Усреднение уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами при включении членов младшего порядка^{*†}

Дородный М. А.[‡]

Аннотация

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряжённый матричный эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leq 1$, второго порядка с периодическими коэффициентами, зависящими от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Старшая часть оператора задана в факторизованной форме, оператор включает члены первого и нулевого порядков. Для операторной экспоненты $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$, $s \in \mathbb{R}$, при малом ε получена аппроксимация по $(H^r \rightarrow L_2)$ -операторной норме при подходящем r . Результаты применяются к вопросу о поведении решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи Коши для нестационарного уравнения типа Шрёдингера $i\partial_s \mathbf{u}_\varepsilon = \mathcal{B}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{F}$. Рассмотрены приложения к магнитному уравнению Шрёдингера с сингулярным электрическим потенциалом и к двумерному уравнению Паули с сингулярными потенциалами.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, нестационарные уравнения типа Шрёдингера, усреднение, эффективный оператор, операторные оценки погрешности.

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам усреднения в пределе малого периода посвящена обширная литература; укажем в первую очередь книги [BeLP, BaPa, ZhKO].

Для изучения задач усреднения в $\mathbb{R}^d$ один из возможных методов — это спектральный метод, основанный на теории Флоке–Блоха. Спектральный подход применялся во многих работах, например, [BeLP, глава 4], [ZhKO, глава 2], [Se], [COVa], [APi].

0.1 Класс операторов

Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — элементарная ячейка решётки Γ . Для Γ -периодических функций в $\mathbb{R}^d$ используется обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$.

^{*}Представлено Т. А. Суслиной.

[†]Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ №16-01-00087 А.

[‡]Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9; e-mail: mdorodni@yandex.ru.

Рассматриваются самосопряжённые эллиптические матричные ДО второго порядка в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ следующего вида

$$\mathcal{B}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d (f^\varepsilon(\mathbf{x})^* a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j f^\varepsilon(\mathbf{x}) + f^\varepsilon(\mathbf{x})^* D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^* f^\varepsilon(\mathbf{x})) + f^\varepsilon(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) f^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda f^\varepsilon(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}) f^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (0.1)$$

Здесь старшая часть $\mathcal{A}_\varepsilon$ задана в факторизованном виде:

$$\mathcal{A}_\varepsilon = f^\varepsilon(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (0.2)$$

где $b(\mathbf{D})$ — однородный матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами, $g(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая ограниченная и положительно определённая $(m \times m)$ -матрица-функция, $f(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая ограниченная вместе со своей обратной $(n \times n)$ -матрица-функция. (Точные условия на g и $b(\mathbf{D})$ см. в п. 2.2.1.) Далее, $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$, — Γ -периодические $(n \times n)$ -матрицы-функции, вообще говоря, неограниченные. Потенциал $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ — обобщённая функция (со значениями в классе эрмитовых матриц), порождённая некоторой матричнозначной мерой. Требуются лишь определённые условия подчинённости потенциала старшей части оператора. Наконец, $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая положительно-определённая и ограниченная $(n \times n)$ -матричнозначная функция. На параметр λ накладывается условие, обеспечивающее положительную определённость оператора (0.1). (Точные условия на коэффициенты приведены в пп. 2.2.2, 2.2.3, 2.2.4.)

Целесообразно сначала изучить более узкий класс операторов вида

$$\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon = \widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + \sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (0.3)$$

отвечающий случаю $f = \mathbf{1}_n$, где

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}). \quad (0.4)$$

0.2 Операторные оценки погрешности для эллиптических и параболических задач в $\mathbb{R}^d$

В работах М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной [BSu1]–[BSu4] был предложен и развит теоретико-операторный подход к эллиптическим задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода), основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Будем для определённости говорить о более простых операторах (0.3), (0.4) и обсудим сначала результаты для оператора (0.4). В [BSu1] было показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ резольвента $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$ сходится к резольвенте $(\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}$ по операторной L_2 -норме, где $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — эффективный оператор с постоянной эффективной матрицей g^0 . Способ нахождения эффективной матрицы хорошо известен в теории усреднения, в нашем случае он описан ниже в (2.57). В [BSu1] была установлена оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^0 + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon. \quad (0.5)$$

В работах [BSu2, BSu3] была найдена более точная аппроксимация резольвенты оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$, а в [BSu4] найдена

аппроксимация той же резольвенты по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, с погрешностью $O(\varepsilon)$. В этих аппроксимациях учитываются члены первого порядка (*корректоры*).

Аналогичным образом проблема усреднения параболических уравнений в $\mathbb{R}^d$ может изучаться как вопрос об асимптотическом описании операторной экспоненты $\exp(-s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon)$ при $s > 0$ и малом ε . Теоретико-операторный подход применялся к таким задачам в работах [Su1]–[Su3], [V], [VSu]. В [Su1, Su2] получена следующая оценка

$$\|\exp(-s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon) - \exp(-s\widehat{\mathcal{A}}^0)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon(s + \varepsilon^2)^{-1/2}. \quad (0.6)$$

В работе [V] была найдена более точная аппроксимация оператора $\exp(-s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon)$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ при фиксированном s , а в [Su3] получена аппроксимация экспоненты по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, с погрешностью $O(\varepsilon)$ при фиксированном s . В этих аппроксимациях учитываются корректоры первого порядка.

Ещё более точные аппроксимации экспоненты и резольвенты при учёте первого и второго корректоров найдены в работе [VSu]. В [BSu1]–[BSu4], [Su1]–[Su3], [V], [VSu] аналогичные результаты получены и для более общего оператора (0.2), но формулировки сложнее; здесь мы не будем на этом останавливаться.

Оценки погрешности типа (0.5), (0.6) называют *операторными оценками погрешности* в теории усреднения. Другой подход (так называемый “метод сдвига”) к получению операторных оценок погрешности был предложен В. В. Жиковым. В работах [Zh, ZhPas1] были получены аппроксимации резольвенты по норме в L_2 с погрешностью $O(\varepsilon)$ и по норме операторов, действующих из L_2 в H^1 , с погрешностью $O(\varepsilon)$ для операторов акустики и теории упругости (которые относятся к классу операторов вида (0.4)). В [ZhPas2] была получена оценка вида (0.6) для оператора $-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$. См. также обзор [ZhPas3].

В присутствии членов младшего порядка эллиптическая задача усреднения изучалась в работах [Bo], [Su4]. Там была установлена оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon)^{-1} - (\widehat{\mathcal{B}}^0)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C\varepsilon,$$

а также найдена аппроксимация оператора $(\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon)^{-1}$ по норме операторов, действующих из $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в пространство Соболева $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, с погрешностью $O(\varepsilon)$. Здесь $\widehat{\mathcal{B}}^0$ — *эффективный оператор* с постоянными коэффициентами (см. (3.3)). В статье [Bo] предполагалось, что коэффициенты оператора зависят не только от быстрой, но и от медленной переменной. Однако в [Bo] коэффициенты оператора предполагались достаточно гладкими, а постоянные в оценках зависели от “гладких” норм коэффициентов. В [Su4] эти оценки доказаны при широких предположениях о коэффициентах оператора (таких же, как в настоящей статье). В работе [Su6] была найдена более точная аппроксимация оператора $(\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon)^{-1}$ по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ с погрешностью $O(\varepsilon^2)$.

Параболические задачи с оператором $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ (а также с оператором $\mathcal{B}_\varepsilon$) изучались в работе [M1].

0.3 Операторные оценки погрешности для нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа

Несколько иначе обстоит дело с усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа, которым посвящена статья [BSu5]. Остановимся опять на результатах для более простого оператора (0.4). В операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, где $s \in \mathbb{R}$. Для

этих оператор-функций уже не удаётся получить аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, а приходится рассматривать норму операторов, действующих из пространства Соболева $H^r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ (с подходящим r) в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. В [BSu5] были получены следующие оценки:

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |s|)\varepsilon, \quad (0.7)$$

$$\|\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |s|)\varepsilon. \quad (0.8)$$

Похожий результат для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ был получен в работе [M2] (см. также [M3]):

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |s|)\varepsilon. \quad (0.9)$$

С помощью интерполяции это позволяет получить также оценку разности операторных экспонент из (0.7) по $(H^r \rightarrow L_2)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^{r/3})$ (при $0 \leq r \leq 3$), оценку разности операторных косинусов из (0.8) по $(H^r \rightarrow L_2)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^{r/2})$ (при $0 \leq r \leq 2$), а также оценку разности операторов из (0.9) по $(H^r \rightarrow L_2)$ -норме с погрешностью $O(\varepsilon^{(r+1)/2})$ (при $-1 \leq r \leq 1$).

Кроме того, в [M2, M3] получена аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ по норме операторов, действующих из $H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ в $H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, с погрешностью $O(\varepsilon)$ при фиксированном s .

