

Усреднение периодических параболических систем по $L_2(\mathbb{R}^d)$ -норме при учете корректора^{*†}

Ю. М. Мешкова [‡]

21 сентября 2018 г.

Аннотация

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряженный матричный эллиптический дифференциальный оператор \mathcal{B}_ε , $0 < \varepsilon \leq 1$, второго порядка. Старшая часть оператора задана в факторизованной форме, оператор включает члены первого и нулевого порядков. Оператор \mathcal{B}_ε положительно определен, его коэффициенты периодичны и зависят от \mathbf{x}/ε . В работе изучается поведение в пределе малого периода операторной экспоненты $e^{-\mathcal{B}_\varepsilon t}$, $t \geq 0$. Для нее получена аппроксимация по $(L_2 \rightarrow L_2)$ -операторной норме с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$. В этой аппроксимации учтен корректор. Результаты применяются к усреднению решений задачи Коши для параболических систем.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, параболические системы, усреднение, операторные оценки погрешности.

Содержание

Введение	2
Глава 1. Абстрактная схема	8

^{*}Представлено Т. А. Суслиной.

[†]Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант №14-21-00035.

[‡]Лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербургский государственный университет, 14 линия В. О., дом 29Б, Санкт-Петербург 199178 Россия. E-mail: y.meshkova@spbu.ru, juliavmeshke@yandex.ru.

1	Предварительные сведения	8
2	Аппроксимация оператора $e^{-B(t,\varepsilon)s}$ с учетом корректора	17
3	Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты	24
Глава 2. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$		30
4	Предварительные сведения	30
5	Разложение оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$ в прямой интеграл	35
6	Включение операторов $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ в абстрактную схему	39
7	Эффективные характеристики	42
8	Аппроксимация оператора $f e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)s} f^*$	48
9	Аппроксимация оператора $f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^*$	50
Глава 3. Задача усреднения для параболических систем		55
10	Усреднение оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^*$	55
11	Усреднение решений задачи Коши для параболических систем	60
12	Пример применения общей схемы: скалярный эллиптический оператор	63

Введение

Исследование относится к теории усреднения периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам усреднения посвящена обширная литература; см., например, книги [BaPa, BeLP, ZhKO, Sa]. Мы опираемся на спектральный подход к задачам усреднения, основанный на теории Флоке-Блоха и аналитической теории возмущений и развитый в цикле работ М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1, BSu2, BSu3, BSu4, BSu5]. Значительная часть построений проводится в абстрактных теоретико-операторных терминах.

0.1 Постановка задачи

Изучается усреднение в пределе малого периода решений задачи Коши для параболических систем вида

$$\begin{cases} G(\mathbf{x}/\varepsilon)\partial_s \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s) = -\mathcal{B}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, s > 0; \\ G(\mathbf{x}/\varepsilon)\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (0.1)$$

Здесь $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, \mathcal{B}_ε — матричный эллиптический ДО второго порядка, действующий в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Измеримая $(n \times n)$ -матрица-функция $G(\mathbf{x})$ предполагается ограниченной, равномерно положительно определенной и периодической относительно некоторой решетки $\Gamma \subset \mathbb{R}^d$. Коэффициенты оператора \mathcal{B}_ε — Γ -периодические функции, зависящие от \mathbf{x}/ε . Для всякой измеримой Γ -периодической функции $\varphi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, будем пользоваться обозначением $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \varphi(\mathbf{x}/\varepsilon)$.

Старшая часть \mathcal{A}_ε оператора \mathcal{B}_ε задана в факторизованной форме

$$\mathcal{A}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad (0.2)$$

где $b(\mathbf{D})$ — матричный однородный ДО первого порядка, $g(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая ограниченная и положительно определенная матрица-функция в \mathbb{R}^d . (Точные условия на коэффициенты оператора \mathcal{B}_ε приведены ниже в §4.) Оператор \mathcal{B}_ε включает члены первого и нулевого порядков:

$$\mathcal{B}_\varepsilon \mathbf{u} = \mathcal{A}_\varepsilon \mathbf{u} + \sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j \mathbf{u} + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \mathbf{u}) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u} + \lambda \mathbf{u}. \quad (0.3)$$

Здесь $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$, — Γ -периодические $(n \times n)$ -матрицы-функции из подходящего пространства L_q на ячейке Ω решетки Γ . Потенциал $\mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x})$ — вообще говоря, обобщенная функция со значениями в классе эрмитовых матриц, порожденная некоторой быстро осциллирующей мерой. (Так как коэффициенты не предполагаются гладкими, строгое определение оператора (0.3) дается через квадратичную форму.) Постоянная λ выбирается так, чтобы оператор \mathcal{B}_ε был положительно определен. Коэффициенты оператора \mathcal{B}_ε быстро осциллируют при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Старший член аппроксимации решения задачи (0.1) при малом ε получен в [M]:

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 \varepsilon (s + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-C_2 s} \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad s \geq 0. \quad (0.4)$$

Здесь \mathbf{u}_0 — решение „усредненной“ задачи

$$\begin{cases} \overline{G} \partial_s \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) = -\mathcal{B}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, s > 0; \\ \overline{G} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

где \mathcal{B}^0 — *эффективный оператор* с постоянными коэффициентами, \overline{G} — среднее значение матрицы G по ячейке периодов: $\overline{G} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} G(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. В случае, когда $G(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_n$, оценка (0.4) допускает очевидную запись в операторных терминах:

$$\|e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} - e^{-\mathcal{B}^0 s}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_1 \varepsilon (s + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-C_2 s}.$$

Поэтому результаты такого сорта принято называть *операторными оценками погрешности* в теории усреднения. (В общем случае приходится иметь дело с „окаймленной“ экспонентой $f^\varepsilon e^{-(f^\varepsilon)^* \mathcal{B}_\varepsilon f^\varepsilon s} (f^\varepsilon)^*$, где $G^{-1} = f f^*$, причем матрица-функция f предполагается Γ -периодической.)

Цель работы — уточнить аппроксимацию (0.4) за счет введения *корректора*. Иными словами, при фиксированном времени $s > 0$ приблизить решение $\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s)$ задачи (0.1) по $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ -норме с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon^2)$.

0.2 Основные результаты

Во введении ограничимся обсуждением случая $G(\mathbf{x}) = \mathbf{1}_n$. *Основной результат работы* — оценка

$$\|e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} - e^{-\mathcal{B}^0 s} - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_3 \varepsilon^2 (s + \varepsilon^2)^{-1} e^{-C_2 s}, \quad s > 0. \quad (0.5)$$

Здесь $\mathcal{K}(\varepsilon, s)$ — корректор. Оказывается, что он является суммой трех членов, причем два члена корректора взаимно сопряжены и содержат быстро осциллирующие множители. Третье слагаемое не содержит переменных коэффициентов.

0.3 Операторные оценки погрешности: обзор

Интерес к операторным оценкам погрешности возник в связи с работой М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1], где для резольвенты оператора (0.2) была установлена оценка

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.6)$$

Здесь $\mathcal{A}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор, g^0 — постоянная эффективная матрица. Аппроксимация оператора $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ при учете корректора найдена в [BSu4]:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^2. \quad (0.7)$$

Приближение резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по энергетической норме получено в [BSu5]:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^0 + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.8)$$

Здесь $K_1(\varepsilon)$ соответствует традиционному корректору в теории усреднения. Этот оператор содержит быстро осциллирующие множители, поэтому $\varepsilon \|K_1(\varepsilon)\|_{L_2 \rightarrow H^1} = O(1)$. Отметим, что корректор в (0.7) имеет вид $K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) + K_1(\varepsilon)^* + K_3$, причем K_3 от ε не зависит. Впоследствии оценки (0.6)–(0.8) были обобщены Т. А. Суслиной [Su4, Su7] на более широкий класс операторов (0.3).

К параболическим системам спектральный метод применялся в работах Т. А. Суслиной [Su1, Su2], где был найден старший член аппроксимации оператора $e^{-\mathcal{A}_\varepsilon s}$, Е. С. Василевской [V], где установлено приближение при учете корректора по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а также в [Su3], где получено приближение экспоненты по энергетической норме:

$$\|e^{-\mathcal{A}_\varepsilon s} - e^{-\mathcal{A}^0 s}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon(s + \varepsilon^2)^{-1/2}, \quad s \geq 0; \quad (0.9)$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_\varepsilon s} - e^{-\mathcal{A}^0 s} - \varepsilon \mathcal{K}(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon^2(s + \varepsilon^2)^{-1}, \quad s \geq 0; \quad (0.10)$$

$$\|e^{-\mathcal{A}_\varepsilon s} - e^{-\mathcal{A}^0 s} - \varepsilon \mathcal{K}_1(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^1(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon(s^{-1/2} + s^{-1}), \quad s \geq \varepsilon^2. \quad (0.11)$$

В этих оценках нет экспоненциального убывания по времени, поскольку операторы \mathcal{A}_ε и \mathcal{A}^0 имеют краем спектра точку нуль. Обобщение оценок (0.9) и (0.11) на оператор (0.3) получено в работе автора [M]. Обобщение оценки (0.10) — основной результат настоящей работы.

Другой подход к получению операторных оценок погрешности в теории усреднения был предложен В. В. Жиковым [Zh] и развит им совместно с С. Е. Пастуховой [ZhPas1, ZhPas2]. Метод, названный авторами „методом сдвига” или „модифицированным методом первого приближения”, основан на введении в задачу дополнительного параметра — сдвига на вектор из \mathbb{R}^d , тщательном анализе первого приближения к решению и последующем интегрировании по параметру сдвига. Важную роль играет использование сглаживания по Стеклову. В работах [Zh, ZhPas1] получены аналоги

оценок (0.6), (0.8) для операторов акустики и теории упругости. К параболическим задачам метод сдвига применялся в [ZhPas2], где установлены аналоги неравенств (0.9) и (0.11). Изложение дальнейших результатов В. В. Жикова, С. Е. Пастуховой и их учеников можно найти в обзоре [ZhPas3].

До сих пор обсуждались операторные оценки погрешности для операторов, действующих во всем пространстве \mathbb{R}^d . Для полноты изложения отметим, что изучение операторов, действующих в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, более традиционно для теории усреднения. Операторные оценки погрешности для таких задач изучались многими авторами. Выделим, в частности, работы [MoVo, Gr1, Gr2, ZhPas1, KeLiS, Su6, Xu, GeS]. (Более подробный обзор результатов по операторным оценкам погрешности для задач в ограниченной области можно найти во введении к работе [MSu].)

0.4 Метод исследования

Обсудим случай $G = \mathbf{1}_n$. Используя масштабное преобразование, мы сводим доказательство оценки (0.5) к доказательству аналогичной оценки для операторной экспоненты $e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)\varepsilon^{-2}s}$, где $\mathcal{B}(\varepsilon)$ — оператор в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{B}(\varepsilon) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d (a_j(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j(\mathbf{x})^*) + \varepsilon^2 \mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \lambda I.$$

Таким образом, от изучения экспоненты от оператора с быстро осциллирующими коэффициентами мы переходим к изучению поведения при больших значениях времени экспоненты от оператора, коэффициенты которого зависят от \mathbf{x} , а не от \mathbf{x}/ε .

С помощью теории Флоке-Блоха оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл операторов $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$, действующих в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ и зависящих от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ (квазиимпульса). Формально оператор $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ задан выражением

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon) &= b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d (a_j(\mathbf{x}) (D_j + k_j) + (D_j + k_j) a_j(\mathbf{x})^*) \\ &\quad + \varepsilon^2 \mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \lambda I \end{aligned}$$

с периодическими граничными условиями. Спектр операторов $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ дискретен. Следуя [Su4, Su7], мы выделяем одномерный параметр

$\tau = (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ и изучаем семейство $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ методами аналитической теории возмущений по параметру τ .

0.5 Структура работы

Работа состоит из введения и трех глав. В главе 1 (§1–3) излагается абстрактная теоретико-операторная схема. В главе 2 (§4–9) изучаются периодические ДУ. Получена аппроксимация „окаймленной” операторной экспоненты (в §9). Глава 3 (§10–12) посвящена усреднению решений задачи Коши для параболических систем. В §10 из результатов §9 с помощью масштабного преобразования выводится основной результат работы — оценка (0.5). В §11 результаты в операторных терминах применяются к усреднению решений параболических систем. В §12 рассматривается пример — скалярный эллиптический оператор.

0.6 Обозначения

Пусть \mathfrak{H} , \mathfrak{H}_* — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символами $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ обозначим скалярное произведение и норму в \mathfrak{H} ; символом $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*}$ обозначим норму линейного непрерывного оператора из \mathfrak{H} в \mathfrak{H}_* .

Через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $|\cdot|$ обозначим соответственно скалярное произведение и норму в \mathbb{C}^n , через $\mathbf{1}_n$ — единичную $(n \times n)$ -матрицу. Если a — $(m \times n)$ -матрица, то символ $|a|$ означает норму матрицы a как оператора из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^m . Используем обозначения $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \partial_j = \partial/\partial x_j$, $j = 1, \dots, d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$. Классы L_p вектор-функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ со значениями в \mathbb{C}^n обозначаем через $L_p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Классы Соболева \mathbb{C}^n -значных функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ обозначаются через $H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т. д., но, если это не ведет к недоразумениям, мы применяем такие упрощенные обозначения и для пространств вектор-функций или матричнозначных функций. Символ $L_p((0, T); \mathfrak{H})$, $1 \leq p \leq \infty$, означает L_p -пространство \mathfrak{H} -значных функций на интервале $(0, T)$.

Различные постоянные в оценках обозначаются символами $c, C, \mathfrak{C}, \mathcal{C}$ (возможно, с индексами и значками).

0.7

Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за постановку задачи и внимательное чтение рукописи и администрации лаборатории

им. П. Л. Чебышева, стимулировавшей завершение данного исследования.

Глава 1. Абстрактная схема

1 Предварительные сведения

Материал пунктов 1.1–1.9 заимствован из [Su4, Su5].

1.1 Операторы $X(t)$ и $A(t)$

Пусть \mathfrak{H} , \mathfrak{H}_* — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Пусть $X_0 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — плотно определенный замкнутый оператор, и пусть оператор $X_1 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ ограничен. На области определения $\text{Dom } X(t) = \text{Dom } X_0$ зададим оператор

$$X(t) := X_0 + tX_1 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Рассмотрим семейство самосопряженных в \mathfrak{H} неотрицательных операторов

$$A(t) := X(t)^* X(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad (1.2)$$

порожденное замкнутой в \mathfrak{H} квадратичной формой $\|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2$, $u \in \text{Dom } X_0$. Обозначим $A(0) = X_0^* X_0 =: A_0$. Положим

$$\mathfrak{N} := \text{Ker } A_0 = \text{Ker } X_0, \quad \mathfrak{N}_* := \text{Ker } X_0^*.$$

Через P обозначим ортогональный проектор пространства \mathfrak{H} на \mathfrak{N} , а через P_* — ортопроектор \mathfrak{H}_* на \mathfrak{N}_* .

Наложим следующее условие.

Условие 1.1. Точка $\lambda_0 = 0$ изолирована в спектре оператора A_0 , причем

$$0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty, \quad n \leq n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leq \infty.$$

Через d^0 обозначим расстояние от точки нуль до остального спектра оператора A_0 .

1.2 Операторы $Y(t)$ и Y_2

Пусть $\tilde{\mathfrak{H}}$ — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $Y_0 : \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенный линейный оператор такой, что $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } Y_0$, а $Y_1 : \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$ — ограниченный линейный оператор. Положим $Y(t) = Y_0 + tY_1$, $\text{Dom } Y(t) = \text{Dom } Y_0$. Будем считать выполненным следующее условие.

Условие 1.2. *Найдется постоянная $c_1 > 0$ такая, что*

$$\|Y(t)u\|_{\tilde{\mathfrak{H}}} \leq c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \text{Dom } X_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

Из оценки (1.3) при $t = 0$ вытекает, что $\text{Ker } X_0 \subset \text{Ker } Y_0$, т. е. $Y_0 P = 0$.

Пусть $Y_2 : \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определенный линейный оператор, причем $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } Y_2$. Предположим, что справедливо следующее условие.

Условие 1.3. *Для любого $\nu > 0$ существует число $C(\nu) > 0$ такое, что*

$$\|Y_2 u\|_{\tilde{\mathfrak{H}}}^2 \leq \nu \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + C(\nu) \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.3 Форма \mathfrak{q}

Пусть в пространстве \mathfrak{H} задана плотно определенная эрмитова полуторалинейная форма $\mathfrak{q}[u, v]$, причем $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } \mathfrak{q}$. Наложим следующее условие.

Условие 1.4. *1°. Существуют такие постоянные $c_2 \geq 0$, $c_3 \geq 0$, что*

$$|\mathfrak{q}[u, v]| \leq (c_2 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + c_3 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2} (c_2 \|X(t)v\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + c_3 \|v\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2}, \\ u, v \in \text{Dom } X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

2°. Существуют такие постоянные $0 < \kappa \leq 1$ и $c_0 \in \mathbb{R}$, что

$$\mathfrak{q}[u, u] \geq -(1 - \kappa) \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 - c_0 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1.4 Оператор $B(t, \varepsilon)$

Пусть $\varepsilon \in (0, 1]$. В пространстве \mathfrak{H} рассмотрим эрмитову полуторалинейную форму

$$\mathfrak{b}(t, \varepsilon)[u, v] = (X(t)u, X(t)v)_{\mathfrak{H}_*} + \varepsilon \left((Y(t)u, Y_2 v)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2 u, Y(t)v)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \right) \\ + \varepsilon^2 \mathfrak{q}[u, v], \quad u, v \in \text{Dom } X_0. \quad (1.4)$$

Используя условия 1.2, 1.3, 1.4, легко установить оценки

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t, \varepsilon)[u, u] &\leq (2 + c_1^2 + c_2)\|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + (C(1) + c_3)\varepsilon^2\|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0, \\ \mathbf{b}(t, \varepsilon)[u, u] &\geq \frac{\kappa}{2}\|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 - (c_0 + c_4)\varepsilon^2\|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь

$$c_4 = 4\kappa^{-1}c_1^2C(\nu) \quad \text{при} \quad \nu = \kappa^2(16c_1^2)^{-1}. \quad (1.6)$$

Подробный вывод этих неравенств можно найти в [Su4, п. 1.4]. Таким образом, форма $\mathbf{b}(t, \varepsilon)$ замкнута и полуограничена снизу.

Самосопряженный оператор в пространстве \mathfrak{H} , отвечающий форме (1.4), обозначим через $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$. Формально,

$$\mathfrak{B}(t, \varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2Q.$$

Здесь Q — формальный объект, который мы сопоставляем в этой записи форме \mathfrak{q} .

Пусть $Q_0 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ — ограниченный положительно определенный оператор. Добавляя величину λQ_0 к Q , будем считать, что оператор

$$B(t, \varepsilon) := \mathfrak{B}(t, \varepsilon) + \lambda\varepsilon^2Q_0 = A(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2(Q + \lambda Q_0), \quad (1.7)$$

отвечающий форме

$$b(t, \varepsilon)[u, v] := \mathbf{b}(t, \varepsilon)[u, v] + \lambda\varepsilon^2(Q_0u, v)_{\mathfrak{H}}, \quad u, v \in \text{Dom } X_0, \quad (1.8)$$

положительно определен. Для этого наложим на λ ограничение

$$\begin{aligned} \lambda &> \|Q_0^{-1}\|(c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda \geq 0, \\ \lambda &> \|Q_0\|^{-1}(c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda < 0 \quad (\text{и } c_0 + c_4 < 0). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Условие (1.9) обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda(Q_0u, u)_{\mathfrak{H}} \geq (c_0 + c_4 + \beta)\|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \mathfrak{H}, \quad (1.10)$$

где $\beta > 0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda\|Q_0^{-1}\|^{-1} - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda \geq 0, \\ \beta &= \lambda\|Q_0\| - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda < 0 \quad (\text{и } c_0 + c_4 < 0). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Из (1.5) и (1.10) вытекает оценка снизу для формы (1.8):

$$b(t, \varepsilon)[u, u] \geq \frac{\kappa}{2}\|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + \beta\varepsilon^2\|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0. \quad (1.12)$$

Таким образом, $B(t, \varepsilon) > 0$. Оператор $B(t, \varepsilon)$ — основной объект исследования в главе 1.

1.5 Переход к параметрам τ, ϑ

Семейство $B(t, \varepsilon)$ представляет собой аналитическое операторное семейство относительно параметров t и ε . Если $t = \varepsilon = 0$, то оператор $B(0, 0)$ совпадает с A_0 и в силу условия 1.1 имеет изолированное собственное значение $\lambda_0 = 0$ кратности n . Хочется воспользоваться аналитической теорией возмущений. Однако при $n > 1$ мы имеем дело с кратным собственным значением и двумерным параметром. Аналитическая теория возмущений непосредственно неприменима. Поэтому мы выделяем одномерный параметр $\tau = (t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$. При этом приходится следить за зависимостью от дополнительных параметров $\vartheta_1 = t\tau^{-1}$ и $\vartheta_2 = \varepsilon\tau^{-1}$. Отметим, что вектор $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$ принадлежит единичной окружности. Оператор $B(t, \varepsilon)$ будем теперь обозначать через $B(\tau; \vartheta)$, а соответствующую форму $b(t, \varepsilon)$ через $b(\tau; \vartheta)$. Согласно (1.4) и (1.8) эта форма имеет вид

$$\begin{aligned} b(\tau; \vartheta)[u, v] &= (X_0u, X_0v)_{\mathfrak{H}_*} + \tau\vartheta_1 ((X_0u, X_1v)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1u, X_0v)_{\mathfrak{H}_*}) \\ &\quad + \tau^2\vartheta_1^2(X_1u, X_1v)_{\mathfrak{H}_*} + \tau\vartheta_2 \left((Y_0u, Y_2v)_{\mathfrak{H}} + (Y_2u, Y_0v)_{\mathfrak{H}} \right) \\ &\quad + \tau^2\vartheta_1\vartheta_2 \left((Y_1u, Y_2v)_{\mathfrak{H}} + (Y_2u, Y_1v)_{\mathfrak{H}} \right) \\ &\quad + \tau^2\vartheta_2^2 (\mathfrak{q}[u, v] + \lambda(Q_0u, v)_{\mathfrak{H}}), \quad u, v \in \text{Dom } X_0. \end{aligned}$$

Формально,

$$\begin{aligned} B(\tau; \vartheta) &= X_0^*X_0 + \tau\vartheta_1(X_0^*X_1 + X_1^*X_0) + \tau^2\vartheta_1^2X_1^*X_1 \\ &\quad + \tau\vartheta_2(Y_2^*Y_0 + Y_0^*Y_2) + \tau^2\vartheta_1\vartheta_2(Y_2^*Y_1 + Y_1^*Y_2) + \tau^2\vartheta_2^2(Q + \lambda Q_0). \end{aligned}$$

Пусть $F(\tau; \vartheta; \mu)$ — спектральный проектор оператора $B(\tau; \vartheta)$, отвечающий отрезку $[0, \mu]$. Фиксируем постоянную $\delta \in (0, \kappa d^0/13)$, а затем выберем число $\tau_0 > 0$ такое, что

$$\tau_0 \leq \delta^{1/2} \left((2 + c_1^2 + c_2)\|X_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\| \right)^{-1/2}. \quad (1.13)$$

Как проверено в [Su4, предложение 1.5], при $|\tau| \leq \tau_0$ выполнено

$$F(\tau; \vartheta; \delta) = F(\tau; \vartheta; 3\delta), \quad \text{rank } F(\tau; \vartheta; \delta) = n, \quad |\tau| \leq \tau_0.$$

В дальнейшем мы часто будем писать $F(\tau; \vartheta)$ вместо $F(\tau; \vartheta; \delta)$.

