Об усреднении первой начально-краевой задачи для периодических гиперболических систем с помощью обратного преобразования Лапласа*†

Ю. М. Мешкова ‡

2 июня 2018 г.

Аннотация

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный матричный сильно эллиптический дифференциальный оператор $B_{D,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, второго порядка при условии Дирихле на границе. Коэффициенты оператора $B_{D,\varepsilon}$ периодичны и зависят от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Нас интересует поведение операторов $\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$ и $B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$, $t \in \mathbb{R}$, в пределе малого периода. Для них получены аппроксимации по норме операторов, действующих из некоторого подпространства $\mathcal{H}$ пространства Соболева $H^4(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Кроме этого, для $B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$ получена аппроксимация при учете корректора по норме операторов, действующих из $\mathcal{H} \subset H^4(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Результаты применяются к усреднению решения первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения $\partial_t^2 \mathbf{u}_\varepsilon = -B_{D,\varepsilon}\mathbf{u}_\varepsilon$.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, гиперболические системы, усреднение, операторные оценки погрешности.

Содержание

*Представлено Т. А. Суслиной.

†Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант №14-21-00035.

‡Лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет, 14 линия В. О., дом 29Б, Санкт-Петербург 199178 Россия. E-mail: `y.meshkova@spbu.ru`, `juliavmeshke@yandex.ru`.

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Теории усреднения посвящена обширная литература; см., например, книги [BaPa, BeLPap, ZhKO, Sa].

0.1 Постановка задачи

Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$ — решетка и Ω — элементарная ячейка решетки Γ. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ используем обозначение $f^\varepsilon(\mathbf{x}) := f(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ мы изучаем самосопряженный матричный сильно эллиптический ДО второго порядка $B_{D,\varepsilon}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, при условии Дирихле на границе. Старшая часть оператора $B_{D,\varepsilon}$ задается в факторизованной форме $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, где $b(\mathbf{D})$ — матричный однородный ДО первого порядка, $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, ограниченная и положительно определенная. (Точные условия на $b(\mathbf{D})$ и $g(\mathbf{x})$ приведены ниже в п. 1.3.) Оператор $B_{D,\varepsilon}$ задан дифференциальным выражением

$$B_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* \right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda I \qquad (0.1)$$

при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Здесь Γ-периодические матрицы-функции $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$, и $Q(\mathbf{x})$ берутся из подходящих пространств $L_p(\Omega)$, причем $Q(\mathbf{x})$ предполагается эрмитовой. Постоянная λ выбрана так, чтобы оператор $B_{D,\varepsilon}$ был положительно определен. (Точные условия на коэффициенты см. ниже в п. 1.4.) Строгое определение оператора $B_{D,\varepsilon}$ дается через соответствующую квадратичную форму, заданную на классе Соболева $H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$.

Коэффициенты оператора $B_{D,\varepsilon}$ быстро осциллируют при малом ε. *Нас интересует* поведение при $\varepsilon \to 0$ решения первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x},t) = -(B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \quad \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \end{cases} \qquad (0.2)$$

При $\boldsymbol{\varphi} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $\boldsymbol{\psi} \in L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n))$ имеем

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) = \cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})\boldsymbol{\varphi} + B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})\boldsymbol{\psi} + \int_0^t B_{D,\varepsilon}^{-1/2} \sin\left((t-\widetilde{t})B_{D,\varepsilon}^{1/2}\right) \mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\, d\widetilde{t}.$$

Таким образом, вопрос о поведении решения задачи (0.2) сводится к изучению поведения операторов $\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$ и $B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$ в пределе малого периода.

0.2 Основные результаты

Наш первый основной результат — оценки

$$\left\| \left(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(t(B_D^0)^{1/2}) \right) (B_D^0)^{-2} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon \left(1 + |t|^5\right), \qquad (0.3)$$

$$\left\| \left(B_{D,\varepsilon}^{-1/2} \sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - (B_D^0)^{-1/2} \sin(t(B_D^0)^{1/2}) \right) (B_D^0)^{-2} \right\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C\varepsilon |t| (1 + |t|^5), \qquad (0.4)$$

справедливые при $t \in \mathbb{R}$ и достаточно малом ε. Здесь B_D^0 — *эффективный оператор* с постоянными коэффициентами. *Второй основной результат* — аппроксимация

$$\begin{aligned}\Big\| \big(B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - (B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2}) - \varepsilon\mathcal{K}_D(\varepsilon;t)\big)(B_D^0)^{-2}\Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ \leqslant C\varepsilon^{1/2}(1+t^6).\end{aligned} \tag{0.5}$$

Здесь $\mathcal{K}_D(\varepsilon;t)$ — *корректор.* Он содержит быстро осциллирующие множители и потому зависит от ε. В общем случае корректор содержит сглаживающий оператор. Если граница области достаточно гладкая, при $d \leqslant 8$ сглаживатель удается устранить. Постоянные в оценках (0.3)–(0.5) контролируются явно через данные задачи. Результаты такого сорта называют *операторными оценками погрешности в теории усреднения.* При фиксированном времени t оценки (0.3), (0.4) имеют точный порядок $O(\varepsilon)$. Порядок оценки (0.5) хуже: $O(\varepsilon^{1/2})$. Это объясняется влиянием границы области. Для оператора $\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$ получить аналог оценки (0.5) не удается, однако возможно аппроксимировать „сглаженный" косинус:

$$\begin{aligned}\Big\|\Big(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-1} - \cos(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-1} - \varepsilon\mathscr{K}(\varepsilon;t)\Big)(B_D^0)^{-1}\Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ \leqslant C\varepsilon^{1/2}(1+|t|^5).\end{aligned} \tag{0.6}$$

Это согласуется с результатами [BrOtFMu], см. обсуждение в п. 0.3 ниже.

0.3 Обзор

В настоящее время активно изучаются операторные оценки погрешности в теории усреднения. Интерес к этой тематике возник в связи с работой М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1]. В [BSu1] рассматривался оператор $A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. С помощью *спектрального подхода* была установлена оценка

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.7}$$

Здесь $A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор, g^0 — постоянная эффективная матрица. Аппроксимация оператора $(A_\varepsilon + I)^{-1}$ по $(L_2 \to H^1)$-норме получена в [BSu3]:

$$\|(A_\varepsilon + I)^{-1} - (A^0+I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.8}$$

Впоследствии оценки (0.7) и (0.8) были перенесены Т. А. Суслиной [Su2] на более общий оператор B_ε вида (0.1), действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$.

К гиперболическим системам спектральный метод применялся в работах [BSu4, M, DSu]. В [BSu4] установлены аппроксимации

$$\|\cos(tA_\varepsilon^{1/2}) - \cos(t(A^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(1+|t|), \tag{0.9}$$

$$\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(tA_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2}\sin(t(A^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(1+|t|)^2, \quad t\in\mathbb{R}. \tag{0.10}$$

В [M] получено улучшение оценки (0.10) относительно типа операторной нормы:

$$\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(tA_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2}\sin(t(A^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(1+|t|), \quad t\in\mathbb{R}, \tag{0.11}$$

и аппроксимация оператора $A_\varepsilon^{-1/2}\sin(tA_\varepsilon^{1/2})$ при учете корректора по $(H^2 \to H^1)$-норме:

$$\big\|A_\varepsilon^{-1/2}\sin(tA_\varepsilon^{1/2}) - (A^0)^{-1/2}\sin(t(A^0)^{1/2}) - \varepsilon\mathrm{K}(\varepsilon;t)\big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(1+|t|), \quad t\in\mathbb{R}. \tag{0.12}$$

В [DSu] была подтверждена точность оценок (0.9), (0.11) относительно типа операторной нормы (в общем случае).

В оценках (0.8) и (0.12) корректоры имеют похожую структуру. Естественно ожидать, что и для операторного косинуса справедлива аппроксимация с корректором той же формы. Однако в [BrOtFMu] установлено, что это имеет место только при специальном выборе начальных данных. В нашем случае этот выбор отвечает оценке (0.6). В общем случае аппроксимация с корректором найдена в работах [BraLe, CaDiCoCalMaMarG]. Однако из-за дисперсии волн в неоднородной области корректор нелокален. Дисперсионные эффекты при гомогенизации волнового уравнения изучались в работах [ABriV, ConOrV, ConSaMaBalV]. Операторные оценки в упомянутых работах не обсуждались.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в теории усреднения был предложен В. В. Жиковым [Zh]. В работах [Zh, ZhPas1] были получены оценки вида (0.7), (0.8) для операторов акустики и теории упругости. Метод, названный авторами *„модифицированным методом первого приближения“* или *„методом сдвига“*, основан на анализе первого приближения к решению и введении в задачу дополнительного параметра. Помимо задач в $\mathbb{R}^d$ в работах [Zh, ZhPas1] изучались задачи усреднения в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ при условии Дирихле либо Неймана на границе. Дальнейшие результаты В. В. Жикова, С. Е. Пастуховой и их учеников отражены в обзоре [ZhPas3].

Операторные оценки погрешности при усреднении задач Дирихле и Неймана для эллиптического уравнения второго порядка в ограниченной области изучались многими авторами, см. [ZhPas1, Gr1, Gr2, KeLiS, PSu, Su3, Su4]. Подробный обзор можно найти во введении к работе [MSu2], в которой установлены оценки

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C(\phi)\varepsilon|\zeta|^{-1/2}, \tag{0.13}$$

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C(\phi)\big(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \varepsilon\big), \tag{0.14}$$

$|\zeta| \geqslant 1$, для оператора вида (0.1). Величины $C(\phi)$ контролируются явно в терминах данных задачи и угла $\phi = \arg\zeta$. (Близкие результаты получены К. Ксу [Xu] при фиксированном ζ.)

Усреднение первой начально-краевой задачи для параболического уравнения с оператором (0.1) изучалось в недавней работе Ю. М. Мешковой и Т. А. Суслиной [MSu4]. Метод [MSu4] основан на тождестве

$$e^{-tB_{D,\varepsilon}} = -\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma e^{-\zeta t}(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\, d\zeta,$$

и использовании оценок (0.13), (0.14). Здесь $\gamma \subset \mathbb{C}$ — контур, обходящий спектр оператора $B_{D,\varepsilon}$ в положительном направлении. Напомним, что в соответствии с классической теоремой Троттера-Като (см., например, [Sa, глава X, теорема 1.1]), сильная сходимость полугрупп следует из сильной сходимости резольвент, в то время как в [MSu4] речь идет об аппроксимации в равномерной операторной топологии с явным контролем погрешности. Отметим недавнюю работу [ChEl], где обсуждается перенос теоремы Троттера-Като на слабую и равномерную операторные топологии и применение к гомогенизации параболических уравнений, но без операторных оценок.

Также отметим недавний препринт [CooSav], в котором (независимо от настоящей работы) из оценки вида (0.13) для $B_{D,\varepsilon} = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$ (и $\zeta = 0$) выводится гомогенизация аттракторов квазилинейного волнового уравнения. Однако результаты [CooSav] не допускают записи в равномерной операторной топологии. Таким образом, операторных оценок погрешности при усреднении гиперболических систем в ограниченной области ранее известно не было.

0.4 Метод

Настоящая работа развивает метод [MSu4]: мы выводим операторные оценки для нестационарной задачи из эллиптических результатов с помощью обратного преобразования Лапласа. (Конечно, при усреднении гиперболических задач преобразование Лапласа применялось и ранее – см. [BeLPap, глава 2, п. 3.9], [Sa, гл. V, §6, стр. 90] и [Pas, ZhPas2]. Отметим также, что в [ZhKO, глава IV] с помощью преобразования Лапласа изучалась нестационарная система уравнений Максвелла. Однако операторные оценки погрешности в вышеперечисленных работах не обсуждались.)

Метод основан на использовании тождества

$$\cos\bigl(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}\bigr)B_{D,\varepsilon}^{-2} = -\frac{t^2}{2}B_{D,\varepsilon}^{-1} + B_{D,\varepsilon}^{-2} + \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\sqrt{c}} \lambda^{-3}(B_{D,\varepsilon}+\lambda^2)^{-1}e^{\lambda t}\,d\lambda, \quad c>0, \tag{0.15}$$

и результатов об аппроксимации оператора $(B_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$, $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, с двухпараметрическими (относительно ε и ζ) оценками погрешности. Требуемые аппроксимации установлены в [MSu2]. Из (0.15), аналогичного тождества для эффективного оператора и аппроксимации (0.13) следует неравенство (0.3). Чтобы вывести оценку (0.4) из (0.3), используем представления

$$B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) = \int_0^t \cos(\tau B_{D,\varepsilon}^{1/2})\,d\tau, \quad (B_D^0)^{-1/2}\sin\bigl(t(B_D^0)^{1/2}\bigr) = \int_0^t \cos\bigl(\tau(B_D^0)^{1/2}\bigr)\,d\tau. \tag{0.16}$$

Из (0.15), аналогичного равенства для эффективного оператора и оценки (0.14) вытекает аппроксимация при учете корректора для $B_{D,\varepsilon}^{-1}\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$. Из этой аппроксимации, тождеств (0.16) и результатов об „усреднении“ резольвенты следует неравенство (0.5).

Наличие оператора $(B_D^0)^{-2}$ в оценках (0.3)–(0.5) обусловлено используемым методом. Из-за этого на начальные данные и правую часть в (0.2) приходится накладывать следующие ограничения:

$$\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\in\operatorname{Dom}(B_D^0)^2, \quad \mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\operatorname{Dom}(B_D^0)^2), \tag{0.17}$$

где $\operatorname{Dom}(B_D^0)^2$ рассматривается как подпространство в $H^4(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Таким образом, требуется более высокая гладкость начальных данных и правой части в (0.2), чем для задач во всем пространстве. По-видимому, результаты работы не являются точными по отношению к классам начальных данных и правой части уравнения. Однако применяемая техника не позволяет усилить результаты.

0.5 Структура работы

Работа состоит из трех параграфов и введения. В §1 описан класс операторов $B_{D,\varepsilon}$, определен эффективный оператор B_D^0 и сформулированы результаты об аппроксимации резольвенты $(B_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1}$. В §2 приведены основные результаты работы, доказательство которых вынесено в §3.

0.6 Обозначения

Пусть $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$; символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму линейного непрерывного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$.

Используем обозначения $\mathbb{Z}_+$ для множества неотрицательных целых чисел и $\mathbb{R}_+$ для положительной полуоси $[0,\infty)$.

Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают соответственно скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$, $\mathbf{1}_n$ – единичная $(n\times n)$-матрица. Если a — $(m\times n)$-матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из $\mathbb{C}^n$ в $\mathbb{C}^m$. Для $z\in\mathbb{C}$ через z^* обозначается комплексно сопряженное число. (Мы используем такое нестандартное обозначение, так как верхняя черта означает среднее значение периодической функции по ячейке периодов.) Используем обозначения $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $iD_j=\partial_j=\partial/\partial x_j$, $j=1,\dots,d$, $\mathbf{D}=-i\nabla=(D_1,\dots,D_d)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ со значениями в $\mathbb{C}^n$ обозначаем через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Через $H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ обозначается замыкание класса $C_0^\infty(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в пространстве $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $n=1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но, если это не ведет к недоразумениям, мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций. Символ $L_p((0,T);\mathfrak{H})$, $1\leqslant p\leqslant\infty$, означает L_p-пространство $\mathfrak{H}$-значных функций на интервале $(0,T)$.

Различные оценочные постоянные обозначаются символами c, $\mathfrak{c}$, C, $\mathcal{C}$, $\mathscr{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками).

Благодарность

Автор считает своим приятным долгом поблагодарить Т. А. Суслину за внимание к работе.

1 Результаты усреднения задачи Дирихле для эллиптических систем

1.1 Решетки в $\mathbb{R}^d$

Пусть $\Gamma\subset\mathbb{R}^d$ — решетка, порожденная базисом $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d\in\mathbb{R}^d$:

$$\Gamma=\Big\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^d:\mathbf{a}=\sum_{j=1}^d\nu_j\mathbf{a}_j,\nu_j\in\mathbb{Z}\Big\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решетки Γ:

$$\Omega=\Big\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d:\mathbf{x}=\sum_{j=1}^d\tau_j\mathbf{a}_j,-\frac{1}{2}<\tau_j<\frac{1}{2}\Big\}.$$

Через $|\Omega|$ обозначим меру Лебега ячейки Ω: $|\Omega|=\operatorname{mes}\Omega$. Положим $2r_1:=\operatorname{diam}\Omega$.