В работах [Su8, DSu2] (см. также [Su7, DSu1]) была подтверждена точность оценок (0.7)–(0.9) относительно типа операторной нормы. С другой стороны, были найдены достаточные условия на оператор, позволяющие усилить результат и получить оценки

$$\begin{aligned} \|e^{-is\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathcal{C}(1 + |s|)\varepsilon, \\ \|\cos(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathcal{C}(1 + |s|)\varepsilon, \\ \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2} \sin(s\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^0)^{-1/2} \sin(s(\widehat{\mathcal{A}}^0)^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} &\leq \mathcal{C}(1 + |s|)\varepsilon. \end{aligned}$$

0.4 Основные результаты работы

В настоящей работе мы проводим аналогичные [BSu5, Su8] рассмотрения для экспоненты от оператора (0.3), включающего младшие члены. Полученные результаты применяются к вопросу о поведении решения задачи Коши для нестационарного уравнения типа Шрёдингера. Мы доказываем оценку

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |s|)\varepsilon \quad (0.10)$$

и подтверждаем её точность в следующем смысле: указываем условие на оператор, при котором оценка

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(s)\varepsilon$$

заведомо неверна, если $r < 3$.

С другой стороны, при некоторых дополнительных предположениях (которые формулируются в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра) мы можем усилить результат и доказать оценку

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(1 + |s|)\varepsilon.$$

Мы получаем аналоги этих результатов и для более общего оператора (0.1). При этом оказывается, что удобно изучать операторную экспоненту, окаймлённую подходящими быстро осциллирующими множителями. Речь идёт об операторе $f^\varepsilon e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1}$.

Результаты, полученные в операторных терминах, применяются затем к вопросу о поведении решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $s \in \mathbb{R}$, следующей задачи

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), \end{cases}$$

а также более общей задачи с оператором $\mathcal{B}_\varepsilon$. Мы применяем общие результаты к конкретным уравнениям математической физики. В частности, рассмотрены нестационарное магнитное уравнение Шрёдингера с быстро осциллирующими магнитным потенциалом и сингулярным электрическим потенциалом, а также двумерное уравнение Паули с сингулярными периодическими потенциалами.

0.5 Метод

Результаты получены с помощью дальнейшего развития теоретико-операторного подхода. Этот метод был предложен и развит в серии статей [BSu1]–[BSu4], где изучался оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$, и был модифицирован в [Su4]–[Su6] применительно к оператору $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$.

Пусть $\mathcal{H}_0 = -\Delta$. Ясно, что оценка (0.10) равносильна неравенству

$$\|(e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0})(\mathcal{H}_0 + I)^{-3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |s|)\varepsilon. \quad (0.11)$$

Иначе говоря, надо домножить разность операторных экспонент на “сглаживающий множитель” $(\mathcal{H}_0 + I)^{-3/2}$ и рассматривать операторную норму произведения в L_2 . Далее, масштабное преобразование позволяет вывести оценку (0.11) из неравенства

$$\|(e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)} - e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)})\varepsilon^3(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq C(1 + |s|)\varepsilon.$$

Оператор

$$\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon) = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d (a_j(\mathbf{x}) D_j + D_j (a_j(\mathbf{x}))^*) + \varepsilon^2 (\mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}))$$

действует в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и зависит от параметра ε . Его коэффициенты зависят от $\mathbf{x}$ (а не от $\varepsilon^{-1}\mathbf{x}$). Аналогично определяется оператор $\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)$ с эффективными коэффициентами. Затем с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$, действующим в пространстве $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ (где Ω — ячейка решётки Γ). Оператор $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ задаётся выражением

$$b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d (a_j(\mathbf{x}) (D_j + k_j) + (D_j + k_j) a_j(\mathbf{x})^*) + \varepsilon^2 (\mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}))$$

при периодических граничных условиях. Следуя [BSu1], мы выделяем одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$ и рассматриваем семейство $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ как квадратичный пучок по отношению к параметрам t и ε .

При этом значительную часть построений удаётся провести в рамках абстрактной теории операторов. Остановимся на этом подробнее. В абстрактной схеме изучается действующее в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ операторное семейство

$$\mathfrak{B}(t, \varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^*Y(t) + Y(t)^*Y_2) + \varepsilon^2Q + \lambda\varepsilon^2Q_0.$$

Предполагается, что оператор $A(t)$ допускает факторизацию вида $A(t) = X(t)^*X(t)$, где $X(t) = X_0 + tX_1$. Основное условие состоит в том, что точка $\lambda_0 = 0$ является собственным значением конечной кратности n для оператора $A(0)$. Обозначим $\mathfrak{N} = \text{Ker } A(0)$. На операторы $Y(t) = Y_0 + tY_1$, Y_2 , Q накладываются некоторые условия подчинённости старшей части.

Следуя [Su4, Su5], мы вводим одномерный параметр $\tau = (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}$ и изучаем семейство операторов $\mathfrak{B}(\tau, \vartheta) := \mathfrak{B}(t, \varepsilon)$, где $\vartheta = (t\tau^{-1}, \varepsilon\tau^{-1}) \in \mathbb{S}^1$, методами аналитической теории возмущений относительно параметра τ . Тогда у возмущённого оператора $\mathfrak{B}(\tau, \vartheta)$ при $|\tau| \leq \tau^0$ на промежутке $[0, \delta]$ имеется ровно n собственных значений с учётом кратности (числа δ и τ^0 контролируются явно). Эти собственные значения и отвечающие им собственные векторы аналитичны по τ . Коэффициенты степенных разложений для них мы называем пороговыми характеристиками оператора на краю спектра. Выделяется оператор $\mathcal{S}(\vartheta)$ конечного ранга (так называемый *спектральный росток* операторного семейства $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$, см. определение в п. 1.1.8 ниже), действующий в пространстве $\mathfrak{N}$. Спектральный росток несёт информацию о пороговых характеристиках старшего порядка. Пусть $F(\tau, \vartheta)$ — спектральный проектор оператора $\mathfrak{B}(\tau, \vartheta)$ для промежутка $[0, \delta]$. Мы опираемся на пороговые аппроксимации для проектора $F(\tau, \vartheta)$ и для оператора $\mathfrak{B}(\tau, \vartheta)F(\tau, \vartheta)$, полученные в работах [Su4, гл. 1] и [Su5]. Проектор $F(\tau, \vartheta)$ приближался проектором P на подпространство $\mathfrak{N}$, а оператор $\mathfrak{B}(\tau, \vartheta)F(\tau, \vartheta)$ приближался оператором $\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)P$.

В терминах спектрального ростка удаётся получить аппроксимации для операторной экспоненты $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t, \varepsilon)}$, домноженного на подходящий “сглаживающий множитель”. Применение абстрактных результатов приводит к искомым оценкам для дифференциальных операторов.

Для доказательства точности оценки (0.10) мы рассматриваем операторный пучок $\mathfrak{B}(\varkappa) := \mathfrak{B}(t, \varepsilon)$ при $t = c\varkappa^2$, $t = \varkappa^3$ и пользуемся методами аналитической теории возмущений относительно одномерного параметра $\varkappa$.

0.6 Обозначения

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают, соответственно, скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*}$ означает норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы, если это не ведёт к смешениям. Через $I = I_{\mathfrak{H}}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $A: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\text{Dom } A$ и $\text{Ker } A$ обозначаются область определения и ядро A , соответственно. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^{\perp} := \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$. Если P — ортогональный проектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^{\perp}$ — ортогональный проектор $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}^{\perp}$.

Символы $\langle \cdot, \cdot \rangle$ и $|\cdot|$ означают, соответственно, стандартные скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$; $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n \times n)$ -матрица. Для $z \in \mathbb{C}$ через z^* обозначается комплексно-сопряжённое число; мы используем такое нестандартное обозначение, поскольку знак верхней черты зарезервирован под обозначение среднего значения периодической функции. Нижняя черта означает взятие среднего гармонического значения.

Далее, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, d$, $\nabla = \text{grad} = (\partial_1, \dots, \partial_d)$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$.

Классы L_p функций со значениями в $\mathbb{C}^n$, заданных в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$, обозначаются через $L_p(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$ -значных функций в области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$ порядка s с индексом суммирования p обозначаются $W_p^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$. При $p = 2$ используем обозначения $H^s(\mathcal{O}; \mathbb{C}^n)$, $s \in \mathbb{R}$. При $n = 1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $W_p^s(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т.д., но иногда мы применяем такие упрощённые обозначения и для пространств векторнозначных и матричнозначных функций.

Через C , c , $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные.

0.7 Благодарности

Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за полезные обсуждения, ценные советы и внимательное чтение рукописи.

1 Абстрактная теоретико-операторная схема

1.1 Квадратичные двупараметрические операторные семейства

Мы изучаем семейство операторов $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$, зависящих от двух вещественных параметров ε и t ,

$$0 \leq \varepsilon \leq 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

В этом пункте мы кратко описываем результаты, полученные в [Su4, Su5].