На протяжении главы 1 мы будем следить за зависимостью оценочных постоянных от следующего множества „данных”

$$\kappa^{1/2}, \kappa^{-1/2}, \delta, \delta^{-1/2}, \tau_0, c_1, c_2^{1/2}, c_3^{1/2}, C(1)^{1/2}, |\lambda|, \|X_1\|, \|Y_1\|, \|Q_0\| \quad (1.14)$$

(а также от постоянной \check{c}_*^{-1} , которая будет введена ниже в п. 2.1). Для применения результатов настоящей главы к дифференциальным операторам важно, что оценочные постоянные (возможно, после завышения) зависят от этих величин полиномиально, причем коэффициенты соответствующих многочленов — некоторые положительные абсолютные постоянные.

1.6 Операторы Z и \tilde{Z}

В этом и следующем пунктах определяются операторы, возникающие при рассмотрении в духе теории возмущений.

Положим $\mathcal{D} := \text{Dom } X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Поскольку точка $\lambda_0 = 0$ изолирована в спектре оператора A_0 , форма $(X_0\phi, X_0\psi)_{\mathfrak{H}_*}$, $\phi, \psi \in \mathcal{D}$, задает в \mathcal{D} скалярное произведение, превращая \mathcal{D} в гильбертово пространство. Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим уравнение на элемент $\phi \in \mathcal{D}$ (ср. [BSu2, глава 1, (1.7)]):

$$X_0^*(X_0\phi + X_1\omega) = 0, \quad (1.15)$$

которое понимается в слабом смысле. Иными словами, $\phi \in \mathcal{D}$ удовлетворяет тождеству

$$(X_0\phi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_1\omega, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}. \quad (1.16)$$

Поскольку правая часть в (1.16) есть антилинейный непрерывный функционал над $\zeta \in \mathcal{D}$, из теоремы Рисса следует, что уравнение (1.15) имеет единственное решение $\phi(\omega)$. Очевидно, $\|X_0\phi\|_{\mathfrak{H}_*} \leq \|X_1\omega\|_{\mathfrak{H}_*}$. Определим ограниченный оператор $Z : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ равенствами

$$Z\omega = \phi(\omega), \quad \omega \in \mathfrak{N}; \quad Zx = 0, \quad x \in \mathfrak{N}^\perp.$$

Очевидно,

$$ZP = Z, \quad PZ = 0, \quad PZ^* = Z^*, \quad Z^*P = 0. \quad (1.17)$$

Несложно проверить (см. [Su5, (1.21)]), что

$$\|Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\|X_1\|. \quad (1.18)$$

Аналогично для заданного $\omega \in \mathfrak{N}$ рассмотрим уравнение

$$X_0^*X_0\psi + Y_0^*Y_2\omega = 0 \quad (1.19)$$

на элемент $\psi \in \mathcal{D}$, понимаемое в смысле тождества

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(Y_2\omega, Y_0\zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathcal{D}.$$

В силу условия 1.2 правая часть является антилинейным непрерывным функционалом над $\zeta \in \mathcal{D}$. По теореме Рисса решение $\psi(\omega)$ существует и единственно. Определим ограниченный оператор $\tilde{Z} : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ равенствами

$$\tilde{Z}\omega = \psi(\omega), \quad \omega \in \mathfrak{N}; \quad \tilde{Z}x = 0, \quad x \in \mathfrak{N}^\perp.$$

Отметим, что \tilde{Z} переводит \mathfrak{N} в \mathfrak{N}^\perp , а \mathfrak{N}^\perp в $\{0\}$. Таким образом,

$$\tilde{Z}P = \tilde{Z}, \quad P\tilde{Z} = 0, \quad P\tilde{Z}^* = \tilde{Z}^*, \quad \tilde{Z}^*P = 0. \quad (1.20)$$

Нам потребуется оценка (см. [Su5, (1.25)]):

$$\|\tilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq c_1 \kappa^{1/2} C(1)^{1/2} (13\delta)^{-1/2}. \quad (1.21)$$

1.7 Операторы R и S

Определим теперь оператор $R : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_*$ (см. [BSu2, глава 1, п. 1.2]) следующим образом: $R\omega = X_0\psi(\omega) + X_1\omega \in \mathfrak{N}_*$. Другое описание оператора R дается формулой $R = P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$.

Спектральным ростком операторного семейства (1.2) при $t = 0$ называется (см. [BSu2, глава 1, п. 1.3]) самосопряженный оператор $S = R^*R : \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$, для которого также справедливо представление $S = PX_1^*P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$.

1.8 Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $B(\tau; \vartheta)$

В соответствии с аналитической теорией возмущений (см. [Ka]), при $|\tau| \leq \tau_0$ найдутся такие вещественно-аналитические функции $\lambda_l(\tau; \vartheta)$ и вещественно-аналитические (по параметру τ) \mathfrak{H} -значные функции $\phi_l(\tau; \vartheta)$, что

$$B(\tau; \vartheta)\phi_l(\tau; \vartheta) = \lambda_l(\tau; \vartheta)\phi_l(\tau; \vartheta), \quad l = 1, \dots, n, \quad |\tau| \leq \tau_0, \quad (1.22)$$

причем $\phi_l(\tau; \vartheta)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в собственном подпространстве $F(\tau; \vartheta)\mathfrak{H}$. При достаточно малом $\tau_*(\vartheta)$ ($\leq \tau_0$) и $|\tau| \leq \tau_*(\vartheta)$ справедливы сходящиеся степенные разложения

$$\begin{aligned} \lambda_l(\tau; \vartheta) &= \gamma_l(\vartheta)\tau^2 + \mu_l(\vartheta)\tau^3 + \dots, \quad \gamma_l(\vartheta) \geq 0, \quad l = 1, \dots, n; \\ \phi_l(\tau; \vartheta) &= \omega_l(\vartheta) + \tau\phi_l^{(1)}(\vartheta) + \tau^2\phi_l^{(2)}(\vartheta) + \dots, \quad l = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Элементы $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в \mathfrak{N} .

В [Su4, (1.32), (1.33)] установлено, что для элементов

$$\tilde{\omega}_l(\vartheta) := \phi_l^{(1)}(\vartheta) - \vartheta_1 Z \omega_l(\vartheta) - \vartheta_2 \tilde{Z} \omega_l(\vartheta), \quad l = 1, \dots, n,$$

справедливо тождество

$$(\tilde{\omega}_k(\vartheta), \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} + (\omega_k(\vartheta), \tilde{\omega}_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} = 0, \quad k, l = 1, \dots, n. \quad (1.24)$$

В соответствии с [Su4, п. 1.8] *спектральным ростком операторного семейства* $B(\tau; \vartheta)$ при $\tau = 0$ называется оператор в \mathfrak{N} , заданный выражением

$$\begin{aligned} S(\vartheta) = & \vartheta_1^2 S + \vartheta_1 \vartheta_2 \left(-(X_0 Z)^* X_0 \tilde{Z} - (X_0 \tilde{Z})^* X_0 Z + P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2) \right) \Big|_{\mathfrak{N}} \\ & + \vartheta_2^2 \left(-(X_0 \tilde{Z})^* X_0 \tilde{Z} \Big|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}} \right). \end{aligned} \quad (1.25)$$

Здесь $Q_{\mathfrak{N}}$ — самосопряженный оператор в \mathfrak{N} , порожденный формой $\mathfrak{q}[\omega, \omega]$, $\omega \in \mathfrak{N}$, и $Q_{0\mathfrak{N}} := P Q_0 \Big|_{\mathfrak{N}}$.

В [Su4, предложение 1.6] установлено, что числа $\gamma_l(\vartheta)$ и элементы $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1, \dots, n$, являются собственными для оператора $S(\vartheta)$:

$$S(\vartheta) \omega_l(\vartheta) = \gamma_l(\vartheta) \omega_l(\vartheta), \quad l = 1, \dots, n. \quad (1.26)$$

Величины $\gamma_l(\vartheta)$ и $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1, \dots, n$, называют *пороговыми характеристиками на краю спектра* для операторного семейства $B(\tau; \vartheta)$.

1.9 Пороговые аппроксимации

Как показано в [Su5, теорема 3.1],

$$F(\tau; \vartheta) - P = \Phi(\tau; \vartheta), \quad \|\Phi(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_1 |\tau|, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (1.27)$$

Кроме (1.27) нам потребуется более точная аппроксимация спектрального проектора, полученная в [Su5, теорема 3.1]:

$$F(\tau; \vartheta) = P + \tau F_1(\vartheta) + F_2(\tau; \vartheta), \quad \|F_2(\tau; \vartheta)\| \leq C_2 \tau^2, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (1.28)$$

Согласно [Su5, (1.41)] оператор $F_1(\vartheta)$ имеет вид

$$F_1(\vartheta) = \vartheta_1 (Z + Z^*) + \vartheta_2 (\tilde{Z} + \tilde{Z}^*). \quad (1.29)$$

Из (1.17), (1.20) и (1.29) следует, что

$$F_1(\vartheta)P = \vartheta_1 Z + \vartheta_2 \tilde{Z}, \quad PF_1(\vartheta) = \vartheta_1 Z^* + \vartheta_2 \tilde{Z}^*. \quad (1.30)$$

Из (1.18), (1.21) и (1.29) вытекает оценка

$$\|F_1(\vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_{F_1} = 2\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}(\|X_1\| + c_1 C(1)^{1/2}). \quad (1.31)$$

Нам потребуется аппроксимация, установленная в [Su4, теорема 2.2]:

$$B(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) - \tau^2 S(\vartheta)P = \Phi_1(\tau; \vartheta), \quad \|\Phi_1(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_3 |\tau|^3, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (1.32)$$

Уточнение аппроксимации (1.32) получено в [Su5, теорема 3.3]:

$$B(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) = \tau^2 S(\vartheta)P + \tau^3 K(\vartheta) + \Phi_2(\tau; \vartheta), \quad (1.33)$$

$$\|\Phi_2(\tau; \vartheta)\| \leq C_4 \tau^4, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (1.34)$$

В соответствии с [Su5, (3.18)–(3.20)] имеем $K(\vartheta) = K_0(\vartheta) + N(\vartheta)$, где

$$\begin{aligned} K_0(\vartheta) &= \sum_{l=1}^n \gamma_l(\vartheta) \left((\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} (\vartheta_1 Z \omega_l(\vartheta) + \vartheta_2 \tilde{Z} \omega_l(\vartheta)) \right. \\ &\quad \left. + (\cdot, \vartheta_1 Z \omega_l(\vartheta) + \vartheta_2 \tilde{Z} \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \omega_l(\vartheta) \right), \\ N(\vartheta) &= N_0(\vartheta) + N_*(\vartheta), \\ N_0(\vartheta) &= \sum_{l=1}^n \mu_l(\vartheta) (\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \omega_l(\vartheta), \\ N_*(\vartheta) &= \sum_{l=1}^n \gamma_l(\vartheta) \left((\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \tilde{\omega}_l(\vartheta) + (\cdot, \tilde{\omega}_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \omega_l(\vartheta) \right). \end{aligned} \quad (1.35)$$

В базисе $\{\omega_l(\vartheta)\}_{l=1}^n$ операторы $N(\vartheta)$, $N_0(\vartheta)$ и $N_*(\vartheta)$ (суженные на \mathfrak{N}) представляются $(n \times n)$ -матрицами. Оператор $N_0(\vartheta)$ диагонален: $(N_0(\vartheta)\omega_j(\vartheta), \omega_l(\vartheta)) = \mu_j(\vartheta)\delta_{jl}$, $j, l = 1, \dots, n$. С учетом (1.24) матричные элементы оператора $N_*(\vartheta)$ имеют вид

$$\begin{aligned} (N_*(\vartheta)\omega_j(\vartheta), \omega_l(\vartheta)) &= \gamma_l(\vartheta) (\omega_j(\vartheta), \tilde{\omega}_l(\vartheta)) + \gamma_j(\vartheta) (\tilde{\omega}_j(\vartheta), \omega_l(\vartheta)) \\ &= (\gamma_j(\vartheta) - \gamma_l(\vartheta)) (\tilde{\omega}_j(\vartheta), \omega_l(\vartheta)), \end{aligned} \quad (1.36)$$

$j, l = 1, \dots, n$. Следовательно, диагональные элементы $N_*(\vartheta)$ равны нулю. Более того, $(N_*(\vartheta)\omega_j(\vartheta), \omega_l(\vartheta)) = 0$, если $\gamma_j(\vartheta) = \gamma_l(\vartheta)$. В случае, когда $n = 1$, имеем $N_*(\vartheta) = 0$, т. е. $N(\vartheta) = N_0(\vartheta)$.

Инвариантное представление для операторов $K_0(\vartheta)$ и $N(\vartheta)$ найдено в [Su5, (3.21), (3.30)–(3.34)]:

$$K_0(\vartheta) = \vartheta_1 (ZS(\vartheta)P + S(\vartheta)PZ^*) + \vartheta_2 \left(\tilde{Z}S(\vartheta)P + S(\vartheta)P\tilde{Z}^* \right), \quad (1.37)$$

$$N(\vartheta) = \vartheta_1^3 N_{11} + \vartheta_1^2 \vartheta_2 N_{12} + \vartheta_1 \vartheta_2^2 N_{21} + \vartheta_2^3 N_{22}. \quad (1.38)$$

Здесь

$$N_{11} = (X_1 Z)^* R P + (R P)^* X_1 Z, \quad (1.39)$$

$$\begin{aligned} N_{12} &= (X_1 \tilde{Z})^* R P + (R P)^* X_1 \tilde{Z} + (X_1 Z)^* X_0 \tilde{Z} \\ &\quad + (X_0 \tilde{Z})^* X_1 Z + (Y_2 Z)^* Y_0 Z + (Y_0 Z)^* Y_2 Z \\ &\quad + (Y_2 Z)^* Y_1 P + (Y_1 P)^* Y_2 Z + (Y_2 P)^* Y_1 Z + (Y_1 Z)^* Y_2 P, \end{aligned} \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} N_{21} &= (X_0 \tilde{Z})^* X_1 \tilde{Z} + (X_1 \tilde{Z})^* X_0 \tilde{Z} + (Y_2 Z)^* Y_0 \tilde{Z} \\ &\quad + (Y_0 \tilde{Z})^* Y_2 Z + (Y_2 \tilde{Z})^* Y_0 Z + (Y_0 Z)^* Y_2 \tilde{Z} + (Y_2 \tilde{Z})^* Y_1 P \\ &\quad + (Y_1 P)^* Y_2 \tilde{Z} + (Y_1 \tilde{Z})^* Y_2 P + (Y_2 P)^* Y_1 \tilde{Z} \\ &\quad + Z^* Q P + P Q Z + \lambda (Z^* Q_0 P + P Q_0 Z), \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$N_{22} = (Y_0 \tilde{Z})^* Y_2 \tilde{Z} + (Y_2 \tilde{Z})^* Y_0 \tilde{Z} + \tilde{Z}^* Q P + P Q \tilde{Z} + \lambda (\tilde{Z}^* Q_0 P + P Q_0 \tilde{Z}). \quad (1.42)$$

Поясним, что в (1.41) под формальной записью $Z^* Q P + P Q Z$ подразумевается ограниченный самосопряженный оператор в \mathfrak{H} , порожденный формой $\mathfrak{q}[P u, Z u] + \mathfrak{q}[Z u, P u]$, $u \in \mathfrak{H}$. Аналогично в (1.42) под $\tilde{Z}^* Q P + P Q \tilde{Z}$ понимается ограниченный самосопряженный оператор в \mathfrak{H} , отвечающий форме $\mathfrak{q}[P u, \tilde{Z} u] + \mathfrak{q}[\tilde{Z} u, P u]$, $u \in \mathfrak{H}$.

Отметим, что в силу (1.17), (1.20) и (1.37)–(1.42) для оператора $K(\vartheta) = K_0(\vartheta) + N(\vartheta)$ справедливо тождество

$$P K(\vartheta) P = P N(\vartheta) P = N(\vartheta). \quad (1.43)$$

Нам потребуются следующие оценки, установленные в [Su5, (3.35), (3.36), (3.44)–(3.49)]:

$$\|N(\vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_N, \quad (1.44)$$

$$\|K(\vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_K. \quad (1.45)$$

Замечание 1.5. Введенные выше постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 и C_{F_1} зависят от данных (1.14) полиномиально. Соответствующие многочлены имеют

постоянные положительные коэффициенты. Константы C_N и C_K оцениваются через полиномы с постоянными положительными коэффициентами от данных (1.14). Зависимость постоянных C_1, C_2, C_3, C_4, C_N и C_K от данных (1.14) прослежена в [Su4, Su5].

2 Аппроксимация оператора $e^{-B(t,\varepsilon)s}$ с учетом корректора

2.1 Аппроксимация оператора $e^{-B(\tau;\vartheta)s}$

Будем предполагать, что при некотором $c_* > 0$ выполнено

$$A(t) \geq c_* t^2 I, \quad c_* > 0, \quad |t| \leq \tau_0. \quad (2.1)$$

Тогда с учетом (1.12) справедливо неравенство

$$B(\tau; \vartheta) \geq \check{c}_* \tau^2 I, \quad |\tau| \leq \tau_0; \quad \check{c}_* = \frac{1}{2} \min\{\kappa c_*; 2\beta\}. \quad (2.2)$$

Отсюда и из (1.22) следует, что собственные значения $\lambda_l(\tau; \vartheta)$ оператора $B(\tau; \vartheta)$ удовлетворяют оценкам

$$\lambda_l(\tau; \vartheta) \geq \check{c}_* \tau^2, \quad l = 1, \dots, n, \quad |\tau| \leq \tau_0. \quad (2.3)$$

Сопоставляя (1.23) и (2.3), находим, что $\gamma_l(\vartheta) \geq \check{c}_*$, $l = 1, \dots, n$, а тогда (см. (1.26))

$$S(\vartheta) \geq \check{c}_* I_{\mathfrak{H}}. \quad (2.4)$$

Пусть $|\tau| \leq \tau_0$. Запишем оператор $e^{-B(\tau;\vartheta)s}$, $s \geq 0$, в виде

$$e^{-B(\tau;\vartheta)s} = e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau; \vartheta)^\perp + e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau; \vartheta). \quad (2.5)$$

Пусть $s > 0$. Согласно (2.2) первое слагаемое в правой части (2.5) допускает оценку

$$\|e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau; \vartheta)^\perp\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq e^{-\delta s/2} e^{-\check{c}_* \tau^2 s/2} \leq 2(\delta s)^{-1} e^{-\check{c}_* \tau^2 s/2}. \quad (2.6)$$

Второе слагаемое представим в виде

$$e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau; \vartheta) = P e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau; \vartheta) + P^\perp e^{-B(\tau;\vartheta)s} F(\tau; \vartheta). \quad (2.7)$$

В силу (1.28)

$$\begin{aligned}
P^\perp e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta) &= (I - P)e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta) \\
&= (\tau F_1(\vartheta) + F_2(\tau; \vartheta))e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta) \\
&= (\tau F_1(\vartheta) + F_2(\tau; \vartheta)) \left((e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta) - e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P) + e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P \right).
\end{aligned}$$

Положим

$$\Pi(\tau; \vartheta; s) := e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta) - e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P. \quad (2.8)$$

Тогда

$$\begin{aligned}
P^\perp e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta) &= \tau F_1(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P + \tau F_1(\vartheta) \Pi(\tau; \vartheta; s) \\
&\quad + F_2(\tau; \vartheta) e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta).
\end{aligned} \quad (2.9)$$

Нам потребуется оценка, полученная в [М, п. 2.2]:

$$\|\Pi(\tau; \vartheta; s)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq (2C_1|\tau| + C_3|\tau|^3 s) e^{-\check{c}_* \tau^2 s}. \quad (2.10)$$

Отсюда и из (1.31) следует, что

$$\|\tau F_1(\vartheta) \Pi(\tau; \vartheta; s)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_{F_1} (2C_1 \tau^2 + C_3 \tau^4 s) e^{-\check{c}_* \tau^2 s}.$$

Вводя параметр $\alpha = \tau^2 s$, приходим к неравенству

$$\|\tau F_1(\vartheta) \Pi(\tau; \vartheta; s)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_{F_1} (2C_1 \alpha + C_3 \alpha^2) e^{-\check{c}_* \alpha} s^{-1}. \quad (2.11)$$

Третье слагаемое в правой части (2.9) оценим с помощью (1.28) и (2.2):

$$\|F_2(\tau; \vartheta) e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_2 \tau^2 e^{-\check{c}_* \tau^2 s} = C_2 \alpha e^{-\check{c}_* \alpha} s^{-1}. \quad (2.12)$$

Объединяя (2.9), (2.11) и (2.12), находим

$$\|P^\perp e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta) - \tau F_1(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \phi(\alpha) s^{-1}, \quad s > 0, \quad (2.13)$$

где

$$\phi(\alpha) = C_{F_1} (2C_1 \alpha + C_3 \alpha^2) e^{-\check{c}_* \alpha} + C_2 \alpha e^{-\check{c}_* \alpha}. \quad (2.14)$$

Рассмотрим теперь первое слагаемое в правой части (2.7):

$$P e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta) = e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P + \Upsilon(\tau; \vartheta; s), \quad (2.15)$$

где $\Upsilon(\tau; \vartheta; s) := Pe^{-B(\tau; \vartheta)s}F(\tau; \vartheta) - e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P$. В [M, п. 2.2] получено представление

$$\begin{aligned}\Upsilon(\tau; \vartheta; s) &= e^{-\tau^2 S(\vartheta)s}P\Phi(\tau; \vartheta) - \mathcal{J}(\tau; \vartheta; s), \\ \mathcal{J}(\tau; \vartheta; s) &:= \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\tilde{s})}P\Phi_1(\tau; \vartheta)e^{-B(\tau; \vartheta)\tilde{s}}F(\tau; \vartheta) d\tilde{s}.\end{aligned}$$

Здесь операторы $\Phi(\tau; \vartheta)$ и $\Phi_1(\tau; \vartheta)$ определены в (1.27), (1.32). Учитывая (1.27) и (1.28), представим оператор $\Upsilon(\tau; \vartheta; s)$ в виде

$$\Upsilon(\tau; \vartheta; s) = e^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps}P\tau F_1(\vartheta) + e^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps}PF_2(\tau; \vartheta) - \mathcal{J}(\tau; \vartheta; s). \quad (2.16)$$

Второе слагаемое в правой части (2.16) оценим с помощью (1.28) и (2.4):

$$\|e^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps}PF_2(\tau; \vartheta)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq C_2\tau^2 e^{-\tau^2 \check{c}_* s} = C_2\alpha e^{-\check{c}_* \alpha s^{-1}}. \quad (2.17)$$