Базис $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_d\in\mathbb{R}^d$, двойственный к $\mathbf{a}_1,\dots,\mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle\mathbf{b}_j,\mathbf{a}_i\rangle=2\pi\delta_{ji}$. Решетка $\widetilde{\Gamma}$, порожденная базисом $\mathbf{b}_1,\dots,\mathbf{b}_d$, называется двойственной по отношению к решетке Γ. Положим $2r_0:=\min_{0\neq\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}}|\mathbf{b}|$.

Через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Если $\Phi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая матрица-функция в $\mathbb{R}^d$, положим $\Phi^\varepsilon(\mathbf{x}):=\Phi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon>0$;

$$\overline{\Phi}:=|\Omega|^{-1}\int_\Omega\Phi(\mathbf{x})\,d\mathbf{x},\quad \underline{\Phi}:=\left(|\Omega|^{-1}\int_\Omega\Phi(\mathbf{x})^{-1}\,d\mathbf{x}\right)^{-1}.$$

Здесь при определении $\overline{\Phi}$ предполагается, что $\Phi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$, а при определении $\underline{\Phi}$ считается, что матрица Φ квадратная и неособая, причем $\Phi^{-1} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$. Через $[\Phi^\varepsilon]$ обозначается оператор умножения на матрицу-функцию $\Phi^\varepsilon(\mathbf{x})$.

1.2 Сглаживание по Стеклову

Рассмотрим оператор сглаживания по Стеклову $S_\varepsilon^{(k)}$, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^k)$ (где $k \in \mathbb{N}$) по правилу

$$(S_\varepsilon^{(k)}\mathbf{u})(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \mathbf{u}(\mathbf{x}-\varepsilon\mathbf{z})\,d\mathbf{z}, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^k). \tag{1.1}$$

Зависимость $S_\varepsilon^{(k)}$ от k мы будем опускать в обозначениях, и писать просто S_ε. Очевидно, $S_\varepsilon \mathbf{D}^\alpha \mathbf{u} = \mathbf{D}^\alpha S_\varepsilon \mathbf{u}$ при $\mathbf{u} \in H^\sigma(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^k)$ для любого мультииндекса α такого, что $|\alpha| \leqslant \sigma$. Нам потребуются следующие свойства оператора S_ε (см. [ZhPas1, леммы 1.1 и 1.2] или [PSu, предложения 3.1 и 3.2]).

Предложение 1.1. *Для любой функции $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^k)$ выполнена оценка*

$$\|S_\varepsilon \mathbf{u} - \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon r_1 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)},$$

где $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Предложение 1.2. *Пусть Φ — Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$ такая, что $\Phi \in L_2(\Omega)$. Тогда оператор $[\Phi^\varepsilon]S_\varepsilon$ непрерывен в $L_2(\mathbb{R}^d)$ и справедлива оценка*

$$\|[\Phi^\varepsilon]S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}\|\Phi\|_{L_2(\Omega)}.$$

1.3 Оператор $A_{D,\varepsilon}$

Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. В $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $A_{D,\varepsilon}$, формально заданный дифференциальным выражением

$$A_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$$

при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. (Договоримся снабжать нижним индексом „D“ дифференциальный оператор при условии Дирихле и его квадратичную форму, но не формальное дифференциальное выражение, соответствующее оператору.) Здесь $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая эрмитова $(m \times m)$-матрица-функция (вообще говоря, с комплексными элементами). Считаем, что $g(\mathbf{x}) > 0$ и $g, g^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$. Дифференциальный оператор $b(\mathbf{D})$ имеет вид $b(\mathbf{D}) = \sum_{j=1}^d b_j D_j$, где b_j, $j = 1,\dots,d$, — постоянные матрицы размера $m \times n$ (вообще говоря, с комплексными элементами). Считаем, что $m \geqslant n$ и что символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{j=1}^d b_j \xi_j$ оператора $b(\mathbf{D})$ имеет максимальный ранг:

$$\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n, \quad 0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d.$$

Это условие равносильно существованию таких постоянных α_0 и α_1, что

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}; \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{1.2}$$

Отметим сразу оценки, вытекающие из (1.2):

$$|b_j| \leqslant \alpha_1^{1/2}, \quad j = 1,\dots,d. \tag{1.3}$$

Точное определение оператора $A_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{a}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \int_\mathcal{O} \langle g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u}\rangle\,d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{1.4}$$

Продолжая функцию $\mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нулем на $\mathbb{R}^d \setminus \mathcal{O}$ и учитывая (1.2), находим

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{a}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{1.5}$$

1.4 Младшие члены. Оператор $B_{D,\varepsilon}$

Мы изучаем самосопряженный оператор $B_{D,\varepsilon}$, старшая часть которого совпадает с A_ε. Чтобы определить младшие члены оператора, введем Γ-периодические $(n\times n)$-матрицы-функции (вообще говоря, с комплексными элементами) a_j, $j=1,\dots,d$, такие, что

$$a_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d=1, \quad \rho > d \text{ при } d \geqslant 2, \quad j=1,\dots,d.$$

Далее, пусть Q — такая Γ-периодическая эрмитова $(n\times n)$-матрица-функция (с комплексными элементами), что

$$Q \in L_s(\Omega), \quad s=1 \text{ при } d=1, \quad s > d/2 \text{ при } d \geqslant 2. \tag{1.6}$$

В силу теоремы вложения Соболева наложенные на ρ и s условия гарантируют сильную подчиненность младших членов оператора $B_{D,\varepsilon}$ его старшей части A_ε.

Для удобства дальнейших ссылок назовем „исходными данными" следующие величины

$$\begin{aligned}&d,\ m,\ n,\ \rho,\ s;\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \|g\|_{L_\infty},\ \|g^{-1}\|_{L_\infty},\ \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)},\ j=1,\dots,d;\ \|Q\|_{L_s(\Omega)};\\ &\text{параметры решетки } \Gamma;\ \text{область } \mathcal{O}.\end{aligned} \tag{1.7}$$

В $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор $B_{D,\varepsilon}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, формально заданный дифференциальным выражением

$$B_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \left(a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*\right) + Q^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda I \tag{1.8}$$

при условии Дирихле на границе. Здесь постоянная λ выбрана так (см. (1.14) ниже), чтобы оператор $B_{D,\varepsilon}$ был положительно определен. Точное определение оператора $B_{D,\varepsilon}$ дается через квадратичную форму

$$\begin{aligned}\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = (g^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\mathrm{Re}\sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon D_j \mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}\\ + (Q^\varepsilon \mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + \lambda(\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n).\end{aligned} \tag{1.9}$$

Проверим замкнутость формы $\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}$. Применяя неравенство Гёльдера и теорему вложения Соболева, можно показать (см. [Su2, (5.11)–(5.14)]), что для любого $\nu>0$ найдутся такие постоянные $C_j(\nu)>0$, что

$$\|a_j^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_j(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad j=1,\dots,d.$$

Делая замену переменной $\mathbf{y} := \varepsilon^{-1}\mathbf{x}$ и обозначая $\mathbf{u}(\mathbf{x}) =: \mathbf{v}(\mathbf{y})$, отсюда получаем

$$\begin{aligned}\|(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} &= \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})^*\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2\,d\mathbf{x} = \varepsilon^d \int_{\mathbb{R}^d} |a_j(\mathbf{y})^*\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}\\ &\leqslant \varepsilon^d\nu \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{D}_{\mathbf{y}}\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y} + \varepsilon^d C_j(\nu)\int_{\mathbb{R}^d}|\mathbf{v}(\mathbf{y})|^2\,d\mathbf{y}\\ &\leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_j(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0<\varepsilon\leqslant 1.\end{aligned}$$

Тогда с учетом (1.2) для любого $\nu>0$ найдется такая постоянная $C(\nu)>0$, что

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^d \|(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \nu\|(g^\varepsilon)^{1/2} b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)},\\ \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0<\varepsilon\leqslant 1.\end{aligned} \tag{1.10}$$

Если ν фиксировано, то $C(\nu)$ зависит лишь от d, ρ, α_0, от норм $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j=1,\dots,d$, и от параметров решетки Γ.

В силу (1.2) для $\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_1^2\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \tag{1.11}$$

где $c_1 := \alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$. Отсюда и из (1.10) вытекает, что

$$\begin{gathered} 2\left|\operatorname{Re}\sum_{j=1}^d (D_j\mathbf{u},(a_j^\varepsilon)^*\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}\right| \leqslant \frac{1}{4}\|(g^\varepsilon)^{1/2}b(\mathbf{D})\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + c_2\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \\ \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \end{gathered} \tag{1.12}$$

где $c_2 := 8c_1^2 C(\nu_0)$ при $\nu_0 := 2^{-6}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}$.

Далее, в силу условия (1.6) на Q для любого $\nu>0$ найдется постоянная $C_Q(\nu)>0$ такая, что

$$\begin{gathered} |(Q^\varepsilon\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| \leqslant \nu\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_Q(\nu)\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \\ \mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad 0<\varepsilon\leqslant 1. \end{gathered} \tag{1.13}$$

При фиксированном ν величина $C_Q(\nu)$ контролируется через d, s, $\|Q\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решетки Γ.

Фиксируем постоянную λ в (1.8) как в [MSu1, п. 2.8]:

$$\lambda := C_Q(\nu_*) + c_2 \quad \text{при } \nu_* := 2^{-1}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{1.14}$$

Вернемся к форме (1.9). Продолжим функцию $\mathbf{u}\in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ нулем в $\mathbb{R}^d\setminus\mathcal{O}$. Теперь из (1.4), (1.11), (1.12) и (1.13) при $\nu=\nu_*$ получаем оценку снизу для формы (1.9):

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant \frac{1}{4}\mathfrak{a}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*\|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n); \quad c_* := \frac{1}{4}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{1.15}$$

Далее, в силу (1.5), (1.12) и (1.13) при $\nu=1$ выполнено

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant C_*\|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{1.16}$$

где $C_* := \max\{\frac{5}{4}\alpha_1\|g\|_{L_\infty}+1; C_Q(1)+\lambda+c_2\}$. Таким образом, форма $\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}$ замкнута. Отвечающий ей самосопряженный в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оператор обозначим через $B_{D,\varepsilon}$.

С помощью неравенства Фридрихса из (1.15) получаем

$$\mathfrak{b}_{D,\varepsilon}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_*(\operatorname{diam}\mathcal{O})^{-2}\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{1.17}$$

Поэтому оператор $B_{D,\varepsilon}$ положительно определен. Отметим оценку, вытекающую из (1.15) и (1.17):

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_3\|B^{1/2}_{D,\varepsilon}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u}\in H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n); \quad c_3 := c_*^{-1/2}\left(1+(\operatorname{diam}\mathcal{O})^2\right)^{1/2}. \tag{1.18}$$

Нам потребуются следующие неравенства, вытекающие из (1.17) и (1.18):

$$\|B^{-1}_{D,\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_*^{-1}(\operatorname{diam}\mathcal{O})^2 =: \mathcal{C}_1, \tag{1.19}$$

$$\|B^{-1}_{D,\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_3\|B^{-1/2}_{D,\varepsilon}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_3 c_*^{-1/2}\operatorname{diam}\mathcal{O} =: \mathcal{C}_2. \tag{1.20}$$

1.5 Эффективная матрица и ее свойства

Эффективный оператор для $A_{D,\varepsilon}$ задается дифференциальным выражением

$$A^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$$

при условии Дирихле на $\partial\mathcal{O}$. Здесь g^0 — постоянная *эффективная* матрица размера $m \times m$. Матрица g^0 выражается через решение вспомогательной задачи на ячейке. Пусть Г-периодическая $(n \times m)$-матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ — (слабое) решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.21}$$

Положим

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \tag{1.22}$$

Тогда эффективная матрица задана выражением

$$g^0 := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{1.23}$$

Можно показать, что матрица g^0 положительно определена.

Из (1.21) следует, что

$$\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} m^{1/2} \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{1.24}$$

Нам потребуются оценки для решения задачи (1.21), полученные в [BSu2, (6.28) и п. 7.3]:

$$\|\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} M_1, \quad M_1 := m^{1/2}(2r_0)^{-1}\alpha_0^{-1/2} \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}, \tag{1.25}$$

$$\|\mathbf{D}\Lambda\|_{L_2(\Omega)} \leqslant |\Omega|^{1/2} M_2, \quad M_2 := m^{1/2}\alpha_0^{-1/2} \|g\|^{1/2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}. \tag{1.26}$$

Отметим оценки для эффективной матрицы, известные в теории усреднения как вилка Фойгта–Рейсса (см., например, [BSu1, гл. 3, теорема 1.5]).

Предложение 1.3. *Пусть g^0 — эффективная матрица* (1.23). *Тогда*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}. \tag{1.27}$$

В случае, когда $m = n$, справедливо тождество $g^0 = \underline{g}$.

Из (1.27) вытекают неравенства

$$|g^0| \leqslant \|g\|_{L_\infty}, \quad |(g^0)^{-1}| \leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}. \tag{1.28}$$

Выделим случаи, когда в (1.27) реализуется верхняя или нижняя грань, см. [BSu1, гл. 3, предложения 1.6 и 1.7].

Предложение 1.4. *Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.29}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$.

Предложение 1.5. *Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad k = 1, \dots, m, \tag{1.30}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

1.6 Эффективный оператор

Чтобы описать усреднение младших членов оператора $B_{D,\varepsilon}$, рассмотрим Γ-периодическую $(n \times n)$-матрицу-функцию $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$, являющуюся решением задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^{d} D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_{\Omega} \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{1.31}$$

(Уравнение понимается в слабом смысле.) Отметим сразу оценки, установленные в [Su2, (7.51), (7.52)]:

$$\|b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{1.32}$$

$$\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant (2r_0)^{-1} C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{1.33}$$

$$\|\mathbf{D}\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)} \leqslant C_a n^{1/2} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \tag{1.34}$$

где $C_a^2 = \sum_{j=1}^{d} \int_{\Omega} |a_j(\mathbf{x})|^2\, d\mathbf{x}$.

Определим постоянные матрицы V и W равенствами

$$V := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}, \tag{1.35}$$

$$W := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \tag{1.36}$$

В пространстве $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] &= (g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + 2\mathrm{Re} \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j} D_j \mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} - 2\mathrm{Re}\,(V\mathbf{u}, b(\mathbf{D})\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} \\ &- (W\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + (\overline{Q}\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})} + \lambda(\mathbf{u},\mathbf{u})_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \end{aligned}$$

Следующие оценки установлены в [MSu2, (2.22) и (2.23)]:

$$c_* \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant c_4 \|\mathbf{u}\|^2_{H^1(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{1.37}$$

$$\mathfrak{b}_D^0[\mathbf{u},\mathbf{u}] \geqslant c_* (\mathrm{diam}\,\mathcal{O})^{-2} \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n). \tag{1.38}$$

Здесь постоянная c_4 зависит только от исходных данных (1.7). Отвечающий форме $\mathfrak{b}_D^0$ самосопряженный в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ оператор обозначим через B_D^0. Объединяя (1.37) и (1.38), находим

$$\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant c_3 \|(B_D^0)^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{u} \in H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n), \tag{1.39}$$

где c_3 — постоянная из (1.18). Из (1.38) и (1.39) вытекают оценки

$$\begin{aligned} &\|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_1, \\ &\|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_2. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Здесь постоянные $\mathcal{C}_1$ и $\mathcal{C}_2$ — те же, что в (1.19) и (1.20).

В силу условия $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ оператор B_D^0 задается дифференциальным выражением

$$B^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^{d} (\overline{a_j + a_j^*}) D_j - W + \overline{Q} + \lambda I \tag{1.41}$$

на области определения $H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)\cap H^1_0(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При этом

$$\|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_3. \tag{1.42}$$

Здесь постоянная $\mathcal{C}_3$ зависит лишь от исходных данных (1.7). Для оправдания этого факта сошлемся на теоремы о повышении гладкости для сильно эллиптических систем (см. [McL, глава 4]).