1.1.1 Операторы $X(t)$ и $A(t)$

Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что $X_0: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — плотно определённый и замкнутый оператор, а $X_1: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$ — ограниченный оператор. Введём замкнутый на $\text{Dom } X_0$ оператор $X(t) := X_0 + tX_1: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$, где $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство самосопряжённых операторов $A(t) := X(t)^*X(t)$ в $\mathfrak{H}$. Оператор $A(t)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2$, $u \in \text{Dom } X_0$. Введём обозначения $A_0 := A(0)$, $\mathfrak{N} := \text{Ker } A_0 = \text{Ker } X_0$, $\mathfrak{N}_* := \text{Ker } X_0^*$.

Предполагается выполненным следующее условие.

УСЛОВИЕ 1.1.1. Точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора A_0 и $0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty$, $n \leq n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leq \infty$.

Обозначим через d^0 расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора A_0 . Через P и P_* обозначаются ортопроекторы в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и в $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$, соответственно.

Операторное семейство $A(t)$ подробно изучалось в работах [BSu1, гл. 1], [BSu2], [BSu4, гл. 1].

1.1.2 Операторы $Y(t)$ и Y_2

Пусть $\tilde{\mathfrak{H}}$ — ещё одно сепарабельное гильбертово пространство. Пусть $Y_0: \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определённый оператор такой, что $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } Y_0$. Далее, пусть Y_1 — ограниченный оператор в $\mathfrak{H}$. Введём $Y(t) := Y_0 + tY_1$, $\text{Dom } Y(t) = \text{Dom } Y_0$. Предполагается выполненным следующее условие.

УСЛОВИЕ 1.1.2. Для некоторого $c_1 > 0$ имеем

$$\|Y(t)u\|_{\tilde{\mathfrak{H}}} \leq c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \text{Dom } X_0, \quad t \in \mathbb{R}. \quad (1.1)$$

Из (1.1) при $t = 0$ следует, что $\mathfrak{N} \subset \text{Ker } Y_0$.

Пусть $Y_2: \mathfrak{H} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{H}}$ — плотно определённый линейный оператор такой, что $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } Y_2$. Предполагается, что оператор Y_2 сильно подчинён оператору $X(t)$, т.е. справедливо

УСЛОВИЕ 1.1.3. Для любого $\nu > 0$ существует число $C(\nu) > 0$ такое, что выполнено неравенство

$$\|Y_2 u\|_{\widetilde{\mathfrak{H}}}^2 \leq \nu \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + C(\nu)\|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0, t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

1.1.3 Форма $\mathfrak{q}$

Пусть в пространстве $\mathfrak{H}$ задана плотно определённая эрмитова полуторалинейная форма $\mathfrak{q}[u, v]$, причём $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } \mathfrak{q}$. На форму $\mathfrak{q}$ накладывается следующее условие.

УСЛОВИЕ 1.1.4. Существуют такие постоянные $0 < \kappa \leq 1, c_0 \in \mathbb{R}, c_2 \geq 0, c_3 \geq 0$, что

$$\begin{aligned} |\mathfrak{q}[u, v]| &\leq (c_2 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + c_3 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2} (c_2 \|X(t)v\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + c_3 \|v\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2}, \\ \mathfrak{q}[u, u] &\geq -(1 - \kappa) \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 - c_0 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u, v \in \text{Dom } X_0, t \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

1.1.4 Оператор $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$

В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим квадратичную форму

$$\mathfrak{b}(t, \varepsilon)[u, u] = \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + 2\varepsilon \text{Re}(Y(t)u, Y_2 u)_{\widetilde{\mathfrak{H}}} + \varepsilon^2 \mathfrak{q}[u, u] + \lambda \varepsilon^2 (Q_0 u, u)_{\mathfrak{H}}, \quad u \in \text{Dom } X_0. \quad (1.4)$$

Здесь $Q_0: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ — ограниченный положительно определённый оператор. На параметр $\lambda \in \mathbb{R}$ накладывается ограничение:

$$\begin{aligned} \lambda &> \|Q_0^{-1}\| (c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda \geq 0, \\ \lambda &> \|Q_0\|^{-1} (c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda < 0 \text{ и } c_0 + c_4 < 0, \end{aligned} \quad (1.5)$$

где c_0 — постоянная из условия 1.1.4, а $c_4 = 4\kappa^{-1}c_1^2 C(\nu)$ при $\nu = \kappa^2(16c_1^2)^{-1}$.

Используя (1.1), (1.2), (1.3), можно проверить (см. [Su5, п. 1.4]) справедливость следующих оценок:

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(t, \varepsilon)[u, u] &\leq (2 + c_1^2 + c_2) \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + (C(1) + c_3 + |\lambda| \|Q_0\|) \varepsilon^2 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \\ \mathfrak{b}(t, \varepsilon)[u, u] &\geq \frac{\kappa}{2} \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + \beta \varepsilon^2 \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0, \end{aligned}$$

где $\beta > 0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda \|Q_0^{-1}\|^{-1} - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda \geq 0, \\ \beta &= \lambda \|Q_0\| - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda < 0 \text{ и } c_0 + c_4 < 0. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Таким образом, форма $\mathfrak{b}(t, \varepsilon)[u, u]$ замкнута и положительно определена.

Самоспряжённый оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, порождённый формой (1.4), обозначим через $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$. Формально можно записать

$$\mathfrak{B}(t, \varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^* Y(t) + Y(t)^* Y_2) + \varepsilon^2 Q + \lambda \varepsilon^2 Q_0. \quad (1.7)$$

Здесь Q — формальный объект, который мы сопоставляем форме $\mathfrak{q}$.

1.1.5 Введение параметра τ

Семейство $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$ аналитически зависит от параметров t и ε . Если $t = 0$ и $\varepsilon = 0$, то $\mathfrak{B}(0, 0) = A_0$ имеет изолированное собственное значение $\lambda_0 = 0$ кратности n . Мы хотим использовать аппарат аналитической теории возмущений. Однако, если $n > 1$, то аналитическая теория возмущений не работает, поскольку мы имеем дело с многомерным параметром и кратным собственным значением. Чтобы преодолеть эту трудность, мы, следуя [Su4], вводим *одномерный параметр* $\tau = \sqrt{t^2 + \varepsilon^2}$ и дополнительные параметры $\vartheta_1 = t\tau^{-1}$, $\vartheta_2 = \varepsilon\tau^{-1}$, $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$. Оператор $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$ будем обозначать через $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$. Соответствующая квадратичная форма запишется в виде

$$\mathfrak{b}(\tau; \vartheta)[u, u] = \|(X_0 + \tau\vartheta_1 X_1)u\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + 2\tau\vartheta_2 \operatorname{Re}(Y_0 u, Y_2 u)_{\mathfrak{H}} + 2\tau^2\vartheta_1\vartheta_2 \operatorname{Re}(Y_1 u, Y_2 u)_{\mathfrak{H}} + \tau^2\vartheta_2^2(\mathfrak{q}[u, u] + \lambda(Q_0 u, u)_{\mathfrak{H}}), \quad u \in \operatorname{Dom} X_0.$$

Отвечающий ей оператор формально можно записать в виде

$$\mathfrak{B}(\tau; \vartheta) = (X_0^* + \tau\vartheta_1 X_1^*)(X_0 + \tau\vartheta_1 X_1) + \tau\vartheta_2(Y_2^* Y_0 + Y_0^* Y_2) + \tau^2\vartheta_1\vartheta_2(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2) + \tau^2\vartheta_2^2(Q + \lambda Q_0). \quad (1.8)$$

Мы изучаем оператор $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$ как квадратичный пучок, соответствующий одномерному параметру τ , средствами аналитической теории возмущений. В то же время мы должны следить за равномерностью оценок по ϑ , принимая во внимание, что $\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2 = 1$. В записи (1.8) можно считать, что $\tau \in \mathbb{R}$.

Обозначим за $F(\tau; \vartheta; s)$ спектральный проектор оператора $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$ для интервала $[0, s]$ и положим $\mathfrak{F}(\tau; \vartheta; s) := F(\tau; \vartheta; s)\mathfrak{H}$. Фиксируем число $\delta \in (0, \kappa d^0/13)$ и выберем $\tau^0 > 0$, такое что

$$\tau^0 \leq \delta^{1/2} \left((2 + c_1^2 + c_2)\|X_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda|\|Q_0\| \right)^{-1/2}. \quad (1.9)$$

В [Su4, предложение 1.5] установлено следующее утверждение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.1.1 ([Su4]). *При $|\tau| \leq \tau^0$ выполнено*

$$F(\tau; \vartheta; \delta) = F(\tau; \vartheta; 3\delta), \quad \operatorname{rank} F(\tau; \vartheta; \delta) = n.$$

Далее мы часто будем писать $F(\tau; \vartheta)$ вместо $F(\tau; \vartheta; \delta)$ и $\mathfrak{F}(\tau; \vartheta)$ вместо $\mathfrak{F}(\tau; \vartheta; \delta)$.

1.1.6 Операторы Z и $\tilde{Z}$

Следуя [Su4, Su5], введём операторы, которые возникают при рассмотрении в духе теории возмущений.

