Гипотеза Римана и диофантовы уравнения.

Б.З. Мороз

1. Как известно [1], [2], любое перечислимое множество диофантово. Доказательство этой теоремы конструктивно, так что для любого перечислимого подмножества S множества натуральных чисел $\mathbb{N}$ в принципе можно построить полином $P_S(t;\mathbf{x})$ in $\mathbb{Z}[t,\mathbf{x}]$, $\mathbf{x} := (x_1,\ldots,x_n)$, $n \in \mathbb{N}$ под условием

$$S = \{a \mid a \in \mathbb{N},\ (\exists\, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^n)\ P_S(a;\mathbf{b}) = 0\}.$$

Развитая в ходе доказательства этой теоремы техника диофантового кодирования позволяет переформулировать многие математические проблемы как задачи о разрешимости подходящих диофантовых уравнений; в частности, гипотеза Римана (=: RH) эквивалентна неразрешимости некоторого диофантового уравнения (ср. [6], [3]). Цель этой заметки - построить такое уравнение (ср. [7]).

Обозначения. Как обычно, $\mathbb{Z}$ есть кольцо целых чисел, $\mathbb{N}$ - множество натуральных (:= положительных целых) чисел, $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N}\cup\{0\}$ и $\psi(n)$ есть функция Чебышёва, так что

$$\psi(n) := \text{ н.о.к. } \{1,2,...,n\} \text{ при } n \in \mathbb{N}.$$

Положим

$$\mathbf{x} * \mathbf{y} := (a_1,...,a_m,b_1,...,b_n) \text{ и } L(\mathbf{x}) = m,\ L(\mathbf{y}) = n$$

при $\mathbf{x} := (a_1,...,a_m)$ и $\mathbf{y} := (b_1,...,b_n)$. Положим, для краткости,

$$(\forall j \le n)\, \mathfrak{A} := \forall j\ ((j \in \mathbb{N}\ \&\ j \le n)\ \Rightarrow\ \mathfrak{A})$$

и

$$(\exists j \le n)\, \mathfrak{A} := \exists j\ (j \in \mathbb{N}\ \&\ j \le n\ \&\ \mathfrak{A}),$$

где $\mathfrak{A}$ есть какая-либо арифметическая формула. Остальные используемые обозначения самоочевидны или общеприняты.

Следуя [3, §6.4], определим на $\mathbb{N}_0^2$ бинарное отношение

$$A(a,b) :=\ \exists c\ (c > b+1\ \&\ (1+1/c)^{cb} \le a+1 < 4(1+1/c)^{cb}).$$

Лемма 1. *Имеют место следующие утверждения:*

$$(\forall a \in \mathbb{N}_0 \ \exists\, b \in \mathbb{N}_0) \ A(a, b)$$

и

$$A(a, b) \Rightarrow |b - \log(a + 1)| < 2.$$

Доказательство. См. [3, §6.4].

Лемма 2. *Гипотеза Римана эквивалентна следующему утверждению:*

$$(\forall n \geq 73) \ |\psi(n) - n| < n^{1/2} (\log n)^2. \tag{1}$$

Доказательство. Эта эквивалентность доказана в работе [8] .

Предложение 1. *Отрицание гипотезы Римана эквивалентно существованию положительных целых чисел k, l, m, n, удовлетворяющих следующим условиям:*

$$\mathfrak{A}_1 := n \geq 73; \ \mathfrak{A}_2 := (\forall y \leq n) \ y|m; \ \mathfrak{A}_3 := (\forall y \leq m - 1 \ \exists x \leq n) \ x \not| \ y;$$

$$\mathfrak{A}_4 := A(m - 1, l); \ \mathfrak{A}_5 := A(n - 1, k); \ \mathfrak{A}_6 := (l - n)^2 > 4nk^4.$$

Доказательство. Как показано в [3, §6.4], это утверждение следует из лемм 1 и 2.

2. Техника диофантового кодирования [1] - [3], [5], [6] позволяет построить полиномы

$$P_i(k, l, m, n; \mathbf{x}), \ \mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_{n_i}), \ 1 \leq i \leq 6,$$

с целыми рациональными коэффициентами такие, что

$$\mathfrak{A}_i \ \Leftrightarrow \ (\exists\, \mathbf{b} \in \mathbb{Z}^{n_i}) \ P_i(k, l, m, n; \mathbf{b}) = 0 \ \text{ при } 1 \leq i \leq 6. \tag{2}$$

Технически проще, однако, построить целочисленные полиномы

$$G_i(k, l, m, n; \mathbf{x}), \ \mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_{m_i}), \ 1 \leq i \leq 6,$$

удовлетворяющие условиям

$$\mathfrak{A}_i \ \Leftrightarrow \ (\exists\, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^{m_i}) \ G_i(k, l, m, n; \mathbf{b}) = 0 \ \text{ при } 1 \leq i \leq 6. \tag{3}$$

Чтобы перейти от соотношений (3) к соотношениям (2), достаточно воспользоваться теоремой Лагранжа, заменив натуральные числа в (3) на суммы четырёх квадратов целых чисел, ср. [3, §1.3].