Замечание 1.6. *Вместо условия $\partial\mathcal{O}\in C^{1,1}$ можно было бы наложить неявное требование: ограниченная область $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ с липшицевой границей такова, что справедлива оценка* (1.42)*. Для такой области основные результаты работы в операторных терминах (см. теоремы* 2.1, 2.2 *и* 2.3*) остаются в силе. В случае скалярных эллиптических операторов широкие достаточные условия на $\partial\mathcal{O}$, обеспечивающие справедливость оценки* (1.42)*, можно найти в* [KoE] *и* [MaSh, гл. 7] *(в частности, достаточно, чтобы $\partial\mathcal{O}\in C^\alpha$, $\alpha>3/2$).*

Лемма 1.7. *Пусть $\mathbf{\Phi}\in\operatorname{Dom}(B_D^0)^2\subset H^4(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Тогда*

$$\|(B_D^0)^2\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant \mathfrak{C}\|\mathbf{\Phi}\|_{H^4(\mathcal{O})}, \tag{1.43}$$

где постоянная $\mathfrak{C}$ зависит только от исходных данных (1.7)*.*

Доказательство. В силу (1.3), (1.28), (1.41) для $\mathbf{\Psi}\in\operatorname{Dom}B_D^0$ выполнено

$$\begin{aligned}\|B_D^0\mathbf{\Psi}\|_{L_2(\mathcal{O})}&\leqslant d\alpha_1\|g\|_{L_\infty}\|\mathbf{D}^2\mathbf{\Psi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+2\alpha_1^{1/2}d^{1/2}|V|\|\mathbf{D}\mathbf{\Psi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\&+2|\Omega|^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^d|\overline{a_j}|^2\Big)^{1/2}\|\mathbf{D}\mathbf{\Psi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\big(|W|+|\overline{Q}|+\lambda\big)\|\mathbf{\Psi}\|_{L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}\tag{1.44}$$

Из (1.24), (1.32) и (1.35) следует, что

$$|V|\leqslant|\Omega|^{-1}\|g\|_{L_\infty}\|b(\mathbf{D})\Lambda\|_{L_2(\Omega)}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\|_{L_2(\Omega)}\leqslant C_V, \tag{1.45}$$

где $C_V:=|\Omega|^{-1/2}\alpha_0^{-1/2}C_a m^{1/2}n^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{3/2}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{3/2}$.

Используя (1.32) и (1.36), находим

$$|W|\leqslant|\Omega|^{-1}\|g\|_{L_\infty}\|b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\|^2_{L_2(\Omega)}\leqslant C_W, \tag{1.46}$$

где $C_W:=|\Omega|^{-1}C_a^2 n\alpha_0^{-1}\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|^2_{L_\infty}$.

Очевидно,

$$\sum_{j=1}^d|\overline{a_j}|^2\leqslant|\Omega|^{-1}C_a^2,\quad |\overline{Q}|\leqslant|\Omega|^{-1/s}\|Q\|_{L_s(\Omega)}. \tag{1.47}$$

Объединяя (1.44)–(1.47), получаем

$$\|B_D^0\mathbf{\Psi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_B\left(\|\mathbf{D}^2\mathbf{\Psi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\mathbf{D}\mathbf{\Psi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\mathbf{\Psi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\right),\quad \mathbf{\Psi}\in\operatorname{Dom}B_D^0. \tag{1.48}$$

Здесь $C_B:=\max\{d\alpha_1\|g\|_{L_\infty};2(d\alpha_1)^{1/2}C_V+2C_a;C_W+|\Omega|^{-1/s}\|Q\|_{L_s(\Omega)}+\lambda\}$. В качестве $\mathbf{\Psi}$ будем брать $B_D^0\mathbf{\Phi}$, $\mathbf{\Phi}\in\operatorname{Dom}(B_D^0)^2$.

Рассуждая по аналогии с (1.44) и используя (1.41), (1.45)–(1.47), находим

$$\begin{aligned}\|\mathbf{D}^2B_D^0\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}&\leqslant\|\mathbf{D}^2b(\mathbf{D})^*g^0b(\mathbf{D})\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\mathbf{D}^2b(\mathbf{D})^*V\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\mathbf{D}^2V^*b(\mathbf{D})\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\&+\sum_{j=1}^d\|(\overline{a_j+a_j^*})\mathbf{D}^2D_j\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\mathbf{D}^2W\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\overline{Q}\mathbf{D}^2\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\lambda\|\mathbf{D}^2\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\\&\leqslant C_B\left(\|\mathbf{D}^4\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\mathbf{D}^3\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}+\|\mathbf{D}^2\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})}\right).\end{aligned}\tag{1.49}$$

Аналогично,

$$\|\mathbf{D}B_D^0\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_B \left(\|\mathbf{D}^3\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}^2\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right), \tag{1.50}$$

$$\|B_D^0\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_B \left(\|\mathbf{D}^2\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{D}\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right). \tag{1.51}$$

Комбинируя (1.48)–(1.51), находим

$$\begin{aligned}
&\|(B_D^0)^2\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant C_B^2 \left(\|\mathbf{D}^4\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + 2\|\mathbf{D}^3\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + 3\|\mathbf{D}^2\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + 2\|\mathbf{D}\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} + \|\mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \right) \\
&\quad \leqslant 3\sqrt{5}C_B^2 \|\mathbf{\Phi}\|_{H^4(\mathcal{O})}, \quad \mathbf{\Phi} \in \operatorname{Dom}(B_D^0)^2.
\end{aligned}$$

Мы получили оценку (1.43) с постоянной $\mathfrak{C} := 3\sqrt{5}C_B^2$. □

1.7 Аппроксимации резольвенты $(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$

Сформулируем результаты усреднения резольвенты оператора $B_{D,\varepsilon}$, полученные в [MSu2]. См. также краткое сообщение [MSu3].

Выберем числа ε_0, $\varepsilon_1 \in (0,1]$ согласно следующему условию.

Условие 1.8. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область. Положим*

$$(\partial\mathcal{O})_\varepsilon := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \operatorname{dist}\{\mathbf{x}; \partial\mathcal{O}\} < \varepsilon \right\}.$$

Пусть существует такое число $\varepsilon_0 \in (0,1]$, что полоску $(\partial\mathcal{O})_{\varepsilon_0}$ можно покрыть конечным набором окрестностей, допускающих диффеоморфизмы класса $C^{0,1}$, распрямляющие границу $\partial\mathcal{O}$. Обозначим $\varepsilon_1 := \varepsilon_0(1 + r_1)^{-1}$, где $2r_1 = \operatorname{diam}\Omega$.

Очевидно, величина ε_1 зависит только от области $\mathcal{O}$ и решетки Γ.

Отметим, что условие 1.8 было бы обеспечено только липшицевостью $\partial\mathcal{O}$; более сильное ограничение $\partial\mathcal{O} \in C^{1,1}$ мы наложили, чтобы гарантировать оценку (1.42).

Следующий результат установлен в [MSu2, теоремы 9.2 и 10.1].

Теорема 1.9. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{1,1}$. Пусть выполнены условия п.* 1.3–1.6. *Пусть число ε_1 подчинено условию* 1.8.
1°. *Пусть $\zeta = |\zeta|e^{i\phi} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$. Положим*

$$c(\phi) := \begin{cases} |\sin\phi|^{-1}, & \phi \in (0, \pi/2) \cup (3\pi/2, 2\pi), \\ 1, & \phi \in [\pi/2, 3\pi/2]. \end{cases}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$ справедлива оценка

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_1 c(\phi)^2 \varepsilon |\zeta|^{-1/2}. \tag{1.52}$$

2°. *Пусть $c_\flat$ — общая нижняя грань операторов B_D^0 и $B_{D,\varepsilon}$ при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$. Положим $\psi = \arg(\zeta - c_\flat)$, $0 < \psi < 2\pi$, и*

$$\varrho_\flat(\zeta) := \begin{cases} c(\psi)^2 |\zeta - c_\flat|^{-2}, & |\zeta - c_\flat| < 1, \\ c(\psi)^2, & |\zeta - c_\flat| \geqslant 1. \end{cases} \tag{1.53}$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ и $\zeta \in \mathbb{C} \setminus [c_\flat, \infty)$ выполнено

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_2 \varrho_\flat(\zeta) \varepsilon. \tag{1.54}$$

Постоянные C_1 и C_2 зависят только от исходных данных (1.7).

Постоянная $c_\flat$ в теореме 1.9(2°) — любая общая нижняя грань операторов B_D^0 и $B_{D,\varepsilon}$. *Будем считать, что*

$$c_\flat := 4^{-1}\alpha_0\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}(\operatorname{diam}\mathcal{O})^{-2}, \tag{1.55}$$

опираясь на неравенства (1.17), (1.38) и выражение для постоянной c_* (см. (1.15)).

Фиксируем линейный непрерывный оператор продолжения

$$P_\mathcal{O} : H^l(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \quad l \in \mathbb{Z}_+. \tag{1.56}$$

Такой „универсальный" оператор продолжения существует для любой ограниченной области с липшицевой границей (см. [St] или [R]). При этом

$$\|P_\mathcal{O}\|_{H^l(\mathcal{O})\to H^l(\mathbb{R}^d)} \leqslant C^{(l)}_\mathcal{O}, \quad l \in \mathbb{Z}_+, \tag{1.57}$$

где постоянная $C^{(l)}_\mathcal{O}$ зависит лишь от l и от области $\mathcal{O}$. Через $R_\mathcal{O}$ обозначим оператор сужения функций в $\mathbb{R}^d$ на область $\mathcal{O}$. Положим

$$K_D(\varepsilon;\zeta) := R_\mathcal{O}\big([\Lambda^\varepsilon]b(\mathbf{D}) + [\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\big)S_\varepsilon P_\mathcal{O}(B_D^0 - \zeta I)^{-1}. \tag{1.58}$$

Корректор (1.58) ограничен как оператор, действующий из $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. Это нетрудно установить с помощью предложения 1.2 и включений $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in \widetilde{H}^1(\Omega)$. Отметим, что $\|\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} = O(1)$ при малом ε и фиксированном ζ.

Выпишем результаты [MSu2, теоремы 9.2 и 10.1].

Теорема 1.10. *Пусть выполнены условия теоремы* 1.9. *Пусть* $K_D(\varepsilon;\zeta)$ — *оператор* (1.58).

1°. *При* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_3 c(\phi)^2(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \varepsilon). \tag{1.59}$$

2°. *Пусть* $c_\flat$ — *постоянная* (1.55). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus[c_\flat,\infty)$ *выполнено*

$$\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_4(\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)^{1/2} + \varepsilon|1+\zeta|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta)). \tag{1.60}$$

Постоянные C_3 *и* C_4 *зависят только от исходных данных* (1.7).

Следствие 1.11. *В условиях теоремы* 1.10 *при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta| \geqslant 1$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1} - (B_D^0 - \zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ &\leqslant C_5\left(c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + c(\phi)^{3/2}\varepsilon^{1/2}\right). \end{aligned} \tag{1.61}$$

Следствие 1.11 вытекает из теоремы 1.10(1°) и грубой оценки для операторов под знаком нормы в (1.59). Для этого нам потребуются оценки для резольвент $(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}$ и $(B_D^0 - \zeta I)^{-1}$ (см. [MSu2, леммы 2.1 и 2.3]).

Лемма 1.12. *Пусть* $B_{D,\varepsilon}$ *и* B_D^0 — *операторы вида* (1.8) *и* (1.41) *соответственно, действующие в* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *при условии Дирихле. Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *и* $\zeta \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$ *справедливы оценки*

$$\begin{aligned} &\|(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}, \\ &\|\mathbf{D}(B_{D,\varepsilon} - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_4 c(\phi)|\zeta|^{-1/2}, \\ &\|(B_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c(\phi)|\zeta|^{-1}, \\ &\|\mathbf{D}(B_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_4 c(\phi)|\zeta|^{-1/2}, \\ &\|(B_D^0 - \zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_3 c(\phi). \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{C}_4 := 2^{3/2}\alpha_0^{-1/2}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}$, *постоянная* $\mathcal{C}_3$ — *та же, что в* (1.42).

Доказательство следствия 1.11. Оценим оператор (1.58):

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\|K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\leqslant \left(\varepsilon\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} + \|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\right)\|b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&+\left(\varepsilon\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} + \|(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\right)\|P_\mathcal{O}(B_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&+\varepsilon\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|\mathbf{D}b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\
&+\varepsilon\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\|\mathbf{D}P_\mathcal{O}(B_D^0-\zeta I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}\tag{1.62}$$

Из предложения 1.2 и неравенств (1.25), (1.26), (1.33), (1.34) вытекают оценки

$$\|\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M_1, \tag{1.63}$$
$$\|(\mathbf{D}\Lambda)^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant M_2,$$
$$\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}(2r_0)^{-1}C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty} =: \widetilde{M}_1, \tag{1.64}$$
$$\|(\mathbf{D}\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant |\Omega|^{-1/2}C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty} =: \widetilde{M}_2.$$

С учетом этих неравенств из леммы 1.12 и (1.2), (1.57), (1.62) следует, что

$$\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1} - (B_D^0-\zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \widehat{C}_5 c(\phi), \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad |\zeta|\geqslant 1, \tag{1.65}$$

где $\widehat{C}_5 := \left(2 + (M_1+M_2)\alpha_1^{1/2}C_\mathcal{O}^{(1)} + \widetilde{M}_1 C_\mathcal{O}^{(1)}\right)(1+\mathcal{C}_4) + (\widetilde{M}_1+\widetilde{M}_2)C_\mathcal{O}^{(0)} + M_1\alpha_1^{1/2}C_\mathcal{O}^{(2)}\mathcal{C}_3$.

Объединяя (1.59) и (1.65), при $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ и $\zeta\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_+$, $|\zeta|\geqslant 1$, имеем

$$\begin{aligned}
&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta I)^{-1} - (B_D^0-\zeta I)^{-1} - \varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\leqslant \min\{C_3 c(\phi)^2(\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4}+\varepsilon); \widehat{C}_5 c(\phi)\}\\
&\leqslant C_3 c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + \min\{C_3 c(\phi)^2\varepsilon; \widehat{C}_5 c(\phi)\}\\
&\leqslant C_3 c(\phi)^2\varepsilon^{1/2}|\zeta|^{-1/4} + (C_3\widehat{C}_5)^{1/2}c(\phi)^{3/2}\varepsilon^{1/2}.
\end{aligned}$$

Мы пришли к оценке (1.61) с постоянной $C_5 := \max\{C_3; (C_3\widehat{C}_5)^{1/2}\}$. □

1.8 Аппроксимация оператора $B_{D,\varepsilon}^{-1/2}$

Из теоремы 1.9 вытекает следующий результат.

Лемма 1.13. *В условиях теоремы* 1.9 *при* $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|B_{D,\varepsilon}^{-1/2} - (B_D^0)^{-1/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_6\varepsilon^{1/2}. \tag{1.66}$$

Постоянная C_6 *зависит только от исходных данных* (1.7).