Третье слагаемое в правой части (2.16) преобразуем на основании (1.32), (1.33), (1.43) и (2.8):

$$\begin{aligned}\mathcal{J}(\tau; \vartheta; s) &= \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\tilde{s})}P(\tau^3 K(\vartheta) + \Phi_2(\tau; \vartheta))e^{-B(\tau; \vartheta)\tilde{s}}F(\tau; \vartheta) d\tilde{s} \\ &= \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\tilde{s})}P(\tau^3 K(\vartheta) + \Phi_2(\tau; \vartheta)) \left(\Pi(\tau; \vartheta; \tilde{s}) + e^{-\tau^2 S(\vartheta)\tilde{s}}P \right) d\tilde{s} \\ &= \mathcal{J}_1(\tau; \vartheta; s) + \mathcal{J}_2(\tau; \vartheta; s) + \mathcal{J}_3(\tau; \vartheta; s).\end{aligned} \quad (2.18)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1(\tau; \vartheta; s) &:= \tau^3 \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\tilde{s})}PN(\vartheta)Pe^{-\tau^2 S(\vartheta)\tilde{s}}P d\tilde{s}, \\ \mathcal{J}_2(\tau; \vartheta; s) &:= \tau^3 \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\tilde{s})}PK(\vartheta)\Pi(\tau; \vartheta; \tilde{s}) d\tilde{s}, \\ \mathcal{J}_3(\tau; \vartheta; s) &:= \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\tilde{s})}P\Phi_2(\tau; \vartheta)e^{-B(\tau; \vartheta)\tilde{s}}F(\tau; \vartheta) d\tilde{s}.\end{aligned}$$

Оценим член $\mathcal{J}_2(\tau; \vartheta; s)$ с помощью (1.45), (2.4) и (2.10):

$$\begin{aligned}\left\| \mathcal{J}_2(\tau; \vartheta; s) \right\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} &\leq |\tau|^3 \int_0^s e^{-\check{c}_* \tau^2 (s-\tilde{s})} C_K (2C_1|\tau| + C_3|\tau|^3\tilde{s}) e^{-\check{c}_* \tau^2 \tilde{s}} d\tilde{s} \\ &= |\tau|^3 e^{-\check{c}_* \tau^2 s} C_K \int_0^s (2C_1|\tau| + C_3|\tau|^3\tilde{s}) d\tilde{s} \\ &= e^{-\check{c}_* \tau^2 s} C_K (2C_1\tau^4 s + 2^{-1}C_3\tau^6 s^2) \\ &= C_K e^{-\check{c}_* \alpha} (2C_1\alpha^2 + 2^{-1}C_3\alpha^3) s^{-1}.\end{aligned} \quad (2.19)$$

Используя (1.34), (2.2) и (2.4), оценим $\mathcal{J}_3(\tau; \vartheta; s)$:

$$\begin{aligned} \left\| \mathcal{J}_3(\tau; \vartheta; s) \right\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} &\leq \int_0^s e^{-\check{c}_* \tau^2 (s-\bar{s})} C_4 \tau^4 e^{-\check{c}_* \tau^2 \bar{s}} d\bar{s} \\ &= e^{-\check{c}_* \tau^2 s} C_4 \tau^4 s = C_4 e^{-\check{c}_* \alpha} \alpha^2 s^{-1}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Подведем итоги. В силу (2.15)–(2.20) выполнена оценка

$$\begin{aligned} &\left\| P e^{-B(\tau; \vartheta)s} F(\tau; \vartheta) - e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P - \tau e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P F_1(\vartheta) + \tau^3 \mathcal{M}(\tau; \vartheta; s) \right\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \\ &\leq (C_2 \alpha + 2C_1 C_K \alpha^2 + 2^{-1} C_3 C_K \alpha^3 + C_4 \alpha^2) e^{-\check{c}_* \alpha} s^{-1}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

где

$$\mathcal{M}(\tau; \vartheta; s) := \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\bar{s})} P N(\vartheta) P e^{-\tau^2 S(\vartheta)P\bar{s}} d\bar{s}. \quad (2.22)$$

Теперь из (1.30), (2.5)–(2.7), (2.13), (2.14), (2.21) и (2.22) вытекает тождество

$$\begin{aligned} e^{-B(\tau; \vartheta)s} &= e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P + \tau(\vartheta_1 Z + \vartheta_2 \tilde{Z}) e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P \\ &+ e^{-\tau^2 S(\vartheta)s} P \tau(\vartheta_1 Z^* + \vartheta_2 \tilde{Z}^*) - \tau^3 \mathcal{M}(\tau; \vartheta; s) + \mathcal{R}(\tau; \vartheta; s), \end{aligned} \quad (2.23)$$

где остаточный член $\mathcal{R}(\tau; \vartheta; s)$ подчинен оценке

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(\tau; \vartheta; s)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} &\leq C_5 s^{-1} e^{-\check{c}_* \tau^2 s/2}, \quad s > 0; \\ C_5 &= 2\delta^{-1} + \max_{\alpha \geq 0} \check{\phi}(\alpha) e^{-\check{c}_* \alpha/2}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Здесь введено обозначение

$$\check{\phi}(\alpha) = 2(C_1 C_{F_1} + C_2) \alpha + (C_3 C_{F_1} + 2C_1 C_K + C_4) \alpha^2 + 2^{-1} C_3 C_K \alpha^3.$$

Делая замену переменной $\check{c}_* \alpha/2 =: \alpha$, можно показать, что постоянная C_5 контролируется через многочлен от \check{c}_*^{-1} и данных (1.14).

Очевидно, при $s \geq 1$ выполнено $s^{-1} \leq 2(s+1)^{-1}$, а потому $\|\mathcal{R}(\tau; \vartheta; s)\| \leq 2C_5(s+1)^{-1} e^{-\check{c}_* \tau^2 s/2}$. При $0 \leq s < 1$ из (1.44), (2.22) следует, что для $|\tau| \leq \tau_0$ имеет место неравенство $|\tau|^3 \|\mathcal{M}(\tau; \vartheta; s)\| \leq \tau_0^3 C_N e^{-\check{c}_* \tau^2 s}$. Поэтому, используя (1.18), (1.21), (2.2) и (2.4), из (2.23) получаем

$$\|\mathcal{R}(\tau; \vartheta; s)\| \leq C_6 (1+s)^{-1} e^{-\check{c}_* \tau^2 s/2}, \quad 0 \leq s < 1,$$

где $C_6 = 4 + 4\kappa^{1/2} (13\delta)^{-1/2} \tau_0 (\|X_1\| + c_1 C(1)^{1/2}) + 2\tau_0^3 C_N$.

Учитывая замечание 1.5, приходим к следующему результату.

Теорема 2.1. При $|\tau| \leq \tau_0$, $s \geq 0$ выполнено тождество (2.23), где оператор $\mathcal{M}(\tau; \vartheta; s)$ определен в (2.22), а для оператора $\mathcal{R}(\tau; \vartheta; s)$ верны оценки

$$\begin{aligned}\|\mathcal{R}(\tau; \vartheta; s)\| &\leq C_7(s+1)^{-1}e^{-\check{c}_*\tau^2s/2}, \quad s \geq 0; \\ \|\mathcal{R}(\tau; \vartheta; s)\| &\leq C_5s^{-1}e^{-\check{c}_*\tau^2s/2}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

Постоянная C_5 определена в (2.24). Постоянные C_5 и $C_7 = \max\{2C_5; C_6\}$ контролируются через многочлены от \check{c}_*^{-1} и данных (1.14).

2.2 Вычисление матричных элементов оператора $\mathcal{M}(\tau; \vartheta; s)$

Рассмотрим подробнее оператор (2.22). В силу (1.35) выполнено

$$\mathcal{M}(\tau; \vartheta; s) = \mathcal{M}_0(\tau; \vartheta; s) + \mathcal{M}_*(\tau; \vartheta; s), \quad (2.25)$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_0(\tau; \vartheta; s) &:= \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\tilde{s})} P N_0(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)P\tilde{s}} d\tilde{s}, \\ \mathcal{M}_*(\tau; \vartheta; s) &:= \int_0^s e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\tilde{s})} P N_*(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)P\tilde{s}} d\tilde{s}.\end{aligned}$$

Операторы $S(\vartheta)$ и $N_0(\vartheta)$ диагональны в базисе $\{\omega_l(\vartheta)\}_{l=1}^n$, поэтому $N_0(\vartheta)S(\vartheta) = S(\vartheta)N_0(\vartheta)$ и

$$\mathcal{M}_0(\tau; \vartheta; s) = N_0(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps} P s. \quad (2.26)$$

Вычислим теперь матричные элементы оператора $\mathcal{M}_*(\tau; \vartheta; s)$ в базисе $\{\omega_l(\vartheta)\}_{l=1}^n$. В соответствии с (1.26) имеем $e^{-\tau^2 S(\vartheta)Ps} \omega_j(\vartheta) = e^{-\tau^2 \gamma_j(\vartheta)s} \omega_j(\vartheta)$. Поэтому матричные элементы оператора $\mathcal{M}_*(\tau; \vartheta; s)$ имеют вид

$$\begin{aligned}& \left(\mathcal{M}_*(\tau; \vartheta; s) \omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta) \right) \\ &= \int_0^s \left(e^{-\tau^2 S(\vartheta)P(s-\tilde{s})} N_*(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta)P\tilde{s}} \omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta) \right) d\tilde{s} \\ &= (N_*(\vartheta) \omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)) e^{-\tau^2 \gamma_k(\vartheta)s} \int_0^s e^{-\tau^2 (\gamma_j(\vartheta) - \gamma_k(\vartheta))\tilde{s}} d\tilde{s}.\end{aligned}$$

Отсюда и из (1.36) видно, что при $\gamma_j(\vartheta) = \gamma_k(\vartheta)$ выполнено $(\mathcal{M}_*(\tau; \vartheta; s) \omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)) = 0$. Пусть теперь $\gamma_j(\vartheta) \neq \gamma_k(\vartheta)$. В силу (1.24)

и (1.36)

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{M}_*(\tau; \vartheta; s) \omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta) \right) \\
&= (N_*(\vartheta) \omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)) e^{-\tau^2 \gamma_k(\vartheta) s} \frac{e^{-\tau^2 (\gamma_j(\vartheta) - \gamma_k(\vartheta)) s} - 1}{(\gamma_k(\vartheta) - \gamma_j(\vartheta)) \tau^2} \\
&= \frac{e^{-\tau^2 \gamma_j(\vartheta) s} - e^{-\tau^2 \gamma_k(\vartheta) s}}{\tau^2} (\omega_j(\vartheta), \tilde{\omega}_k(\vartheta)) \\
&= \frac{e^{-\tau^2 \gamma_j(\vartheta) s}}{\tau^2} (\omega_j(\vartheta), \tilde{\omega}_k(\vartheta)) + \frac{e^{-\tau^2 \gamma_k(\vartheta) s}}{\tau^2} (\tilde{\omega}_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta)).
\end{aligned}$$

Итак,

$$\begin{aligned}
& \left(\mathcal{M}_*(\tau; \vartheta; s) \omega_j(\vartheta), \omega_k(\vartheta) \right) \\
&= \tau^{-2} \left((e^{-\tau^2 \gamma_j(\vartheta) s} \omega_j(\vartheta), \tilde{\omega}_k(\vartheta)) + (\tilde{\omega}_j(\vartheta), e^{-\tau^2 \gamma_k(\vartheta) s} \omega_k(\vartheta)) \right). \tag{2.27}
\end{aligned}$$

Согласно (1.24), при $\gamma_j(\vartheta) = \gamma_k(\vartheta)$ правая часть в (2.27) равна нулю, поэтому равенство (2.27) сохраняет силу и в этом случае. Из (2.27) с учетом тождеств (1.24) получаем представление

$$\mathcal{M}_*(\tau; \vartheta; s) = -\tau^{-2} \sum_{l=1}^n e^{-\tau^2 \gamma_l(\vartheta) s} \left((\cdot, \tilde{\omega}_l(\vartheta)) \omega_l(\vartheta) + (\cdot, \omega_l(\vartheta)) \tilde{\omega}_l(\vartheta) \right). \tag{2.28}$$

Объединяя (2.25), (2.26) и (2.28), находим

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}(\tau; \vartheta; s) &= N_0(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta) P s} P s \\
&\quad - \tau^{-2} \sum_{l=1}^n e^{-\tau^2 \gamma_l(\vartheta) s} \left((\cdot, \tilde{\omega}_l(\vartheta)) \omega_l(\vartheta) + (\cdot, \omega_l(\vartheta)) \tilde{\omega}_l(\vartheta) \right).
\end{aligned}$$

Отметим, наконец, что формула (2.23) упрощается, если $N(\vartheta) = 0$ или $N_*(\vartheta) = 0$.

Предложение 2.2. Пусть $N(\vartheta) = 0$. Тогда в условиях теоремы 2.1 выполнено

$$\begin{aligned}
e^{-B(\tau; \vartheta) s} &= e^{-\tau^2 S(\vartheta) s} P + \tau (\vartheta_1 Z + \vartheta_2 \tilde{Z}) e^{-\tau^2 S(\vartheta) s} P \\
&\quad + e^{-\tau^2 S(\vartheta) s} P \tau (\vartheta_1 Z^* + \vartheta_2 \tilde{Z}^*) + \mathcal{R}(\tau; \vartheta; s).
\end{aligned}$$

Предложение 2.3. Пусть в условиях теоремы 2.1 $N_*(\vartheta) = 0$. Тогда

$$\begin{aligned}
e^{-B(\tau; \vartheta) s} &= e^{-\tau^2 S(\vartheta) s} P + \tau (\vartheta_1 Z + \vartheta_2 \tilde{Z}) e^{-\tau^2 S(\vartheta) s} P \\
&\quad + e^{-\tau^2 S(\vartheta) s} P \tau (\vartheta_1 Z^* + \vartheta_2 \tilde{Z}^*) - \tau^3 N_0(\vartheta) e^{-\tau^2 S(\vartheta) P s} P s + \mathcal{R}(\tau; \vartheta; s).
\end{aligned}$$

2.3 Возвращение к параметрам t и ε

Вернемся к исходным параметрам t, ε , вспоминая, что $t = \tau\vartheta_1$, $\varepsilon = \tau\vartheta_2$. В силу (1.25) оператор $\tau^2 S(\vartheta) =: L(t, \varepsilon)$ задается выражением

$$\begin{aligned} L(t, \varepsilon) = & t^2 S + t\varepsilon \left(-(X_0 Z)^* X_0 \tilde{Z} - (X_0 \tilde{Z})^* X_0 Z + P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2) \right) \Big|_{\mathfrak{N}} \\ & + \varepsilon^2 \left(-(X_0 \tilde{Z})^* X_0 \tilde{Z} \Big|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}} \right). \end{aligned} \quad (2.29)$$

Отметим оценку, вытекающую из (2.4):

$$L(t, \varepsilon) \geq \check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)I_{\mathfrak{N}}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (2.30)$$

В силу (1.38) оператор $\tau^3 N(\vartheta) =: N(t, \varepsilon)$ имеет вид

$$N(t, \varepsilon) = t^3 N_{11} + t^2 \varepsilon N_{12} + t \varepsilon^2 N_{21} + \varepsilon^3 N_{22}. \quad (2.31)$$

Согласно (1.44) выполнено

$$\|N(t, \varepsilon)\| \leq C_N (t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \varepsilon \leq 1. \quad (2.32)$$

Записывая (2.23) в терминах исходных параметров, дадим равносильную формулировку теоремы 2.1, удобную для дальнейших применений к дифференциальным операторам. Назовем *корректором* оператор

$$\begin{aligned} K(t, \varepsilon, s) := & (tZ + \varepsilon\tilde{Z})e^{-L(t, \varepsilon)s}P + e^{-L(t, \varepsilon)s}P(tZ^* + \varepsilon\tilde{Z}^*) \\ & - \int_0^s e^{-L(t, \varepsilon)(s-\tilde{s})}PN(t, \varepsilon)e^{-L(t, \varepsilon)\tilde{s}}P d\tilde{s}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

В силу (2.30) и (2.32) выполнено

$$\|K(t, \varepsilon, s)\| \leq 2 \max\{\|Z\|; \|\tilde{Z}\|\}(t + \varepsilon)e^{-\check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)s} + C_N s (t^2 + \varepsilon^2)^{3/2} e^{-\check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)s}. \quad (2.34)$$

Объединяя (1.18), (1.21), (2.34) и используя элементарные неравенства $e^{-\alpha} \leq \alpha^{-1}e^{-\alpha/2}$ и $e^{-\alpha} \leq 3\alpha^{-2}e^{-\alpha/2}$, $\alpha > 0$, находим

$$\begin{aligned} \|K(t, \varepsilon, s)\| & \leq C_8 s^{-1} (t^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-\check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)s/2}, \quad s > 0; \\ C_8 & = 2^{3/2} \check{c}_*^{-1} \kappa^{1/2} (13\delta)^{-1/2} \max\{\|X_1\|; c_1 C(1)^{1/2}\} + 3\check{c}_*^{-2} C_N. \end{aligned} \quad (2.35)$$

При $s \geq 0$ оценка более громоздкая: теперь для экспонент используем неравенства вида $e^{-\alpha} \leq 2(1 + \alpha)^{-1}e^{-\alpha/2}$ и $e^{-\alpha}\alpha \leq 4(1 + \alpha)^{-1}e^{-\alpha/2}$, где $\alpha \geq 0$. В результате получаем, что

$$\|K(t, \varepsilon, s)\| \leq C_9(t^2 + \varepsilon^2)^{1/2} (1 + \check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)s)^{-1} e^{-\check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)s/2}, \quad s \geq 0; \quad (2.36)$$

$$C_9 = 2^{5/2}\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2} \max\{\|X_1\|; c_1C(1)^{1/2}\} + 4\check{c}_*^{-1}C_N.$$

Теорема 2.4. *Справедливо представление*

$$e^{-B(t, \varepsilon)s} = e^{-L(t, \varepsilon)s}P + K(t, \varepsilon, s) + \mathcal{R}(t, \varepsilon, s), \quad (2.37)$$

где операторы $B(t, \varepsilon)$, $L(t, \varepsilon)$ и $K(t, \varepsilon, s)$ определены в (1.7), (2.29) и (2.33) соответственно. Для оператора $K(t, \varepsilon, s)$ справедливы оценки (2.35) и (2.36). Оператор $\mathcal{R}(t, \varepsilon, s) := \mathcal{R}(\tau; \vartheta; s)$ при $t^2 + \varepsilon^2 \leq \tau_0^2$ подчинен неравенствам

$$\|\mathcal{R}(t, \varepsilon, s)\| \leq C_7(s + 1)^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)s/2}, \quad s \geq 0; \quad (2.38)$$

$$\|\mathcal{R}(t, \varepsilon, s)\| \leq C_5s^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)s/2}, \quad s > 0. \quad (2.39)$$

Постоянные C_5 , C_7 , C_8 и C_9 контролируются через полиномы с абсолютными положительными коэффициентами от \check{c}_*^{-1} и от данных (1.14).

3 Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты

3.1 Операторное семейство $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$

Пусть $\widehat{\mathfrak{H}}$ — еще одно гильбертово пространство, и пусть $\widehat{X}(t) = \widehat{X}_0(t) + t\widehat{X}_1(t) : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — семейство вида (1.1), удовлетворяющее условиям п. 1.1. Подчеркнем, что при этом пространство \mathfrak{H}_* не изменилось. Все объекты, связанные с $\widehat{X}(t)$, будем помечать значком „ $\widehat{}$ ”. Пусть $M : \mathfrak{H} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм и

$$M\text{Dom } X_0 = \text{Dom } \widehat{X}_0, \quad (3.1)$$

$X(t) = \widehat{X}(t)M : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$; $X_0 = \widehat{X}_0M$, $X_1 = \widehat{X}_1M$. Тогда $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$, где $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $\widehat{n} = n$ и $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$, $\widehat{n}_* = n_*$, $\widehat{P}_* = P_*$. Положим

$$G = (MM^*)^{-1} : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}. \quad (3.2)$$

Пусть $G_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора G в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$: $G_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P}G|_{\widehat{\mathfrak{N}}} : \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{N}}$. Очевидно, что $G_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Пусть $\widehat{S} = \widehat{R}^* \widehat{R} : \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток операторного семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$. В соответствии с [BSu2, глава 1, п. 1.5] выполнено

$$R = \widehat{R}M|_{\mathfrak{N}}, \quad \text{rank } R = \text{rank } \widehat{R}, \quad (3.3)$$

и $S = PM^* \widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}$.

3.2 Операторное семейство $B(t, \varepsilon) = M^* \widehat{B}(t, \varepsilon)M$

Предположим, что для оператора $\widehat{Y}_0 : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}$ справедливы условия п. 1.2. Подчеркнем, что пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$ не изменилось. Положим $Y_0 := \widehat{Y}_0M$, $M\text{Dom } Y_0 = \text{Dom } \widehat{Y}_0$. В силу (3.1) и условия $\text{Dom } \widehat{X}_0 \subset \text{Dom } \widehat{Y}_0$ имеет место включение $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } Y_0$. Пусть $\widehat{Y}_1 : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}$ — ограниченный оператор, пусть $Y_1 = \widehat{Y}_1M : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$. Положим $\widehat{Y}(t) := \widehat{Y}_0 + t\widehat{Y}_1 : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}$, $\text{Dom } \widehat{Y}(t) = \text{Dom } \widehat{Y}_0$. Пусть $Y(t) = \widehat{Y}(t)M = Y_0 + tY_1 : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$, $\text{Dom } Y(t) = \text{Dom } Y_0$. На операторы $\widehat{X}(t)$ и $\widehat{Y}(t)$ наложим условие 1.2 с некоторой постоянной \widehat{c}_1 . Тогда автоматически выполнено $\|Y(t)u\|_{\mathfrak{H}} \leq c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \text{Dom } X_0$, где $c_1 = \widehat{c}_1$.

Пусть оператор $\widehat{Y}_2 : \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}$ удовлетворяет условиям п. 1.2. Положим $Y_2 := \widehat{Y}_2M : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$, $M\text{Dom } Y_2 = \text{Dom } \widehat{Y}_2$. Так как M — изоморфизм, а оператор \widehat{Y}_2 плотно определен, оператор Y_2 также плотно определен. В силу (3.1) справедливо включение $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } Y_2$. Предположим, что операторы $\widehat{X}(t)$ и \widehat{Y}_2 подчинены условию 1.3 с некоторыми постоянными $\widehat{C}(\nu) > 0$. Тогда автоматически для любого $\nu > 0$ найдется постоянная $C(\nu) = \widehat{C}(\nu)\|M\|^2 > 0$ такая, что при $u \in \text{Dom } X_0$, $t \in \mathbb{R}$, выполнена оценка $\|Y_2u\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \nu \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + C(\nu)\|u\|_{\mathfrak{H}}^2$.

Положим $Q_0 := M^*M$. Тогда Q_0 — непрерывный положительно определенный оператор в \mathfrak{H} . (Роль \widehat{Q}_0 играет тождественный оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$.)