Обозначим $\mathcal{D} := \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$. Так как $\lambda_0 = 0$ — изолированное собственное значение в спектре A_0 , то форма $(X_0\varphi, X_0\zeta)$, $\varphi, \zeta \in \mathcal{D}$, определяет скалярное произведение в $\mathcal{D}$, превращая $\mathcal{D}$ в гильбертово пространство. Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$. Рассмотрим уравнение на $\phi \in \mathcal{D}$:

$$X_0^*(X_0\phi + X_1\omega) = 0,$$

которое понимается в слабом смысле:

$$(X_0\phi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_1\omega, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}.$$

Правая часть — антилинейный непрерывный функционал над $\zeta \in \mathcal{D}$, поэтому по теореме Рисса существует единственное решение $\phi = \phi(\omega)$. Кроме того, оно удовлетворяет оценке

$$\|X_0\phi(\omega)\|_{\mathfrak{H}_*} \leq \|X_1\omega\|_{\mathfrak{H}_*}. \quad (1.10)$$

Поскольку

$$\|X_0\zeta\|_{\mathfrak{H}_*}^2 \geq d^0 \|\zeta\|_{\mathfrak{H}}^2 \geq 13\delta\kappa^{-1} \|\zeta\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}, \quad (1.11)$$

то в силу (1.10)

$$\|\phi(\omega)\|_{\mathfrak{H}} \leq \kappa^{1/2} (13\delta)^{-1/2} \|X_1\omega\|_{\mathfrak{H}_*}. \quad (1.12)$$

Введём оператор $Z: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ формулой

$$Zu = \phi(Pu), \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Из (1.10) и (1.12) прямо вытекают оценки

$$\|X_0Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*} \leq \|X_1\|, \quad (1.13)$$

$$\|Z\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \kappa^{1/2} (13\delta)^{-1/2} \|X_1\|. \quad (1.14)$$

Аналогично, рассмотрим уравнение на $\psi \in \mathcal{D}$ для заданного $\omega \in \mathfrak{N}$:

$$X_0^* X_0 \psi + Y_0^* Y_2 \omega = 0,$$

которое понимается в слабом смысле:

$$(X_0\psi, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(Y_2\omega, Y_0\zeta)_{\tilde{\mathfrak{H}}}, \quad \forall \zeta \in \mathcal{D}.$$

В силу условия (1.1) правая часть — антилинейный непрерывный функционал от $\zeta \in \mathcal{D}$, поэтому по теореме Рисса существует единственное решение $\psi = \psi(\omega)$. Кроме того, оно удовлетворяет оценке

$$\|X_0\psi\|_{\mathfrak{H}_*} \leq c_1 \|Y_2\omega\|_{\tilde{\mathfrak{H}}} \leq c_1 C(1)^{1/2} \|\omega\|_{\mathfrak{H}}. \quad (1.15)$$

Последнее неравенство следует из (1.2) при $t = 0$ с $\nu = 1$. С учётом (1.11) отсюда вытекает неравенство

$$\|\psi(\omega)\|_{\mathfrak{H}} \leq c_1 (\kappa C(1))^{1/2} (13\delta)^{-1/2} \|\omega\|_{\mathfrak{H}}. \quad (1.16)$$

Введём оператор $\tilde{Z}: \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$ формулой

$$\tilde{Z}u = \psi(Pu), \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Из (1.15), (1.16) прямо вытекают оценки

$$\|X_0\tilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*} \leq c_1 C(1)^{1/2}, \quad (1.17)$$

$$\|\tilde{Z}\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq c_1 (\kappa C(1))^{1/2} (13\delta)^{-1/2}. \quad (1.18)$$

1.1.7 Операторы R и S

Определим оператор

$$R := X_0Z + X_1: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}_*. \quad (1.19)$$

Как было показано в [BSu1, гл. 1, п. 1.2], оператор R также может быть определён формулой $R = P_* X_1|_{\mathfrak{N}}$. Следуя [BSu1, гл. 1, п. 1.3], назовём оператор $S := R^* R: \mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}$ *спектральным ростком* семейства $A(t)$ при $t = 0$. Для ростка справедливо также представление

$$S = P X_1^* P_* X_1|_{\mathfrak{N}}, \quad (1.20)$$

откуда вытекает оценка

$$\|S\| \leq \|X_1\|^2. \quad (1.21)$$

1.1.8 Ветви собственных значений и собственных векторов оператора $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$. Спектральный росток оператора $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$

Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [K]), при $|\tau| \leq \tau^0$ существуют вещественно-аналитические (по τ) функции $\lambda_l(\tau; \vartheta)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$ -значные функции $\varphi_l(\tau; \vartheta)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)\varphi_l(\tau; \vartheta) = \lambda_l(\tau; \vartheta)\varphi_l(\tau; \vartheta), \quad |\tau| \leq \tau^0, \quad l = 1, \dots, n,$$

причём $\varphi_l(\tau; \vartheta)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{F}(\tau; \vartheta)$. Для достаточно малого $\tau_*(\vartheta) \leq \tau^0$ справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\lambda_l(\tau; \vartheta) = \gamma_l(\vartheta)\tau^2 + \mu_l(\vartheta)\tau^3 + \dots, \quad \gamma_l(\vartheta) > 0, \quad |\tau| \leq \tau_*(\vartheta), \quad (1.22)$$

$$\varphi_l(\tau; \vartheta) = \omega_l(\vartheta) + \tau\varphi_l^{(1)}(\vartheta) + \dots, \quad |\tau| \leq \tau_*(\vartheta). \quad (1.23)$$

Векторы $\omega_l(\vartheta)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

Следуя [Su4], введём оператор

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\vartheta) = & \vartheta_1^2 S - \vartheta_1 \vartheta_2 (X_0 Z)^*(X_0 \tilde{Z})|_{\mathfrak{N}} - \vartheta_1 \vartheta_2 (X_0 \tilde{Z})^*(X_0 Z)|_{\mathfrak{N}} - \\ & - \vartheta_2^2 (X_0 \tilde{Z})^*(X_0 \tilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + \vartheta_1 \vartheta_2 P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2)|_{\mathfrak{N}} + \vartheta_2^2 (Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}}), \end{aligned}$$

который называется *спектральным ростком семейства* $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)$ при $\tau = 0$. Здесь $Q_{\mathfrak{N}}$ — самосопряжённый оператор, порождённый квадратичной формой $\mathfrak{q}[\omega, \omega]$, $\omega \in \mathfrak{N}$, а $Q_{0\mathfrak{N}} := PQ_0|_{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [Su4, предложение 1.6], числа $\gamma_l(\vartheta)$ и векторы $\omega_l(\vartheta)$ являются собственными для $\mathcal{S}(\vartheta)$:

$$\mathcal{S}(\vartheta)\omega_l(\vartheta) = \gamma_l(\vartheta)\omega_l(\vartheta), \quad l = 1, \dots, n. \quad (1.24)$$

Имеют место представления

$$P = \sum_{l=1}^n (\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \omega_l(\vartheta), \quad (1.25)$$

$$\mathcal{S}(\vartheta)P = \sum_{l=1}^n \gamma_l(\vartheta) (\cdot, \omega_l(\vartheta))_{\mathfrak{H}} \omega_l(\vartheta). \quad (1.26)$$

Оценим норму оператора $\mathcal{S}(\vartheta)$, используя (1.13), (1.17), (1.21), (1.2) при $t = 0$ и $\nu = 1$, а также (1.3) при $t = 0$:

$$\|\mathcal{S}(\vartheta)\|_{\mathfrak{N} \rightarrow \mathfrak{N}} \leq \|X_1\|^2 + 2c_1 C(1)^{1/2} \|X_1\| + c_1^2 C(1) + 2C(1)^{1/2} \|Y_1\| + c_3 + |\lambda| \|Q_0\| =: C_s. \quad (1.27)$$

В заключение этого пункта введём оператор

$$\begin{aligned} L(t, \varepsilon) := & \tau^2 \mathcal{S}(\vartheta) = t^2 S - t\varepsilon \left((X_0 Z)^*(X_0 \tilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + (X_0 \tilde{Z})^*(X_0 Z)|_{\mathfrak{N}} \right) + \\ & + t\varepsilon P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2)|_{\mathfrak{N}} + \varepsilon^2 \left(-(X_0 \tilde{Z})^*(X_0 \tilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}} \right). \end{aligned} \quad (1.28)$$

1.1.9 Пороговые аппроксимации

Спектральный проектор $F(\tau; \vartheta)$ и оператор $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta)$ являются вещественно аналитическими оператор-функциями при $|\tau| \leq \tau^0$. При $|\tau| \leq \tau^0$ можно записать

$$F(\tau; \vartheta) = \sum_{l=1}^n (\cdot, \varphi_l(\tau; \vartheta)) \varphi_l(\tau; \vartheta),$$

$$\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) = \sum_{l=1}^n \lambda_l(\tau; \vartheta)(\cdot, \varphi_l(\tau; \vartheta))\varphi_l(\tau; \vartheta).$$

С учётом (1.22)–(1.26) отсюда следуют степенные разложения $F(\tau; \vartheta) = P + \tau F_1(\vartheta) + \dots$, $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) = \tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P + \tau^3 \mathcal{K}(\vartheta) + \dots$, сходящиеся при $|\tau| \leq \tau_*(\vartheta)$. Однако, нам нужны не разложения, а лишь аппроксимации (с одним или несколькими первыми членами), но с оценками погрешности на контролируемом промежутке $|\tau| \leq \tau^0$.