Доказательство. Справедливо тождество

$$B_{D,\varepsilon}^{-1/2} = \pi^{-1}\int_0^\infty \nu^{-1/2}(B_{D,\varepsilon}+\nu I)^{-1}\,d\nu.$$

См., например, [ViGKo, глава III, §3, п. 4]. Для $(B_D^0)^{-1/2}$ верно аналогичное представление. Поэтому

$$\|B_{D,\varepsilon}^{-1/2} - (B_D^0)^{-1/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \pi^{-1}\int_0^\infty \nu^{-1/2}\|(B_{D,\varepsilon}+\nu I)^{-1} - (B_D^0+\nu I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\,d\nu.$$

Так как $c_\flat$ — общая нижняя грань операторов $B_{D,\varepsilon}$ и B_D^0, выполнено

$$\|(B_{D,\varepsilon}+\nu I)^{-1}-(B_D^0+\nu I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant 2(\nu+c_\flat)^{-1},\quad \nu\in\mathbb{R}_+.$$

Отсюда

$$\begin{aligned}&\|B_{D,\varepsilon}^{-1/2}-(B_D^0)^{-1/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\&\leqslant 2^{1/2}\pi^{-1}\int_0^\infty \nu^{-1/2}(\nu+c_\flat)^{-1/2}\|(B_{D,\varepsilon}+\nu I)^{-1}-(B_D^0+\nu I)^{-1}\|^{1/2}_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\,d\nu.\end{aligned}$$

При $\nu\in[0,1]$ воспользуемся аппроксимацией (1.54):

$$\|(B_{D,\varepsilon}+\nu I)^{-1}-(B_D^0+\nu I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_2\varepsilon\max\{1;(c_\flat+\nu)^{-2}\}\leqslant C_2\varepsilon\max\{1;c_\flat^{-2}\}.$$

При $\nu>1$ применим оценку (1.52):

$$\|(B_{D,\varepsilon}+\nu I)^{-1}-(B_D^0+\nu I)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C_1\varepsilon\nu^{-1/2},\quad \nu>1.$$

С учетом этих соображений справедливо неравенство

$$\begin{aligned}\|B_{D,\varepsilon}^{-1/2}-(B_D^0)^{-1/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}&\leqslant 2^{1/2}\pi^{-1}C_2^{1/2}\max\{1;c_\flat^{-1}\}\varepsilon^{1/2}\int_0^1\nu^{-1/2}(\nu+c_\flat)^{-1/2}\,d\nu\\&+2^{1/2}\pi^{-1}C_1^{1/2}\varepsilon^{1/2}\int_1^\infty\nu^{-1/2}(\nu+c_\flat)^{-1/2}\nu^{-1/4}\,d\nu.\end{aligned}$$

Оценивая интегралы, получаем оценку (1.66) с постоянной

$$C_6:=2^{3/2}\pi^{-1}C_2^{1/2}c_\flat^{-1/2}\max\{1;c_\flat^{-1}\}+2^{5/2}\pi^{-1}C_1^{1/2}.$$

$\square$

2 Постановка задачи. Основные результаты

2.1 Первая начально-краевая задача для гиперболических систем

Цель работы — изучить поведение в пределе малого периода решения первой начально-краевой задачи для гиперболического уравнения:

$$\begin{cases}\frac{\partial^2\mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t^2}(\mathbf{x},t)=-(B_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},t)+\mathbf{F}(\mathbf{x},t),\\ \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}}=0,\\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}),\quad \frac{\partial\mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}(\mathbf{x},0)=\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}).\end{cases}\tag{2.1}$$

Здесь $\boldsymbol{\varphi},\boldsymbol{\psi}\in\operatorname{Dom}(B_D^0)^2$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\operatorname{Dom}(B_D^0)^2)$. (Наложенные ограничения продиктованы техникой, используемой в настоящей работе.) Имеем

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)=\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})\boldsymbol{\varphi}+B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})\boldsymbol{\psi}+\int_0^t B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin\left((t-\widetilde{t})B_{D,\varepsilon}^{1/2}\right)\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}.\tag{2.2}$$

Поэтому для изучения поведения решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)$ достаточно получить аппроксимации операторов $\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$ и $B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$.

Эффективная задача имеет вид

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_0}{\partial t^2}(\mathbf{x},t) = -(B^0\mathbf{u}_0)(\mathbf{x},t) + \mathbf{F}(\mathbf{x},t), \\ \mathbf{u}_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}), \quad \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{2.3}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_0(\cdot,t) = \cos\left(t(B_D^0)^{1/2}\right)\boldsymbol{\varphi} + (B_D^0)^{-1/2}\sin\left(t(B_D^0)^{1/2}\right)\boldsymbol{\psi} \\ + \int_0^t (B_D^0)^{-1/2}\sin\left((t-\widetilde{t})(B_D^0)^{1/2}\right)\mathbf{F}(\cdot,\widetilde{t})\,d\widetilde{t}. \end{aligned} \tag{2.4}$$

2.2 Основные результаты работы в операторных терминах

Теорема 2.1. *Пусть* $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ *— ограниченная область с границей класса* $C^{1,1}$. *Пусть выполнены условия п.* 1.3–1.6. *Пусть число* ε_1 *подчинено условию* 1.8. *Тогда при* $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы оценки*

$$\left\| \left(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(t(B_D^0)^{1/2})\right)(B_D^0)^{-2} \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_7\varepsilon\left(1+|t|^5\right), \tag{2.5}$$

$$\left\| \left(B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - (B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\right)(B_D^0)^{-2} \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_7\varepsilon|t|(1+|t|^5). \tag{2.6}$$

Постоянная C_7 *зависит только от исходных данных* (1.7).

Естественно надеяться получить для гиперболических систем аналог теоремы 1.10. Но аппроксимировать по энергетической норме операторный косинус не удается, хотя оператор $B_{D,\varepsilon}^{-1}\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$ приблизить можно (см. теорему 2.3 ниже). Это согласуется с результатами [BrOtFMu]. Зато для оператора $B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$ удается получить приближение по энергетической норме.

Теорема 2.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Пусть матрицы-функции* $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *—* Γ*-периодические решения задач* (1.21) *и* (1.31) *соответственно. Пусть* S_ε *— оператор сглаживания по Стеклову* (1.1) *и* $P_{\mathcal{O}}$ *— оператор продолжения* (1.56). *Тогда при* $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\begin{aligned} \Big\| \big(B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - (B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2}) \\ - \varepsilon\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)S_\varepsilon P_{\mathcal{O}}(B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\big)(B_D^0)^{-2} \Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_8\varepsilon^{1/2}(1+t^6). \end{aligned} \tag{2.7}$$

Пусть $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ *— матрица-функция* (1.22). *Обозначим*

$$G_D(\varepsilon;t) := \left(\widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) + g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon\right)P_{\mathcal{O}}(B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2}).$$

Тогда для оператора $g^\varepsilon b(\mathbf{D})B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})$, *отвечающего „потоку“, при* $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\left\| \left(g^\varepsilon b(\mathbf{D})B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - G_D(\varepsilon;t)\right)(B_D^0)^{-2} \right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_9\varepsilon^{1/2}(1+t^6). \tag{2.8}$$

Здесь постоянные C_8 *и* C_9 *зависят только от исходных данных* (1.7).

Доказательства теорем 2.1 и 2.2 вынесены в §3.

2.3 Об аппроксимации оператора $\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-1}$ в энергетическом классе

Теорема 2.3. *В условиях теоремы* 2.2 *при* $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива оценка*

$$\Big\| \Big(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-1} - \cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-1} \\ - \varepsilon\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big) S_\varepsilon P_\mathcal{O} \cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-1}\Big)(B_D^0)^{-1}\Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{10}\varepsilon^{1/2}(1+|t|^5). \tag{2.9}$$

Постоянная C_{10} *зависит только от исходных данных* (1.7).

Доказательство теоремы 2.3 вынесено в §3.

Теорема 2.3 позволяет получить аппроксимацию в энергетическом классе для гиперболических систем со специальным выбором начальных данных:

$$\partial_t^2 \mathbf{u}_\varepsilon = -B_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon, \quad \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \mathbf{u}_\varepsilon|_{t=0} = B_{D,\varepsilon}^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \quad (\partial_t \mathbf{u}_\varepsilon)|_{t=0} = 0,$$

где $\boldsymbol{\varphi} \in \operatorname{Dom} B_D^0 = H^2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \cap H_0^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. В этом случае эффективная задача имеет вид

$$\partial_t^2 \mathbf{u}_0 = -B^0 \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_0(\cdot,t)|_{\partial\mathcal{O}} = 0, \quad \mathbf{u}_0|_{t=0} = (B_D^0)^{-1}\boldsymbol{\varphi}, \quad (\partial_t \mathbf{u}_0)|_{t=0} = 0.$$

Из (1.48) и (2.9) вытекает оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t) - \varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon)S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant 3^{1/2} C_B C_{10}\varepsilon^{1/2}(1+|t|^5)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^2(\mathcal{O})}.$$

Возможность аппроксимации в энергетическом классе для решения при таком выборе начальных данных согласуется с результатами [BrOtFMu].

Отметим, что с помощью леммы 1.13 и оценок (1.18), (1.40) из теоремы 2.3 можно вывести аппроксимацию оператора $\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-1/2}$:

$$\| \cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-1/2}(B_{D,\varepsilon}^{-1/2} - (B_D^0)^{-1/2})(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\ \leqslant c_3 \|B_{D,\varepsilon}^{-1/2} - (B_D^0)^{-1/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant c_3 C_6 \mathcal{C}_1 \varepsilon^{1/2}.$$

Отсюда и из (2.9) вытекает оценка

$$\Big\| \Big(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-1/2} - (I + \varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon)S_\varepsilon P_\mathcal{O})\cos(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-1/2}\Big) \\ \times (B_D^0)^{-3/2}\Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant (C_{10} + c_3 C_6 \mathcal{C}_1)\varepsilon^{1/2}(1+|t|^5).$$

2.4 Устранение сглаживающего оператора в корректоре

Оказывается, что сглаживающий оператор в корректоре может быть устранен, если наложить на матрицы-функции $\Lambda(\mathbf{x})$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ дополнительные условия.

Условие 2.4. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* $\Lambda(\mathbf{x})$ *задачи* (1.21) *ограничено, т. е.* $\Lambda \in L_\infty(\mathbb{R}^d)$.

Случаи, когда условие 2.4 выполнено автоматически, выделены в [BSu3, лемма 8.7].

Предложение 2.5. *Условие* 2.4 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений*:
1°) $d \leqslant 2$;
2°) *размерность* $d \geqslant 1$ *произвольна, а дифференциальное выражение* A_ε *имеет вид* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ — *симметричная матрица с вещественными элементами*;
3°) *размерность* d *произвольна, и* $g^0 = \underline{g}$, *т. е. справедливы соотношения* (1.30).

Для того, чтобы устранить S_ε в члене корректора, содержащем $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$, достаточно наложить следующее условие.

Условие 2.6. *Предположим, что* Γ*-периодическое решение* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ *задачи* (1.31) *таково, что*

$$\widetilde{\Lambda} \in L_p(\Omega), \quad p = 2 \text{ при } d = 1, \quad p > 2 \text{ при } d = 2, \quad p = d \text{ при } d \geqslant 3.$$

Следующий результат установлен в [Su2, предложение 8.11].

Предложение 2.7. *Условие* 2.6 *заведомо выполнено, если справедливо хотя бы одно из следующих предположений*:
1°) $d \leqslant 4$;
2°) *размерность* d *произвольна, а дифференциальное выражение* A_ε *имеет вид* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ — *симметричная матрица с вещественными элементами.*

Замечание 2.8. *Если* $A_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ — *симметричная матрица с вещественными элементами, то из* [LaU, глава III, теорема 13.1] *следует, что* $\Lambda, \widetilde{\Lambda} \in L_\infty$, *причем норма* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$ *не превосходит величины, зависящей от* d, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* Ω, *а норма* $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_\infty}$ *оценивается в терминах* d, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, *и* Ω. *В этом случае условия* 2.4 *и* 2.6 *справедливы одновременно.*

Наша цель в этом пункте — доказать следующую теорему.

Теорема 2.9. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.2. *Пусть матрица-функция* $\Lambda(\mathbf{x})$ *подчинена условию* 2.4, *а матрица-функция* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — *условию* 2.6. *Обозначим*

$$G_D^0(\varepsilon; t) := \left(\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) + g^\varepsilon (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda})^\varepsilon\right) (B_D^0)^{-1/2} \sin(t(B_D^0)^{1/2}). \tag{2.10}$$

Тогда при $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедливы аппроксимации*

$$\begin{aligned} \Big\| \big(B_{D,\varepsilon}^{-1/2} \sin(t B_{D,\varepsilon}^{1/2}) - \big(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)(B_D^0)^{-1/2} \sin(t(B_D^0)^{1/2})\big)(B_D^0)^{-2} \Big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\ \leqslant C_{11} \varepsilon^{1/2}(1 + t^6), \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\big\| \big(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) B_{D,\varepsilon}^{-1/2} \sin(t B_{D,\varepsilon}^{1/2}) - G_D^0(\varepsilon; t)\big)(B_D^0)^{-2} \big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{12} \varepsilon^{1/2}(1 + t^6). \tag{2.12}$$

Постоянные C_{11} *и* C_{12} *зависят только от исходных данных* (1.7), *от* p *и от норм* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$.

Для доказательства теоремы 2.9 нам потребуются следующие результаты, установленные в [MSu2, леммы 7.7 и 7.8].

Лемма 2.10. *Пусть* Γ*-периодическое матричнозначное решение* $\Lambda(\mathbf{x})$ *задачи* (1.21) *удовлетворяет условию* 2.4. *Пусть* S_ε — *оператор сглаживания по Стеклову* (1.1). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *выполнено*

$$\|[\Lambda^\varepsilon] b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_\Lambda.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_\Lambda$ *зависит только от* m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, *от параметров решетки* Γ *и нормы* $\|\Lambda\|_{L_\infty}$.

Лемма 2.11. *Пусть матричнозначное Γ-периодическое решение $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ задачи* (1.31) *удовлетворяет условию* 2.6. *Пусть S_ε — оператор сглаживания по Стеклову* (1.1). *Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ справедлива оценка*

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}$ зависит только от n, d, α_0, α_1, ρ, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, от норм $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j=1,\dots,d$, от p, $\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}$ и от параметров решетки Γ.

Следующее утверждение несложно проверить с помощью неравенства Гёльдера и теоремы вложения Соболева (ср. [MSu1, лемма 3.5]).

Лемма 2.12. *Пусть матрица-функция $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ подчинена условию* 2.6. *Тогда при $0<\varepsilon\leqslant 1$ оператор $[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]$ непрерывен из $H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, причем*

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)} C_\Omega(p),$$

где $C_\Omega(p)$ — норма оператора вложения $H^1(\Omega)\hookrightarrow L_{2(p/2)'}(\Omega)$. Здесь $(p/2)'=\infty$ при $d=1$, и $(p/2)'=p/(p-2)$ при $d\geqslant 2$.

Доказательство теоремы 2.9. Результат теоремы 2.9 выводится из теоремы 2.2 с помощью лемм 2.10, 2.11 и 2.12.

Применяя лемму 2.10 и (1.57), получаем

$$\begin{aligned}&\|\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})(S_\varepsilon - I)P_{\mathcal{O}}(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \mathfrak{C}_\Lambda C_{\mathcal{O}}^{(2)}\|(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})},\quad t\in\mathbb{R},\quad 0<\varepsilon\leqslant 1.\end{aligned}\tag{2.13}$$

Имеем

$$\begin{aligned}&\|(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\|(B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.\end{aligned}\tag{2.14}$$

В силу спектральной теоремы и элементарного неравенства $|\sin\mu|/|\mu|\leqslant 1$, $\mu\in\mathbb{R}$, выполнено

$$\|(B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant |t|.$$

Отсюда и из (1.40), (1.42) и (2.14) следует, что

$$\|(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\leqslant \mathcal{C}_1\mathcal{C}_3|t|,\quad t\in\mathbb{R}.\tag{2.15}$$

На основании леммы 2.11 и (1.57), (2.15) выполнено

$$\begin{aligned}&\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon(S_\varepsilon - I)P_{\mathcal{O}}(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\leqslant \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}} C_{\mathcal{O}}^{(2)}\|(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})}\\ &\leqslant \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}} C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_1\mathcal{C}_3|t|,\quad t\in\mathbb{R},\quad 0<\varepsilon\leqslant 1.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Теперь из (2.7), (2.13), (2.15) и (2.16) вытекает оценка (2.11) с постоянной $C_{11}:=C_8+(\mathfrak{C}_\Lambda+\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}})C_{\mathcal{O}}^{(2)}\mathcal{C}_1\mathcal{C}_3$. Мы учли, что $|t|\leqslant(1+t^6)$, $t\in\mathbb{R}$.