Пусть в пространстве \mathfrak{H} задана форма \widehat{q} , удовлетворяющая условиям п. 1.3. Определим форму q , действующую по правилу $q[u, v] = \widehat{q}[Mu, Mv]$, $u, v \in \text{Dom } q$, $M\text{Dom } q = \text{Dom } \widehat{q}$. Формально, $Q = M^* \widehat{Q}M$. Пусть для оператора $\widehat{X}(t)$ и формы \widehat{q} выполнено условие 1.4 с некоторыми постоянными κ , \widehat{c}_0 , \widehat{c}_2 и \widehat{c}_3 . Учитывая (3.1), можно проверить, что тогда оператор $X(t) = \widehat{X}(t)M$ и форма q удовлетворяют условию 1.4 с постоянными

$$c_0 = \|M\|^2 \widehat{c}_0, \quad \text{если } \widehat{c}_0 \geq 0, \quad c_0 = \|M^{-1}\|^{-2} \widehat{c}_0, \quad \text{если } \widehat{c}_0 < 0, \quad (3.4)$$

$c_2 = \widehat{c}_2$, $c_3 = \|M\|^2 \widehat{c}_3$ и прежней константой κ . Из (1.6) видно, что постоянные c_4 и $\widehat{c}_4 = 4\kappa^{-1} \widehat{c}_1^2 \widehat{C}(\nu)$ при $\nu = \kappa^2 (16\widehat{c}_1^2)^{-1}$ связаны равенством

$$c_4 = \|M\|^2 \widehat{c}_4. \quad (3.5)$$

При сделанных предположениях операторный пучок

$$\widehat{B}(t, \varepsilon) = \widehat{A}(t) + \varepsilon(\widehat{Y}_2^* \widehat{Y}(t) + \widehat{Y}(t)^* \widehat{Y}_2) + \varepsilon^2 \widehat{Q} + \lambda \varepsilon^2 I \quad (3.6)$$

связан с пучком (1.7) соотношением

$$B(t, \varepsilon) = M^* \widehat{B}(t, \varepsilon) M. \quad (3.7)$$

Постоянная λ выбирается из условия (1.9) для оператора (1.7). Используя соотношения (3.4), (3.5) и равенство $Q_0 = M^* M$, находим, что при таком выборе λ условие (1.9) для оператора (3.6) также выполнено.

Отметим, что для оператора (3.6) оба варианта соотношений (1.11) принимают вид $\widehat{\beta} = \lambda - \widehat{c}_0 - \widehat{c}_4$. Отсюда и из (1.11), (3.4), (3.5) вытекает оценка

$$\beta \leq \|M^{-1}\|^{-2} \widehat{\beta}. \quad (3.8)$$

3.3 Связь спектральных ростков $S(\vartheta)$ и $\widehat{S}(\vartheta)$

В выражениях для операторов $B(t, \varepsilon)$ и $\widehat{B}(t, \varepsilon)$ перейдем к параметрам τ , ϑ . Рассмотрим спектральный росток (1.25) и аналогичный росток для семейства (3.6):

$$\begin{aligned} \widehat{S}(\vartheta) &= \vartheta_1^2 \widehat{S} - \vartheta_1 \vartheta_2 (\widehat{X}_0 \widehat{Z})^* (\widehat{X}_0 \widehat{Z})|_{\widehat{\mathfrak{H}}} - \vartheta_1 \vartheta_2 (\widehat{X}_0 \widehat{Z})^* (\widehat{X}_0 \widehat{Z})|_{\widehat{\mathfrak{H}}} \\ &\quad - \vartheta_2^2 (\widehat{X}_0 \widehat{Z})^* (\widehat{X}_0 \widehat{Z})|_{\widehat{\mathfrak{H}}} + \vartheta_1 \vartheta_2 \widehat{P} (\widehat{Y}_2^* \widehat{Y}_1 + \widehat{Y}_1^* \widehat{Y}_2)|_{\widehat{\mathfrak{H}}} + \vartheta_2^2 (\widehat{Q}_{\widehat{\mathfrak{H}}} + \lambda I_{\widehat{\mathfrak{H}}}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

В [M, предложение 1.8] установлена связь операторов (1.25) и (3.9):

$$S(\vartheta) = PM^* \widehat{S}(\vartheta) M|_{\mathfrak{H}}. \quad (3.10)$$

Вернемся к параметрам t , ε . Оператор $\tau^2 \widehat{S}(\vartheta) =: \widehat{L}(t, \varepsilon)$ задается выражением

$$\begin{aligned} \widehat{L}(t, \varepsilon) &= t^2 \widehat{S} + t\varepsilon \left(-(\widehat{X}_0 \widehat{Z})^* \widehat{X}_0 \widehat{Z} - (\widehat{X}_0 \widehat{Z})^* \widehat{X}_0 \widehat{Z} + \widehat{P} (\widehat{Y}_2^* \widehat{Y}_1 + \widehat{Y}_1^* \widehat{Y}_2) \right) \Big|_{\widehat{\mathfrak{H}}} \\ &\quad + \varepsilon^2 \left(-(\widehat{X}_0 \widehat{Z})^* \widehat{X}_0 \widehat{Z} \Big|_{\widehat{\mathfrak{H}}} + \widehat{Q}_{\widehat{\mathfrak{H}}} + \lambda I_{\widehat{\mathfrak{H}}} \right). \end{aligned} \quad (3.11)$$

В силу (3.10) имеем $L(t, \varepsilon) = PM^* \widehat{L}(t, \varepsilon) M|_{\mathfrak{H}}$. Здесь $L(t, \varepsilon)$ — оператор (2.29).

3.4 Операторы \widehat{Z}_G и \widetilde{Z}_G

Введем \widehat{Z}_G — оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$, переводящий элемент $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ в (единственное) решение $\widehat{\phi}_G$ уравнения

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\phi}_G + \widehat{X}_1\widehat{\omega}) = 0, \quad G\widehat{\phi}_G \perp \widehat{\mathfrak{N}},$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Уравнение понимается в слабом смысле (ср. (1.16)). Тогда, как показано в [BSu3, лемма 6.1],

$$\widehat{Z}_G = MZM^{-1}\widehat{P}. \quad (3.12)$$

Аналогично введем \widetilde{Z}_G — оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$, сопоставляющий элементу $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ (единственное) решение $\widehat{\psi}_G$ уравнения

$$\widehat{X}_0^*\widehat{X}_0\widehat{\psi}_G + \widehat{Y}_0^*\widehat{Y}_2\widehat{\omega} = 0, \quad G\widehat{\psi}_G \perp \widehat{\mathfrak{N}},$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Уравнение понимается в слабом смысле. Производя пересчет в уравнении (1.19), с учетом тождеств $M\mathfrak{N} = \widehat{\mathfrak{N}}$, (3.1) и (3.2), находим

$$\widetilde{Z}_G = M\widetilde{Z}M^{-1}\widehat{P}. \quad (3.13)$$

3.5 Оператор $\widehat{N}_G(t, \varepsilon)$

Используя связь операторов X_0, X_1, Y_0, Y_1, Y_2 и Q с соответствующими операторами со „шляпкой”, равенства $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $Q_0 = M^*M$, (1.39)–(1.42), (2.31), (3.3), (3.12) и (3.13), заключаем, что оператор

$$\widehat{N}_G(t, \varepsilon) := \widehat{P}(M^*)^{-1}N(t, \varepsilon)M^{-1}\widehat{P} \quad (3.14)$$

имеет вид

$$\widehat{N}_G(t, \varepsilon) = t^3\widehat{N}_{G,11} + t^2\varepsilon\widehat{N}_{G,12} + t\varepsilon^2\widehat{N}_{G,21} + \varepsilon^3\widehat{N}_{G,22}, \quad (3.15)$$

где

$$\widehat{N}_{G,11} = (\widehat{X}_1 \widehat{Z}_G)^* \widehat{R} \widehat{P} + (\widehat{R} \widehat{P})^* \widehat{X}_1 \widehat{Z}_G, \quad (3.16)$$

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{G,12} &= (\widehat{X}_1 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{R} \widehat{P} + (\widehat{R} \widehat{P})^* \widehat{X}_1 \widehat{\widetilde{Z}}_G + (\widehat{X}_1 \widehat{Z}_G)^* \widehat{X}_0 \widehat{\widetilde{Z}}_G \\ &\quad + (\widehat{X}_0 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{X}_1 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_0 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_0 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{Z}_G \\ &\quad + (\widehat{Y}_2 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{Y}_1 \widehat{P} + (\widehat{Y}_1 \widehat{P})^* \widehat{Y}_2 \widehat{\widetilde{Z}}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{P})^* \widehat{Y}_1 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_1 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{P}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{G,21} &= (\widehat{X}_0 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{X}_1 \widehat{\widetilde{Z}}_G + (\widehat{X}_1 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{X}_0 \widehat{\widetilde{Z}}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_0 \widehat{\widetilde{Z}}_G \\ &\quad + (\widehat{Y}_0 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{Y}_0 \widehat{Z}_G + (\widehat{Y}_0 \widehat{Z}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{\widetilde{Z}}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{Y}_1 \widehat{P} \\ &\quad + (\widehat{Y}_1 \widehat{P})^* \widehat{Y}_2 \widehat{\widetilde{Z}}_G + (\widehat{Y}_1 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{P} + (\widehat{Y}_2 \widehat{P})^* \widehat{Y}_1 \widehat{\widetilde{Z}}_G \\ &\quad + \widehat{Z}_G^* \widehat{Q} \widehat{P} + \widehat{P} \widehat{Q} \widehat{Z}_G + \lambda(\widehat{Z}_G^* \widehat{P} + \widehat{P} \widehat{Z}_G), \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \widehat{N}_{G,22} &= (\widehat{Y}_0 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{Y}_2 \widehat{\widetilde{Z}}_G + (\widehat{Y}_2 \widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{Y}_0 \widehat{\widetilde{Z}}_G + (\widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{Q} \widehat{P} + \widehat{P} \widehat{Q} \widehat{\widetilde{Z}}_G \\ &\quad + \lambda \left((\widehat{\widetilde{Z}}_G)^* \widehat{P} + \widehat{P} \widehat{\widetilde{Z}}_G \right). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Отметим оценку, вытекающую из (2.32) и (3.14):

$$\|\widehat{N}_G(t, \varepsilon)\| \leq C_G(t^2 + \varepsilon^2)^{3/2}; \quad C_G = C_N \|M^{-1}\|^2. \quad (3.20)$$

В соответствии с замечанием 1.5 справедливо следующее наблюдение.

Замечание 3.1. Постоянная C_G контролируется через полином с положительными коэффициентами от $\|M^{-1}\|$ и от данных (1.14).

3.6 Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты

Наша цель в этом пункте — для оператора вида (3.7) найти аппроксимацию операторной экспоненты $e^{-B(t,\varepsilon)s}$ в терминах изоморфизма M и пороговых характеристик оператора $\widehat{B}(t, \varepsilon)$.

Пусть для оператора $A(t)$ справедливо неравенство (2.1) с некоторой постоянной $c_* > 0$: $A(t) \geq c_* t^2 I$, $|t| \leq \tau_0$. Здесь τ_0 подчинено условию (1.13) для оператора $B(t, \varepsilon)$. Тогда для $B(t, \varepsilon)$ выполнена оценка (2.2).

Итак, оператор $B(t, \varepsilon)$ вида (3.7) удовлетворяет всем условиям теоремы 2.4. Применяя ее и умножая равенство (2.37) на оператор M слева и на M^* справа, находим

$$M e^{-B(t,\varepsilon)s} M^* = M e^{-L(t,\varepsilon)s} P M^* + M K(t, \varepsilon, s) M^* + M \mathcal{R}(t, \varepsilon, s) M^*. \quad (3.21)$$

Согласно (2.33)

$$\begin{aligned}
MK(t, \varepsilon, s)M^* &= M(tZ + \varepsilon\tilde{Z})e^{-L(t, \varepsilon)s}PM^* \\
&+ Me^{-L(t, \varepsilon)s}P(tZ^* + \varepsilon\tilde{Z}^*)M^* \\
&- \int_0^s Me^{-L(t, \varepsilon)(s-\tilde{s})}PN(t, \varepsilon)Pe^{-L(t, \varepsilon)\tilde{s}}PM^* d\tilde{s}.
\end{aligned} \tag{3.22}$$

Учтем тождество, установленное в [М, предложение 3.1]:

$$Me^{-L(t, \varepsilon)s}PM^* = M_0e^{-M_0\hat{L}(t, \varepsilon)M_0s}M_0\hat{P}. \tag{3.23}$$

Здесь $L(t, \varepsilon)$ и $\hat{L}(t, \varepsilon)$ — операторы (2.29) и (3.11) соответственно,

$$M_0 := (G_{\hat{\mathfrak{H}}})^{-1/2}. \tag{3.24}$$

Обозначим $K_G(t, \varepsilon, s) := MK(t, \varepsilon, s)M^*$. Отметим сразу оценки, вытекающие из (2.35) и (2.36):

$$\|K_G(t, \varepsilon, s)\| \leq C_8\|M\|^2s^{-1}(t^2 + \varepsilon^2)^{-1/2}e^{-\check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)s/2}, \quad s > 0; \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}
\|K_G(t, \varepsilon, s)\| &\leq C_9\|M\|^2(t^2 + \varepsilon^2)^{1/2}(1 + \check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)s)^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)s/2}, \\
&s \geq 0.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

В силу (3.12)–(3.14), (3.22) и (3.23) для оператора $K_G(t, \varepsilon, s)$ справедливо представление

$$\begin{aligned}
K_G(t, \varepsilon, s) &= (t\hat{Z}_G + \varepsilon\hat{\tilde{Z}}_G)M_0e^{-M_0\hat{L}(t, \varepsilon)M_0s}M_0\hat{P} \\
&+ M_0e^{-M_0\hat{L}(t, \varepsilon)M_0s}M_0\hat{P}\left(t\hat{Z}_G^* + \varepsilon(\hat{\tilde{Z}}_G^*)^*\right) \\
&- \int_0^s M_0e^{-M_0\hat{L}(t, \varepsilon)M_0(s-\tilde{s})}M_0\hat{N}_G(t, \varepsilon)M_0e^{-M_0\hat{L}(t, \varepsilon)M_0\tilde{s}}M_0\hat{P} d\tilde{s}.
\end{aligned} \tag{3.27}$$

Объединяя (2.38), (2.39), (3.21), (3.23) и (3.27), получаем следующий результат.

Теорема 3.2. Пусть выполнены условия п. 3.1 и 3.2. Пусть для оператора $A(t)$ справедливо неравенство (2.1). Пусть оператор $\hat{L}(t, \varepsilon)$ определен в (3.11). Пусть M_0 — оператор (3.24). Тогда справедливо представление

$$Me^{-B(t, \varepsilon)s}M^* = M_0e^{-M_0\hat{L}(t, \varepsilon)M_0s}M_0\hat{P} + K_G(t, \varepsilon, s) + M\mathcal{R}(t, \varepsilon, s)M^*.$$

Здесь $K_G(t, \varepsilon, s)$ — оператор (3.27), удовлетворяющий оценкам (3.25), (3.26), а для остаточного члена выполнены неравенства

$$\begin{aligned}\|\mathcal{M}\mathcal{R}(t, \varepsilon, s)M^*\| &\leq C_7\|M\|^2(s+1)^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s \geq 0; \\ \|\mathcal{M}\mathcal{R}(t, \varepsilon, s)M^*\| &\leq C_5\|M\|^2s^{-1}e^{-\check{c}_*(t^2+\varepsilon^2)s/2}, \quad s > 0.\end{aligned}$$

Постоянные C_5, C_7, C_8, C_9 контролируются через полиномы от \check{c}_*^{-1} и данных (1.14), коэффициенты которых — абсолютные положительные постоянные.

Глава 2. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

4 Предварительные сведения

4.1 Решетки Γ и $\tilde{\Gamma}$

Пусть Γ — решетка в \mathbb{R}^d , порожденная базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$:

$$\Gamma = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d n^j \mathbf{a}_j, n^j \in \mathbb{Z}\}.$$

Через Ω обозначим элементарную ячейку решетки Γ :

$$\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \xi^j \mathbf{a}_j, 0 < \xi^j < 1\}.$$

Базис $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^d$, двойственный к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется соотношениями $\langle \mathbf{b}^l, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi\delta_j^l$. Этот базис порождает решетку $\tilde{\Gamma}$, двойственную к решетке Γ . За $\tilde{\Omega}$ обозначим *зону Бриллюэна* решетки $\tilde{\Gamma}$:

$$\tilde{\Omega} = \{\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, 0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}\}.$$

Область $\tilde{\Omega}$ является фундаментальной для $\tilde{\Gamma}$. Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \text{mes } \Omega$, $|\tilde{\Omega}| = \text{mes } \tilde{\Omega}$. Пусть r_0 — радиус шара, вписанного в $\text{clos } \tilde{\Omega}$, и пусть $2r_1 = \text{diam } \tilde{\Omega}$.

Если $\Phi(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая матрица-функция в \mathbb{R}^d , положим

$$\bar{\Phi} := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \underline{\Phi} := \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} \right)^{-1}. \quad (4.1)$$

Здесь при определении $\bar{\Phi}$ предполагается, что $\Phi \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$, а при определении $\underline{\Phi}$ считается, что матрица Φ квадратная и неособая, причем $\Phi^{-1} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

4.2 Факторизованные операторы второго порядка

(См. [BSu2].) Пусть $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ — ДО первого порядка. Здесь b_l — постоянные $(m \times n)$ -матрицы. Считаем, что $m \geq n$. Относительно символа $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$ предположим, что $\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Тогда при некоторых $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ выполнено

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty. \quad (4.2)$$

Пусть $(n \times n)$ -матрица-функция $f(\mathbf{x})$ и $(m \times m)$ -матрица-функция $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, — ограничены и ограниченно обратимы:

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h, h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \quad (4.3)$$

Функции f и h предполагаются Γ -периодическими. Рассмотрим ДО

$$\mathcal{X} := hb(\mathbf{D})f : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m), \quad (4.4)$$

$$\text{Dom } \mathcal{X} := \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) : f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)\}. \quad (4.5)$$

Оператор (4.4) замкнут на области определения (4.5). Рассмотрим самосопряженный в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ оператор $\mathcal{A} := \mathcal{X}^* \mathcal{X}$, отвечающий квадратичной форме

$$\mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \quad (4.6)$$

Формально можно записать $\mathcal{A} = f^* b(\mathbf{D})^* g b(\mathbf{D}) f$, где $g = h^* h$. Используя преобразование Фурье и (4.2), (4.3), легко проверить, что при $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}$ справедливы оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (4.7)$$

4.3 Операторы \mathcal{Y} и \mathcal{Y}_2

Перейдем к описанию младших членов. Введем оператор $\mathcal{Y} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$, действующий по правилу

$$\mathcal{Y}\mathbf{u} = \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \text{col} \{D_1(f\mathbf{u}), \dots, D_d(f\mathbf{u})\}, \quad \text{Dom } \mathcal{Y} = \text{Dom } \mathcal{X}. \quad (4.8)$$

Нижняя оценка (4.7) означает, что

$$\|\mathcal{Y}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq c_1 \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}; \quad c_1 = \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \quad (4.9)$$

Пусть в \mathbb{R}^d заданы Γ -периодические $(n \times n)$ -матрицы-функции $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$, такие, что

$$a_j \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \varrho > d \text{ при } d \geq 2; \quad j = 1, \dots, d. \quad (4.10)$$

Пусть оператор $\mathcal{Y}_2 : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$ действует на области определения $\text{Dom } \mathcal{Y}_2 = \text{Dom } \mathcal{X}$ по правилу $\mathcal{Y}_2\mathbf{u} = \text{col} \{a_1^* f\mathbf{u}, \dots, a_d^* f\mathbf{u}\}$. Формально, $(\mathcal{Y}_2^* \mathcal{Y} + \mathcal{Y}^* \mathcal{Y}_2)\mathbf{u} = \sum_{j=1}^d (f^* a_j D_j(f\mathbf{u}) + f^* D_j(a_j^* f\mathbf{u}))$.

Используя неравенство Гёльдера, условия (4.3), (4.10) и компактность вложения $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$ при $p = 2\varrho/(\varrho - 2)$, можно показать (ср. [Su4, п. 5.2]), что для любого $\nu > 0$ существует постоянная $C(\nu) > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \nu \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + C(\nu) \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \quad (4.11)$$

При фиксированном ν постоянная $C(\nu)$ зависит от норм $\|a_j\|_{L_\varrho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, от $\|f\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, α_0 , d , ϱ и от параметров решетки Γ .

Используя (4.9) и (4.11), несложно получить неравенство

$$2\varepsilon |\text{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| \leq \frac{\kappa}{2} \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + c_4 \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad (4.12)$$

$$\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}; \quad c_4 = 4\kappa^{-1} c_1^2 C(\nu) \text{ при } \nu = \kappa^2 (16c_1^2)^{-1}.$$

4.4 Оператор \mathcal{Q}_0 , форма $q[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$

Пусть \mathcal{Q}_0 — оператор в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, действующий как умножение на Γ -периодическую положительно определенную ограниченную матрицу-функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) := f(\mathbf{x})^* f(\mathbf{x})$.

Пусть в \mathbb{R}^d задана Γ -периодическая борелевская σ -конечная мера $d\mu(\mathbf{x}) = \{d\mu_{jl}(\mathbf{x})\}$, $j, l = 1, \dots, n$, со значениями в классе эрмитовых $(n \times n)$ -матриц. Иначе говоря, $d\mu_{jl}(\mathbf{x})$ — комплексная Γ -периодическая мера в \mathbb{R}^d и $d\mu_{jl} = d\mu_{lj}^*$. Предположим, что мера $d\mu$ такова, что функция $|v(\mathbf{x})|^2$ суммируема по каждой мере $d\mu_{jl}$ для любой функции $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим форму

$$q[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}.$$

Наложим на меру $d\mu$ следующее ограничение.

Условие 4.1. 1°. Существуют постоянные $\tilde{c}_2 \geq 0$ и $\hat{c}_3 \geq 0$ такие, что при любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ выполнена оценка

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \right| &\leq \left(\tilde{c}_2 \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \hat{c}_3 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\tilde{c}_2 \|\mathbf{D}\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \hat{c}_3 \|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

2°. Справедлива оценка

$$\int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle \geq -\tilde{c} \|\mathbf{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 - \hat{c}_0 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^n),$$

с некоторыми постоянными $\hat{c}_0 \in \mathbb{R}$ и \tilde{c} такой, что $0 \leq \tilde{c} < \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_{\infty}}^{-1}$.

Заметим, что из условия 4.1 вытекают оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{v} \rangle \right| &\leq \left(\tilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_3 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\tilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f\mathbf{v})\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_3 \|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u} \rangle \geq -\tilde{c} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2(\Omega)}^2 - c_0 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (4.14)$$

$f\mathbf{u}, f\mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, с постоянными $c_0 = \hat{c}_0 \|f\|_{L_{\infty}}^2$, если $\hat{c}_0 \geq 0$, $c_0 = \hat{c}_0 \|f^{-1}\|_{L_{\infty}}^{-2}$, если $\hat{c}_0 < 0$; $c_3 = \|f\|_{L_{\infty}}^2 \hat{c}_3$.

При $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Dom } \mathcal{X}$ запишем неравенства (4.13), (4.14) по сдвинутым ячейкам $\Omega + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Gamma$, и просуммируем. Получим

$$\begin{aligned} |q[\mathbf{u}, \mathbf{v}]| &\leq \left(\tilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + c_3 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(\tilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f\mathbf{v})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + c_3 \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2}, \\ q[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &\geq -\tilde{c} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - c_0 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \end{aligned}$$

С учетом (4.7) отсюда следуют оценки

$$\begin{aligned} |q[\mathbf{u}, \mathbf{v}]| &\leq \left(c_2 \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + c_3 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2} \\ &\quad \times \left(c_2 \|\mathcal{X}\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + c_3 \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$q[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq -(1 - \kappa) \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - c_0 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad (4.16)$$

$\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Dom } \mathcal{X}$. Здесь $c_2 = \tilde{c}_2 \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\kappa = 1 - \tilde{c}_0 \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $0 < \kappa \leq 1$.

Примеры мер $d\mu$, удовлетворяющих условию 4.1, приведены в [Su4, п. 5.5]. Выпишем только основной пример.