Следующее утверждение было получено в [Su4, теорема 2.2]. Договоримся ниже через β_j обозначать абсолютные константы (значения которых допускают явный контроль), причём считаем $\beta_j \geq 1$.

ТЕОРЕМА 1.1.1 ([Su4]). *Справедливы оценки*

$$F(\tau; \vartheta) - P = \Phi(\tau; \vartheta), \quad \|\Phi(\tau; \vartheta)\| \leq C_1 |\tau|, \quad |\tau| \leq \tau^0; \quad (1.29)$$

$$\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) - \tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P = \Psi(\tau; \vartheta), \quad \|\Psi(\tau; \vartheta)\| \leq C_2 |\tau|^3, \quad |\tau| \leq \tau^0. \quad (1.30)$$

Константы C_1, C_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} C_1 &= \beta_1 \kappa^{-1/2} C'_3, \\ C_2 &= \beta_2 \delta \kappa^{-1/2} ((C'_1)^2 C'_3 + C'_1 C'_2 + C'_2 C'_3), \end{aligned} \quad (1.31)$$

где

$$\begin{aligned} C'_1 &= \max\{2 + c_1^2, (\|X_1\|^2 + C(1))\delta^{-1}\}, \\ C'_2 &= \max\{c_2 + 1, (\|X_1\|^2 + \|Y_1\|^2 + C(1) + c_3 + |\lambda| \|Q_0\|)\delta^{-1}\}, \\ C'_3 &= C'_1 + \tau^0 C'_2. \end{aligned}$$

Нам понадобится также более точная аппроксимация, найденная в [Su5, теорема 3.3].

ТЕОРЕМА 1.1.2 ([Su5]). *Справедливы представления*

$$\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)F(\tau; \vartheta) = \tau^2 \mathcal{S}(\vartheta)P + \tau^3 K(\vartheta) + \Psi_2(\tau; \vartheta), \quad |\tau| \leq \tau^0, \quad (1.32)$$

и оценка

$$\|\Psi_2(\tau; \vartheta)\| \leq C_3 \tau^4, \quad |\tau| \leq \tau^0. \quad (1.33)$$

Оператор $K(\vartheta)$ определён ниже соотношениями (1.34)–(1.39). Постоянная C_3 имеет вид

$$C_3 = \beta_3 \delta \kappa^{-1/2} ((C'_1)^3 C'_3 + (C'_1)^2 C'_2 + C'_1 C'_2 C'_3 + (C'_2)^2).$$

Как показано в [Su5, п. 3.4]

$$K(\vartheta) = K_0(\vartheta) + N(\vartheta), \quad (1.34)$$

где $K_0(\vartheta)$ переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}^\perp$ и $\mathfrak{N}^\perp$ в $\mathfrak{N}$, а $N(\vartheta)$ переводит $\mathfrak{N}$ в себя и $\mathfrak{N}^\perp$ в $\{0\}$. В терминах коэффициентов степенных разложений операторы $K_0(\vartheta)$ и $N(\vartheta)$ имеют вид

$$\begin{aligned} K_0(\vartheta) &= \sum_{l=1}^n \gamma_l(\vartheta) \left((\cdot, \omega_l(\vartheta)) (\vartheta_1 Z \omega_l(\vartheta) + \vartheta_2 \tilde{Z} \omega_l(\vartheta)) + (\cdot, \vartheta_1 Z \omega_l(\vartheta) + \vartheta_2 \tilde{Z} \omega_l(\vartheta)) \omega_l(\vartheta) \right), \\ N(\vartheta) &= \sum_{l=1}^n \mu_l(\vartheta) (\cdot, \omega_l(\vartheta)) \omega_l(\vartheta) + \sum_{l=1}^n \gamma_l(\vartheta) \left((\cdot, \tilde{\omega}_l(\vartheta)) \omega_l(\vartheta) + (\cdot, \omega_l(\vartheta)) \tilde{\omega}_l(\vartheta) \right), \end{aligned}$$

где $\tilde{\omega}_l(\vartheta) = P\varphi_l^{(1)}(\vartheta)$. В инвариантных терминах справедливы представления

$$\begin{aligned} K_0(\vartheta) &= \vartheta_1(Z\mathcal{S}(\vartheta)P + \mathcal{S}(\vartheta)PZ^*) + \vartheta_2(\tilde{Z}\mathcal{S}(\vartheta)P + \mathcal{S}(\vartheta)P\tilde{Z}^*), \\ N(\vartheta) &= \vartheta_1^3 N_{11} + \vartheta_1^2 \vartheta_2 N_{12} + \vartheta_1 \vartheta_2^2 N_{21} + \vartheta_2^3 N_{22}, \end{aligned} \quad (1.35)$$

где

$$N_{11} = (X_1 Z)^* R P + (R P)^* X_1 Z, \quad (1.36)$$

$$\begin{aligned} N_{12} &= (X_1 \tilde{Z})^* R P + (R P)^* X_1 \tilde{Z} + (X_1 Z)^* X_0 \tilde{Z} + \\ &+ (X_0 \tilde{Z})^* X_1 Z + (Y_2 Z)^* Y_0 Z + (Y_0 Z)^* Y_2 Z + \\ &+ (Y_2 Z)^* Y_1 P + (Y_1 P)^* Y_2 Z + (Y_2 P)^* Y_1 Z + (Y_1 Z)^* Y_2 P, \end{aligned} \quad (1.37)$$

$$\begin{aligned} N_{21} &= (X_0 \tilde{Z})^* X_1 \tilde{Z} + (X_1 \tilde{Z})^* X_0 \tilde{Z} + (Y_2 Z)^* Y_0 \tilde{Z} + \\ &+ (Y_0 \tilde{Z})^* Y_2 Z + (Y_2 \tilde{Z})^* Y_0 Z + (Y_0 Z)^* Y_2 \tilde{Z} + (Y_2 \tilde{Z})^* Y_1 P + \\ &+ (Y_1 P)^* Y_2 \tilde{Z} + (Y_1 \tilde{Z})^* Y_2 P + (Y_2 P)^* Y_1 \tilde{Z} + \\ &+ Z^* Q P + P Q Z + \lambda(Z^* Q_0 P + P Q_0 Z), \end{aligned} \quad (1.38)$$

$$N_{22} = (Y_0 \tilde{Z})^* Y_2 \tilde{Z} + (Y_2 \tilde{Z})^* Y_0 \tilde{Z} + \tilde{Z}^* Q P + P Q \tilde{Z} + \lambda(\tilde{Z}^* Q_0 P + P Q_0 \tilde{Z}). \quad (1.39)$$

Поясним, что в (1.38) под формальной записью $Z^* Q P + P Q Z$ подразумевается ограниченный самосопряжённый оператор в $\mathfrak{H}$, порождённый формой

$$\mathfrak{q}[P u, Z u] + \mathfrak{q}[Z u, P u], \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Аналогично в (1.39) под $\tilde{Z}^* Q P + P Q \tilde{Z}$ понимается ограниченный самосопряжённый оператор в $\mathfrak{H}$, порождённый формой

$$\mathfrak{q}[P u, \tilde{Z} u] + \mathfrak{q}[\tilde{Z} u, P u], \quad u \in \mathfrak{H}.$$

Отметим также оценки (см. [Su5, п. 3.5])

$$\|N_{11}\| \leq 2\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\|X_1\|^3, \quad (1.40)$$

$$\begin{aligned} \|N_{12}\| &\leq 2(\kappa C(1))^{1/2}(13\delta)^{-1/2}\|X_1\|(2c_1\|X_1\| + \|Y_1\|) + \\ &+ 2(1 + \kappa(13\delta)^{-1}C(1))^{1/2}\|X_1\|(c_1\|X_1\| + \|Y_1\|), \end{aligned} \quad (1.41)$$

$$\begin{aligned} \|N_{21}\| &\leq 2\kappa^{1/2}(13\delta)^{-1/2}(c_1^2 C(1)\|X_1\| + c_1 C(1)\|Y_1\| + |\lambda|\|Q_0\|\|X_1\|) + \\ &+ 2(1 + \kappa(13\delta)^{-1}C(1))^{1/2}c_1 C(1)^{1/2}(2c_1\|X_1\| + \|Y_1\|) + \\ &+ 2c_3^{1/2}\|X_1\|(c_2 + c_3\kappa(13\delta)^{-1})^{1/2}, \end{aligned} \quad (1.42)$$

$$\begin{aligned} \|N_{22}\| &\leq 2c_1^3 C(1)(1 + \kappa(13\delta)^{-1}C(1))^{1/2} + 2c_3^{1/2}c_1 C(1)^{1/2}(c_2 + c_3\kappa(13\delta)^{-1})^{1/2} + \\ &+ 2c_1(\kappa C(1))^{1/2}(13\delta)^{-1/2}|\lambda|\|Q_0\|. \end{aligned} \quad (1.43)$$

В дальнейшем главную роль будет играть оператор N_{11} .