Перейдем к доказательству неравенства (2.12). Из (1.3) и (2.11) следует, что

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(g^\varepsilon b(\mathbf{D})B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)(B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\Big)\\ &\times (B_D^0)^{-2}\Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant (d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_{11}\varepsilon^{1/2}(1+t^6),\quad t\in\mathbb{R},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Имеем

$$
\begin{aligned}
&g^\varepsilon b(\mathbf{D})\big(I+\varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\\
&\quad= g^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})+g^\varepsilon(b(\mathbf{D})\Lambda)^\varepsilon b(\mathbf{D})(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\\
&\quad+g^\varepsilon\big(b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}\big)^\varepsilon(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})+\varepsilon\sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)D_l(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2}).
\end{aligned}
\tag{2.18}
$$

Чтобы оценить четвертый член справа в (2.18), воспользуемся условиями 2.4 и 2.6, леммой 2.12 и неравенством (1.3):

$$
\begin{aligned}
&\left\|\varepsilon\sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)D_l(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant \varepsilon(d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\|\Lambda\|_{L_\infty}\|b(\mathbf{D})\mathbf{D}(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\\
&\quad+\varepsilon(d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}C_\Omega(p)\|P_\mathcal{O}\mathbf{D}(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}
$$

С помощью (1.3), (1.57) и (2.15) отсюда получаем

$$
\left\|\varepsilon\sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)D_l(B_D^0)^{-5/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \varepsilon|t|\widehat{C}_{12},\quad t\in\mathbb{R},
\tag{2.19}
$$

где $\widehat{C}_{12}:=(d\alpha_1)^{1/2}\mathcal{C}_1\mathcal{C}_3\|g\|_{L_\infty}\big((d\alpha_1)^{1/2}\|\Lambda\|_{L_\infty}+C_\Omega(p)C_\mathcal{O}^{(1)}\|\widetilde{\Lambda}\|_{L_p(\Omega)}\big)$.

Из (2.17)–(2.19) вытекает оценка (2.12) с постоянной $C_{12}:=(d\alpha_1)^{1/2}\|g\|_{L_\infty}C_{11}+\widehat{C}_{12}$. $\square$

2.5 Устранение сглаживающего оператора в корректоре в случае, когда $3\leqslant d\leqslant 8$

Рассмотрим возможность устранения сглаживателя при $d\geqslant 3$ без наложения дополнительных условий на матрицы-функции Λ и $\widetilde{\Lambda}$. (В силу предложений 2.5 и 2.7 при $d\leqslant 2$ применима теорема 2.9.)

Оказывается, что если граница области достаточно гладкая, то при $3\leqslant d\leqslant 8$ сглаживающий оператор S_ε может быть устранен из обоих членов корректора. Чтобы показать это, нам потребуются мультипликаторные свойства матриц-функций Λ^ε и $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$. Следующий результат установлен в [MSu4, леммы 6.3 и 6.5, следствия 6.4 и 6.6].

Лемма 2.13. *Пусть матрица-функция $\Lambda(\mathbf{x})$ является Γ-периодическим решением задачи* (1.21)*. Пусть $d\geqslant 3$ и $l=d/2$.*
1°*. При $0<\varepsilon\leqslant 1$ оператор $[\Lambda^\varepsilon]$ непрерывно переводит $H^{l-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, причем*

$$
\|[\Lambda^\varepsilon]\|_{H^{l-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant C^{(0)}.
$$

2°*. При $0<\varepsilon\leqslant 1$ для $\mathbf{u}\in H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^m)$ справедливы включение $\Lambda^\varepsilon\mathbf{u}\in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и оценка*

$$
\|\Lambda^\varepsilon\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant C^{(1)}\varepsilon^{-1}\|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}+C^{(2)}\|\mathbf{u}\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}.
$$

Постоянные $C^{(0)}$, $C^{(1)}$ и $C^{(2)}$ зависят от m, d, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и от параметров решетки Γ.

Лемма 2.14. *Пусть матрица-функция* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ*-периодическое решение задачи* (1.31). *Пусть* $d \geqslant 3$ *и* $l = d/2$.
1°. *При* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *оператор* $[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]$ *непрерывно переводит* $H^{l-1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *в* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, *причем*

$$\|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon]\|_{H^{l-1}(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \widetilde{C}^{(0)}.$$

2°. *При* $0 < \varepsilon \leqslant 1$ *для* $\mathbf{u} \in H^l(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *справедливы включение* $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и оценка*

$$\|\widetilde{\Lambda}^\varepsilon \mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widetilde{C}^{(1)}\varepsilon^{-1}\|\mathbf{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^d)} + \widetilde{C}^{(2)}\|\mathbf{u}\|_{H^l(\mathbb{R}^d)}.$$

Постоянные $\widetilde{C}^{(0)}$, $\widetilde{C}^{(1)}$ *и* $\widetilde{C}^{(2)}$ *зависят только от исходных данных* (1.7).

В соответствии с теоремами о повышении гладкости для сильно эллиптических систем (см., например, [McL, теорема 4.18]) справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.15. *Пусть* $3 \leqslant d \leqslant 8$. *Пусть* $\partial\mathcal{O} \in C^{d/2,1}$, *если* d *четное, и* $\partial\mathcal{O} \in C^{(d+1)/2,1}$, *если* d — *нечетное. Тогда оператор* $(B_D^0)^{-5/2}$ *непрерывно переводит* $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *в* $H^{d/2+1}(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ *и справедлива оценка*

$$\|(B_D^0)^{-5/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{l+1}(\mathcal{O})} \leqslant \mathscr{C}_l, \quad l = d/2. \tag{2.20}$$

Отметим также, что при произвольном $d \geqslant 1$ и $\partial\mathcal{O} \in C^{4,1}$ выполнено $(B_D^0)^{-5/2}$: $L_2(\mathcal{O};\mathbb{C}^n) \to H^5(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$,

$$\|(B_D^0)^{-5/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^5(\mathcal{O})} \leqslant \mathcal{C}_5. \tag{2.21}$$

Теорема 2.16. *Пусть справедливы условия теоремы* 2.2, *причем* $3 \leqslant d \leqslant 8$ *и* $\partial\mathcal{O}$ *удовлетворяет условиям леммы* 2.15. *Пусть* $G_D^0(\varepsilon;t)$ — *оператор* (2.10). *Тогда при* $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеют место аппроксимации*

$$\begin{aligned}
&\Big\|\big(B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - \big(I + \varepsilon\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)(B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\big)(B_D^0)^{-2}\Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant C_{13}\varepsilon^{1/2}(1+t^6),
\end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\big\|\big(g^\varepsilon b(\mathbf{D})B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - G_D^0(\varepsilon;t)\big)(B_D^0)^{-2}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{14}\varepsilon^{1/2}(1+t^6). \tag{2.23}$$

Постоянные C_{13} *и* C_{14} *зависят только от исходных данных* (1.7)

Доказательство. В силу предложения 1.1, леммы 2.13(2°) и (1.2) выполнено

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\|[\Lambda^\varepsilon](S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant C^{(1)}\|(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_D^0)^{-5/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad+ \varepsilon C^{(2)}\|(S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_D^0)^{-5/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^l(\mathbb{R}^d)} \\
&\quad\leqslant r_1\alpha_1^{1/2}C^{(1)}\varepsilon\|\mathbf{D}^2P_\mathcal{O}(B_D^0)^{-5/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathbb{R}^d)} + 2\alpha_1^{1/2}C^{(2)}\varepsilon\|\mathbf{D}P_\mathcal{O}(B_D^0)^{-5/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^l(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.57), (2.20) следует, что

$$\begin{aligned}
&\varepsilon\|[\Lambda^\varepsilon](S_\varepsilon - I)b(\mathbf{D})P_\mathcal{O}(B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad\leqslant \varepsilon\alpha_1^{1/2}\left(r_1C^{(1)}C_\mathcal{O}^{(2)}\|(B_D^0)^{-5/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^2(\mathcal{O})} + 2C^{(2)}C_\mathcal{O}^{(l+1)}\|(B_D^0)^{-5/2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^{l+1}(\mathcal{O})}\right) \\
&\quad\leqslant \varepsilon\alpha_1^{1/2}\left(r_1C^{(1)}C_\mathcal{O}^{(2)} + 2C^{(2)}C_\mathcal{O}^{(l+1)}\right)\mathscr{C}_l, \quad 3 \leqslant d = 2l \leqslant 8.
\end{aligned} \tag{2.24}$$

Аналогично, с помощью леммы 2.14(2°) получаем

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \|[\widetilde{\Lambda}^\varepsilon](S_\varepsilon - I) P_{\mathcal{O}} (B_D^0)^{-1/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}) (B_D^0)^{-2}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^1(\mathcal{O})} \\
&\quad \leqslant \varepsilon \left(r_1 \widetilde{C}^{(1)} C_{\mathcal{O}}^{(2)} + 2 \widetilde{C}^{(2)} C_{\mathcal{O}}^{(l)} \right) \mathscr{C}_l, \quad 3 \leqslant d = 2l \leqslant 8.
\end{aligned}
\tag{2.25}
$$

Объединяя (2.7), (2.24) и (2.25), приходим к оценке (2.22) с постоянной $C_{13} := C_8 + \alpha_1^{1/2} \left(r_1 C^{(1)} C_{\mathcal{O}}^{(2)} + 2 C^{(2)} C_{\mathcal{O}}^{(l+1)} \right) \mathscr{C}_l + \left(r_1 \widetilde{C}^{(1)} C_{\mathcal{O}}^{(2)} + 2 \widetilde{C}^{(2)} C_{\mathcal{O}}^{(l)} \right) \mathscr{C}_l$.

Перейдем к доказательству неравенства (2.23). Из (1.3) и (2.22) следует, что

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \Big(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) B_{D,\varepsilon}^{-1/2} \sin(t B_{D,\varepsilon}^{1/2}) - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \big(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon \big) (B_D^0)^{-1/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}) \Big) \\
&\quad \times (B_D^0)^{-2} \Big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C_{13} \varepsilon^{1/2} (1 + t^6), \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1.
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

Тождество (2.18) сохраняет силу. Чтобы оценить четвертый член справа в (2.18), воспользуемся леммами 2.13(1°) и 2.14(1°) и неравенствами (1.3), (2.20):

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon \big) D_l (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}) \Big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \Big\| \Big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon \Big) \mathbf{D} (B_D^0)^{-5/2} \Big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \varepsilon \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \Big(C^{(0)} (d\alpha_1)^{1/2} \|\mathbf{D}^2 (B_D^0)^{-5/2}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^{l-1}(\mathcal{O})} + \widetilde{C}^{(0)} \|\mathbf{D} (B_D^0)^{-5/2}\|_{L_2(\mathcal{O}) \to H^{l-1}(\mathcal{O})} \Big) \\
&\leqslant \varepsilon \widehat{C}_{14}, \quad d \leqslant 8, \quad \widehat{C}_{14} := \|g\|_{L_\infty} (d\alpha_1)^{1/2} \Big(C^{(0)} (d\alpha_1)^{1/2} + \widetilde{C}^{(0)} \Big) \mathscr{C}_l.
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

Из (2.26) и (2.27) вытекает оценка (2.23) с постоянной $C_{14} := (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} C_{13} + \widehat{C}_{14}$. $\square$

Замечание 2.17. *Если $\partial\mathcal{O} \in C^{4,1}$ и $d = 9, 10$, то устранить сглаживающий оператор S_ε удается только в члене корректора, содержащем $\widetilde{\Lambda}^\varepsilon$. Для этого вместо леммы* 2.15 *используем оценку* (2.21).

2.6 Усреднение решения первой начально-краевой задачи

Применим результаты п. 2.2 и 2.4 к усреднению решения первой начально-краевой задачи (2.1). Заметим, что если $\mathbf{\Phi} \in \operatorname{Dom}(B_D^0)^2$, то функцию $\mathbf{\Phi}$ можно представить в виде $\mathbf{\Phi} = (B_D^0)^{-2} \check{\mathbf{\Phi}}$, где $\check{\mathbf{\Phi}} \in L_2(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. Если $\partial\mathcal{O} \in C^{3,1}$, то в силу леммы 1.7

$$
\|\check{\mathbf{\Phi}}\|_{L_2(\mathcal{O})} = \|(B_D^0)^2 \mathbf{\Phi}\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C} \|\mathbf{\Phi}\|_{H^4(\mathcal{O})}.
$$

Применяя эти соображения к функциям $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi}$ и $\mathbf{F}(\cdot, t)$, используя тождества (2.2), (2.4) и теорему 2.1, получаем следующий результат.

Теорема 2.18. *Пусть $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ — ограниченная область с границей класса $C^{3,1}$. Пусть выполнены условия п. 1.3–1.6. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи* (2.1) *и $\mathbf{u}_0$ — решение эффективной задачи* (2.3)*, причем $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi} \in \operatorname{Dom}(B_D^0)^2$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; \operatorname{Dom}(B_D^0)^2)$. Тогда при $t \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедлива оценка*

$$
\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C} C_7 \varepsilon (1 + |t|^5) \left(\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^4(\mathcal{O})} + |t| \|\boldsymbol{\psi}\|_{H^4(\mathcal{O})} + |t| \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,t); H^4(\mathcal{O}))} \right).
$$

Постоянные $\mathfrak{C}$ и C_7 зависят только от исходных данных (1.7).

На основании теорем 2.1 и 2.2 получаем аппроксимацию по энергетической норме решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи (2.1) при $\boldsymbol{\varphi} = 0$.

Теорема 2.19. *Пусть в условиях теоремы* 2.18 $\boldsymbol{\varphi} = 0$. *При* $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеем*

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}(\cdot, t) - \frac{\partial \mathbf{u}_0}{\partial t}(\cdot, t) \right\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C} C_7 \varepsilon (1 + |t|^5) \left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^4(\mathcal{O})} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,t);H^4(\mathcal{O}))} \right). \tag{2.28}$$

Пусть $\Lambda(\mathbf{x})$ *и* $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ*-периодические решения задач* (1.21) *и* (1.31) *соответственно. Пусть* $P_\mathcal{O}$ — *линейный непрерывный оператор продолжения* (1.56) *и* S_ε — *оператор сглаживания по Стеклову* (1.1). *Положим* $\widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t) := P_\mathcal{O} \mathbf{u}_0(\cdot, t)$. *Через* $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, t)$ *обозначим первое приближение к решению* $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t)$:

$$\widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, t) := \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t) + \varepsilon \Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t) + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t), \quad \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, t) := \widetilde{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, t)|_\mathcal{O}.$$

Тогда при $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C} C_8 \varepsilon^{1/2} (1 + t^6) \left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^4(\mathcal{O})} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,t);H^4(\mathcal{O}))} \right). \tag{2.29}$$

Пусть $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — *матрица-функция* (1.22). *Для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, t) := g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t)$ *при* $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *справедлива аппроксимация*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, t) - \widetilde{g}^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t) - g^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda})^\varepsilon S_\varepsilon \widetilde{\mathbf{u}}_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \mathfrak{C} C_9 \varepsilon^{1/2} (1 + t^6) \left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^4(\mathcal{O})} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,t);H^4(\mathcal{O}))} \right). \end{aligned} \tag{2.30}$$

Постоянные $\mathfrak{C}$, C_8 *и* C_9 *зависят только от исходных данных* (1.7).

Доказательство. Оценки (2.29) и (2.30) прямо следуют из теоремы 2.2, леммы 1.7 и соотношений (2.2), (2.4).

Обсудим доказательство неравенства (2.28). Дифференцируя по времени выражение (2.2), где $\boldsymbol{\varphi} = 0$, находим

$$\frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon}{\partial t}(\cdot, t) = \cos(t B_{D,\varepsilon}^{1/2}) \boldsymbol{\psi} + \int_0^t \cos\left((t - \widetilde{t}) B_{D,\varepsilon}^{1/2} \right) \mathbf{F}(\cdot, \widetilde{t}) \, d\widetilde{t}.$$

Для решения эффективной задачи справедливо аналогичное представление. С учетом леммы 1.7 отсюда и из теоремы 2.1 следует оценка (2.28). $\square$

Из теоремы 2.16 выводим следующий результат.

