0,1]) - N(\lambda, I_1) - N(\lambda, I_2) \neq 0.$$

Это верно только если

$$\lambda \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [\mu_n, \lambda_n],$$

а учитывая $\lambda = \tau^{-k_1-j}e^t$ и $t \in [0,T]$, получаем

$$(k_1+j)T + t \in \Big(\bigcup_{n=0}^{\infty} [\ln \mu_n, \ln \lambda_n] \Big) \cap [(k_1+j)T, (k_1+j+1)T].$$

Мера объединения

$$\Big| \bigcup_{n=0}^{\infty} [\ln \mu_n, \ln \lambda_n] \Big| = \sum_{n=1}^{\infty} |\ln \lambda_n - \ln \mu_n|$$

ограничена в силу Теоремы 4, а значит мера его пересечения с уходящими на бесконечность отрезками стремится к нулю, что доказывает оценку (15).

Из соотношений (13) и (15) получаем оценку

$$\|f_{j+1} - f_j\|_{L_2[0,1]} = o(\tau^{jD}),$$

откуда следует, что

$$\|\sigma - f_j\|_{L_2[0,1]} = o(\tau^{jD}).$$

Применяя эту оценку вместе с (14), получаем

$$(\#\mathfrak{A}_n + 2) \cdot \|\sigma - f_n\|_{L_2[0,1]} = o(1),$$

что позволяет применить Предложение 3 для функции σ, завершая доказательство теоремы для данного случая.

Общий случай. Пусть $\{\kappa_i\}_{i=1}^p$ — упорядоченные по возрастанию элементы множества $\{k_i\}_{i=1}^m$ без повторений, $\{l_i\}_{i=1}^p$ — их кратности (количество отрезков I_n, которым отвечает значение с соответствующим номером). Аналогично случаю $m = 2$ определяем функции и константы

$$f_j(t) := C\tau^{jD} \sum_{i=0}^{\kappa_p - 1} C_i N(\tau^{-i-j} e^t), \quad t \in [0, T],$$

$$C_i = \begin{cases} \tau^{-(\kappa_p - i)D} & \kappa_p - i = 1, \dots, \kappa_1, \\ \tau^{-(\kappa_p - i)D} \cdot \big(1 - l_1 \tau^{\kappa_1 D}\big) & \kappa_p - i = \kappa_1 + 1, \dots, \kappa_2, \\ \tau^{-(\kappa_p - i)D} \cdot \big(1 - l_1 \tau^{\kappa_1 D} - l_2 \tau^{\kappa_2 D}\big) & \kappa_p - i = \kappa_2 + 1, \dots, \kappa_3, \\ \dots & \\ \tau^{-(\kappa_p - i)D} \cdot \Big(1 - \sum\limits_{j=1}^{p-1} l_j \tau^{\kappa_j D}\Big) & \kappa_p - i = \kappa_{p-1} + 1, \dots, \kappa_p, \end{cases}$$

$$C = \Big(\sum_{i=0}^{\kappa_p - 1} C_i \tau^{-iD}\Big)^{-1}.$$

Из (6) имеем

$$\sum_{i=1}^{p} l_i \tau^{\kappa_i D} = 1,$$

откуда

$$1 - \sum_{i=1}^{r} l_i \tau^{\kappa_i D} > 0, \quad r = 1, \dots, p - 1,$$

а значит, константы C_i положительны, и константа C определена корректно. Так же, как и в предыдущем случае, такой выбор констант C_i обеспечивает нам соотношение

$$f_{j+1}(t) - f_j(t) = C\tau^{jD}\Big(N(\lambda) - \sum_{j=1}^{p} l_j N(\tau^{\kappa_j}\lambda)\Big),$$

где $\lambda = \tau^{-\kappa_p - j} e^t$, а выбор константы C — соотношение

$$\sigma(t) = \lim_{j \to +\infty} f_j(t).$$

Учитывая Лемму 1,

$$f_{j+1}(t) - f_j(t) = C\tau^{jD}\Big(N(\lambda, [0, 1]) - \sum_{j=1}^{m} N(\lambda, I_j)\Big) =$$

$$= C\tau^{jD} \sum_{j=1}^{m-1} \Big(N(\lambda, [a_j, 1]) - N(\lambda, [a_{j+1}, 1]) - N(\lambda, I_j)\Big).$$