Лемма 3. *Полиномы*

$$G_1(k,l,m,n;\mathbf{x}) := 72 - n + x_1,\ \mathbf{x} := x_1$$

и

$$G_6(k,l,m,n;\mathbf{x}) := (l-n)^2 - 4nk^4 + x_1,\ \mathbf{x} := x_1$$

(с $m_1 = m_6 = 1$) удовлетворяют условию (3) *при $i \in \{1, 6\}$.*

Доказательство. Это утверждение очевидно.

Лемма 4. *В обозначениях работы* [4]*, положим*

$$G_2(k,l,m,n;\mathbf{x},\mathbf{b}) := (m - b_1x_1 - b_2)^2 + (m + nb_3 - b_4)^2 - H_1(\mathbf{x},\mathbf{b})$$

с $\mathbf{x} := \mathbf{x}^{(1)} * ... * \mathbf{x}^{(6)},\ L(\mathbf{x}) = 601$*;*

$L(\mathbf{x}^{(1)}) = L(\mathbf{x}^{(4)}) = L(\mathbf{x}^{(5)}) = 1, L(\mathbf{x}^{(2)}) = 118, L(\mathbf{x}^{(3)}) = L(\mathbf{x}^{(6)}) = 240$ *и* $L(\mathbf{b}) = 7$.

Полином $G_2(k,l,m,n;\mathbf{x},\mathbf{b})$ (с $m_2 = 608$) удовлетворяет условию (3) *при $i = 2$, т.е.*

$$\mathfrak{A}_2 \ \Leftrightarrow\ (\exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{601}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^7)\ G_2(k,l,m,n;\mathbf{x},\mathbf{b}) = 0. \qquad (4)$$

Доказательство. Ясно, что

$$\mathfrak{A}_2 \ \Leftrightarrow\ (\forall j \le n\ \exists\, c \in \mathbb{N})\ P(n,j;m,c) = 0$$

с

$$P(n,j;m,c) := m - jc.$$

Полагая

$$R(n,T;m) := m + nT,$$

легко находим, что полиномы P и R удовлетворяют всем условиям теоремы об устранении ограниченного квантора всеобщности [4, Proposition 6]. Соотношение (4) есть следствие этой теоремы.

Лемма 5. *В обозначениях работы* [4]*, положим*

$$P(m-1,j;n,\mathbf{c}) := (c_1 - c_3 - c_5)^2 + (n - c_1 - c_4 + 1)^2 + (j - c_1(c_2 - 1) - c_3)^2,$$

$$R(m-1,T;n) := 9T^2 + (2T + n + 1)^2 + (m + T^2 + 2T)^2$$

и

$$G_3(k,l,m,n;\mathbf{x},\mathbf{b}) := (P(m-1,b_1;n,\mathbf{x}^{(1)}) - b_2)^2 + (R(m-1,b_3;n) - b_4)^2 + H_5(\mathbf{x},\mathbf{b})$$

с

$$\mathbf{x} := \mathbf{x}^{(1)} * ... * \mathbf{x}^{(10)};\ L(\mathbf{x}^{(1)}) = L(\mathbf{x}^{(4)}) = L(\mathbf{x}^{(5)}) = 5,$$
$$L(\mathbf{x}^{(2)}) = 118,\ L(\mathbf{x}^{(3)}) = L(\mathbf{x}^{(6)}) = ... = L(\mathbf{x}^{(10)}) = 240$$

и

$$L(\mathbf{b}) = 7.$$

Полином $G_3(k, l, m, n; \mathbf{x}, \mathbf{b})$ *(с* $m_3 = 1580$*) удовлетворяет условию* (3) *при* $i = 3$*, т.е.*

$$\mathfrak{A}_3 \iff (\exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{1573}, \mathbf{b} \in \mathbb{N}^7)\ G_3(k, l, m, n; \mathbf{x}, \mathbf{b}) = 0. \tag{5}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что

$$\mathfrak{A}_3 \iff (\forall j \le n\ \exists\, \mathbf{c} \in \mathbb{N}^5)\ P(m-1, j; n, \mathbf{c}) = 0.$$

С другой стороны, нетрудно показать, что полиномы P и R удовлетворяют всем условиям теоремы об устранении ограниченного квантора всеобщности [4, Proposition 6]. Как и при доказательстве леммы 4, соотношение (5) вытекает из этой теоремы.