Теорема 2.20. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.19, *причем* $d \leqslant 8$. *При* $d = 7, 8$ *предположим дополнительно, что* $\partial\mathcal{O} \in C^{4,1}$. *Обозначим*

$$\check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, t) := \mathbf{u}_0(\cdot, t) + \varepsilon (\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon) \mathbf{u}_0(\cdot, t).$$

Тогда при $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *имеют место аппроксимации*

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, t) - \check{\mathbf{v}}_\varepsilon(\cdot, t)\|_{H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C} C_{13} \varepsilon^{1/2} (1 + t^6) \left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^4(\mathcal{O})} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,t);H^4(\mathcal{O}))} \right), \\ &\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot, t) - \widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\cdot, t) - g^\varepsilon (b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda})^\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot, t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad \leqslant \mathfrak{C} C_{14} \varepsilon^{1/2} (1 + t^6) \left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^4(\mathcal{O})} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,t);H^4(\mathcal{O}))} \right). \end{aligned}$$

Постоянные $\mathfrak{C}$, C_{13} *и* C_{14} *зависят только от исходных данных* (1.7).

2.7 Специальный случай

Предположим теперь, что $g^0 = \underline{g}$, т. е. справедливы представления (1.30). Тогда в силу предложения 2.5(3°) выполнено условие 2.4. При этом согласно [BSu2, замечание 3.5] матрица-функция (1.22) постоянна и совпадает с g^0, т. е. $\widetilde{g}(\mathbf{x}) = g^0 = \underline{g}$. Таким образом, $\widetilde{g}^\varepsilon b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t) = g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)$.

Предположим дополнительно, что справедливо равенство

$$\sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0. \tag{2.31}$$

Тогда Г-периодическое решение задачи (1.31) равно нулю: $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$ и из теоремы 2.9 вытекает следующий результат.

Предложение 2.21. *Пусть выполнены условия теоремы* 2.19. *Пусть справедливы представления* (1.30) *и равенство* (2.31). *Тогда при* $t \in \mathbb{R}$ *и* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *для потока* $\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t)$ *имеет место аппроксимация*

$$\|\mathbf{p}_\varepsilon(\cdot,t) - g^0 b(\mathbf{D})\mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{C} C_{12}\varepsilon^{1/2}(1+t^6)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^4(\mathcal{O})} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,t);H^4(\mathcal{O}))}\right).$$

2.8 Случай нулевого корректора

Предположим дополнительно, что $g^0 = \overline{g}$, т. е. выполнены соотношения (1.29). Пусть справедливо условие (2.31). Тогда Г-периодические решения задач (1.21) и (1.31) равны нулю: $\Lambda(\mathbf{x}) = 0$ и $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = 0$. Из теорем 2.2 и 2.3 вытекает, что при $t \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ справедливы оценки

$$\left\|\left(B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - (B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})\right)(B_D^0)^{-2}\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_8\varepsilon^{1/2}(1+t^6), \tag{2.32}$$

$$\left\|\left(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-1} - \cos(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-1}\right)(B_D^0)^{-1}\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{10}\varepsilon^{1/2}(1+|t|^5). \tag{2.33}$$

Из теоремы 1.10(2°) следует, что в рассматриваемом случае выполнено

$$\|B_{D,\varepsilon}^{-1} - (B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_4(c_\flat^{-1} + c_\flat^{-2})\varepsilon^{1/2}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1. \tag{2.34}$$

Последовательно применяя (1.18) и (1.16), находим

$$\begin{aligned}
&\|\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})(B_{D,\varepsilon}^{-1} - (B_D^0)^{-1})(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \\
&\leqslant c_3\|B_{D,\varepsilon}^{1/2}\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})(B_{D,\varepsilon}^{-1} - (B_D^0)^{-1})(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant c_3 C_*^{1/2}\|B_{D,\varepsilon}^{-1} - (B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\|(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{2.35}$$

Объединяя (1.40) и (2.33)–(2.35), получаем, что при $t \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнено

$$\left\|\left(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(t(B_D^0)^{1/2})\right)(B_D^0)^{-2}\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant C_{15}\varepsilon^{1/2}(1+|t|^5). \tag{2.36}$$

Здесь $C_{15} := C_{10} + c_3 C_*^{1/2} C_4(c_\flat^{-1} + c_\flat^{-2})\mathcal{C}_1$.

С помощью (2.32) и (2.36) получаем аппроксимацию в классе Соболева $H^1(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$ для решения (2.2) задачи (2.1).

Предложение 2.22. *Пусть* $\mathbf{u}_\varepsilon$ *и* $\mathbf{u}_0$ *— решения задач* (2.1) *и* (2.3) *соответственно при* $\boldsymbol{\varphi}$, $\boldsymbol{\psi} \in \operatorname{Dom}(B_D^0)^2$ *и* $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};\operatorname{Dom}(B_D^0)^2)$. *Пусть справедливы соотношения* (1.29) *и* (2.31). *Тогда при* $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ *и* $t \in \mathbb{R}$ *выполнена оценка*

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,t) - \mathbf{u}_0(\cdot,t)\|_{H^1(\mathcal{O})} &\leqslant \mathfrak{C} C_{15}\varepsilon^{1/2}(1+|t|^5)\|\boldsymbol{\varphi}\|_{H^4(\mathcal{O})} \\
&\quad + \mathfrak{C} C_8\varepsilon^{1/2}(1+t^6)\left(\|\boldsymbol{\psi}\|_{H^4(\mathcal{O})} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,t);H^4(\mathcal{O}))}\right).
\end{aligned}$$

3 Доказательства теорем 2.1 и 2.2

3.1 Доказательство теоремы 2.1

Доказательство оценки (2.5) основано на использовании обратного преобразования Лапласа и применении теоремы 1.9. Чтобы обеспечить сходимость появляющихся при этом интегралов, вместо косинуса мы рассматриваем функцию вида

$$\left(\cos(ta^{1/2}) - 1 + at^2/2\right) a^{-2},$$

для которой обратное преобразование Лапласа убывает быстрее (см., например, [GraRy, раздел 17.13]).

Доказательство теоремы 2.1. При $t = 0$ результат (2.5) тривиален: $\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})|_{t=0} = \cos(t(B_D^0)^{1/2})|_{t=0} = I$, поэтому далее будем считать, что $t > 0$. Это не ограничивает общности, так как косинус — четная функция.

Учитывая оценку

$$\|B_{D,\varepsilon}^{-1} - (B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant C_{16}\varepsilon, \quad C_{16} := \max\{1; c_\flat^{-2}\}C_2, \tag{3.1}$$

вытекающую из (1.53), (1.54), на основании тождества

$$B_{D,\varepsilon}^{-2} - (B_D^0)^{-2} = \frac{1}{2}(B_{D,\varepsilon}^{-1} - (B_D^0)^{-1})(B_{D,\varepsilon}^{-1} + (B_D^0)^{-1}) + \frac{1}{2}(B_{D,\varepsilon}^{-1} + (B_D^0)^{-1})(B_{D,\varepsilon}^{-1} - (B_D^0)^{-1})$$

и оценок (1.19), (1.40) получаем, что

$$\|B_{D,\varepsilon}^{-2} - (B_D^0)^{-2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant 2\mathcal{C}_1 C_{16}\varepsilon. \tag{3.2}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2}) - \cos(t(B_D^0)^{1/2})\right)(B_D^0)^{-2}\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant \| \cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})\left(B_{D,\varepsilon}^{-2} - (B_D^0)^{-2}\right)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&+ \| \cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-2} - \cos(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\
&\leqslant 2\mathcal{C}_1 C_{16}\varepsilon + \| \cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-2} - \cos(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}.
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Пусть $a > 0$ — параметр. Справедливо тождество

$$\left(\frac{1}{2}at^2 - 1 + \cos(t\sqrt{a})\right) a^{-2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda = c} \lambda^{-3}(a+\lambda^2)^{-1}e^{\lambda t}\,d\lambda, \quad c > 0. \tag{3.4}$$

В этом несложно убедиться, посчитав интеграл в правой части (3.4) по вычетам.

Будем считать, что постоянная c в (3.4) равна $\sqrt{c_\flat}/t$. С помощью спектральной теоремы из (3.4) выводим равенство

$$\left(\frac{1}{2}B_{D,\varepsilon}t^2 - I + \cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})\right) B_{D,\varepsilon}^{-2} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda = \sqrt{c_\flat}/t} \lambda^{-3}(B_{D,\varepsilon}+\lambda^2 I)^{-1}e^{\lambda t}\,d\lambda. \tag{3.5}$$

Для эффективного оператора справедливо аналогичное тождество, поэтому

$$\begin{aligned}
\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-2} - \cos(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-2} = -\frac{t^2}{2}\left(B_{D,\varepsilon}^{-1} - (B_D^0)^{-1}\right) + \left(B_{D,\varepsilon}^{-2} - (B_D^0)^{-2}\right) \\
+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda = \sqrt{c_\flat}/t} \lambda^{-3}\left((B_{D,\varepsilon}+\lambda^2 I)^{-1} - (B_D^0+\lambda^2 I)^{-1}\right)e^{\lambda t}\,d\lambda.
\end{aligned} \tag{3.6}$$

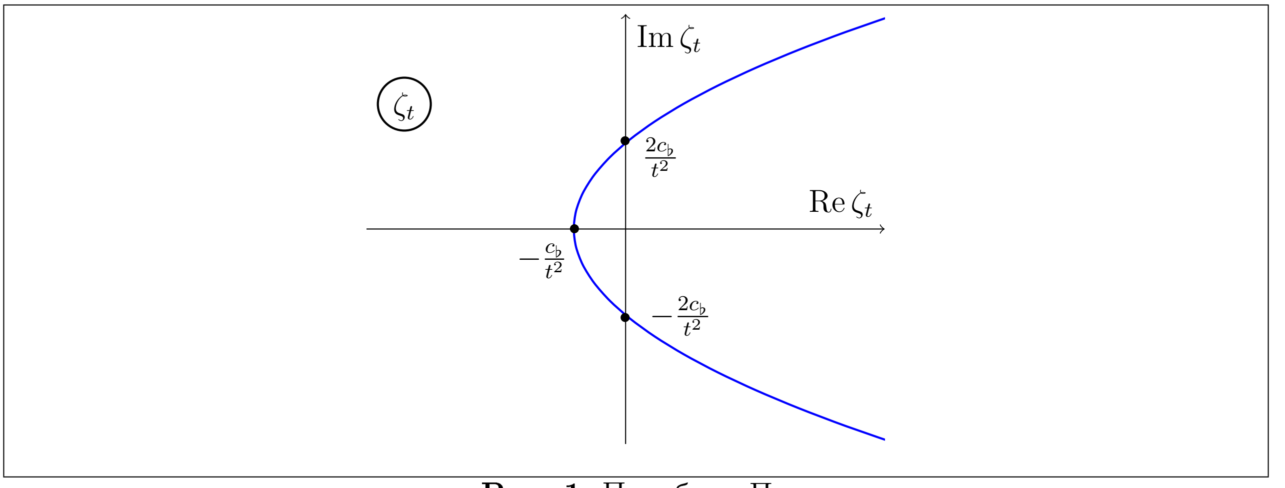

Рис. 1: Парабола Π_t.

Отсюда на основании (3.1) и (3.2) заключаем, что

$$\begin{aligned} &\| \cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-2} - \cos(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \\ &\quad\leqslant 2^{-1}C_{16}\varepsilon t^2 + 2\mathcal{C}_1 C_{16}\varepsilon \\ &\quad+ \left\| \frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\sqrt{c_\flat}/t} \lambda^{-3}\left((B_{D,\varepsilon}+\lambda^2 I)^{-1} - (B_D^0+\lambda^2 I)^{-1}\right)e^{\lambda t}\,d\lambda\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Перейдем к оцениванию интеграла в правой части (3.7). Сделаем в нём замену переменной $\lambda t = \mu$:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\sqrt{c_\flat}/t} \lambda^{-3}\left((B_{D,\varepsilon}+\lambda^2 I)^{-1} - (B_D^0+\lambda^2 I)^{-1}\right)e^{\lambda t}\,d\lambda \\ &= \frac{t^2}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\mu=\sqrt{c_\flat}} e^{\mu}\mu^{-3}\left((B_{D,\varepsilon}+\frac{\mu^2}{t^2}I)^{-1} - (B_D^0+\frac{\mu^2}{t^2}I)^{-1}\right)d\mu =: \mathfrak{I}(\varepsilon;t). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Будем считать, что $\mu = \sqrt{c_\flat}+i\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$. Поймем, где меняется величина $\zeta_t := -\mu^2/t^2$. Имеем

$$\mu^2 = c_\flat - \beta^2 + i2\beta\sqrt{c_\flat} =: x+iy. \tag{3.9}$$

Тогда

$$\begin{cases} x = c_\flat - \beta^2, \\ y = 2\beta\sqrt{c_\flat}. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x = c_\flat - (4c_\flat)^{-1}y^2, \\ \beta = 2^{-1}c_\flat^{-1/2}y. \end{cases}$$

Таким образом, величина ζ_t пробегает параболу Π_t (см. рис. 1):

$$\Pi_t := \left\{\zeta_t\in\mathbb{C} : \operatorname{Re}\zeta_t = -\frac{c_\flat}{t^2} + \frac{t^2}{4c_\flat}(\operatorname{Im}\zeta_t)^2\right\}. \tag{3.10}$$

При $\zeta_t\in\Pi_t$, $\operatorname{Re}\zeta_t < c_\flat+1$, будем пользоваться аппроксимацией (1.54) для резольвенты $(B_{D,\varepsilon}-\zeta_t I)^{-1}$. Оценим величину $\varrho_\flat(\zeta_t)$ при рассматриваемых $\zeta_t\in\Pi_t$. Имеем

$$\zeta_t = -\frac{\mu^2}{t^2} = \frac{\beta^2-c_\flat}{t^2} - i\frac{2\beta\sqrt{c_\flat}}{t^2}, \quad \beta\in\mathbb{R}. \tag{3.11}$$

Поэтому
$$|\zeta_t - c_\flat|^2 = \left(\frac{\beta^2 - c_\flat}{t^2} - c_\flat\right)^2 + \frac{4\beta^2 c_\flat}{t^4}.$$
После элементарных преобразований находим
$$|\zeta_t - c_\flat|^2 = t^{-4}\left((\beta^2 - c_\flat t^2)^2 + 2\beta^2 c_\flat + c_\flat^2 + 2c_\flat^2 t^2\right).$$
Отсюда
$$|\zeta_t - c_\flat|^{-2} \leqslant \frac{t^2}{2c_\flat^2}.$$
При $\zeta_t \in \Pi_t$, $\operatorname{Re}\zeta_t \leqslant c_\flat$, будем пользоваться оценкой
$$\varrho_\flat(\zeta_t) \leqslant \max\{1; |\zeta_t - c_\flat|^{-2}\} \leqslant \max\{1; (2c_\flat^2)^{-1}t^2\} \leqslant \mathfrak{c}_1(t^2+1); \quad \mathfrak{c}_1 := \max\{1; (2c_\flat^2)^{-1}\}. \tag{3.12}$$
Пусть $\psi_t = \arg(\zeta_t - c_\flat)$. При $\zeta_t \in \Pi_t$, $c_\flat < \operatorname{Re}\zeta_t \leqslant c_\flat + 1$, величину $\varrho_\flat(\zeta_t)$ оценим следующим образом:
$$\varrho_\flat(\zeta_t) \leqslant \max\{c(\psi_t)^2|\zeta_t - c_\flat|^{-2}; c(\psi_t)^2\} = \max\{|\operatorname{Im}(\zeta_t - c_\flat)|^{-2}; c(\psi_t)^2\}. \tag{3.13}$$
Имеем
$$|\operatorname{Im}(\zeta_t - c_\flat)|^{-2} = |\operatorname{Im}\zeta_t|^{-2} \leqslant |\operatorname{Im}\widehat{\zeta}_t|^{-2}, \quad \zeta_t \in \Pi_t,\ c_\flat < \operatorname{Re}\zeta_t \leqslant c_\flat + 1. \tag{3.14}$$
Здесь $\widehat{\zeta}_t$ — точка контура Π_t такая, что $\operatorname{Re}\widehat{\zeta}_t = c_\flat$. (Таких точек две, годится любая.) Пусть этой точке отвечает значение параметра $\widehat{\beta} \in \mathbb{R}$. Тогда
$$\operatorname{Re}\widehat{\zeta}_t = c_\flat = \frac{\widehat{\beta}^2 - c_\flat}{t^2}.$$
Отсюда $\widehat{\beta}^2 = c_\flat(1+t^2)$. И в силу (3.14) при рассматриваемых $\zeta_t \in \Pi_t$ выполнено
$$|\operatorname{Im}(\zeta_t - c_\flat)|^{-2} = |\operatorname{Im}\zeta_t|^{-2} \leqslant \frac{t^4}{4c_\flat}\widehat{\beta}^{-2} = \frac{t^4}{4c_\flat^2(1+t^2)} \leqslant \frac{t^2}{4c_\flat^2}. \tag{3.15}$$