Пример 4.2. Пусть мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега: $d\mu(\mathbf{x}) = \mathcal{Q}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$, где $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая эрмитова $(n \times n)$ -матрица-функция в \mathbb{R}^d , причем

$$\mathcal{Q} \in L_\sigma(\Omega), \quad \sigma = 1 \text{ при } d = 1; \quad \sigma > d/2 \text{ при } d \geq 2. \quad (4.17)$$

Тогда

$$q[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathcal{Q}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}), f(\mathbf{x}) \mathbf{u}(\mathbf{x}) \rangle d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}.$$

В силу теорем вложения при условии (4.17) для любого $\nu > 0$ существует положительная постоянная $C_Q(\nu)$ такая, что

$$\int_{\Omega} |\mathcal{Q}(\mathbf{x})| |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} \leq \nu \int_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x} + C_Q(\nu) \int_{\Omega} |\mathbf{v}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{v} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^n).$$

При фиксированном ν постоянная $C_Q(\nu)$ контролируется через d, σ , норму $\|\mathcal{Q}\|_{L_\sigma(\Omega)}$ и параметры решетки Γ . Итак, условие 4.1 выполнено, причем постоянные можно выбрать следующим образом: $\tilde{c}_2 = 1$, $\hat{c}_3 = C_Q(1)$, $\tilde{c} = \nu$ и $\hat{c}_0 = C_Q(\nu)$ при $2\nu = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}$.

4.5 Оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &= \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\varepsilon \text{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2 q[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \\ &\quad + \lambda \varepsilon^2 (\mathcal{Q}_0 \mathbf{u}, \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

где $0 < \varepsilon \leq 1$, и параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ удовлетворяет следующему условию:

$$\begin{aligned} \lambda &> \|\mathcal{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty} (c_0 + c_4), \text{ если } \lambda \geq 0, \\ \lambda &> \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}^{-1} (c_0 + c_4), \text{ если } \lambda < 0 \text{ (и } c_0 + c_4 < 0). \end{aligned} \quad (4.19)$$

Оценим форму (4.18) снизу. Пусть $\beta > 0$ определено равенством

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda \|\mathcal{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} - c_0 - c_4, \text{ если } \lambda \geq 0, \\ \beta &= \lambda \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty} - c_0 - c_4, \text{ если } \lambda < 0 \text{ (и } c_0 + c_4 < 0). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Комбинируя (4.12), (4.16), (4.19) и (4.20), имеем

$$\mathbf{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq \frac{\kappa}{2} \mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + \varepsilon^2 \beta \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (4.21)$$

Таким образом, форма $\mathbf{b}(\varepsilon)$ положительно определена. Объединяя (4.9), (4.11) при $\nu = 1$ и оценку (4.15) для квадратичной формы $q[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$, находим

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &\leq (2 + c_1^2 + c_2) \mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \\ &+ \varepsilon^2 (C(1) + c_3 + |\lambda| \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}) \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Из неравенств (4.21) и (4.22) следует, что форма $\mathbf{b}(\varepsilon)$ замкнута. *Отвечающий ей положительно определенный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ обозначим через $\mathcal{B}(\varepsilon)$.* Формально можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\varepsilon) &= \mathcal{A} + \varepsilon (\mathcal{Y}_2^* \mathcal{Y} + \mathcal{Y}^* \mathcal{Y}_2) + \varepsilon^2 f^* \mathcal{Q} f + \varepsilon^2 \lambda \mathcal{Q}_0 \\ &= f^* b(\mathbf{D})^* g b(\mathbf{D}) f + \varepsilon \sum_{j=1}^d f^* (a_j D_j + D_j a_j^*) f + \varepsilon^2 f^* \mathcal{Q} f + \varepsilon^2 \lambda \mathcal{Q}_0, \end{aligned} \quad (4.23)$$

где \mathcal{Q} следует интерпретировать как обобщенный матричный потенциал, порожденный мерой $d\mu$.

Для удобства дальнейших ссылок назовем „исходными данными“ набор величин

$$\begin{aligned} d, m, n, \varrho; \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, \|a_j\|_{L_\varrho(\Omega)}, \\ j = 1, \dots, d; \tilde{c}, \hat{c}_0, \tilde{c}_2, \hat{c}_3 \text{ из условия 4.1; } \lambda; \text{ параметры решетки } \Gamma. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Мы будем следить за зависимостью постоянных в оценках от этих данных. Постоянные $c_1, C(1), \kappa, c_2, c_3, c_4, c_0, \beta$ полностью определяются исходными данными (4.24).

5 Разложение оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$ в прямой интеграл

5.1 Преобразование Гельфанда

Преобразование Гельфанда \mathcal{U} первоначально задается на функциях класса Шварца $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ формулой

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = (\mathcal{U}\mathbf{v})(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = |\tilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma} \exp(-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} + \mathbf{a} \rangle) \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}.$$

При этом $\int_{\tilde{\Omega}} \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$, а потому \mathcal{U} продолжается по непрерывности до унитарного отображения

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) d\mathbf{k} =: \mathcal{H}.$$

Через $\tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ обозначим подпространство тех функций из $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ -периодическое продолжение которых на \mathbb{R}^d принадлежит классу $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Включение $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ при п. в. $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и

$$\int_{\tilde{\Omega}} \int_{\Omega} (|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 + |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2) d\mathbf{x} d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую матрицу-функцию в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ под действием \mathcal{U} переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла \mathcal{H} . Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ на $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

5.2 Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

(См. [BSu2, п. 2.2.1].) Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad \tilde{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^{dn}) \quad (5.1)$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, задаваемый соотношениями

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D} + \mathbf{k})f, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \quad (5.2)$$

$$\mathfrak{d} := \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{H} : f\mathbf{u} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)\}. \quad (5.3)$$

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) := \mathcal{X}(\mathbf{k})^* \mathcal{X}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, порождается замкнутой квадратичной формой $\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] := \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}^2$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$. Из (4.2) и (4.3) вытекают оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad (5.4)$$

$$\mathbf{v} = f\mathbf{u} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n).$$

Из (5.4) и компактности вложения $\tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ в \mathfrak{H} следует, что спектр оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ дискретен. Положим $\mathfrak{N} := \text{Ker } \mathcal{A}(0) = \text{Ker } \mathcal{X}(0)$. Из неравенств (5.4) при $\mathbf{k} = 0$ вытекает, что

$$\mathfrak{N} = \text{Ker } \mathcal{A}(0) = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) : f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad \dim \mathfrak{N} = n. \quad (5.5)$$

Как показано в [BSu2, (2.2.11), (2.2.12)], справедлива оценка

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geq c_* |\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \text{clos } \tilde{\Omega}; \quad c_* = \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}. \quad (5.6)$$

В соответствии с [BSu2, (2.2.14)] расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ допускает оценку

$$d^0 \geq 4c_* r_0^2. \quad (5.7)$$

5.3 Операторы $\mathcal{Y}(\mathbf{k})$ и Y_2

Рассмотрим оператор $\mathcal{Y}(\mathbf{k}) : \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$, действующий на области определения $\text{Dom } \mathcal{Y}(\mathbf{k}) = \mathfrak{d}$ по правилу

$$\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u} = (\mathbf{D} + \mathbf{k})f\mathbf{u} = \text{col} \{(D_1 + k_1)f\mathbf{u}, \dots, (D_d + k_d)f\mathbf{u}\}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \quad (5.8)$$

Из нижней оценки (5.4) вытекает, что

$$\|\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathfrak{H}}} \leq c_1 \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}, \quad (5.9)$$

где постоянная c_1 определена в (4.9).

Рассмотрим оператор $Y_2 : \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$, заданный соотношением

$$Y_2\mathbf{u} = \text{col} \{a_1^* f\mathbf{u}, \dots, a_d^* f\mathbf{u}\}, \quad \text{Dom } Y_2 = \mathfrak{d}. \quad (5.10)$$

Как показано в [Su4, п. 5.7], для любого $\nu > 0$ найдутся постоянные $C_j(\nu) > 0$, $j = 1, \dots, d$, такие, что при $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ справедливы неравенства

$$\|a_j^* \mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 \leq \nu \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 + C_j(\nu) \|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad j = 1, \dots, d.$$

Пусть $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$. Тогда, суммируя указанные неравенства по j и учитывая (4.3), (5.4), получаем, что для любого $\nu > 0$ существует постоянная $C(\nu) > 0$ (та же, что и в (4.11)) такая, что

$$\|Y_2\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathfrak{H}}}^2 \leq \nu \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + C(\nu) \|\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathfrak{H}}}^2, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \quad (5.11)$$

5.4 Оператор \mathcal{Q}_0 , форма $q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$

Пусть \mathcal{Q}_0 — ограниченный оператор в \mathfrak{H} , действующий как умножение на матрицу-функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})^* f(\mathbf{x})$.

В $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим форму

$$q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u} \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}.$$

Заменяя в (4.13), (4.14) функцию $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \exp(i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle)$ (эти функции принадлежат пространству $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ одновременно), а $f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$ на $f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \exp(i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle)$ и используя (5.4), получаем, что

$$|q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{v}]| \leq (c_2 \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}^*}^2 + c_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2} (c_2 \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{v}\|_{\mathfrak{H}^*}^2 + c_3 \|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2}, \quad (5.12)$$

$$q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq -(1 - \kappa) \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}^*}^2 - c_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2; \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathfrak{D}, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \quad (5.13)$$

Здесь постоянные κ , c_0 , c_2 , c_3 те же, что и в (4.15), (4.16).

5.5 Операторный пучок $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$

В пространстве \mathfrak{H} рассмотрим квадратичную форму

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &= \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\varepsilon \operatorname{Re}(\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}, Y_2\mathbf{u})_{\tilde{\mathfrak{H}}} \\ &\quad + \varepsilon^2 q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + \lambda \varepsilon^2 (\mathcal{Q}_0\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D}. \end{aligned}$$

Из (4.19), (4.20), (5.9), (5.11) и (5.13) вытекает оценка

$$\mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq \frac{\kappa}{2} \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + \beta \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D}. \quad (5.14)$$

Далее, из (5.9), (5.11) при $\nu = 1$ и (5.12) получаем

$$\mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq (2 + c_1^2 + c_2) \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + (C(1) + c_3 + |\lambda| \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}) \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{D}. \quad (5.15)$$

Неравенства (5.14), (5.15) показывают, что форма $\mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ замкнута на области определения (5.3) и положительно определена. Порожденный этой формой самосопряженный положительно определенный оператор в пространстве \mathfrak{H} обозначим через $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$. Формально можно записать

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon) &= \mathcal{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon(Y_2^* \mathcal{Y}(\mathbf{k}) + \mathcal{Y}(\mathbf{k})^* Y_2) + \varepsilon^2 f^* \mathcal{Q} f + \lambda \varepsilon^2 \mathcal{Q}_0 \\ &= f^* b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) f \\ &\quad + \varepsilon \sum_{j=1}^d f^* (a_j(D_j + k_j) + (D_j + k_j)a_j^*) f + \varepsilon^2 f^* \mathcal{Q} f + \lambda \varepsilon^2 f^* f. \end{aligned} \quad (5.16)$$

5.6 Разложение в прямой интеграл для оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$

Под действием преобразования Гельфанда \mathcal{U} оператор (4.23), действующий в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, раскладывается в прямой интеграл операторов (5.16), действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$:

$$\mathcal{U} \mathcal{B}(\varepsilon) \mathcal{U}^{-1} = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon) d\mathbf{k}.$$

Сказанное означает следующее. Пусть $\tilde{\mathbf{u}} = \mathcal{U}\mathbf{u}$, где $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathbf{b}(\varepsilon) = \text{Dom } \mathcal{X}$. Тогда

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \mathfrak{d} \text{ при п. в. } \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, \quad (5.17)$$

$$\mathbf{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot), \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \cdot)] d\mathbf{k}. \quad (5.18)$$

Обратно, если для $\tilde{\mathbf{u}} \in \mathcal{H}$ выполнено (5.17) и интеграл в (5.18) конечен, то $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathbf{b}(\varepsilon) = \text{Dom } \mathcal{X}$ и выполнено (5.18).

6 Включение операторов $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ в абстрактную схему

Содержимое п. 6.1–7.5 заимствовано из [Su7].

6.1

При $d > 1$ операторы $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ зависят от многомерного параметра \mathbf{k} . Следуя [BSu2, гл. 2], выделим одномерный параметр t , полагая $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}$, $t = |\mathbf{k}|$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Будем применять схему главы 1. При этом возникающие объекты будут зависеть от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta}$, и необходимо следить за равномерностью по $\boldsymbol{\theta}$ построений и оценок. Пространства \mathfrak{H} , \mathfrak{H}_* и $\tilde{\mathfrak{H}}$ определены в (5.1). Положим $X(t) = X(t; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. В соответствии с (5.2) имеем $X(t; \boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где

$$X_0 = \mathcal{X}(0) = hb(\mathbf{D})f, \quad \text{Dom } X_0 = \mathfrak{d}; \quad X_1(\boldsymbol{\theta}) = hb(\boldsymbol{\theta})f. \quad (6.1)$$

Далее, положим $A(t) = A(t; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. В соответствии с (5.5) ядро $\mathfrak{N} = \text{Ker } X_0 = \text{Ker } \mathcal{A}(0)$ n -мерно. Условие 1.1 выполнено. Величина d^0 допускает оценку (5.7). Как показано в [BSu2, гл. 2, §3], условие $n \leq n_* = \dim \text{Ker } X_0^*$ также выполнено. Оценка (5.6) соответствует неравенству (2.1).

Далее, роль $Y(t)$ играет оператор $Y(t; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{Y}(t\boldsymbol{\theta})$. Согласно (5.8) справедливо равенство $Y(t; \boldsymbol{\theta}) = Y_0 + tY_1(\boldsymbol{\theta})$, где

$$\begin{aligned} Y_0\mathbf{u} &= \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \text{col} \{D_1f\mathbf{u}, \dots, D_d f\mathbf{u}\}, \quad \text{Dom } Y_0 = \mathfrak{d}; \\ Y_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} &= \text{col} \{\theta_1 f\mathbf{u}, \dots, \theta_d f\mathbf{u}\}. \end{aligned} \quad (6.2)$$

Условие 1.2 выполнено за счет оценки (5.9). Оператор Y_2 определен в (5.10). Условие 1.3 выполнено в силу (5.11). Роль формы \mathfrak{q} из п. 1.3 играет форма q_Ω . Условие 1.4 выполнено в силу (5.12), (5.13). Роль оператора Q_0 из п. 1.4 играет оператор умножения на матрицу-функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$. Ограничение (1.9) на параметр λ выполнено в силу (4.19).

Наконец, в качестве операторного пучка $B(t, \varepsilon)$ (см. п. 1.4) выступает операторное семейство (5.16): $B(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{B}(t\boldsymbol{\theta}, \varepsilon)$.

Таким образом, все предположения абстрактной схемы выполнены.

6.2

В соответствии с п. 1.5 надлежит фиксировать положительное число δ такое, что $\delta < \kappa d^0/13$. Учитывая (5.6) и (5.7), положим

$$\delta = \frac{1}{4} \kappa c_* r_0^2 = \frac{1}{4} \kappa \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} r_0^2.$$

Заметим, что из (4.2), (4.3), (6.1) и (6.2) вытекают соотношения

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty}, \quad \|Y_1(\boldsymbol{\theta})\| = \|f\|_{L_\infty}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \quad (6.3)$$

Теперь правая часть в оценке (1.13) принимает вид

$$\delta^{1/2} ((2 + c_1^2 + c_2) \|X_1(\boldsymbol{\theta})\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda| \|f\|_{L_\infty}^2)^{-1/2}$$

и зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Выберем следующее значение постоянной τ_0 , подходящее при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$:

$$\tau_0 = \delta^{1/2} ((2 + c_1^2 + c_2) \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}^2 + C(1) + c_3 + |\lambda| \|f\|_{L_\infty}^2)^{-1/2}. \quad (6.4)$$

С учетом (5.6) и (5.14) для оператора $B(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$ справедливо условие вида (2.2):

$$\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon) = B(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) \geq \check{c}_*(t^2 + \varepsilon^2)I, \quad \mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \tilde{\Omega}, \quad 0 < \varepsilon \leq 1; \quad (6.5)$$

$$\check{c}_* = \frac{1}{2} \min\{\kappa c_*; 2\beta\}. \quad (6.6)$$

6.3 Случай $f = \mathbf{1}_n$

Все объекты, относящиеся к случаю $f = \mathbf{1}_n$, далее помечаются верхним значком „ $\widehat{}$ “. Имеем $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. В соответствии с п. 6.1 выполнено $\widehat{X}(t; \boldsymbol{\theta}) = \widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})$, где

$$\widehat{X}_0 = hb(\mathbf{D}), \quad \text{Dom } \widehat{X}_0 = \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad (6.7)$$

и $\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})$:

$$\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}) = hb(\boldsymbol{\theta}). \quad (6.8)$$

Формально $\widehat{A}(t; \boldsymbol{\theta}) = \widehat{X}(t; \boldsymbol{\theta})^* \widehat{X}(t; \boldsymbol{\theta})$. В случае $f = \mathbf{1}_n$ ядро (5.5) совпадает с подпространством констант $\widehat{\mathfrak{N}} = \{\mathbf{u} \in \mathfrak{H} : \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}$. Ортогональный проектор \widehat{P} пространства $\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство $\widehat{\mathfrak{N}} = \mathbb{C}^n$ — это оператор усреднения по ячейке Ω :

$$\widehat{P}\mathbf{u} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (6.9)$$

Далее, $\widehat{Y}(t; \boldsymbol{\theta}) = \widehat{Y}_0 + t\widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta}) : \mathfrak{H} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{H}}$, где

$$\widehat{Y}_0\mathbf{u} = \mathbf{D}\mathbf{u} = \text{col}\{D_1\mathbf{u}, \dots, D_d\mathbf{u}\}, \quad \text{Dom } \widehat{Y}_0 = \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad (6.10)$$

$$\widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} = \text{col}\{\theta_1\mathbf{u}, \dots, \theta_d\mathbf{u}\}. \quad (6.11)$$

Оператор $\widehat{Y}_2 : \mathfrak{H} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{H}}$ действует по правилу

$$\widehat{Y}_2\mathbf{u} = \text{col}\{a_1^*\mathbf{u}, \dots, a_d^*\mathbf{u}\}, \quad \text{Dom } \widehat{Y}_2 = \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n). \quad (6.12)$$

Роль формы $\widehat{q}[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$ играет форма $\int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle$, $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$. В роли оператора \widehat{Q}_0 выступает тождественный оператор I .

Операторный пучок $\widehat{B}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$ формально дается выражением

$$\widehat{B}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) = \widehat{A}(t; \boldsymbol{\theta}) + \varepsilon(\widehat{Y}_2^* \widehat{Y}(t; \boldsymbol{\theta}) + \widehat{Y}(t; \boldsymbol{\theta})^* \widehat{Y}_2) + \varepsilon^2 \mathcal{Q} + \lambda \varepsilon^2 I.$$

(Подчеркнем, что формальный объект \mathcal{Q} не изменился.)

6.4 Случай $f \neq \mathbf{1}_n$. Реализация условий §3

Вернемся к рассмотрению операторов $\mathcal{B}(\varepsilon)$ общего вида (4.23) и соответствующих семейств $B(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$, описанных в п. 6.1. Верхний значок „ $\widehat{}$ “ удерживается для обозначения объектов, отвечающих $f = \mathbf{1}_n$ при сохранении тех же $b(\mathbf{D})$, g , a_j , $j = 1, \dots, d$, λ и $d\mu$.

Поймем, что для операторных семейств $B(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{B}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$ справедливости условия §3 абстрактной схемы. Действительно, тождество (3.7) соответствует очевидному равенству $B(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) = f^* \widehat{B}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) f$. Роль изоморфизма M сейчас играет оператор умножения на матрицу-функцию $f(\mathbf{x})$. Тогда в качестве оператора G (см. (3.2)) выступает оператор умножения на матрицу-функцию $(f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$. Блок G в ядре $\widehat{\mathfrak{N}} = \mathbb{C}^n$ — оператор умножения на постоянную матрицу $\overline{G} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1} d\mathbf{x}$. Роль оператора M_0 (см. (3.24)) играет оператор умножения на матрицу

$$f_0 := (\overline{G})^{-1/2} = \underline{(ff^*)}^{1/2}. \quad (6.13)$$

Заметим, что

$$|f_0| \leq \|f\|_{L_\infty}, \quad |f_0^{-1}| \leq \|f^{-1}\|_{L_\infty}. \quad (6.14)$$

6.5 Об оценочных постоянных

Мы нацелены на применение результатов главы 1 к оператору $B(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$, который зависит от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta}$. Чтобы реализовать абстрактную схему, требуется сделать все оценки главы 1 в применении к этому оператору равномерными по $\boldsymbol{\theta}$, т. е. для каждой постоянной выбрать значение, подходящее при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. В главе 1 было прослежено (см. замечания 1.5 и 3.1 и теорему 3.2), что постоянные C_N , C_5 , C_7 , C_8 и C_9 контролируются через полиномы с абсолютными положительными коэффициентами от данных (1.14) и \check{c}_*^{-1} , а постоянная C_G зависит от тех же величин и от $\|M^{-1}\|$. В рассматриваемом случае $\|M^{-1}\| = \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}^{1/2}$, данные (1.14) сводятся к набору величин $\delta, \delta^{-1/2}, \tau_0, \kappa^{1/2}, \kappa^{-1/2}, c_1, c_2^{1/2}, c_3^{1/2}, C(1)^{1/2}, |\lambda|, \|X_1(\boldsymbol{\theta})\|, \|Y_1(\boldsymbol{\theta})\|$ и $\|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}$. Величины $\delta, \delta^{-1/2}, \kappa^{1/2}, \kappa^{-1/2}, c_1, c_2^{1/2}, c_3^{1/2}, C(1)^{1/2}$ от $\boldsymbol{\theta}$ не зависят и допускают контроль через исходные данные (4.24); число τ_0 уже выбрано не зависящим от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (6.4)). Используя (6.3), вместо $\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно взять $\alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty}$, а вместо $\|Y_1(\boldsymbol{\theta})\|$ — норму $\|f\|_{L_\infty}$. Таким образом, справедливо следующее наблюдение.

Замечание 6.1. Значения постоянных C_G, C_5, C_7, C_8 и C_9 для оператора $B(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$ можно выбрать не зависящими от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

7 Эффективные характеристики

7.1 Операторы $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})$, \widetilde{Z} и $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta})$

Оператор \widehat{Z} , определенный в п. 1.6, сейчас зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Введем Γ -периодическую $(n \times m)$ -матрицу-функцию $\Lambda(\mathbf{x})$, являющуюся слабым решением уравнения

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (7.1)$$

Как проверено в [Su4, п. 6.3], оператор $\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) : \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ определяется равенством

$$\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \quad (7.2)$$

где \widehat{P} — проектор (6.9).

В соответствии с [Su4, п. 6.3]

$$\widetilde{Z} = \widetilde{\Lambda} \widehat{P}, \quad (7.3)$$

где $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — Γ -периодическое $(n \times n)$ -матричное решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_{\Omega} \tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (7.4)$$

Оператор $\widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) : \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \mathfrak{N}_*$ действует как умножение на матрицу-функцию

$$\widehat{R}(\boldsymbol{\theta}) = h(b(\mathbf{D})\Lambda + \mathbf{1}_m)b(\boldsymbol{\theta}). \quad (7.5)$$

7.2 Оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Эффективная матрица

Спектральный росток \widehat{S} , введенный в п. 1.7, теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Согласно [BSu2, гл. 3, §1] оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) : \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{N}}$ действует как оператор умножения на матрицу $b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Здесь g^0 — постоянная $(m \times m)$ -матрица, называемая *эффективной матрицей* и заданная выражением

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \tilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \quad (7.6)$$

Нам потребуются следующие свойства эффективной матрицы, см. [BSu2, гл. 3, §1].