1.2 Пороговые аппроксимации для оператора $e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}P$

1.2.1 Приближение для экспоненты $e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}P$

Наша цель в этом пункте — приблизить оператор $e^{-is\mathfrak{B}(\tau;\vartheta)}$ при $s \in \mathbb{R}$ оператором $e^{-is\tau^2\mathcal{S}(\vartheta)}P$, считая, что $|\tau| \leq \tau^0$.

Рассмотрим оператор

$$E(\tau; \vartheta; s) := e^{-is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} P - e^{-is\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P} P. \quad (1.44)$$

Имеем

$$E(\tau; \vartheta; s) = E_1(\tau; \vartheta; s) + E_2(\tau; \vartheta; s), \quad (1.45)$$

$$E_1(\tau; \vartheta; s) = e^{-is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} F(\tau; \vartheta)^\perp P - F(\tau; \vartheta)^\perp e^{-is\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P} P, \quad (1.46)$$

$$E_2(\tau; \vartheta; s) = e^{-is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} F(\tau; \vartheta) P - F(\tau; \vartheta) e^{-is\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P} P. \quad (1.47)$$

Поскольку $F(\tau; \vartheta)^\perp P = (P - F(\tau; \vartheta))P$, то из (1.29) вытекает оценка оператора (1.46):

$$\|E_1(\tau; \vartheta; s)\| \leq 2C_1|\tau|, \quad |\tau| \leq \tau^0. \quad (1.48)$$

Перейдём к рассмотрению оператора (1.47), который запишем как

$$E_2(\tau; \vartheta; s) = e^{-is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} \Sigma(\tau; \vartheta; s), \quad (1.49)$$

$$\Sigma(\tau; \vartheta; s) := F(\tau; \vartheta) P - e^{is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} F(\tau; \vartheta) e^{-is\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P} P.$$

Видно, что $\Sigma(\tau; \vartheta; 0) = 0$ и

$$\Sigma'(\tau; \vartheta; s) := \frac{d\Sigma}{ds}(\tau; \vartheta; s) = -ie^{is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} F(\tau; \vartheta) (\mathfrak{B}(\tau; \vartheta) F(\tau; \vartheta) - \tau^2 \mathfrak{S}(\vartheta) P) e^{-is\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P} P. \quad (1.50)$$

Поскольку $\Sigma(\tau; \vartheta; s) = \int_0^s \Sigma'(\tau; \vartheta; \tilde{s}) d\tilde{s}$, из (1.30) и (1.50) следует оценка

$$\|\Sigma(\tau; \vartheta; s)\| \leq C_2|s||\tau|^3, \quad |\tau| \leq \tau^0. \quad (1.51)$$

Соотношения (1.44), (1.45), (1.48), (1.49) и (1.51) влекут следующий результат.

ТЕОРЕМА 1.2.1. *При $s \in \mathbb{R}$ справедлива оценка*

$$\|e^{-is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} P - e^{-is\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P} P\| \leq 2C_1|\tau| + C_2|s||\tau|^3, \quad |\tau| \leq \tau^0. \quad (1.52)$$

Число τ^0 подчинено (1.9), а постоянные C_1, C_2 определены в (1.31).

Мы проведём более кропотливые рассуждения, которые позволят нам усилить результат при дополнительных предположениях. Подставляя (1.32) в (1.50), получаем

$$\Sigma(\tau; \vartheta; s) = -i \int_0^s e^{i\tilde{s}\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} F(\tau; \vartheta) (\tau^3 K(\vartheta) + \Psi_2(\tau; \vartheta)) e^{-i\tilde{s}\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P} P d\tilde{s}. \quad (1.53)$$

Учитывая (1.34), (1.35), а также соотношения $Z^*P = 0$ и $\tilde{Z}^*P = 0$, запишем оператор (1.53) в виде

$$\Sigma(\tau; \vartheta; s) = \tilde{\Sigma}(\tau; \vartheta; s) + \hat{\Sigma}(\tau; \vartheta; s), \quad (1.54)$$

$$\tilde{\Sigma}(\tau; \vartheta; s) = -i \int_0^s e^{i\tilde{s}\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} F(\tau; \vartheta) (\tau^3 \vartheta_1 Z \mathfrak{S}(\vartheta) + \tau^3 \vartheta_2 \tilde{Z} \mathfrak{S}(\vartheta) + \Psi_2(\tau; \vartheta)) e^{-i\tilde{s}\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P} P d\tilde{s}, \quad (1.55)$$

$$\hat{\Sigma}(\tau; \vartheta; s) = -i\tau^3 \int_0^s e^{i\tilde{s}\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} F(\tau; \vartheta) (\vartheta_1^3 N_{11} + \vartheta_1^2 \vartheta_2 N_{12} + \vartheta_1 \vartheta_2^2 N_{21} + \vartheta_2^3 N_{22}) e^{-i\tilde{s}\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P} P d\tilde{s}.$$

Поскольку $PZ = 0$ и $P\tilde{Z} = 0$, то

$$F(\tau; \vartheta)ZS(\vartheta)P = (F(\tau; \vartheta) - P)ZS(\vartheta)P, \quad F(\tau; \vartheta)\tilde{Z}S(\vartheta)P = (F(\tau; \vartheta) - P)\tilde{Z}S(\vartheta)P.$$

Тогда из (1.14), (1.18), (1.27), (1.29), (1.33) следует оценка для оператора (1.55):

$$\|\tilde{\Sigma}(\tau; \vartheta; s)\| \leq C_4 |s| \tau^4, \quad |\tau| \leq \tau^0, \quad (1.56)$$

с постоянной

$$C_4 = \kappa^{1/2} (13\delta)^{-1/2} (\|X_1\| + c_1 C(1)^{1/2}) C_1 C_S + C_3. \quad (1.57)$$

Теперь из (1.49) и (1.54) вытекает представление

$$E_2(\tau; \vartheta; s) = \tilde{E}_2(\tau; \vartheta; s) + \hat{E}_2(\tau; \vartheta; s), \quad (1.58)$$

где $\tilde{E}_2(\tau; \vartheta; s) = e^{-is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} \tilde{\Sigma}(\tau; \vartheta; s)$, $\hat{E}_2(\tau; \vartheta; s) = e^{-is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} \hat{\Sigma}(\tau; \vartheta; s)$. В силу (1.56)

$$\|\tilde{E}_2(\tau; \vartheta; s)\| \leq C_4 |s| \tau^4, \quad |\tau| \leq \tau^0. \quad (1.59)$$

В итоге соотношения (1.44), (1.45), (1.48), (1.58), (1.59) приводят к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1.2.2. *При $s \in \mathbb{R}$ и $|\tau| \leq \tau^0$ справедливо представление*

$$e^{-is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} P - e^{-is\tau^2 \mathfrak{S}(\vartheta) P} P = E_1(\tau; \vartheta; s) + \tilde{E}_2(\tau; \vartheta; s) + \hat{E}_2(\tau; \vartheta; s),$$

где первые два слагаемых допускают оценки (1.48) и (1.59) соответственно. Третий член допускает представление

$$\begin{aligned} \hat{E}_2(\tau; \vartheta; s) &= \\ &= -i\tau^3 e^{-is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} \int_0^s e^{is\mathfrak{B}(\tau; \vartheta)} F(\tau; \vartheta) (\vartheta_1^3 N_{11} + \vartheta_1^2 \vartheta_2 N_{12} + \vartheta_1 \vartheta_2^2 N_{21} + \vartheta_2^3 N_{22}) e^{-i\tilde{s}\tau^2 \mathfrak{S}(\vartheta) P} P d\tilde{s}, \end{aligned}$$

где операторы N_{11} , N_{12} , N_{21} , N_{22} определены в (1.36)–(1.39).

1.3 Приближение для оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t, \varepsilon)}$

1.3.1 Аппроксимация оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} P$ в общем случае

Исследуем поведение оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(\tau, \vartheta)}$ при малом ε . Домножим этот оператор на “сглаживающий множитель” $\varepsilon^r (t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} P$, где $r > 0$. (Термин объясняется тем, что в приложениях к дифференциальным операторам такое домножение переходит в сглаживание.) Наша цель — получить аппроксимацию сглаженного оператора с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$ при минимально возможном r .

Пусть $|\tau| \leq \tau^0$. Применим теорему 1.2.1. В силу (1.52) (с заменой s на $\varepsilon^{-2}s$) имеем

$$\begin{aligned} \|e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t, \varepsilon)P} P\| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} &\leq \\ &\leq (2C_1 |\tau| + C_2 \varepsilon^{-2} |s| |\tau|^3) \varepsilon^3 |\tau|^{-3} \leq (2C_1 + C_2 |s|) \varepsilon. \end{aligned} \quad (1.60)$$

Здесь пришлось взять $r = 3$. Мы приходим к следующему результату.