С учетом Теоремы 3 легко видеть, что

$$|f_{j+1}(t) - f_j(t)| \leqslant C(m - 1)\tau^{jD},$$

а число разрывов f_j допускает оценку

$$\#\mathfrak{A}_j \leqslant \kappa_p N(\tau^{-\kappa_p - j}) \leqslant \widetilde{C}\tau^{-jD}.$$

Все, что нам осталось для применения Предложения 3 — это доказать оценку

$$meas\{t \in [0,T] : f_k(t) \neq f_{k+1}(t)\} = o(1), \quad k \to \infty,$$

которая напрямую следует из Теоремы 4 так же, как и в случае $m = 2$. $\square$

Автор выражает благодарность А. И. Назарову за постановку задачи и внимание, проявленное к работе, а также Д. Д. Черкашину за ценные замечания.

Основные результаты работы (Теоремы 2, 3) получены при поддержке Российского научного фонда, грант №14-21-00035. Вспомогательный результат (Теорема 4) получен при поддержке гранта РФФИ (проект 16-01-00258а).

Литература

[1] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *О задаче Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом канторовского типа*// Функциональный анализ и его приложения. — 2013. — Т. 47 вып. 4. — С. 18–29.

[2] Н. В. Растегаев, *Об асимптотике спектра задачи Неймана для уравнения Штурма–Лиувилля с самоподобным весом обобщенного канторовского типа*// Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2014. — 425. — С. 86—98.

[3] М. С. Бирман, М. З. Соломяк. *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве* // Изд. "Лань". — 2010.

[4] А. И. Назаров. *Логарифмическая асимптотика малых уклонений для некоторых гауссовских процессов в L_2-норме относительно самоподобной меры*// Записки науч. семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. 311. — С. 190–213.

[5] М. Г. Крейн. *Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру*// ДАН СССР. — 1951. — Т. 76, N 3. — С. 345–348.

[6] М. С. Бирман, М. З. Соломяк. *Асимптотика спектра слабо полярных интегральных операторов*// Изв. АН СССР, матем. — 1970. — Т. 34. N 6. — С. 1143–1158.

[7] В. В. Борзов. *О количественных характеристиках сингулярных мер*// Проблемы матем. физики. — 1970. — Т. 4. — С. 42–47.

[8] T. Fujita. *A fractional dimention, self-similarity and a generalized diffusion operator* // Taniguchi Symp. PMMP. Katata. — 1985. — С. 83–90.

[9] I. Hong, T. Uno. *Some consideration of asymptotic distribution of eigenvalues for the equation $d^2u/dx^2 + \lambda\rho(x)u = 0$*// Japanese Journ. of Math. — 1959. — Т. 29. — С. 152–164.

[10] H. P. McKean, D. B. Ray. *Spectral distribution of a differential operator*// Duke Math. Journ. — 1962. — T. 29. — C. 281–292.

[11] M. Solomyak, E. Verbitsky. *On a spectral problem related to self-similar measures*// Bull. London Math. Soc. — 1995. — T. 27, N 3. — C. 242–248.

[12] J. Kigami, M. L. Lapidus. *Weyl's problem for the spectral distributions of Laplacians on p.c.f. self-similar fractals*// Comm. Math. Phys. — 1991. — T. 158. — C. 93–125.

[13] А. А. Владимиров, И. А. Шейпак. *Самоподобные функции в пространстве* $L_2[0,1]$ *и задача Штурма–Лиувилля с сингулярным индефинитным весом*// Матем. сборник. — 2006. — Т. 197, N 11. — С. 13–30.

[14] А. А. Владимиров. *Осцилляционный метод в задаче о спектре дифференциального оператора четвертого порядка с самоподобным весом*// Алгебра и анализ. — 2015. — 27:2. — С. 83–95.

[15] И. А. Шейпак. *О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах* $L_p[0,1]$// Матем. заметки. — 2007. — Т. 81, N 6. — С. 924–938.

[16] J. E. Hutchinson. *Fractals and self similarity*// Indiana Univ. Math. J.— 1981. — T. 30, N 5. — C. 713–747.

[17] А. А. Владимиров. *К осцилляционной теории задачи Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами*// Журнал выч. матем. и матем. физ. — 2009. — Т. 49, N 9. — С. 1609–1621.

[18] А. И. Назаров. *Об одном семействе преобразований гауссовских случайных функций*// Теория вероятностей и ее применения. — 2009. — Т. 54. N 2. — С. 209–225.