Предложение 7.1. *Эффективная матрица g^0 подчинена оценкам*

$$\underline{g} \leq g^0 \leq \bar{g}.$$

(Здесь \underline{g} и \bar{g} определены согласно (4.1).) При $m = n$ выполнено $g^0 = \underline{g}$.

Предложение 7.2. *Равенство $g^0 = \bar{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (7.7)$$

для столбцов $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$ матрицы $g(\mathbf{x})$.

Предложение 7.3. *Равенство $g^0 = \underline{g}$ эквивалентно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k, \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad k = 1, \dots, m,$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$, — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

7.3 Оператор $\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$

Оператор $\widehat{L}(t, \varepsilon)$, определенный согласно (2.29) и действующий в пространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$, теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Оказывается (см. [Su4, (7.2), (7.3), (7.8)]), справедливо представление

$$\begin{aligned} \widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) &= b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) - \varepsilon(b(\mathbf{k})^* V + V^* b(\mathbf{k})) + \varepsilon \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) k_j \\ &\quad + \varepsilon^2(-W + \overline{Q} + \lambda I), \end{aligned}$$

где постоянные матрицы $(\overline{a_j + a_j^*})$ определены согласно (4.1),

$$V := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (7.8)$$

$$W := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (7.9)$$

$$\overline{Q} := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} d\mu(\mathbf{x}). \quad (7.10)$$

В соответствии с (5.6) выполнено неравенство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}) \geq \widehat{c}_* |\mathbf{k}|^2 I$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$, где $\widehat{c}_* = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L^\infty}^{-1}$. Отметим, что постоянные c_* и \widehat{c}_* связаны равенством $c_* = \|f^{-1}\|_{L^\infty}^{-2} \widehat{c}_*$. Согласно (3.8) $\beta \leq \|f^{-1}\|_{L^\infty}^{-2} \widehat{\beta}$. В силу (6.6) имеем $\check{c}_* = \frac{1}{2} \min\{\kappa c_*; 2\beta\}$, $\widehat{\check{c}}_* = \frac{1}{2} \min\{\kappa \widehat{c}_*; 2\widehat{\beta}\}$. Следовательно, $\check{c}_* \leq \|f^{-1}\|_{L^\infty}^{-2} \widehat{\check{c}}_*$. В соответствии с (2.30) $\widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) \geq \widehat{\check{c}}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2) \mathbf{1}_n$. С учетом (6.14) отсюда вытекает оценка

$$f_0 \widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) f_0 \geq \check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2) \mathbf{1}_n, \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \quad (7.11)$$

Положим

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) &= b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k}), \quad \widehat{\mathcal{Y}}^0(\mathbf{k}) = -b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* V + \sum_{j=1}^d \overline{a_j} (D_j + k_j), \\ \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) &= \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) + \varepsilon(\widehat{\mathcal{Y}}^0(\mathbf{k}) + \widehat{\mathcal{Y}}^0(\mathbf{k})^*) + \varepsilon^2(\overline{Q} - W + \lambda I). \end{aligned} \quad (7.12)$$

Тогда

$$\widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) \widehat{P} = \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) \widehat{P}. \quad (7.13)$$

Положим

$$\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) := f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) f_0, \quad (7.14)$$

где $\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$ — оператор (7.12). Так как символ оператора $\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$ подчинен оценке (7.11), используя разложение в ряд Фурье, несложно проверить оценку

$$\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) \geq \check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)I, \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \quad (7.15)$$

7.4 Случай $f \neq \mathbf{1}_n$. Операторы $\widehat{Z}_G(\boldsymbol{\theta})$ и \widetilde{Z}_G

Вернемся к рассмотрению общего случая $f \neq \mathbf{1}_n$. Реализуем операторы из п. 3.4. Определим Γ -периодическую $(n \times m)$ -матрицу-функцию $\Lambda_G(\mathbf{x})$ как (слабое) решение задачи

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda_G(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} G(\mathbf{x})\Lambda_G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (7.16)$$

Ср. [BSu4, §5]. Очевидно, $\Lambda_G(\mathbf{x})$ отличается от решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (7.1) на постоянное слагаемое:

$$\Lambda_G(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) + \Lambda_G^0, \quad \Lambda_G^0 = -(\overline{G})^{-1}(\overline{G\Lambda}). \quad (7.17)$$

В [BSu4, п. 7.3] установлена следующая оценка:

$$|\Lambda_G^0| \leq \mathfrak{C}_G = m^{1/2}(2r_0)^{-1}\alpha_0^{-1/2}\|g\|_{L^\infty}^{1/2}\|g^{-1}\|_{L^\infty}^{1/2}\|f\|_{L^\infty}^2\|f^{-1}\|_{L^\infty}^2. \quad (7.18)$$

Согласно [BSu4, §5] роль оператора \widehat{Z}_G из п. 3.4 играет оператор

$$\widehat{Z}_G(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_G b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}. \quad (7.19)$$

С учетом $b(\mathbf{D})\widehat{P} = 0$ имеем $t\widehat{Z}_G(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda_G b(\mathbf{D} + \mathbf{k})\widehat{P}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$.

Далее, аналогично (7.4) рассмотрим Γ -периодическое $(n \times n)$ -матричное решение $\widetilde{\Lambda}_G(\mathbf{x})$ задачи

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})\widetilde{\Lambda}_G(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_{\Omega} G(\mathbf{x})\widetilde{\Lambda}_G(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (7.20)$$

Заметим, что

$$\widetilde{\Lambda}_G(\mathbf{x}) = \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \widetilde{\Lambda}_G^0, \quad \widetilde{\Lambda}_G^0 = -(\overline{G})^{-1}(\overline{G\widetilde{\Lambda}}). \quad (7.21)$$

В [M, (7.12)] установлена оценка

$$|\widetilde{\Lambda}_G^0| \leq \widetilde{\mathfrak{C}}_G = (2r_0)^{-1}C_a n^{1/2}\alpha_0^{-1}\|g^{-1}\|_{L^\infty}\|f\|_{L^\infty}^2\|f^{-1}\|_{L^\infty}^2|\Omega|^{-1/2}. \quad (7.22)$$

Здесь $C_a^2 = \sum_{j=1}^d \int_{\Omega} |a_j(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$. Из определений оператора \widehat{Z}_G и матрицы-функции $\widetilde{\Lambda}_G$ вытекает тождество

$$\widehat{Z}_G = \widetilde{\Lambda}_G \widehat{P}. \quad (7.23)$$

7.5 Оператор $\widehat{N}_G(\mathbf{k}, \varepsilon)$

Оператор $\widehat{N}_G(t, \varepsilon)$, определенный согласно (3.15)–(3.19), теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$ и представляется в виде

$$\widehat{N}_G(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) = t^3 \widehat{N}_{G,11}(\boldsymbol{\theta}) + t^2 \varepsilon \widehat{N}_{G,12}(\boldsymbol{\theta}) + t \varepsilon^2 \widehat{N}_{G,21}(\boldsymbol{\theta}) + \varepsilon^3 \widehat{N}_{G,22}, \quad (7.24)$$

где операторы $\widehat{N}_{G,jl}(\boldsymbol{\theta})$ определены соотношениями (3.16)–(3.19), в которых операторы $\widehat{X}_1, \widehat{Z}_G, \widehat{R}, \widehat{Y}_1$ зависят от $\boldsymbol{\theta}$. (Ясно, что $\widehat{N}_{G,22}$ от $\boldsymbol{\theta}$ не зависит.)

Используя равенства (6.8), (6.9), (7.5) и (7.19), можно показать (ср. [BSu4, п. 5.3]), что первое слагаемое в правой части (7.24) имеет вид

$$\widehat{N}_{G,11}(\mathbf{k}) := t^3 \widehat{N}_{G,11}(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* M_G(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) \widehat{P},$$

где $M_G(\mathbf{k}) = \overline{\Lambda_G^* b(\mathbf{k})^* \widetilde{g}} + \overline{\widetilde{g}^* b(\mathbf{k}) \Lambda_G}$. Отметим, что $M_G(\mathbf{k})$ — эрмитова $(m \times m)$ -матрица-функция, однородная первой степени по \mathbf{k} . Таким образом, $M_G(\mathbf{k})$ является символом самосопряженного ДО $M_G(\mathbf{D})$ первого порядка с постоянными коэффициентами.

Положим $\widehat{N}_{G,12}(\mathbf{k}) := t^2 \widehat{N}_{G,12}(\boldsymbol{\theta})$. Используя равенства (6.7)–(6.12), (7.5), (7.19) и (7.23) и рассуждая по аналогии с [Su7, п. 5.2] можно проверить, что

$$\varepsilon \widehat{N}_{G,12}(\mathbf{k}) = \varepsilon (b(\mathbf{k})^* T_{G,0} b(\mathbf{k}) + M_{G,1}(\mathbf{k}) b(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})^* M_{G,1}(\mathbf{k})^*) \widehat{P},$$

где

$$M_{G,1}(\mathbf{k}) = \overline{\widetilde{\Lambda}_G^* b(\mathbf{k})^* \widetilde{g}} + \overline{(b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}_G)^* g b(\mathbf{k}) \Lambda_G} + \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*) \Lambda_G k_j},$$

$$T_{G,0} = 2 \sum_{j=1}^d \operatorname{Re} \overline{\Lambda_G^* a_j D_j \Lambda_G}.$$

Пусть $\widehat{N}_{G,21}(\mathbf{k}) := t \widehat{N}_{G,21}(\boldsymbol{\theta})$. Рассуждая по аналогии с [Su7, п. 5.2], несложно установить, что

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 \widehat{N}_{G,21}(\mathbf{k}) &= \varepsilon^2 (M_{G,2}(\mathbf{k}) + M_{G,2}(\mathbf{k})^* + T_G^* b(\mathbf{k}) + b(\mathbf{k})^* T_G) \widehat{P} \\ &\quad + 2\varepsilon^2 \sum_{j=1}^d \operatorname{Re} \overline{(a_j + a_j^*) \widetilde{\Lambda}_G k_j} \widehat{P}, \end{aligned}$$

где

$$M_{G,2}(\mathbf{k}) = \overline{(b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}_G)^* g b(\mathbf{k}) \tilde{\Lambda}_G},$$

$$T_G = \sum_{j=1}^d \left(\overline{\Lambda_G^* a_j(D_j \tilde{\Lambda}_G)} + \overline{(D_j \Lambda_G)^* a_j^* \tilde{\Lambda}_G} \right) + \overline{\Lambda_G^* \mathcal{Q}} + \lambda \overline{\Lambda_G^*}.$$

Здесь $\overline{\Lambda_G^* \mathcal{Q}} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \Lambda_G(\mathbf{x})^* d\mu(\mathbf{x})$.

Наконец, по аналогии с [Su7, (5.30), (5.31)] $\hat{N}_{G,22} = (\tilde{T}_G + \tilde{T}_G^*) \hat{P}$. Здесь

$$\tilde{T}_G = \sum_{j=1}^d \overline{\tilde{\Lambda}_G^* a_j(D_j \tilde{\Lambda}_G)} + \overline{\tilde{\Lambda}_G^* \mathcal{Q}} + \lambda \overline{\tilde{\Lambda}_G^*},$$

где $\overline{\tilde{\Lambda}_G^* \mathcal{Q}} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{\Lambda}_G(\mathbf{x})^* d\mu(\mathbf{x})$.

В итоге оператор $\hat{N}_G(\mathbf{k}, \varepsilon) = \hat{N}_G(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$, определенный в (7.24), представляется в виде

$$\hat{N}_G(\mathbf{k}, \varepsilon) = \hat{N}_{G,11}(\mathbf{k}) + \varepsilon \hat{N}_{G,12}(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 \hat{N}_{G,21}(\mathbf{k}) + \varepsilon^3 \hat{N}_{G,22}.$$

В соответствии с замечанием 6.1, для оператора $\hat{N}_G(\mathbf{k}, \varepsilon)$ выполнена оценка вида (3.20), в которой постоянную C_G можно выбрать не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$. Таким образом, при $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ имеем

$$\|\hat{N}_G(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} = |\hat{N}_G(\mathbf{k}, \varepsilon)| \leq C_G(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{3/2}. \quad (7.25)$$

(Мы учли, что для оператора умножения на постоянную матрицу операторная норма в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ совпадает с матричной нормой.)

Так как в выражениях, определяющих операторы $\hat{N}_{G,11}(\mathbf{k})$, $\hat{N}_{G,12}(\mathbf{k})$ и $\hat{N}_{G,21}(\mathbf{k})$, присутствует проектор \hat{P} , в них можно заменить \mathbf{k} на $\mathbf{D} + \mathbf{k}$: $\hat{N}_G(\mathbf{k}, \varepsilon) = \mathcal{N}(\mathbf{k}, \varepsilon) \hat{P}$, где $\mathcal{N}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ — самосопряженный ДО третьего порядка:

$$\mathcal{N}(\mathbf{k}, \varepsilon) = \mathcal{N}_{11}(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + \varepsilon \mathcal{N}_{12}(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + \varepsilon^2 \mathcal{N}_{21}(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + \varepsilon^3 \mathcal{N}_{22}.$$

Здесь слагаемые в правой части — ДО третьего, второго, первого и нуле-

вого порядков, соответственно, заданные соотношениями

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{11}(\mathbf{D} + \mathbf{k}) &= b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* M_G(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}), \\
\mathcal{N}_{12}(\mathbf{D} + \mathbf{k}) &= b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* T_{G,0} b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + M_{G,1}(\mathbf{D} + \mathbf{k}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) \\
&\quad + b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* M_{G,1}(\mathbf{D} + \mathbf{k})^*, \\
\mathcal{N}_{21}(\mathbf{D} + \mathbf{k}) &= M_{G,2}(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + M_{G,2}(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* + T_G^* b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* T_G \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^d \operatorname{Re}(a_j + a_j^*) \overline{\tilde{\Lambda}_G(D_j + k_j)}, \\
\mathcal{N}_{22} &= \tilde{T}_G + \tilde{T}_G^*. \tag{7.26}
\end{aligned}$$

Замечание 7.4. Если Γ -периодические решения задач (7.16) и (7.20) обращаются в нуль: $\Lambda_G = 0$, $\tilde{\Lambda}_G = 0$, то по построению $\mathcal{N}(\mathbf{k}, \varepsilon) = 0$.

8 Аппроксимация оператора $f e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)s} f^*$

8.1

Применим теорему 3.2 к оператору $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$. Учитывая равенства (7.2), (7.3), (7.13) и (7.14), на основании теоремы 3.2 при $|\tau| = (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \leq \tau_0$ имеем

$$f e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)s} f^* = f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)s} f_0 \hat{P} + \mathcal{K}(\mathbf{k}, \varepsilon, s) + f \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon, s) f^*. \tag{8.1}$$

Здесь оператор $\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$ определен в (7.14),

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}(\mathbf{k}, \varepsilon, s) &:= \left(\Lambda_G b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + \varepsilon \tilde{\Lambda}_G \right) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)s} f_0 \hat{P} \\
&\quad + f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)s} f_0 \hat{P} \left(b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* \Lambda_G^* + \varepsilon \tilde{\Lambda}_G^* \right) \\
&\quad - \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)(s-\tilde{s})} f_0 \mathcal{N}(\mathbf{k}, \varepsilon) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)\tilde{s}} f_0 \hat{P} d\tilde{s}, \tag{8.2}
\end{aligned}$$

а для остаточного члена $f \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon, s) f^*$ при $(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} \leq \tau_0$ справедливы оценки

$$\|f \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon, s) f^*\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_7 \|f\|_{L_\infty}^2 (s+1)^{-1} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2}, \quad s \geq 0; \tag{8.3}$$

$$\|f \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon, s) f^*\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_5 \|f\|_{L_\infty}^2 s^{-1} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2}, \quad s > 0. \tag{8.4}$$

8.2 Оценки при $|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$

Если $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$, $0 < \varepsilon \leq 1$ и $|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$, достаточно оценить каждый оператор в (8.1) по отдельности. Используя (6.5) и элементарные неравенства $e^{-\alpha} \leq \alpha^{-1}e^{-\alpha/2}$ при $\alpha > 0$ и $e^{-\alpha} \leq 2(1+\alpha)^{-1}e^{-\alpha/2}$ при $\alpha \geq 0$, находим, что при $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$, $|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$ выполнено

$$\begin{aligned} \|f e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)s} f^*\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \|f\|_{L_\infty}^2 e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s} \\ &\leq \tau_0^{-2} \check{c}_*^{-1} s^{-1} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2} \|f\|_{L_\infty}^2, \quad s > 0; \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \|f e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)s} f^*\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2 \max\{1; \check{c}_*^{-1} \tau_0^{-2}\} \\ &\times (1+s)^{-1} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2} \|f\|_{L_\infty}^2, \quad s \geq 0. \end{aligned} \quad (8.6)$$

Аналогично, на основании (6.14) и (7.15) при $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$, $|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2$ имеем

$$\begin{aligned} \|f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)s} f_0 \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq \tau_0^{-2} \check{c}_*^{-1} s^{-1} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2} \|f\|_{L_\infty}^2, \quad s > 0; \\ & \end{aligned} \quad (8.7)$$

$$\begin{aligned} \|f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)s} f_0 \hat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq 2 \max\{1; \check{c}_*^{-1} \tau_0^{-2}\} \\ &\times (1+s)^{-1} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2} \|f\|_{L_\infty}^2, \quad s \geq 0. \end{aligned} \quad (8.8)$$

В силу (3.25), (3.26) и замечания 6.1 для корректора справедливы оценки с постоянными, не зависящими от θ :

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_8 \|f\|_{L_\infty}^2 s^{-1} (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2} \\ &\leq C_8 \tau_0^{-1} \|f\|_{L_\infty}^2 s^{-1} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2}, \end{aligned} \quad (8.9)$$

$$s > 0, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, \quad |\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2;$$

$$\begin{aligned} \|\mathcal{K}(\mathbf{k}, \varepsilon, s)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C_9 \|f\|_{L_\infty}^2 (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2} (1 + \check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s)^{-1} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2} \\ &\leq C_9 \|f\|_{L_\infty}^2 (r_1^2 + 1)^{1/2} \max\{1; \check{c}_*^{-1} \tau_0^{-2}\} (1+s)^{-1} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2}, \\ &s \geq 0, \quad 0 < \varepsilon \leq 1, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, \quad |\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2 > \tau_0^2. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Объединяя (8.4), (8.5), (8.7) и (8.9), заключаем, что для $s > 0$ при всех $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедливо представление (8.1) с оценкой остатка

$$\|f \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon, s) f^*\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{10} s^{-1} e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2}, \quad s > 0, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}. \quad (8.11)$$

Здесь $C_{10} = \max\{C_5; 2\tau_0^{-2}\check{c}_*^{-1} + C_8\tau_0^{-1}\}\|f\|_{L_\infty}^2$.

В силу (8.3), (8.6), (8.8) и (8.10) для остаточного члена в (8.1) при $s \geq 0$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедлива оценка

$$\|f\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon, s)f^*\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_{11}(1+s)^{-1}e^{-\check{c}_*(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)s/2}, \quad s \geq 0, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, \quad (8.12)$$

с постоянной $C_{11} = \max\{C_7; (4 + C_9(1 + r_1^2)^{1/2}) \max\{1; \check{c}_*^{-1}\tau_0^{-2}\}\}\|f\|_{L_\infty}^2$.

Мы получили следующий результат.

Теорема 8.1. Пусть $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ и $\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$ — операторы (5.16) и (7.14) соответственно, пусть $\mathcal{K}(\mathbf{k}, \varepsilon, s)$ — корректор (8.2). Тогда при $s \geq 0$, $0 < \varepsilon \leq 1$ и $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ справедливо представление (8.1), причем для остаточного члена верны оценки (8.11) и (8.12), где постоянные C_{10} и C_{11} контролируются через исходные данные (4.24).

9 Аппроксимация оператора $f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^*$

9.1

Вернемся к рассмотрению оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$, действующего в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и определенного в п. 4.5. Аппроксимация окаймленной операторной экспоненты $f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^*$ выводится из теоремы 8.1 с помощью разложения в прямой интеграл.

Введем эффективный оператор с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^0(\varepsilon) := & f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 + \varepsilon f_0 \left(-b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)} D_j \right) f_0 \\ & + \varepsilon^2 f_0 (-W + \overline{Q} + \lambda I) f_0. \end{aligned} \quad (9.1)$$

Символом оператора (9.1) является матрица $f_0 \widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) f_0$ (см. п. 7.3).

Определим ДО третьего порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}(\varepsilon) &= \mathcal{N}_{11}(\mathbf{D}) + \varepsilon \mathcal{N}_{12}(\mathbf{D}) + \varepsilon^2 \mathcal{N}_{21}(\mathbf{D}) + \varepsilon^3 \mathcal{N}_{22}, & (9.2) \\
\mathcal{N}_{11}(\mathbf{D}) &= b(\mathbf{D})^* M_G(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}), \\
\mathcal{N}_{12}(\mathbf{D}) &= b(\mathbf{D})^* T_{G,0} b(\mathbf{D}) + M_{G,1}(\mathbf{D}) b(\mathbf{D}) + b(\mathbf{D})^* M_{G,1}(\mathbf{D})^*, \\
\mathcal{N}_{21}(\mathbf{D}) &= M_{G,2}(\mathbf{D}) + M_{G,2}(\mathbf{D})^* + T_G^* b(\mathbf{D}) + b(\mathbf{D})^* T_G \\
&\quad + 2 \sum_{j=1}^d \operatorname{Re}(a_j + a_j^*) \widetilde{\Lambda}_G D_j.
\end{aligned}$$

(Напомним, что матрица \mathcal{N}_{22} определена в (7.26).)

Используем разложение для оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$ в прямой интеграл, см. п. 5.6. Тогда для операторной экспоненты справедливо представление

$$e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} = \mathcal{U}^{-1} \left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus e^{-\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)s} d\mathbf{k} \right) \mathcal{U}.$$

Аналогичное тождество имеет место и для $e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s}$. Оператор $\Lambda_G b(\mathbf{D}) + \varepsilon \widetilde{\Lambda}_G$ раскладывается в прямой интеграл со слоями $\Lambda_G b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + \varepsilon \Lambda_G$. Для оператора $\mathcal{N}(\varepsilon)$ справедливо разложение в прямой интеграл по операторам $\mathcal{N}(\mathbf{k}, \varepsilon)$. Поэтому из замечания 7.4 вытекает следующее наблюдение.

Замечание 9.1. Если $\Lambda_G = 0$ и $\widetilde{\Lambda}_G = 0$, то $\mathcal{N}(\varepsilon) = 0$.