ТЕОРЕМА 1.3.1. *При $s \in \mathbb{R}$ и $|\tau| \leq \tau^0$ справедлива оценка*

$$\|e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t, \varepsilon)P} P\| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \leq (2C_1 + C_2 |s|) \varepsilon.$$

Число τ^0 подчинено (1.9), а постоянные C_1 , C_2 определены в (1.31).

1.3.2 Улучшение аппроксимации оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P$ при дополнительных предположениях

Теорема 1.2.2 позволяет усилить результат теоремы 1.3.1 в случае, когда $N_{11} = 0$.

ТЕОРЕМА 1.3.2. Пусть оператор N_{11} , определённый в (1.36), равен нулю: $N_{11} = 0$. Тогда при $s \in \mathbb{R}$ и $|\tau| \leq \tau^0$ справедлива оценка

$$\|e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t,\varepsilon)P}P\| \varepsilon^2(t^2 + \varepsilon^2)^{-1} \leq (2C_1 + C_6|s|)\varepsilon. \quad (1.61)$$

Здесь $C_6 = 2C_4 + \frac{5}{2}C_5$, а постоянные C_4 и C_5 определены в (1.57), (1.62).

Доказательство. Заметим, что при $|t| \geq \sqrt{\varepsilon}$ выполнено $\varepsilon^2(t^2 + \varepsilon^2)^{-1} \leq \varepsilon$. Поэтому левая часть в (1.61) не превосходит 2ε . Таким образом, достаточно считать, что $|t| < \sqrt{\varepsilon}$. Воспользуемся теоремой 1.2.2 с заменой s на $\varepsilon^{-2}s$. Тогда при $|t| < \sqrt{\varepsilon}$ имеет место оценка

$$\begin{aligned} \|e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t,\varepsilon)P}P\| \varepsilon^2(t^2 + \varepsilon^2)^{-1} &\leq \\ &\leq (2C_1|\tau| + C_4\varepsilon^{-2}|s|\tau^4 + C_5\varepsilon^{-2}|s|(t^2\varepsilon + |t|\varepsilon^2 + \varepsilon^3)) \varepsilon^2(t^2 + \varepsilon^2)^{-1} \leq \\ &\leq (2C_1 + 2C_4|s| + \frac{5}{2}C_5|s|) \varepsilon \end{aligned}$$

с константой

$$C_5 = \max\{\|N_{12}\|, \|N_{21}\|, \|N_{22}\|\}. \quad (1.62)$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. $\square$

ЗАМЕЧАНИЕ 1.3.1. Мы отследили зависимость констант C_1, C_2, C_6 от параметров задачи в теоремах 1.3.1 и 1.3.2. Они оцениваются многочленами от $\delta, \delta^{-1/2}, \kappa^{1/2}, \kappa^{-1/2}, \|X_1\|, \|Y_1\|, c_1, C(1)^{1/2}, c_2^{1/2}, c_3^{1/2}, |\lambda|\|Q_0\|$ и τ^0 . Коэффициенты многочленов — некоторые абсолютные положительные константы.

1.4 Подтверждение точности результата

1.4.1 Параметр $\varkappa$

Рассмотрим операторный пучок (1.7) при наличии связи между параметрами $t = c\varepsilon^{2/3}$, $c > 0$. Введём параметр $\varkappa = \varepsilon^{1/3}$. Оператор $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$ будем обозначать $\mathfrak{B}(\varkappa)$. Формальная структура оператора $\mathfrak{B}(\varkappa)$ такова:

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(\varkappa) = X_0^*X_0 + c\varkappa^2(X_0^*X_1 + X_1^*X_0) + c^2\varkappa^4X_1^*X_1 + \varkappa^3(Y_2^*Y_0 + Y_0^*Y_2) + \\ + c\varkappa^5(Y_2^*Y_1 + Y_1^*Y_2) + \varkappa^6(Q + \lambda Q_0). \end{aligned}$$

Заметим, что согласно своему определению параметр $\varkappa$ неотрицателен, но оператор $\mathfrak{B}(\varkappa)$ можно рассматривать при всех $\varkappa \in \mathbb{R}$, что и подразумевается ниже. Выберем число $\varkappa_0 = \varkappa_0(c) > 0$, так что $\sqrt{c^2\varkappa_0^4 + \varkappa_0^6} < \tau^0$. Тогда согласно общей аналитической теории возмущений при $|\varkappa| \leq \varkappa_0$ существуют вещественно-аналитические функции $\lambda_l(\varkappa)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$ -значные функции $\varphi_l(\varkappa)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$\mathfrak{B}(\varkappa)\varphi_l(\varkappa) = \lambda_l(\varkappa)\varphi_l(\varkappa), \quad |\varkappa| \leq \varkappa_0, \quad l = 1, \dots, n, \quad (1.63)$$

причём $\varphi_l(\varkappa)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $F(\varkappa)\mathfrak{H}$. Здесь мы обозначили через $F(\varkappa)$ спектральный проектор оператора $\mathfrak{B}(\varkappa)$ для интервала $[0, \delta]$. Для достаточно малого $\varkappa_* = \varkappa_*(c) \leq \varkappa_0$ справедливы следующие степенные разложения:

$$\lambda_l(\varkappa) = \lambda_l^{(2)}\varkappa^2 + \lambda_l^{(3)}\varkappa^3 + \lambda_l^{(4)}\varkappa^4 + \lambda_l^{(5)}\varkappa^5 + \lambda_l^{(6)}\varkappa^6 + \dots, \quad |\varkappa| \leq \varkappa_*, \quad (1.64)$$

$$\varphi_l(\varkappa) = \omega_l + \varkappa\varphi_l^{(1)} + \varkappa^2\varphi_l^{(2)} + \varkappa^3\varphi_l^{(3)} + \varkappa^4\varphi_l^{(4)} + \varkappa^5\varphi_l^{(5)} + \dots, \quad |\varkappa| \leq \varkappa_*. \quad (1.65)$$

Векторы ω_l , $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$.

Запишем (1.63) как тождество для форм:

$$\begin{aligned} & (X_0\varphi_l(\varkappa), X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c\varkappa^2((X_0\varphi_l(\varkappa), X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l(\varkappa), X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}) + c^2\varkappa^4(X_1\varphi_l(\varkappa), X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + \\ & + \varkappa^3((Y_0\varphi_l(\varkappa), Y_2\zeta)_{\mathfrak{H}} + (Y_2\varphi_l(\varkappa), Y_0\zeta)_{\mathfrak{H}}) + c\varkappa^5((Y_1\varphi_l(\varkappa), Y_2\zeta)_{\mathfrak{H}} + (Y_2\varphi_l(\varkappa), Y_1\zeta)_{\mathfrak{H}}) + \\ & + \varkappa^6(\mathfrak{q}[\varphi_l(\varkappa), \zeta] + \lambda(Q_0\varphi_l(\varkappa), \zeta)_{\mathfrak{H}}) = \lambda_l(\varkappa)(\varphi_l(\varkappa), \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \forall \zeta \in \text{Dom } X_0. \end{aligned}$$

Подставим сюда ряды (1.64), (1.65) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях $\varkappa$. Имеем:

$$\varkappa^0 : \quad (X_0\omega_l, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = 0, \quad \zeta \in \text{Dom } X_0, \quad (1.66)$$

$$\varkappa^1 : \quad (X_0\varphi_l^{(1)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = 0, \quad \zeta \in \text{Dom } X_0. \quad (1.67)$$

Равенство (1.66) обеспечено включением $\omega_l \in \mathfrak{N}$. Подставляя $\zeta = \varphi_l^{(1)}$ в равенство (1.67), получаем, что $\varphi_l^{(1)} \in \mathfrak{N}$. Можно записать

$$\varphi_l^{(1)} = \sum_{k=1}^n c_{lk}^{(1)}\omega_k, \quad l = 1, \dots, n. \quad (1.68)$$

Далее, учитывая $X_0\omega_l = X_0\varphi_l^{(1)} = 0$ и $Y_0\omega_l = 0$, имеем

$$\varkappa^2 : \quad (X_0\varphi_l^{(2)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\omega_l, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = \lambda_l^{(2)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \text{Dom } X_0, \quad (1.69)$$

$$\varkappa^3 : \quad (X_0\varphi_l^{(3)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\varphi_l^{(1)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_2\omega_l, Y_0\zeta)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(2)}(\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{(3)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \text{Dom } X_0. \quad (1.70)$$

Подставляя $\zeta = \omega_l$ в (1.69), (1.70), получаем, что $\lambda_l^{(2)} = \lambda_l^{(3)} = 0$. В терминах операторов Z и $\tilde{Z}$ решения уравнений (1.69), (1.70) можно записать в виде

$$\varphi_l^{(2)} = cZ\omega_l + \tilde{\varphi}_l^{(2)}, \quad \tilde{\varphi}_l^{(2)} \in \mathfrak{N}, \quad (1.71)$$

$$\varphi_l^{(3)} = cZ\varphi_l^{(1)} + \tilde{Z}\omega_l + \tilde{\varphi}_l^{(3)}, \quad \tilde{\varphi}_l^{(3)} \in \mathfrak{N}. \quad (1.72)$$

Приравнивая коэффициенты при $\varkappa^4$, получаем

$$\begin{aligned} \varkappa^4 : \quad & (X_0\varphi_l^{(4)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c((X_0\varphi_l^{(2)}, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(2)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}) + \\ & + c^2(X_1\omega_l, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_0\zeta)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(4)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \text{Dom } X_0. \end{aligned} \quad (1.73)$$

С учётом (1.19) и (1.71) при $\zeta \in \mathfrak{N}$ соотношение (1.73) принимает вид

$$c^2(R\omega_l, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = \lambda_l^{(4)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}.$$

В силу (1.20) это означает, что

$$c^2(S\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(4)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}, \quad (1.74)$$

т.е., числа $\lambda_l^{(4)}$ и векторы ω_l являются собственными для оператора c^2S :

$$c^2S\omega_l = \lambda_l^{(4)}\omega_l. \quad (1.75)$$

(В дальнейшем для определённости будем считать, что $\lambda_l^{(4)}$ занумерованы в порядке неубывания.) Если все собственные числа оператора S простые, то из (1.75) определяются (с точностью до фазового множителя) векторы ω_l .