Лемма 6. *Пусть, в обозначениях работы* [4],

$$G_0(a, b; \mathbf{x}) := (z_1 + b - c + 1)^2 + (z_2 + y_1 - y_2(a+1) - 1)^2 +$$
$$(z_3 - 4y_1 + y_2(a+1))^2 + f_3(y_1, 1+c, bc; \mathbf{x}^{(1)}) + f_3(y_2, c, bc; \mathbf{x}^{(2)})$$

с

$$\mathbf{x} := c * \mathbf{z} * \mathbf{y} * \mathbf{x}^{(1)} * \mathbf{x}^{(2)},\ \mathbf{z} := (z_1, z_2, z_3),\ \mathbf{y} := (y_1, y_2),$$
$$\mathbf{x}^{(j)} := (\mathbf{x}_1^{(j)}, ..., \mathbf{x}_{20}^{(j)})\ \text{ при } j \in \{1, 2\}.$$

Тогда

$$A(a, b) \iff (\exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{46})\ G_0(a, b; \mathbf{x}) = 0. \tag{6}$$

Доказательство. По определению,

$$A(a, b) \iff \exists c\ (c > b + 1\ \&\ (1+c)^{cb} \le (a+1)c^{cb} < 4(1+c)^{cb}). \tag{7}$$

Соотношение (6) следует из соотношения (7) и леммы о диофантовости функции

$$\varphi : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N},\ \varphi : (x, y) \mapsto x^y$$

возведения в степень [4, Lemma 2].

Следствие 1. *Положим*

$$G_4(k,l,m,n;\mathbf{x}) := G_0(m-1,l;\mathbf{x}) \ \text{ и } \ G_5(k,l,m,n;\mathbf{x}) := G_0(n-1,k;\mathbf{x}),$$

тогда

$$\mathfrak{A}_i \ \Leftrightarrow \ (\exists\, \mathbf{x} \in \mathbb{N}^{46})\ G_i(k,l,m,n;\mathbf{x}) = 0 \ \text{ при } \ i \in \{4,5\}. \tag{8}$$

Доказательство. Соотношение (8) следует из (6) при

$$(a,b) = (m-1,l), i = 4 \ \text{ или } \ (a,b) = (n-1,k), i = 5.$$

Обозначение. Положим

$$G(\mathbf{z}) := \sum_{i=1}^{6} G_i(k,l,m,n;\mathbf{y}^{(i)})^2$$

с

$$\mathbf{z} := (k,l,m,n) * \mathbf{y},\ \mathbf{y} := \mathbf{y}^{(1)} * ... * \mathbf{y}^{(6)},\ L(\mathbf{z}) = 2286;$$

$$L(\mathbf{y}^{(1)}) = L(\mathbf{y}^{(6)}) = 1,\ L(\mathbf{y}^{(2)}) = 608,\ L(\mathbf{y}^{(3)}) = 1580,\ L(\mathbf{y}^{(4)}) = L(\mathbf{y}^{(5)}) = 46.$$

Теорема 1. *Гипотеза Римана эквивалентна утверждению*

$$(\forall\, \mathbf{z} \in \mathbb{N}^{2286})\ G(\mathbf{z}) \neq 0.$$

Доказательство. Это утверждение вытекает из предложения 1, лемм 3 - 5 и следствия 1.

3. **Открытая проблема.** Построить достаточно простое диофантово уравнение, неразрешимость которого эквивалентна гипотезе Римана.

Список литературы

[1] Ю.В. Матиясевич, Диофантовость перечислимых множеств, *Доклады АН СССР,* 191:2 (1970), 278-282 .

[2] Ю.В. Матиясевич, Диофантово представление перечислимых предикатов, *Известия АН СССР (Серия математическая),* 35:1 (1971), 3-30.

[3] Ю.В. Матиясевич, *Десятая проблема Гильберта,* Москва, Наука, 1993.

[4] M. Carl and B.Z. Moroz, On a Diophantine representation of the predicate of provability, *Записки научных семинаров ПОМИ,* 407 (2012), 77-104.

[5] M. Davis, Hilbert's tenth problem is unsolvable, *The American Mathematical Monthly, 80 (1973),* 233 - 269.

[6] M. Davis, Yu. Matijasevič, and Ju. Robinson, Hilbert's tenth problem. Diophantine equations: positive aspects of a negative solution, *Proceedings of Symposia in Pure Mathematics,* 28 (1976), 323-378.

[7] J.M. Hernandez Caceres, The Riemann Hypothesis and Diophantine equations, Master's Thesis Mathematics, *Mathematical Institute, University of Bonn,* May 2, 2018.

[8] L. Schoenfield, Sharper bounds for the Chebyshev functions $\psi(x)$ and $\theta(x)$, *Mathematics of Computation,* 30 (1976), 337- 360.