Определим ограниченный оператор Π в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ соотношением $\Pi = \mathcal{U}^{-1}[\widehat{P}]\mathcal{U}$, где $[\widehat{P}]$ — оператор в пространстве $\mathcal{H} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) d\mathbf{k}$, действующий послойно как оператор усреднения по ячейке \widehat{P} . Как выяснено в [BSu4, п. 6.1], оператор Π представим в виде

$$(\Pi \mathbf{u})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\widetilde{\Omega}} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} (\mathcal{F} \mathbf{u})(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}, \quad (9.3)$$

где $(\mathcal{F} \mathbf{u})(\cdot)$ — Фурье-образ функции \mathbf{u} . Таким образом, Π — ПДО с символом $\chi_{\widetilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$, где $\chi_{\widetilde{\Omega}}$ — характеристическая функция множества $\widetilde{\Omega}$. Этот оператор является сглаживающим. Отметим, что Π коммутирует с дифференциальными операторами с постоянными коэффициентами.

Из теоремы 8.1 вытекает тождество

$$f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^* = f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 \Pi + \mathcal{K}(\varepsilon, s) + \mathcal{R}(\varepsilon, s). \quad (9.4)$$

Здесь корректор $\mathcal{K}(\varepsilon, s) = \mathcal{U}^{-1} \left(\int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathcal{K}(\mathbf{k}, \varepsilon, s) d\mathbf{k} \right) \mathcal{U}$ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(\varepsilon, s) &= \left(\Lambda_G b(\mathbf{D}) + \varepsilon \tilde{\Lambda}_G \right) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 \Pi + f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 \Pi \left(b(\mathbf{D})^* \Lambda_G^* + \varepsilon \tilde{\Lambda}_G^* \right) \\ &\quad - \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)(s-\tilde{s})} f_0 \mathcal{N}(\varepsilon) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)\tilde{s}} f_0 \Pi d\tilde{s}, \end{aligned} \quad (9.5)$$

а для оператора $\mathcal{R}(\varepsilon, s) = \mathcal{U}^{-1} \left(\int_{\tilde{\Omega}} \oplus f \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon, s) f^* d\mathbf{k} \right) \mathcal{U}$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|\mathcal{R}(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &= \operatorname{ess\,sup}_{\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}} \|f \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon, s) f^*\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \\ &\leq C_{10} s^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \quad s > 0; \\ \|\mathcal{R}(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq C_{11} (1+s)^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

9.2 Устранение оператора Π

Обсудим возможность устранения сглаживающего оператора из аппроксимации (9.4). Положим

$$\Xi(\varepsilon, s) := f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 (I - \Pi). \quad (9.6)$$

Так как матрица $f_0 \hat{L}(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) f_0$ — символ оператора $\mathcal{B}^0(\varepsilon)$, а Π — ПДО с символом $\chi_{\tilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})$, в силу (6.14), (7.11) и элементарного неравенства $e^{-\alpha} \leq 2(1+\alpha)^{-1} e^{-\alpha/2}$, $\alpha \geq 0$, при $s \geq 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} \|\Xi(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \|f\|_{L_\infty}^2 \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d} |e^{-f_0 \hat{L}(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon) f_0 s}| (1 - \chi_{\tilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})) \\ &\leq \|f\|_{L_\infty}^2 \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d, |\boldsymbol{\xi}| \geq r_0} e^{-\check{c}_* (|\boldsymbol{\xi}|^2 + \varepsilon^2) s} \\ &\leq 2 \|f\|_{L_\infty}^2 \max\{1; \check{c}_*^{-1} r_0^{-2}\} (1+s)^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}. \end{aligned}$$

Таким образом, из старшего члена аппроксимации (9.4) сглаживатель Π всегда может быть устранен.

Также при $s > 0$ можно заменить Π на I в третьем члене корректора (9.5). Отметим, что $\mathcal{N}(\varepsilon)$ — ДО с символом $\hat{N}_G(\boldsymbol{\xi}, \varepsilon)$ (см. п. 7.5), для которого справедлива оценка (7.25). Отсюда, учитывая (6.14) и оценку (7.11)

для символа оператора $\mathcal{B}^0(\varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned}
& \left\| \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)(s-\tilde{s})} f_0 \mathcal{N}(\varepsilon) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)\tilde{s}} f_0 (I - \Pi) d\tilde{s} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \\
& \leq \|f\|_{L_\infty}^4 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d} \int_0^s |e^{-f_0 \widehat{L}(\xi, \varepsilon) f_0 (s-\tilde{s})}| |\widehat{N}_G(\xi, \varepsilon)| |e^{-f_0 \widehat{L}(\xi, \varepsilon) f_0 \tilde{s}}| d\tilde{s} (1 - \chi_{\widetilde{\Omega}}(\xi)) \\
& \leq \|f\|_{L_\infty}^4 \sup_{\xi \in \mathbb{R}^d, |\xi| \geq r_0} s e^{-\check{c}_*(|\xi|^2 + \varepsilon^2)s} C_G (|\xi|^2 + \varepsilon^2)^{3/2} \\
& \leq 3\check{c}_*^{-2} r_0^{-1} C_G \|f\|_{L_\infty}^4 s^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \quad s > 0.
\end{aligned}$$

(Мы использовали элементарное неравенство $e^{-\alpha} \leq 3\alpha^{-2} e^{-\alpha/2}$, $\alpha > 0$.)

Обсудим возможность устранения оператора Π из остальных членов корректора. Так как матрицы-функции Λ_G и Λ , $\widetilde{\Lambda}_G$ и $\widetilde{\Lambda}$ отличаются на постоянные слагаемые (см. (7.17) и (7.21)), нам потребуются мультипликативные свойства матриц-функций Λ и $\widetilde{\Lambda}$, чтобы устранить сглаживающий оператор в членах корректора, содержащих Λ_G и $\widetilde{\Lambda}_G$. Следующий результат установлен в [BSu4, предложение 6.8] при $d \leq 4$ и [V, (7.19) и (7.20)] при $d > 4$.

Лемма 9.2. Пусть Λ — Γ -периодическое $(n \times t)$ -матричное решение задачи (7.1). Пусть $l = 1$ при $d \leq 4$ и $l = d/2 - 1$ при $d > 4$. Тогда оператор $[\Lambda]$ умножения на матрицу-функцию Λ непрерывно переводит $H^l(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, и справедлива оценка

$$\|[\Lambda]\|_{H^l(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_\Lambda.$$

Постоянная \mathfrak{C}_Λ контролируется через m , n , d , α_0 , $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и параметры решетки Γ .

При $d \leq 6$ будем пользоваться предложением 6.9 из [Su7], а при $d > 6$ — леммой 6.5(1°) из [MSu].

Лемма 9.3. Пусть $\widetilde{\Lambda}$ — Γ -периодическое $(n \times n)$ -матричное решение задачи (7.4). Положим $\sigma = 2$ при $d \leq 6$ и $\sigma = d/2 - 1$ при $d > 6$. Тогда оператор $[\widetilde{\Lambda}]$ умножения на матрицу-функцию $\widetilde{\Lambda}$ непрерывно переводит $H^\sigma(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, и справедлива оценка

$$\|[\widetilde{\Lambda}]\|_{H^\sigma(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}.$$

Постоянная $\mathfrak{C}_{\widetilde{\Lambda}}$ контролируется через исходные данные (4.24).

Следующий результат получен в [М, предложение 8.3].

Предложение 9.4. Пусть $\Xi(\varepsilon, s)$ — оператор (9.6). Тогда при $s > 0$ и всех $l > 0$ операторы $b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s)$ и $\varepsilon\Xi(\varepsilon, s)$ ограничены из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $H^l(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и

$$\|b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^l(\mathbb{R}^d)} \leq \alpha_1^{1/2} \mathcal{C}(l) s^{-(l+1)/2} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \quad (9.7)$$

$$\varepsilon \|\Xi(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow H^l(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(l) s^{-(l+1)/2} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}. \quad (9.8)$$

Постоянная $\mathcal{C}(l)$ зависит только от l и исходных данных (4.24).

Теперь мы можем рассмотреть первое слагаемое в (9.5). (Второе слагаемое является сопряженным к первому и дополнительного исследования не требует.) В силу (7.17)

$$\Lambda_G b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s) = \Lambda b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s) + \Lambda_G^0 b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s). \quad (9.9)$$

Объединяя (4.2), (6.14), (7.11), (7.18), (9.6), находим

$$\begin{aligned} \|\Lambda_G^0 b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathfrak{C}_G \|f\|_{L_\infty}^2 \sup_{\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d} |b(\boldsymbol{\xi})| e^{-\check{c}_*(|\boldsymbol{\xi}|^2 + \varepsilon^2)s} (1 - \chi_{\tilde{\Omega}}(\boldsymbol{\xi})) \\ &\leq \alpha_1^{1/2} \check{c}_*^{-1} r_0^{-1} \mathfrak{C}_G \|f\|_{L_\infty}^2 s^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \quad s > 0. \end{aligned} \quad (9.10)$$

В дальнейшем нас будут интересовать большие значения s , поэтому сейчас достаточно рассматривать $s \geq 1$. Из леммы 9.2 и оценки (9.7) следует, что

$$\|\Lambda b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{12} s^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \quad s \geq 1. \quad (9.11)$$

Здесь $C_{12} = \mathfrak{C}_\Lambda \alpha_1^{1/2} \mathcal{C}(l)$, где $l = 1$ при $d \leq 4$ и $l = d/2 - 1$ при $d > 4$. Объединяя (9.9)–(9.11), получаем

$$\|\Lambda_G b(\mathbf{D})\Xi(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{13} s^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \quad s \geq 1,$$

где $C_{13} = \alpha_1^{1/2} \check{c}_*^{-1} r_0^{-1} \mathfrak{C}_G \|f\|_{L_\infty}^2 + C_{12}$.

Аналогично, на основании леммы 9.3 и (7.21), (7.22), (9.8), приходим к оценке

$$\|\varepsilon \tilde{\Lambda}_G \Xi(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{14} s^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \quad s \geq 1,$$

с постоянной $C_{14} = \check{c}_*^{-1} r_0^{-1} \tilde{\mathfrak{C}}_G \|f\|_{L_\infty}^2 + \mathfrak{C}_{\tilde{\Lambda}} \mathcal{C}(\sigma)$, где $\sigma = 2$ при $d \leq 6$ и $\sigma = d/2 - 1$ при $d > 6$. Тем самым мы показали, что при $s \geq 1$ сглаживающий оператор Π может быть устранин из всех членов корректора (9.5).

Теорема 9.5. Пусть $\mathcal{B}(\varepsilon)$ и $\mathcal{B}^0(\varepsilon)$ — операторы (4.23) и (9.1) соответственно.

1°. Пусть $\mathcal{K}(\varepsilon, s)$ — оператор (9.5). Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ и $s \geq 0$ справедлива оценка

$$\|f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 - \mathcal{K}(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{15} (1+s)^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2} \quad (9.12)$$

с постоянной $C_{15} = C_{11} + 2\|f\|_{L_\infty}^2 \max\{1; \check{c}_*^{-1} r_0^{-2}\}$.

2°. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^0(\varepsilon, s) := & \left(\Lambda_G b(\mathbf{D}) + \varepsilon \tilde{\Lambda}_G \right) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 + f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 \left(b(\mathbf{D})^* \Lambda_G^* + \varepsilon \tilde{\Lambda}_G^* \right) \\ & - \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)(s-\tilde{s})} f_0 \mathcal{N}(\varepsilon) f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)\tilde{s}} f_0 d\tilde{s}. \end{aligned} \quad (9.13)$$

Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ и $s \geq 1$ справедлива оценка

$$\|f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon)s} f^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon)s} f_0 - \mathcal{K}^0(\varepsilon, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{16} s^{-1} e^{-\check{c}_* \varepsilon^2 s/2}, \quad (9.14)$$

где $C_{16} = C_{10} + 2\|f\|_{L_\infty}^2 \max\{1; \check{c}_*^{-1} r_0^{-2}\} + 3\check{c}_*^{-2} r_0^{-1} C_G \|f\|_{L_\infty}^4 + 2C_{13} + 2C_{14}$.

Глава 3. Задача усреднения для параболических систем

10 Усреднение оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^*$

10.1 Постановка задачи

Для всякой Γ -периодической функции $\phi(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, будем пользоваться обозначением $\phi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \phi(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}_\varepsilon = f^\varepsilon(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}),$$

отвечающий квадратичной форме

$$\mathbf{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle g^\varepsilon b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \mathbf{u}, b(\mathbf{D}) f^\varepsilon \mathbf{u} \rangle d\mathbf{x} \quad (10.1)$$

на области определения $\mathfrak{d}_\varepsilon = \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) : f^\varepsilon \mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)\}$. Для формы (10.1) справедливы оценки, аналогичные неравенствам (4.7):

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|\mathbf{D}(f^\varepsilon \mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \mathbf{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f^\varepsilon \mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (10.2)$$

Далее, пусть $\mathcal{Y}_\varepsilon : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$ — оператор, действующий по правилу

$$\mathcal{Y}_\varepsilon \mathbf{u} = \mathbf{D}(f^\varepsilon \mathbf{u}) = \text{col} \{D_1(f^\varepsilon \mathbf{u}), \dots, D_d(f^\varepsilon \mathbf{u})\}, \quad \text{Dom } \mathcal{Y}_\varepsilon = \mathfrak{d}_\varepsilon,$$

и пусть $\mathcal{Y}_{2,\varepsilon} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$ — оператор умножения на $(dn \times d)$ -матрицу, составленную из блоков $a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* f^\varepsilon(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$:

$$\mathcal{Y}_{2,\varepsilon} \mathbf{u} = \text{col} \{(a_1^\varepsilon)^* f^\varepsilon \mathbf{u}, \dots, (a_d^\varepsilon)^* f^\varepsilon \mathbf{u}\}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}_\varepsilon.$$

Пусть $d\mu$ — матричнозначная мера на \mathbb{R}^d , определенная в п. 4.4. Построим по ней меру $d\mu^\varepsilon$ следующим образом. Для любого борелевского множества $\Delta \subset \mathbb{R}^d$ рассмотрим множество $\varepsilon^{-1}\Delta = \{\mathbf{y} = \varepsilon^{-1}\mathbf{x} : \mathbf{x} \in \Delta\}$ и положим $\mu^\varepsilon(\Delta) = \varepsilon^d \mu(\varepsilon^{-1}\Delta)$. Квадратичную форму q_ε определим равенством

$$q_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu^\varepsilon(\mathbf{x})(f^\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}), (f^\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) \rangle, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}_\varepsilon.$$

Все условия из п. 4.2–4.4 предполагаем выполненными. В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\mathbf{b}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mathbf{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\text{Re}(\mathcal{Y}_\varepsilon \mathbf{u}, \mathcal{Y}_{2,\varepsilon} \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + q_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}_\varepsilon. \quad (10.3)$$

Пусть T_ε — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования:

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2} \mathbf{u}(\varepsilon \mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0. \quad (10.4)$$

Для форм (4.6) и (10.1), (4.18) и (10.3) справедливы очевидные тождества

$$\mathbf{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \varepsilon^{-2} \mathbf{a}[T_\varepsilon \mathbf{u}, T_\varepsilon \mathbf{u}], \quad \mathbf{b}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \varepsilon^{-2} \mathbf{b}(\varepsilon)[T_\varepsilon \mathbf{u}, T_\varepsilon \mathbf{u}], \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}_\varepsilon.$$

Отсюда и из оценок (4.21), (4.22) следует, что при $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}_\varepsilon$ выполнено

$$\mathbf{b}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq \frac{\kappa}{2} \mathbf{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + \beta \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad (10.5)$$

$$\mathbf{b}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq (2 + c_1^2 + c_2) \mathbf{a}_\varepsilon[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + (C(1) + c_3 + |\lambda| \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}) \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2. \quad (10.6)$$

Из (10.2), (10.5) и (10.6) вытекает, что форма \mathbf{b}_ε замкнута и положительно определена. Через \mathcal{B}_ε обозначим отвечающий ей самосопряженный оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Формально,

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_\varepsilon &= \mathcal{A}_\varepsilon + (\mathcal{Y}_{2,\varepsilon}^* \mathcal{Y}_\varepsilon + \mathcal{Y}_\varepsilon^* \mathcal{Y}_{2,\varepsilon}) + (f^\varepsilon)^* \mathcal{Q}^\varepsilon f^\varepsilon + \lambda \mathcal{Q}_0^\varepsilon \\ &= (f^\varepsilon)^* \mathbf{b}(\mathbf{D})^* g^\varepsilon \mathbf{b}(\mathbf{D}) f^\varepsilon + \sum_{j=1}^d (f^\varepsilon)^* (a_j^\varepsilon D_j + D_j (a_j^\varepsilon)^*) f^\varepsilon \\ &\quad + (f^\varepsilon)^* \mathcal{Q}^\varepsilon f^\varepsilon + \lambda \mathcal{Q}_0^\varepsilon, \end{aligned} \quad (10.7)$$

где \mathcal{Q}^ε следует интерпретировать как обобщенный матричный потенциал, порожденный быстро осциллирующей мерой $d\mu^\varepsilon$.

10.2 Старший член аппроксимации оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^*$

Аппроксимация в старшем порядке найдена в [М, п. 9.3]. Чтобы сформулировать результат, выпишем эффективный оператор:

$$\begin{aligned} \mathcal{B}^0 = & f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 + f_0 \left(-b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)} D_j \right) f_0 \\ & + f_0 (-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda I) f_0. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Здесь постоянные матрицы $f_0, g^0, V, W, \overline{(a_j + a_j^*)}$ и $\overline{\mathcal{Q}}$ определены согласно (6.13), (7.6), (7.8), (7.9), (4.1), (7.10). Символом оператора (10.8) является матрица $f_0 \widehat{L}(\boldsymbol{\xi}, 1) f_0$ (см. п. 7.3). Поэтому из оценки (7.11) вытекает положительная определенность оператора \mathcal{B}^0 : $\mathcal{B}^0 \geq \check{c}_* I$.

В [М, теорема 9.1] установлен следующий результат.

Теорема 10.1. *Пусть выполнены условия п. 4.2–4.4. Пусть \mathcal{B}_ε — оператор (10.7), и пусть \mathcal{B}^0 — эффективный оператор (10.8). Тогда при $s \geq 0$ и $0 < \varepsilon \leq 1$ справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{17} \varepsilon (s + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-\check{c}_* s/2}.$$

Постоянная C_{17} зависит только от исходных данных (4.24).

10.3 Аппроксимация оператора $f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^*$ при учете корректора

Установим теперь более точную аппроксимацию операторной экспоненты на основании результатов §9 с помощью масштабного преобразования (10.4). Для операторов (10.7) и (4.23), (10.8) и (9.1) справедливы тождества $\mathcal{B}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{B}(\varepsilon) T_\varepsilon$ и $\mathcal{B}^0 = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{B}^0(\varepsilon) T_\varepsilon$. Следовательно,

$$f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* = T_\varepsilon^* f e^{-\mathcal{B}(\varepsilon) \varepsilon^{-2} s} f^* T_\varepsilon, \quad (10.9)$$

$$f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 = T_\varepsilon^* f_0 e^{-\mathcal{B}^0(\varepsilon) \varepsilon^{-2} s} f_0 T_\varepsilon. \quad (10.10)$$

Далее, через Π_ε обозначим ПДО в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, символ которого — характеристическая функция $\chi_{\tilde{\Omega}/\varepsilon}(\boldsymbol{\xi})$ множества $\tilde{\Omega}/\varepsilon$:

$$(\Pi_\varepsilon \mathbf{f})(\mathbf{x}) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\tilde{\Omega}/\varepsilon} e^{i\langle \mathbf{x}, \boldsymbol{\xi} \rangle} (\mathcal{F}\mathbf{f})(\boldsymbol{\xi}) d\boldsymbol{\xi}. \quad (10.11)$$

Операторы (9.3) и (10.11) связаны равенством

$$\Pi_\varepsilon = T_\varepsilon^* \Pi T_\varepsilon. \quad (10.12)$$

Обозначим

$$\mathcal{N} := \mathcal{N}_{11}(\mathbf{D}) + \mathcal{N}_{12}(\mathbf{D}) + \mathcal{N}_{21}(\mathbf{D}) + \mathcal{N}_{22}.$$

Тогда

$$\mathcal{N} = \varepsilon^{-3} T_\varepsilon^* \mathcal{N}(\varepsilon) T_\varepsilon, \quad (10.13)$$

где оператор $\mathcal{N}(\varepsilon)$ определен в (9.2).

Отметим тождества

$$[\Lambda_G^\varepsilon] b(\mathbf{D}) = \varepsilon^{-1} T_\varepsilon^* [\Lambda_G] b(\mathbf{D}) T_\varepsilon, \quad [\tilde{\Lambda}_G^\varepsilon] = T_\varepsilon^* [\tilde{\Lambda}_G] T_\varepsilon. \quad (10.14)$$

Введем корректоры:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\varepsilon(s) := & \left(\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \tilde{\Lambda}_G^\varepsilon \right) f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \Pi_\varepsilon \\ & + f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \Pi_\varepsilon \left(b(\mathbf{D})^* (\Lambda_G^\varepsilon)^* + (\tilde{\Lambda}_G^\varepsilon)^* \right) \end{aligned} \quad (10.15)$$

$$\begin{aligned} & - \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(s-\tilde{s})} f_0 \mathcal{N} f_0 e^{-\mathcal{B}^0 \tilde{s}} f_0 \Pi_\varepsilon d\tilde{s}, \\ \mathcal{K}_\varepsilon^0(s) := & \left(\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \tilde{\Lambda}_G^\varepsilon \right) f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 + f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \left(b(\mathbf{D})^* (\Lambda_G^\varepsilon)^* + (\tilde{\Lambda}_G^\varepsilon)^* \right) \\ & - \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(s-\tilde{s})} f_0 \mathcal{N} f_0 e^{-\mathcal{B}^0 \tilde{s}} f_0 d\tilde{s}. \end{aligned} \quad (10.16)$$

Объединяя (10.9), (10.10) и (10.12)–(10.14), заключаем, что операторы (9.5) и (10.15) связаны равенством

$$\varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon(s) = T_\varepsilon^* \mathcal{K}(\varepsilon, \varepsilon^{-2}s) T_\varepsilon. \quad (10.17)$$

Для операторов (9.13) и (10.16) справедливо аналогичное тождество. Теперь из (9.12), (9.14), (10.9), (10.10) и (10.17) вытекает следующий результат.

Теорема 10.2. Пусть выполнены условия теоремы 10.1. Пусть $\mathcal{K}_\varepsilon(s)$ и $\mathcal{K}_\varepsilon^0(s)$ — операторы (10.15) и (10.16) соответственно. Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ и $s \geq 0$ справедлива аппроксимация

$$\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon(s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{15} \varepsilon^2 (s + \varepsilon^2)^{-1} e^{-\check{c}_* s/2}. \quad (10.18)$$

При $0 < \varepsilon \leq 1$ и $s \geq \varepsilon^2$ выполнено

$$\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon^0(s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{16} \varepsilon^2 s^{-1} e^{-\check{c}_* s/2}.$$

Постоянные C_{15} , C_{16} и \check{c}_* зависят только от исходных данных (4.24).

10.4 Случай нулевого корректора

Предположим, что $g^0 = \bar{g}$, т. е. верны соотношения (7.7). Тогда Γ -периодические решения задач (7.1), (7.16) равны нулю: $\Lambda(\mathbf{x}) = \Lambda_G(\mathbf{x}) = 0$. Предположим дополнительно, что $\sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0$. Тогда Γ -периодические решения задач (7.4), (7.20) также равны нулю: $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \tilde{\Lambda}_G(\mathbf{x}) = 0$. Поэтому из (7.8), (7.9) следует, что $V = 0$ и $W = 0$. Эффективный оператор (10.8) принимает вид

$$\mathcal{B}^0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 + f_0 \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)} D_j f_0 + f_0 (\bar{\mathcal{Q}} + \lambda I) f_0. \quad (10.19)$$

Из (10.13) и замечания 9.1 вытекает, что в рассматриваемом случае $\mathcal{N} = 0$. Таким образом, все члены корректора (10.15) обращаются в нуль и из (10.18) вытекает следующий результат.