Оценим теперь $c(\psi_t)$. При $\zeta_t \in \Pi_t$, $c_\flat < \operatorname{Re}\zeta_t \leqslant c_\flat + 1$, очевидно выполнено $c(\psi_t) \leqslant c(\widetilde{\psi}_t)$, где $\widetilde{\psi}_t = \arg\widetilde{\zeta}_t$, $\widetilde{\zeta}_t \in \Pi_t$, $\operatorname{Re}\widetilde{\zeta}_t = c_\flat + 1$. (Таких точек на контуре две.) Будем считать, что точке $\widetilde{\zeta}_t \in \Pi_t$ отвечает значение параметра $\widetilde{\beta} > 0$. Имеем
$$c_\flat + 1 = \operatorname{Re}\widetilde{\zeta}_t = \frac{\widetilde{\beta}^2 - c_\flat}{t^2}.$$
Отсюда
$$\widetilde{\beta}^2 = c_\flat + t^2(c_\flat + 1). \tag{3.16}$$
Поэтому
$$\left(\operatorname{Im}\widetilde{\zeta}_t\right)^2 = \frac{4\widetilde{\beta}^2 c_\flat}{t^4} = \frac{4c_\flat^2 + 4c_\flat t^2(c_\flat+1)}{t^4}.$$
Далее,
$$c(\widetilde{\psi}_t)^2 = \frac{|\widetilde{\zeta}_t - c_\flat|^2}{\left(\operatorname{Im}\widetilde{\zeta}_t\right)^2} = \frac{\left(\operatorname{Re}(\widetilde{\zeta}_t - c_\flat)\right)^2 + \left(\operatorname{Im}\widetilde{\zeta}_t\right)^2}{\left(\operatorname{Im}\widetilde{\zeta}_t\right)^2} = \frac{t^4 + 4c_\flat^2 + 4c_\flat t^2(c_\flat+1)}{4c_\flat^2 + 4c_\flat t^2(c_\flat+1)}.$$

Пользуясь элементарным неравенством $1 \leqslant (c_\flat + 1)^2$, находим

$$c(\widetilde{\psi}_t)^2 \leqslant \frac{t^4(c_\flat+1)^2 + 4c_\flat^2 + 4c_\flat t^2(c_\flat+1)}{4c_\flat^2 + 4c_\flat t^2(c_\flat+1)} = \frac{\left(t^2(c_\flat+1)+2c_\flat\right)^2}{4c_\flat^2+4c_\flat t^2(c_\flat+1)}.$$

Уменьшая знаменатель, получаем

$$c(\widetilde{\psi}_t)^2 \leqslant \frac{\left(t^2(c_\flat+1)+2c_\flat\right)^2}{2c_\flat^2+c_\flat t^2(c_\flat+1)} = \frac{t^2(c_\flat+1)+2c_\flat}{c_\flat} = 2 + (1+c_\flat^{-1})t^2.$$

Отсюда и из (3.13), (3.15) вытекает, что при $\zeta_t \in \Pi_t$, $c_\flat < \operatorname{Re}\zeta_t \leqslant c_\flat + 1$, верна оценка

$$\varrho_\flat(\zeta_t) \leqslant \max\{(2c_\flat)^{-2}t^2; 2+(1+c_\flat^{-1})t^2\} \leqslant \mathfrak{c}_2(t^2+1); \quad \mathfrak{c}_2 := \max\{(2c_\flat)^{-2}; 2; 1+c_\flat^{-1}\}. \tag{3.17}$$

Объединяя (3.12) и (3.17), заключаем, что

$$\varrho_\flat(\zeta_t) \leqslant \mathfrak{c}_3(1+t^2), \quad \zeta_t \in \Pi_t,\ \operatorname{Re}\zeta_t \leqslant c_\flat+1; \quad \mathfrak{c}_3 := \max\{\mathfrak{c}_1; \mathfrak{c}_2\}. \tag{3.18}$$

Пусть теперь $\zeta_t \in \Pi_t$, $\operatorname{Re}\zeta_t > c_\flat + 1$. На этом участке контура будем оценивать подынтегральное выражение в (3.8) с помощью (1.52). Пусть $\phi_t = \arg\zeta_t$. Заметим, что с учетом (3.11) выполнено

$$t^2|\mu^{-3}||\zeta_t|^{-1/2}c(\phi_t)^2 = t^{-1}|\zeta_t|^{-2}c(\phi_t)^2 = t^{-1}|\operatorname{Im}\zeta_t|^{-2} = (4c_\flat)^{-1}t^3\beta^{-2}. \tag{3.19}$$

Теперь мы можем оценить интеграл (3.8). Имеем

$$\mathfrak{I}(\varepsilon;t) = \frac{t^2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\sqrt{c_\flat}}e^{i\beta}(\mu(\beta))^{-3}\left((B_{D,\varepsilon}+\frac{\mu(\beta)^2}{t^2}I)^{-1} - (B_D^0+\frac{\mu(\beta)^2}{t^2}I)^{-1}\right)d\beta,$$

где $\mu(\beta) = c_\flat^{1/2} + i\beta$. На основании (1.52), (1.54), (3.18) и (3.19) отсюда выводим

$$\|\mathfrak{I}(\varepsilon;t)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \frac{e^{\sqrt{c_\flat}}t^2}{2\pi}\left(\varepsilon C_2\mathfrak{c}_3(1+t^2)\int_{-\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\beta}}|\mu(\beta)|^{-3}\,d\beta + \varepsilon C_1(2c_\flat)^{-1}t\int_{\widetilde{\beta}}^{\infty}\beta^{-2}\,d\beta\right). \tag{3.20}$$

(Напомним, что значение параметра $\beta = \widetilde{\beta}$ (см. (3.16)) отвечает точке $\widetilde{\zeta}_t \in \Pi_t$, для которой $\operatorname{Re}\widetilde{\zeta}_t = c_\flat + 1$.) Заметим, что $|\mu(\beta)| \geqslant \operatorname{Re}\mu(\beta) = c_\flat^{1/2}$, и в силу (3.16) выполнено

$$\int_{-\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\beta}}|\mu(\beta)|^{-3}\,d\beta \leqslant 2c_\flat^{-3/2}\widetilde{\beta} = 2c_\flat^{-3/2}\sqrt{c_\flat+t^2(c_\flat+1)} \leqslant \mathfrak{c}_4(t^2+1)^{1/2}, \tag{3.21}$$

где $\mathfrak{c}_4 := 2c_\flat^{-3/2}(c_\flat+1)^{1/2}$.

Далее, согласно (3.16) имеем

$$\int_{\widetilde{\beta}}^{\infty}\beta^{-2}\,d\beta = \widetilde{\beta}^{-1} = (c_\flat+t^2(c_\flat+1))^{-1/2} \leqslant t^{-1}(c_\flat+1)^{-1/2}. \tag{3.22}$$

Объединяя (3.20)–(3.22), находим

$$\|\mathfrak{I}(\varepsilon;t)\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_5\varepsilon t^2\left((1+t^2)^{3/2}+1\right), \tag{3.23}$$

где

$$\mathfrak{c}_5 := \frac{e^{\sqrt{c_\flat}}}{2\pi}\max\{\mathfrak{c}_3\mathfrak{c}_4C_2; (2c_\flat)^{-1}(c_\flat+1)^{-1/2}C_1\}.$$

Объединяя (3.3), (3.7), (3.8) и (3.23), приходим к оценке

$$\left\|\Big(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})-\cos(t(B_D^0)^{1/2})\Big)(B_D^0)^{-2}\right\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant \widehat{C}_7\varepsilon\left(1+t^2+t^2(1+t^2)^{3/2}\right) \qquad (3.24)$$

с постоянной $\widehat{C}_7:=\max\{4\mathcal{C}_1C_{16};2^{-1}C_{16}+\mathfrak{c}_5\}$. Заметим, что при $|t|\leqslant 1$ старшая степень времени в правой части (3.24) — это t^0, а при $|t|>1$ старшая степень — t^5. С учетом этого соображения из (3.24) вытекает оценка (2.5) с постоянной $C_7:=2(1+\sqrt{2})\widehat{C}_7$.

С помощью тождества

$$B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})=\int_0^t\cos(\tau B_{D,\varepsilon}^{1/2})\,d\tau \qquad (3.25)$$

и аналогичного тождества для эффективного оператора на основании (2.5) получаем оценку (2.6). $\square$

3.2 Доказательство теоремы 2.3

Доказательство теоремы 2.3. Аналогично (3.5) имеем

$$\cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-2}=-\frac{t^2}{2}(B_D^0)^{-1}+(B_D^0)^{-2}+\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\sqrt{c_\flat}/t}\lambda^{-3}(B_D^0+\lambda^2I)^{-1}e^{\lambda t}\,d\lambda.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}\varepsilon\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)S_\varepsilon P_{\mathcal{O}}\cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-2}&=-\frac{\varepsilon t^2}{2}K_D(\varepsilon;0)+\varepsilon K_D(\varepsilon;0)(B_D^0)^{-1}\\&+\frac{\varepsilon}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\sqrt{c_\flat}/t}\lambda^{-3}K_D(\varepsilon;-\lambda^2)e^{\lambda t}\,d\lambda.\end{aligned}$$

Здесь $K_D(\varepsilon;\cdot)$ — оператор (1.58). Следовательно, с учетом (3.6) имеем

$$\begin{aligned}&\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-2}-\cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-2}-\varepsilon\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)S_\varepsilon P_{\mathcal{O}}\cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-2}\\&=-\frac{t^2}{2}\left(B_{D,\varepsilon}^{-1}-(B_D^0)^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;0)\right)+\left(B_{D,\varepsilon}^{-2}-(B_D^0)^{-2}-\varepsilon K_D(\varepsilon;0)(B_D^0)^{-1}\right)\\&+\frac{1}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\lambda=\sqrt{c_\flat}/t}\lambda^{-3}\left((B_{D,\varepsilon}+\lambda^2I)^{-1}-(B_D^0+\lambda^2I)^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;-\lambda^2)\right)e^{\lambda t}\,d\lambda.\end{aligned} \qquad (3.26)$$

Последнее слагаемое в правой части (3.26) обозначим через $\mathcal{I}(\varepsilon;t)$.

На основании (1.20), (1.40) и (1.54), (1.60) имеем

$$\begin{aligned}&\|B_{D,\varepsilon}^{-2}-(B_D^0)^{-2}-\varepsilon K_D(\varepsilon;0)(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&\leqslant\|B_{D,\varepsilon}^{-1}\big(B_{D,\varepsilon}^{-1}-(B_D^0)^{-1}\big)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&+\|\left(B_{D,\varepsilon}^{-1}-(B_D^0)^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;0)\right)(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&\leqslant\mathcal{C}_2C_2\max\{1;c_\flat^{-2}\}\varepsilon+2\max\{1;c_\flat^{-2}\}\mathcal{C}_1C_4\varepsilon^{1/2}\leqslant\mathfrak{c}_6\varepsilon^{1/2},\end{aligned} \qquad (3.27)$$

где $\mathfrak{c}_6:=\max\{1;c_\flat^{-2}\}(\mathcal{C}_2C_2+2\mathcal{C}_1C_4)$.

В силу (1.60), (3.26) и (3.27) выполнено

$$\begin{aligned}&\|\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})(B_{D,\varepsilon})^{-2}-\cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-2}\\&-\varepsilon\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)S_\varepsilon P_{\mathcal{O}}\cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-2}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&\leqslant\max\{1;c_\flat^{-2}\}C_4\varepsilon^{1/2}t^2+\mathfrak{c}_6\varepsilon^{1/2}+\|\mathcal{I}(\varepsilon;t)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}.\end{aligned} \qquad (3.28)$$

В интеграле $\mathcal{I}(\varepsilon;t)$ сделаем замену переменной $\lambda t = \mu$:

$$\mathcal{I}(\varepsilon;t) = \frac{t^2}{2\pi i}\int_{\operatorname{Re}\mu=\sqrt{c_\flat}} e^{\mu}\mu^{-3}\left((B_{D,\varepsilon}+\frac{\mu^2}{t^2}I)^{-1}-(B_D^0+\frac{\mu^2}{t^2}I)^{-1}-\varepsilon K_D\big(\varepsilon;-\frac{\mu^2}{t^2}\big)\right)\,d\mu. \tag{3.29}$$

Считаем, что $\mu=\mu(\beta)=c_\flat^{1/2}+i\beta$, $\beta\in\mathbb{R}$. Величина $\zeta_t(\beta)=-\mu(\beta)^2/t^2$ лежит на параболе Π_t (см. (3.10)). При $-\widetilde{\beta}\leqslant\beta\leqslant\widetilde{\beta}$ (здесь $\widetilde{\beta}$ определено в (3.16)) будем пользоваться оценкой (1.60). Заметим, что в силу (3.9)

$$\begin{aligned}\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta_t)^{1/2}+\varepsilon|1+\zeta_t|^{1/2}\varrho_\flat(\zeta_t)&\leqslant\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta_t)(1+(1+|\zeta_t|)^{1/2})\\&\leqslant\varepsilon^{1/2}\varrho_\flat(\zeta_t)\left(1+\big(1+t^{-2}(c_\flat+\beta^2)\big)^{1/2}\right).\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.60), (3.16), (3.18) следует, что

$$\begin{aligned}&\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta_t(\beta)I)^{-1}-(B_D^0-\zeta_t(\beta)I)^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta_t(\beta))\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&\leqslant\varepsilon^{1/2}(1+t^2)\mathfrak{c}_3C_4\left(2+t^{-1}(c_\flat^{1/2}+\widetilde{\beta})\right),\quad-\widetilde{\beta}\leqslant\beta\leqslant\widetilde{\beta}.\end{aligned}\tag{3.30}$$

При $|\beta|>\widetilde{\beta}$ применим (1.61) и учтем оценку

$$\begin{aligned}|\mu(\beta)|^{-3}\frac{c(\phi_t)^2}{|\zeta_t(\beta)|^{1/4}}&=t^{-3}|\zeta_t(\beta)|^{-3/2}\frac{c(\phi_t)^2}{|\zeta_t(\beta)|^{1/4}}=t^{-3}\frac{|\zeta_t(\beta)|^{1/4}}{|\operatorname{Im}\zeta_t(\beta)|^2}\\&=t^{-3}\frac{\big(t^{-2}(\beta^2+c_\flat)\big)^{1/4}}{t^{-4}4\beta^2c_\flat}\leqslant(4c_\flat)^{-1}t^{1/2}(\beta^{-3/2}+c_\flat^{1/4}\beta^{-2})\end{aligned}$$

и равенство

$$c(\phi_t)^{3/2}|\mu(\beta)|^{-3}=\frac{|\zeta_t(\beta)|^{3/2}}{t^3|\operatorname{Im}\zeta_t(\beta)|^{3/2}}|\zeta_t(\beta)|^{-3/2}=2^{-3/2}c_\flat^{-3/4}\beta^{-3/2}.$$

Получаем

$$\begin{aligned}&|\mu(\beta)|^{-3}\|(B_{D,\varepsilon}-\zeta_t(\beta)I)^{-1}-(B_D^0-\zeta_t(\beta)I)^{-1}-\varepsilon K_D(\varepsilon;\zeta_t(\beta))\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\&\leqslant C_5\varepsilon^{1/2}\left(t^{1/2}(4c_\flat)^{-1}(\beta^{-3/2}+c_\flat^{1/4}\beta^{-2})+2^{-3/2}c_\flat^{-3/4}\beta^{-3/2}\right).\end{aligned}\tag{3.31}$$

Из (3.29)–(3.31) и оценки $|\mu(\beta)|\geqslant c_\flat^{1/2}$ следует, что

$$\begin{aligned}\|\mathcal{I}(\varepsilon;\zeta)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}&\leqslant\frac{t^2e^{\sqrt{c_\flat}}}{2\pi}\Big(\mathfrak{c}_3C_4(1+t^2)\varepsilon^{1/2}\left(2+t^{-1}(c_\flat^{1/2}+\widetilde{\beta})\right)\int_{-\widetilde{\beta}}^{\widetilde{\beta}}|\mu(\beta)|^{-3}\,d\beta\\&+2\varepsilon^{1/2}t^{1/2}(4c_\flat)^{-1}C_5\int_{\widetilde{\beta}}^{\infty}(\beta^{-3/2}+c_\flat^{1/4}\beta^{-2})\,d\beta+2\varepsilon^{1/2}C_52^{-3/2}c_\flat^{-3/4}\int_{\widetilde{\beta}}^{\infty}\beta^{-3/2}\,d\beta\Big)\\&\leqslant\frac{t^2e^{\sqrt{c_\flat}}}{2\pi}\Big(\mathfrak{c}_3C_4(1+t^2)\varepsilon^{1/2}c_\flat^{-3/2}\left(2+t^{-1}(c_\flat^{1/2}+\widetilde{\beta})\right)2\widetilde{\beta}+\varepsilon^{1/2}t^{1/2}c_\flat^{-1}C_5\widetilde{\beta}^{-1/2}\\&+\varepsilon^{1/2}t^{1/2}(2c_\flat)^{-1}c_\flat^{1/4}C_5\widetilde{\beta}^{-1}+2^{1/2}\varepsilon^{1/2}C_5c_\flat^{-3/4}\widetilde{\beta}^{-1/2}\Big).\end{aligned}$$

Отметим, что в силу (3.16)

$$\begin{aligned}&(1+t^2)\widetilde{\beta}\leqslant(1+t^2)^{3/2}(c_\flat+1)^{1/2},\\&\widetilde{\beta}^{-1/2}\leqslant t^{-1/2}(c_\flat+1)^{-1/4}.\end{aligned}$$

Тогда

$$t^{1/2}\widetilde{\beta}^{-1/2} \leqslant (c_\flat+1)^{-1/4},$$
$$t^{1/2}\widetilde{\beta}^{-1} \leqslant t^{-1/2}(c_\flat+1)^{-1/2}.$$

Следовательно,

$$\|\mathcal{I}(\varepsilon;t)\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})} \leqslant \mathfrak{c}_7\varepsilon^{1/2}t^2\left((1+t^2)^{3/2}(1+t^{-1})+t^{-1/2}+1\right), \tag{3.32}$$

где

$$\mathfrak{c}_7 := (2\pi)^{-1}e^{\sqrt{c_\flat}}\max\Big\{2\mathfrak{c}_3C_4c_\flat^{-3/2}(c_\flat+1)^{1/2}\max\{2+(c_\flat+1)^{1/2};2c_\flat^{1/2}\};(c_\flat+1)^{-1/4}c_\flat^{-1}C_5;$$
$$2^{-1}c_\flat^{-3/4}(c_\flat+1)^{-1/2}C_5+2^{1/2}C_5c_\flat^{-3/4}(c_\flat+1)^{-1/4}\Big\}.$$

Объединяя (3.28) и (3.32), приходим к оценке

$$\begin{aligned}
&\big\|\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-2}-\cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-2}\\
&-\varepsilon\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)S_\varepsilon P_\mathcal{O}\cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-2}\big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\leqslant \widehat{C}_{10}\varepsilon^{1/2}\left(1+t^2\big(t^{-1/2}+1+(1+t^2)^{3/2}(1+t^{-1})\big)\right).
\end{aligned} \tag{3.33}$$

Здесь $\widehat{C}_{10}:=\max\big\{C_4\max\{1;c_\flat^{-2}\}+\mathfrak{c}_7;\mathfrak{c}_6\big\}$. Наконец, согласно (1.18), (1.19) и (3.1),

$$\begin{aligned}
&\|\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-1}(B_{D,\varepsilon}^{-1}-(B_D^0)^{-1})\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\quad\leqslant c_3\|B_{D,\varepsilon}^{-1/2}(B_{D,\varepsilon}^{-1}-(B_D^0)^{-1})\|_{L_2(\mathcal{O})\to L_2(\mathcal{O})}\leqslant c_3\mathcal{C}_1^{1/2}C_{16}\varepsilon.
\end{aligned}$$

Отсюда и из (3.33) вытекает оценка

$$\begin{aligned}
&\Big\|\Big(\cos(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-1}-\cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-1}\\
&-\varepsilon\big(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon\big)S_\varepsilon P_\mathcal{O}\cos\big(t(B_D^0)^{1/2}\big)(B_D^0)^{-1}\Big)(B_D^0)^{-1}\Big\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\leqslant \widetilde{C}_{14}\varepsilon^{1/2}\left(1+t^2\big(1+t^{-1/2}+(1+t^2)^{3/2}(1+t^{-1})\big)\right).
\end{aligned} \tag{3.34}$$

Здесь $\widetilde{C}_{10}:=\widehat{C}_{10}+c_3\mathcal{C}_1^{1/2}C_16$. В заключение заметим, что при $|t|<1$ старшая степень t в правой части (3.34) — это t^0, а при $|t|\geqslant 1$ старшая степень — t^5. С учетом этого соображения из (3.34) вытекает оценка (2.9) с постоянной $C_{10}:=(3+2^{5/2})\widetilde{C}_{10}$. $\square$

3.3 Доказательство теоремы 2.2

Доказательство теоремы 2.2. Используя теорему 2.3, тождество (3.25) и аналогичное тождество для эффективного оператора, находим

$$\begin{aligned}
&\Big\|\big(B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})B_{D,\varepsilon}^{-1}-(B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-1}\\
&-\varepsilon(\Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D})+\widetilde{\Lambda}^\varepsilon)S_\varepsilon P_\mathcal{O}(B_D^0)^{-1/2}\sin(t(B_D^0)^{1/2})(B_D^0)^{-1}\big)(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\\
&\leqslant C_{10}\varepsilon^{1/2}|t|(1+|t|^5),\quad t\in\mathbb{R},\quad 0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_1.
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Далее, на основании (1.18), (1.40) и (3.1) имеем

$$\|B_{D,\varepsilon}^{-1/2}\sin(tB_{D,\varepsilon}^{1/2})(B_{D,\varepsilon}^{-1}-(B_D^0)^{-1})(B_D^0)^{-1}\|_{L_2(\mathcal{O})\to H^1(\mathcal{O})}\leqslant c_3\max\{1;c_\flat^{-2}\}C_2\mathcal{C}_1\varepsilon. \tag{3.36}$$

Объединяя (3.35) и (3.36), приходим к оценке (2.7) с постоянной

$$C_8 := 2\left(C_{10} + c_3 \max\{1; c_\flat^{-2}\} C_2 \mathcal{C}_1\right).$$

Проверим неравенство (2.8). Из (1.3) и (2.7) следует, что при $t \in \mathbb{R}$ и $0 < \varepsilon \leqslant \varepsilon_1$ выполнено

$$\begin{aligned}&\Big\| \Big(g^\varepsilon b(\mathbf{D}) B_{D,\varepsilon}^{-1/2} \sin(t B_{D,\varepsilon}^{1/2}) - g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \big(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) S_\varepsilon P_\mathcal{O} + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon P_\mathcal{O}\big) (B_D^0)^{-1/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}) \Big) \\ &\quad \times (B_D^0)^{-2} \Big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathcal{O})} \leqslant (d\alpha_1)^{1/2} C_8 \|g\|_{L_\infty} \varepsilon^{1/2} (1 + t^6).\end{aligned} \tag{3.37}$$

Имеем

$$\begin{aligned}&g^\varepsilon b(\mathbf{D}) \big(I + \varepsilon \Lambda^\varepsilon b(\mathbf{D}) S_\varepsilon P_\mathcal{O} + \varepsilon \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon P_\mathcal{O}\big) (B_D^0)^{-1/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}) (B_D^0)^{-2} \\ &\quad = g^\varepsilon b(\mathbf{D}) (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}) + g^\varepsilon \left(b(\mathbf{D}) \Lambda\right)^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}) \\ &\quad + g^\varepsilon \left(b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}\right)^\varepsilon S_\varepsilon P_\mathcal{O} (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}) \\ &\quad + \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \left(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l\right) P_\mathcal{O} (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}).\end{aligned} \tag{3.38}$$

Четвертое слагаемое справа в (3.38) оценим на основании (1.3), (1.63) и (1.64):

$$\begin{aligned}&\Big\| \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \left(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l\right) P_\mathcal{O} (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}) \Big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} M_1 \|b(\mathbf{D}) \mathbf{D} P_\mathcal{O} (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad + \varepsilon (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \widetilde{M}_1 \|\mathbf{D} P_\mathcal{O} (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned} \tag{3.39}$$

Объединяя (1.2), (1.57), (2.15) и (3.39), находим

$$\begin{aligned}&\Big\| \varepsilon \sum_{l=1}^d g^\varepsilon b_l \left(\Lambda^\varepsilon S_\varepsilon b(\mathbf{D}) D_l + \widetilde{\Lambda}^\varepsilon S_\varepsilon D_l\right) P_\mathcal{O} (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2}) \Big\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant \varepsilon |t| \widehat{C}_9, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1,\end{aligned} \tag{3.40}$$

где $\widehat{C}_9 := (d\alpha_1)^{1/2} \|g\|_{L_\infty} \big(M_1 \alpha_1^{1/2} C_\mathcal{O}^{(2)} + \widetilde{M}_1 C_\mathcal{O}^{(1)}\big) \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_3$.

В силу предложения 1.1 и (1.2), (1.57), (2.15) имеем

$$\begin{aligned}&\|g^\varepsilon b(\mathbf{D}) (S_\varepsilon - I) P_\mathcal{O} (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant \varepsilon r_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D} b(\mathbf{D}) P_\mathcal{O} (B_D^0)^{-5/2} \sin(t (B_D^0)^{1/2})\|_{L_2(\mathcal{O}) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\quad \leqslant \varepsilon |t| r_1 \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} C_\mathcal{O}^{(2)} \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_3.\end{aligned} \tag{3.41}$$

Теперь из (1.22), (3.37), (3.38), (3.40) и (3.41) вытекает неравенство (2.8) с постоянной $C_9 := (d\alpha_1)^{1/2} C_8 \|g\|_{L_\infty} + \widehat{C}_9 + r_1 \|g\|_{L_\infty} \alpha_1^{1/2} C_\mathcal{O}^{(2)} \mathcal{C}_1 \mathcal{C}_3$. $\square$

Список литературы

[ABriV] Allaire G., Briane M., Vanninathan M., *A comparison between two-scale asymptotic expansions and Bloch wave expansions for the homogenization of periodic structures*, SeMA Journal **73** (2016), no. 3, 237–259.

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLPap] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, corrected reprint of the 1978 original. AMS Chelsea Publishing, Providence, 2011.

[BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), вып. 5, 1–108.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), вып. 6, 1–104.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ **18** (2006), № 6, 1–130.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ **20** (2008), № 6, 30–107.

[BrOtFMu] Brahim-Otsmane S., Francfort G. A., Murat F., *Correctors for the homogenization of the wave and heat equations*, J. Math. Pures Appl. **71** (1992), 197–231.

[BraLe] Brassart M., Lenczner M., *A two scale model for the periodic homogenization of the wave equation*, J. Math. Pures Appl. **93** (2010), no. 5, 474–517.

[CaDiCoCalMaMarG] Casado-Diaz J., Couce-Calvo J., Maestre F., Martin-Gomez J. D., *Homogenization and correctors for the wave equation with periodic coefficients*, Math. Models Methods Appl. Sci. **24** (2014), 1343—1388.

[ChEl] Chill R., ter Elst A. F. M., *Weak and Strong Approximation of Semigroups on Hilbert Spaces*, Integr. Equ. Oper. Theory **90** (2018), no. 9.

[ConOrV] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *On Burnett coefficients in periodic media*, J. Math. Phys. **47**, 032902 (2006), no. 3.

[ConSaMaBalV] Conca C., SanMartin J., Balilescu L., Vanninathan M., *Optimal bounds on dispersion coefficient in one-dimensional periodic media*, Math. Models Methods Appl. Sci. **19** (2009), 1743–1764.

[CooSav] Cooper Sh., Savostianov A., *Homogenisation with error estimates of attractors for damped semi-linear anisotropic wave equations*, arXiv:1804.09947 (2018).

[DSu] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Differential Equations **264** (2018), no. 12, 7463–7522.

[Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

[Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.

[GraRy] Градштейн И. С., Рыжик И. М., *Таблицы интегралов, рядов и произведений*, БХВ-Петербург, СПб., 2011.

[KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Z., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Rat. Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.

[KoE] Кондратьев В. А., Эйдельман С. Д., *Об условиях на граничную поверхность в теории эллиптических граничных задач*, Докл. АН СССР **246** (1979), вып. 4, 812–815.

[LaU] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

[MaSh] Мазья В. Г., Шапошникова Т. О., *Мультипликаторы в пространствах дифференцируемых функций*, Изд. ЛГУ, Ленинград, 1986.

[McL] McLean W., *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.

[M] Meshkova Yu., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients*, arXiv:1705.02531 (2017).

[MSu1] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Two-parametric error estimates in homogenization of second order elliptic systems in $\mathbb{R}^d$*, Appl. Anal. **95** (2016), no. 7, 1413–1448.

[MSu2] Meshkova Yu. M., Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: Two-parametric error estimates*, arXiv:1702.00550v4 (2017).

[MSu3] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение задачи Дирихле для эллиптических и параболических систем с периодическими коэффициентами*, Функц. анализ и его прил. **51** (2017), вып. 3, 87–93.

[MSu4] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем: операторные оценки погрешности*, Алгебра и анализ **29** (2017), № 6, 99–158.

[Pas] Пастухова С. Е., *О сходимости гиперболических полугрупп в переменном гильбертовом пространстве*, Труды семинара им. И. Г. Петровского, **24** (2004), 216–241.

[PSu] Пахнин М. А., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптической задачи Дирихле в ограниченной области*, Алгебра и анализ **24** (2012), № 6, 139–177.

[R] Rychkov V. S., *On restrictions and extensions of the Besov and Triebel–Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains*, J. London Math. Soc. **60** (1999), 237–257.

[Sa] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

[St] Стейн И. М., *Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций*, Мир, М., 1973.

[Su1] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space* $H^1(\mathbb{R}^d)$, Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.

[Su2] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева* $H^1(\mathbb{R}^d)$ *для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), вып. 1, 108–222.

[Su3] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems:* L_2*-operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463-476.

[Su4] Suslina T. A., *Homogenization of the Neumann problem for elliptic systems with periodic coefficients*, SIAM J. Math. Anal. **45** (2013), no. 6, 3453-3493.

[ViGKo] Виленкин Н. Я., Горин Е. А., Костюченко А. Г. и др., *Функциональный анализ.* Серия „Справочная математическая библиотека“, Наука, М., 1964.

[Xu] Xu Q., *Convergence rates for general elliptic homogenization problems in Lipschitz domains*, SIAM J. Math. Anal. **48** (2016), no. 6, 3742–3788.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[Zh] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), № 3, 305–308.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515-524.

[ZhPas2] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *О теореме Троттера–Като в переменном пространстве*, Функц. анализ и его прил., **41**:4 (2007), 22–29.

[ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН **71 (429)** (2016), № 3, 27–122.