Предложение 10.3. Пусть в условиях теоремы 10.2 справедливы соотношения (7.7) и $\sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0$. Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ и $s \geq 0$ имеем

$$\|f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* - f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{15} \varepsilon^2 (s + \varepsilon^2)^{-1} e^{-\check{c}_* s/2}.$$

Здесь \mathcal{B}^0 — оператор (10.19).

11 Усреднение решений задачи Коши для параболических систем

11.1 Применение к задаче Коши для однородного уравнения

Пусть $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ — оператор вида (10.7) в случае, когда $f = \mathbf{1}_n$:

$$\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon D_j + D_j (a_j^\varepsilon)^*) + \mathcal{Q}^\varepsilon + \lambda I.$$

Рассмотрим задачу Коши

$$G^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = -\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s), \quad s > 0; \quad G^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (11.1)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а Γ -периодическая $(n \times n)$ -матрица-функция G предполагается ограниченной и положительно определенной. Запишем $G(\mathbf{x})$ в факторизованном виде: $G(\mathbf{x})^{-1} = f(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})^*$, где $f(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая матрица-функция. Положим $\mathbf{v}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^{-1} \mathbf{u}_\varepsilon$. Тогда $\mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)$ — решение задачи

$$\frac{\partial \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = -(f^\varepsilon)^* \widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, s), \quad s > 0; \quad \mathbf{v}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = (f^\varepsilon)^* \phi(\mathbf{x}).$$

Пусть $\mathcal{B}_\varepsilon = (f^\varepsilon)^* \widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon$. Тогда $\mathbf{v}_\varepsilon(\cdot, s) = e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* \phi$. Отсюда вытекает, что решение $\mathbf{u}_\varepsilon = f^\varepsilon \mathbf{v}_\varepsilon$ задачи (11.1) допускает представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) = f^\varepsilon e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* \phi. \quad (11.2)$$

Соответствующая эффективная задача имеет вид

$$\overline{G} \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = -\widehat{\mathcal{B}}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s), \quad s > 0; \quad \overline{G} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \quad (11.3)$$

Здесь

$$\widehat{\mathcal{B}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) - b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)} D_j - W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda I.$$

Положим $f_0 = (\overline{G})^{-1/2}$ и $\mathcal{B}^0 = f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0 f_0$. Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot, s) = f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \phi. \quad (11.4)$$

Из (11.2), (11.4) и теоремы 10.2 вытекает следующий результат.

Теорема 11.1. Пусть \mathbf{u}_ε и \mathbf{u}_0 — решения задач (11.1) и (11.3), соответственно. Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ и $s \geq \varepsilon^2$ справедлива аппроксимация

$$\begin{aligned} & \left\| \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s) - \varepsilon \left(\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\cdot, s) + \tilde{\Lambda}_G^\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot, s) \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + f_0 e^{-B^0 s} f_0 ((\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}))^* + (\tilde{\Lambda}_G^\varepsilon)^*) \phi - \int_0^s f_0 e^{-B^0(s-\tilde{s})} f_0 \mathcal{N} \mathbf{u}_0(\cdot, \tilde{s}) d\tilde{s} \right) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \leq C_{16} \varepsilon^2 s^{-1} e^{-\check{c}_* s/2} \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \end{aligned} \quad (11.5)$$

Отметим, что третий член корректора в (11.5) — функция $\mathbf{v}^{(3)}(\cdot, s) := \int_0^s f_0 e^{-B^0(s-\tilde{s})} f_0 \mathcal{N} \mathbf{u}_0(\cdot, \tilde{s}) d\tilde{s}$ — является решением задачи

$$\overline{G} \frac{\partial \mathbf{v}^{(3)}(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = -\widehat{B}^0 \mathbf{v}^{(3)}(\mathbf{x}, s) + \mathcal{N} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s), \quad s > 0; \quad \overline{G} \mathbf{v}^{(3)}(\mathbf{x}, 0) = 0.$$

11.2 Задача Коши для неоднородного уравнения

Рассмотрим теперь более общую задачу Коши

$$G^\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = -\widehat{B}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), \quad s \in (0, T); \quad G^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (11.6)$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $s \in (0, T)$, $T > 0$. Пусть $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_p((0, T); L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)) =: \mathcal{H}_p$ при некотором $1 < p \leq \infty$. Пусть \mathbf{u}_0 — решение „усредненной” задачи

$$\overline{G} \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = -\widehat{B}^0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), \quad s \in (0, T); \quad \overline{G} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}). \quad (11.7)$$

Действуя по аналогии с выводом представления (11.2), можно показать, что

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) = f^\varepsilon e^{-B_\varepsilon s} (f^\varepsilon)^* \phi + \int_0^s f^\varepsilon e^{-B_\varepsilon(s-\tilde{s})} (f^\varepsilon)^* \mathbf{F}(\cdot, \tilde{s}) d\tilde{s}, \quad (11.8)$$

$$\mathbf{u}_0(\cdot, s) = f_0 e^{-B^0 s} f_0 \phi + \int_0^s f_0 e^{-B^0(s-\tilde{s})} f_0 \mathbf{F}(\cdot, \tilde{s}) d\tilde{s}. \quad (11.9)$$

Аппроксимация решения \mathbf{u}_ε в старшем порядке получена в [М, теорема 10.1]:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} & \leq C_{17} \varepsilon (s + \varepsilon^2)^{-1/2} e^{-\check{c}_* s/2} \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ & \quad + C_{18} \theta_1(\varepsilon, p) \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p}, \end{aligned} \quad (11.10)$$

где постоянная C_{18} зависит только от p и исходных данных (4.24),

$$\theta_1(\varepsilon, p) = \begin{cases} \varepsilon^{2-2/p}, & 1 < p < 2, \\ \varepsilon(1 + |\ln \varepsilon|)^{1/2}, & p = 2, \\ \varepsilon, & 2 < p \leq \infty. \end{cases} \quad (11.11)$$

Повторяя рассуждения [V, п. 10.1], на основании теоремы 10.2 и представлений (11.8), (11.9) можно получить следующий результат.

Теорема 11.2. Пусть \mathbf{u}_ε и \mathbf{u}_0 — решения задач (11.6) и (11.9), соответственно, где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in \mathcal{H}_p$. Тогда при $0 < s < T$, $0 < \varepsilon \leq 1$ и $2 < p \leq \infty$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) &= \mathbf{u}_0(\cdot, s) + \varepsilon \left(\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot, s) + \tilde{\Lambda}_G^\varepsilon \Pi_\varepsilon \mathbf{u}_0(\cdot, s) \right) \\ &\quad + f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \left((\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)^* + (\tilde{\Lambda}_G^\varepsilon \Pi_\varepsilon)^* \right) \phi \\ &\quad - \varepsilon \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(s-\tilde{s})} f_0 \mathcal{N} \Pi_\varepsilon f_0 e^{-\mathcal{B}^0 \tilde{s}} f_0 \phi \, d\tilde{s} \\ &\quad + \varepsilon \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(s-\tilde{s})} f_0 \left((\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)^* + (\tilde{\Lambda}_G^\varepsilon \Pi_\varepsilon)^* \right) \mathbf{F}(\cdot, \tilde{s}) \, d\tilde{s} \\ &\quad - \varepsilon \int_0^s d\tilde{s} \int_0^{s-\tilde{s}} ds' f_0 e^{-\mathcal{B}^0(s-\tilde{s}-s')} f_0 \mathcal{N} \Pi_\varepsilon f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s'} f_0 \mathbf{F}(\cdot, \tilde{s}) + \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, s), \end{aligned}$$

где остаточный член $\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, s)$ допускает оценку

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{15} \varepsilon^2 (s + \varepsilon^2)^{-1} e^{-\check{c}_* s/2} \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_{19} \varepsilon^{2/p'} \theta_2(\varepsilon, p) \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p},$$

$p^{-1} + (p')^{-1} = 1$. Здесь постоянная C_{19} зависит только от p и исходных данных (4.24), $\theta_2(\varepsilon, p) = 1$ при $p < \infty$ и $\theta_2(\varepsilon, p) = 1 + |\ln \varepsilon|$ при $p = \infty$.

При $0 < s < T$, $0 < \varepsilon \leq 1$ и $1 < p \leq 2$ справедливо представление

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) &= \mathbf{u}_0(\cdot, s) + \varepsilon \left(\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \phi + \tilde{\Lambda}_G^\varepsilon \Pi_\varepsilon f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \phi \right) \\ &\quad + f_0 e^{-\mathcal{B}^0 s} f_0 \left((\Lambda_G^\varepsilon b(\mathbf{D}) \Pi_\varepsilon)^* + (\tilde{\Lambda}_G^\varepsilon \Pi_\varepsilon)^* \right) \phi \\ &\quad - \varepsilon \int_0^s f_0 e^{-\mathcal{B}^0(s-\tilde{s})} f_0 \mathcal{N} \Pi_\varepsilon f_0 e^{-\mathcal{B}^0 \tilde{s}} f_0 \phi \, d\tilde{s} + \tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, s), \end{aligned}$$

причем

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_\varepsilon(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{15} \varepsilon^2 (s + \varepsilon^2)^{-1} e^{-\check{c}_* s/2} \|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + C_{18} \theta_1(\varepsilon, p) \|\mathbf{F}\|_{\mathcal{H}_p}.$$

Здесь $\theta_1(\varepsilon, p)$ — величина (11.11).

Замечание 11.3. Разные аппроксимации решения \mathbf{u}_ε при разных условиях на p в теореме 11.2 обусловлены тем, что учет корректора в первом слагаемом в правой части (11.8) приводит к уточнению аппроксимации по сравнению с (11.10) при любом $1 < p \leq \infty$, а учет корректора во втором слагаемом — только при $2 < p \leq \infty$.

12 Пример применения общей схемы: скалярный эллиптический оператор

В настоящем параграфе мы рассмотрим один из примеров применения общей схемы. Ранее для эллиптических задач этот пример изучался в [Su4, Su7]. Там же могут быть найдены другие примеры.

12.1 Скалярный эллиптический оператор

Рассмотрим случай, когда $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$, а $g(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая симметричная $(d \times d)$ -матрица с вещественными элементами, ограниченная и положительно определенная. Тогда оператор \mathcal{A}_ε имеет вид $\mathcal{A}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x}) \nabla$. Очевидно, в данном случае $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$; см. (4.2).

Далее, пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \operatorname{col}\{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}$, где $A_j(\mathbf{x})$ — Γ -периодические вещественные функции, причем

$$A_j \in L_\varrho(\Omega), \quad \varrho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \varrho > d \text{ при } d \geq 2; \quad j = 1, \dots, d.$$

Пусть $v(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ — вещественные Γ -периодические функции такие, что

$$v, \mathcal{V} \in L_\sigma(\Omega), \quad \sigma = 1 \text{ при } d = 1, \quad \sigma > \frac{d}{2} \text{ при } d \geq 2; \quad \int_\Omega v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0.$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор \mathfrak{B}_ε , формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathfrak{B}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (12.1)$$

Точное определение оператора \mathfrak{B}_ε дается через квадратичную форму

$$\mathfrak{b}_\varepsilon[u, u] = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\langle g^\varepsilon(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)u \rangle + (\varepsilon^{-1} v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon) |u|^2 \right) d\mathbf{x},$$

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Оператор (12.1) можно трактовать как периодический оператор Шрёдингера с метрикой g^ε , магнитным потенциалом \mathbf{A}^ε и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1}v^\varepsilon + \mathcal{V}^\varepsilon$, содержащим „сингулярное” первое слагаемое.

В [Su4, п. 13.1] показано, что оператор (12.1) можно записать в требуемом виде

$$\mathfrak{B}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{D} + \sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}))^*) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}).$$

Вещественная функция $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ определена следующим образом:

$$\mathcal{Q}(\mathbf{x}) = \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \langle g(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle. \quad (12.2)$$

Комплексные функции $a_j(\mathbf{x})$ заданы выражениями

$$a_j(\mathbf{x}) = -\eta_j(\mathbf{x}) + i\zeta_j(\mathbf{x}), \quad (12.3)$$

где $\eta_j(\mathbf{x})$ — компоненты вектор-функции $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) \mathbf{A}(\mathbf{x})$, а функции $\zeta_j(\mathbf{x})$ определены через Γ -периодическое решение уравнения $\Delta \Phi(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$ соотношением $\zeta_j(\mathbf{x}) = -\partial_j \Phi(\mathbf{x})$. При этом выполнено

$$v(\mathbf{x}) = - \sum_{j=1}^d \partial_j \zeta_j(\mathbf{x}). \quad (12.4)$$

Нетрудно убедиться, что функции (12.3) удовлетворяют требованию (4.10) с подходящим показателем $\tilde{\varrho}$ (зависящим от ϱ и σ); при этом нормы $\|a_j\|_{L_{\tilde{\varrho}}(\Omega)}$ контролируются через $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\mathbf{A}\|_{L_\varrho(\Omega)}$, $\|v\|_{L_\sigma(\Omega)}$ и параметры решетки Γ . Функция (12.2) удовлетворяет условию (4.17) с подходящим показателем $\tilde{\sigma} = \min\{\sigma; \varrho/2\}$. Таким образом, сейчас реализуется пример 4.2.

Выберем параметр λ из условия (4.19), в котором c_0 и c_4 отвечают оператору (12.1). Обозначим $\mathcal{B}_\varepsilon := \mathfrak{B}_\varepsilon + \lambda I$. Нас интересует аппроксимация экспоненты от этого оператора. В рассматриваемом случае исходные данные (4.24) сводятся к следующему набору:

$$d, \varrho, \sigma; \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\varrho(\Omega)}, \|v\|_{L_\sigma(\Omega)}, \|\mathcal{V}\|_{L_\sigma(\Omega)}, \lambda; \quad (12.5)$$

параметры решетки Γ .

12.2 Эффективный оператор

Выпишем эффективный оператор. В нашем случае Γ -периодическое решение задачи (7.1) является матрицей-строкой: $\Lambda(\mathbf{x}) = i\Psi(\mathbf{x})$, $\Psi(\mathbf{x}) = (\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_d(\mathbf{x}))$, где $\psi_j \in \tilde{H}^1(\Omega)$ — решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_{\Omega} \psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь \mathbf{e}_j , $j = 1, \dots, d$, — стандартные орты в \mathbb{R}^d . Ясно, что функции $\psi_j(\mathbf{x})$ вещественнозначные, а элементы матрицы-строки $\Lambda(\mathbf{x})$ чисто мнимые. Согласно (7.6) столбцами $(d \times d)$ -матрицы-функции $\tilde{g}(\mathbf{x})$ служат вектор-функции $g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, d$. Эффективная матрица определена в соответствии с (7.6): $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$. Ясно, что $\tilde{g}(\mathbf{x})$ и g^0 имеют вещественные элементы.

В соответствии с (12.3), (12.4) периодическое решение задачи (7.4) представляется в виде $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + i\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$, где вещественные Γ -периодические функции $\tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})$ и $\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$ являются решениями задач

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) &= 0, \quad \int_{\Omega} \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0; \\ -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) + \operatorname{div} g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= 0, \quad \int_{\Omega} \tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \end{aligned}$$

Матрица-столбец V (см. (7.8)) имеет вид $V = V_1 + iV_2$, V_1, V_2 — столбцы с вещественными элементами, определяемые равенствами

$$\begin{aligned} V_1 &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\nabla\Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x})\nabla\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \\ V_2 &= -|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\nabla\Psi(\mathbf{x}))^t g(\mathbf{x})\nabla\tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Согласно (7.9) постоянная W запишется в виде

$$W = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \left(\langle g(\mathbf{x})\nabla\tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}), \nabla\tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) \rangle + \langle g(\mathbf{x})\nabla\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}), \nabla\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) \rangle \right) d\mathbf{x}.$$

Эффективный оператор для \mathcal{B}_ε действует по правилу

$$\mathcal{B}^0 u = -\operatorname{div} g^0 \nabla u + 2i \langle \nabla u, V_1 + \bar{\eta} \rangle + (-W + \bar{\mathcal{Q}} + \lambda)u, \quad u \in H^2(\mathbb{R}^d).$$

Соответствующее дифференциальное выражение допускает запись в виде

$$\mathcal{B}^0 = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) + \mathcal{V}^0 + \lambda,$$

где

$$\mathbf{A}^0 = (g^0)^{-1}(V_1 + \bar{g}\mathbf{A}), \quad \mathcal{V}^0 = \bar{\mathcal{V}} + \overline{\langle g\mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle} - \langle g^0 \mathbf{A}^0, \mathbf{A}^0 \rangle - W.$$

12.3 Оператор \mathcal{N}

Вид оператора \mathcal{N} в рассматриваемом случае найден в [Su7, (9.12)–(9.15)]. Выпишем результат:

$$\mathcal{N} = \sum_{k,l=1}^d \mathcal{N}_{12,kl} D_k D_l + \sum_{k=1}^d \mathcal{N}_{21,k} D_k + \mathcal{N}_{22},$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{12,kl} &= \overline{2\tilde{\Lambda}_1 \tilde{g}_{kl} + v\psi_k \psi_l} - \sum_{j=1}^d \overline{(g_{jl}\psi_k + g_{jk}\psi_l)\partial_j \tilde{\Lambda}_1}, \\ \mathcal{N}_{21,k} &= 2 \sum_{j=1}^d \overline{g_{jk} (\tilde{\Lambda}_1 \partial_j \tilde{\Lambda}_2 - \tilde{\Lambda}_2 \partial_j \tilde{\Lambda}_1)} \\ &\quad + 2\overline{\psi_k \langle \boldsymbol{\eta}, \nabla \tilde{\Lambda}_1 \rangle} - 2\overline{\tilde{\Lambda}_1 \langle \boldsymbol{\eta}, \nabla \psi_k \rangle} + \overline{2v\tilde{\Lambda}_2 \psi_k} - \overline{4\eta_k \tilde{\Lambda}_1}, \\ \mathcal{N}_{22} &= \overline{2\tilde{\Lambda}_2 \langle \boldsymbol{\eta}, \nabla \tilde{\Lambda}_1 \rangle} - \overline{2\tilde{\Lambda}_1 \langle \boldsymbol{\eta}, \nabla \tilde{\Lambda}_2 \rangle} + v(\overline{\tilde{\Lambda}_1^2} + \overline{\tilde{\Lambda}_2^2}) + \overline{2\tilde{\Lambda}_1(\mathcal{Q} + \lambda)}. \end{aligned}$$

12.4 Аппроксимация экспоненты

В силу равенства $\Lambda(\mathbf{x}) = i\Psi(\mathbf{x})$ оператор (10.16) имеет вид

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\varepsilon^0(s) &= (\Psi^\varepsilon \nabla + \tilde{\Lambda}^\varepsilon) e^{-\mathcal{B}^0 s} + e^{-\mathcal{B}^0 s} (\Psi^\varepsilon \nabla + \tilde{\Lambda}^\varepsilon)^* - \int_0^s e^{-\mathcal{B}^0(s-\tilde{s})} \mathcal{N} e^{-\mathcal{B}^0 \tilde{s}} d\tilde{s} \\ &= (\Psi^\varepsilon \nabla + \tilde{\Lambda}^\varepsilon) e^{-\mathcal{B}^0 s} + e^{-\mathcal{B}^0 s} (\Psi^\varepsilon \nabla + \tilde{\Lambda}^\varepsilon)^* - s \mathcal{N} e^{-\mathcal{B}^0 s}. \end{aligned} \tag{12.6}$$

Мы учли, что в нашем случае скалярный дифференциальный оператор \mathcal{N} коммутирует с экспонентой от эффективного оператора \mathcal{B}^0 с постоянными коэффициентами.

Из теоремы 10.2 выводим следующий результат.

Теорема 12.1. *Пусть операторы \mathcal{B}_ε и \mathcal{B}^0 определены в п. 12.1 и 12.2 соответственно, пусть $\mathcal{K}_\varepsilon^0(s)$ — корректор (12.6). Тогда при $0 < \varepsilon \leq 1$ и $s > 0$ справедлива аппроксимация*

$$\|e^{-\mathcal{B}_\varepsilon s} - e^{-\mathcal{B}^0 s} - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon^0(s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C_{16} \varepsilon^2 s^{-1} e^{-\check{c}_* s/2}.$$

Постоянные C_{16} и \check{c}_* зависят только от исходных данных (12.5).

Список литературы

- [BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. 5, North-Holland Publ. Co., Amsterdam–New York, 1978.
- [BSu1] Birman M., Suslina T., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics (Bordeaux, 2000), Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.
- [BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ **15** (2003), №5, 1–108.
- [BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряженного семейства с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №5, 69–90.
- [BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора*, Алгебра и анализ **17** (2005), №6, 1–104.
- [BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учетом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ **18** (2006), №6, 1–130.
- [V] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора*, Алгебра и анализ **21** (2009), №1, 3–60.
- [GeS] Geng J., Shen Zh., *Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent periodic coefficients*, J. Funct. Anal. **272** (2017), no. 5, 2092–2113.
- [Gr1] Griso G., *Error estimate and unfolding for periodic homogenization*, Asymptot. Anal. **40** (2004), no. 3/4, 269–286.

- [Gr2] Griso G., *Interior error estimate for periodic homogenization*, Anal. Appl. **4** (2006), no. 1, 61–79.
- [ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.
- [Zh] Жиков В. В., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Докл. РАН **403** (2005), №3, 305–308.
- [ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys. **12** (2005), no. 4, 515–524.
- [ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys. **13** (2006), no. 2, 224–237.
- [ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, Успехи мат. наук **71** (2016), №3, 27–122.
- [Ka] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [KeLiS] Kenig C. E., Lin F., Shen Zh., *Convergence rates in L^2 for elliptic homogenization problems*, Arch. Rational Mech. Anal. **203** (2012), no. 3, 1009–1036.
- [M] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ **25** (2013), №6, 125–177.
- [MSu] Мешкова Ю. М., Суслина Т. А., *Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем: операторные оценки погрешности*, Алгебра и анализ **29** (2017), №6, 99–158.
- [MoVo] Moskow Sh., Vogelius M., *First-order corrections to the homogenised eigenvalues of a periodic composite medium. A convergence proof*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **127** (1997), no. 6, 1263–1299.
- [Sa] Санчес-Паленсия Э., *Неоднородные среды и теория колебаний*, Мир, М., 1984.

- [Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функци. анализ и его прил. **38** (2004), №4, 86–90.
- [Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Nonlinear equations and spectral theory, 201–233, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. 220, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.
- [Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Math. Model. Nat. Phenom. **5** (2010), no. 4, 390–447.
- [Su4] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ **22** (2010), №1, 108–222.
- [Su5] Суслина Т. А., *Аппроксимация резольвенты двухпараметрического квадратичного операторного пучка вблизи нижнего края спектра*, Алгебра и анализ **25** (2013), №5, 221–251.
- [Su6] Suslina T. A., *Homogenization of the Dirichlet problem for elliptic systems: L_2 -operator error estimates*, Mathematika **59** (2013), no. 2, 463–476.
- [Su7] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с учетом корректора*, Алгебра и анализ **26** (2014), №4, 195–263.
- [Xu] Xu Q., *Convergence rates for general elliptic homogenization problems in Lipschitz domains*, SIAM J. Math. Anal. **48** (2016), no. 6, 3742–3788.