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.1. Нам также будет удобно пользоваться другими обозначениями, отслеживая кратности собственных значений. Обозначим количество различных собственных значений оператора c^2S через p и обозначим их кратности через $k_1, \dots, k_p$ (разумеется, $k_1 + \dots + k_p = n$). Переобозначим различные собственные значения через $\lambda_j^{\circ, (4)}$, $j = 1, \dots, p$. Тогда

$$\lambda_1^{\circ, (4)} := \lambda_1^{(4)} = \dots = \lambda_{k_1}^{(4)} < \lambda_2^{\circ, (4)} := \lambda_{k_1+1}^{(4)} = \dots = \lambda_{k_1+k_2}^{(4)} < \dots < \lambda_p^{\circ, (4)} := \lambda_{n-k_p+1}^{(4)} = \dots = \lambda_n^{(4)}.$$

Введём обозначения для собственных подпространств: $\mathfrak{N}_j = \text{Ker}(c^2S - \lambda_j^{\circ, (4)}I_{\mathfrak{N}})$, $j = 1, \dots, p$. Тогда

$$\mathfrak{N} = \sum_{j=1}^p \oplus \mathfrak{N}_j.$$

Пусть P_j — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_j$. Тогда

$$P = \sum_{j=1}^p P_j, \quad P_j P_l = 0 \quad \text{при } j \neq l.$$

Равенство коэффициентов при $\varkappa^5$ даёт

$$\begin{aligned} & (X_0\varphi_l^{(5)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + c((X_0\varphi_l^{(3)}, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(3)}, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}) + \\ \varkappa^5 : & + c^2(X_1\varphi_l^{(1)}, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_0\varphi_l^{(2)}, Y_2\zeta)_{\mathfrak{H}} + (Y_2\varphi_l^{(2)}, Y_0\zeta)_{\mathfrak{H}} + \\ & + c((Y_1\omega_l, Y_2\zeta)_{\mathfrak{H}} + (Y_2\omega_l, Y_1\zeta)_{\mathfrak{H}}) = \lambda_l^{(5)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{(4)}(\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \text{Dom } X_0. \end{aligned}$$

Пусть $\zeta \in \mathfrak{N}$. Воспользуемся формулами (1.71), (1.72), определениями операторов R и S , а также тождествами

$$(X_0\tilde{Z}\omega_l, X_1\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0Z\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad (1.76)$$

$$(Y_0Z\omega_l, Y_2\zeta)_{\mathfrak{H}} = -(X_0Z\omega_l, X_0\tilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*}, \quad (1.77)$$

следующими из определений операторов Z и $\tilde{Z}$. Получаем

$$\begin{aligned} & c^2(S\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}} - c((X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0Z\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0Z\omega_l, X_0\tilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*}) + \\ & + c((Y_1\omega_l, Y_2\zeta)_{\mathfrak{H}} + (Y_2\omega_l, Y_1\zeta)_{\mathfrak{H}}) = \lambda_l^{(5)}(\omega_l, \zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{(4)}(\varphi_l^{(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}. \end{aligned} \quad (1.78)$$

Подставляя $\zeta = \omega_l$ и используя (1.75), находим

$$\lambda_l^{(5)} = -c((X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0Z\omega_l)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0Z\omega_l, X_0\tilde{Z}\omega_l)_{\mathfrak{H}_*}) + c((Y_1\omega_l, Y_2\omega_l)_{\mathfrak{H}} + (Y_2\omega_l, Y_1\omega_l)_{\mathfrak{H}}). \quad (1.79)$$

Далее, подставим (1.68) в (1.78). Перебирая $\zeta = \omega_k$, $k = 1, \dots, n$, получаем выражения для $c_{lk}^{(1)}$ с индексами $\{(l, k) : \lambda_l^{(4)} \neq \lambda_k^{(4)}\}$:

$$(\lambda_l^{(4)} - \lambda_k^{(4)})c_{lk}^{(1)} = -c((X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0Z\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0Z\omega_l, X_0\tilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}) + c((Y_1\omega_l, Y_2\omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\omega_l, Y_1\omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}}). \quad (1.80)$$

Пусть $\lambda_q^{\circ, (4)}$ — собственное число задачи (1.75) кратности k_q (т.е. $\lambda_i^{(4)} = \dots = \lambda_{i+k_q-1}^{(4)}$, $i = i(q) = k_1 + \dots + k_{q-1} + 1$). Мы получаем следующие соотношения:

$$-(X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0Z\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} - (X_0Z\omega_l, X_0\tilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_1\omega_l, Y_2\omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2\omega_l, Y_1\omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} = 0, \quad l, k = i, \dots, i + k_q - 1, l \neq k. \quad (1.81)$$

Равенства (1.79) с $l = i, \dots, i + k_q - 1$ и (1.81) можно трактовать как задачу на собственные числа

$$c\mathcal{Y}^{(q)}\omega_l = \lambda_l^{(5)}\omega_l, \quad l = i, \dots, i + k_q - 1, \quad (1.82)$$

для самосопряжённого оператора

$$\mathcal{Y}^{(q)} = P_q(-(X_0Z)^*X_0\tilde{Z} - (X_0\tilde{Z})^*X_0Z + Y_2^*Y_1 + Y_1^*Y_2)|_{\mathfrak{N}_q}.$$

Если все собственные числа задачи (1.82) простые, то тогда векторы ω_l , $l = i, \dots, i + k_q - 1$, определяются с точностью до фазового множителя.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.2. Введём также и другие обозначения по аналогии с замечанием 1.4.1. Будем считать, что $\lambda_l^{(5)}$, $l = i, \dots, i + k_q - 1$, занумерованы в порядке неубывания. Обозначим количество различных собственных значений оператора $c\mathcal{Y}^{(q)}$ через $p'(q)$ и обозначим их кратности через $k_{1,q}, \dots, k_{p'(q),q}$ (разумеется, $k_{1,q} + \dots + k_{p'(q),q} = k_q$). Переобозначим различные собственные значения через $\lambda_{j,q}^{\circ, (5)}$, $j = 1, \dots, p'(q)$. Тогда

$$\lambda_{1,q}^{\circ, (5)} := \lambda_i^{(5)} = \dots = \lambda_{i+k_{1,q}-1}^{(5)} < \lambda_{2,q}^{\circ, (5)} := \lambda_{i+k_{1,q}}^{(5)} = \dots = \lambda_{i+k_{1,q}+k_{2,q}-1}^{(5)} < \dots < \lambda_{p'(q),q}^{\circ, (5)} := \lambda_{i+k_q-k_{p'(q),q}}^{(5)} = \dots = \lambda_{i+k_q-1}^{(5)}.$$

Введём обозначения для собственных подпространств: $\mathfrak{N}_{j,q} = \text{Ker}(c\mathcal{Y}^{(q)} - \lambda_{j,q}^{\circ, (5)}I_{\mathfrak{N}_q})$, $j = 1, \dots, p'(q)$. Тогда $\mathfrak{N}_q = \sum_{j=1}^{p'(q)} \oplus \mathfrak{N}_{j,q}$. Пусть $P_{j,q}$ — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_{j,q}$. Тогда $P_q = \sum_{j=1}^{p'(q)} P_{j,q}$ и $P_{j,q}P_{l,q} = 0$ при $j \neq l$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.3. Отметим, что $\lambda_l^{(4)} \sim c^2$, $\lambda_l^{(5)} \sim c$, $l = 1, \dots, n$.

Далее, рассмотрим соотношение $(\varphi_l(\varkappa), \varphi_k(\varkappa))_{\mathfrak{H}} = \delta_{lk}$. Подставляя в него ряды (1.65) и приравнивая коэффициенты при степенях $\varkappa$, получаем равенства:

$$\varkappa^0 : \quad (\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \delta_{lk},$$

$$\varkappa^1 : \quad (\omega_l, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (\varphi_l^{(1)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = 0, \quad (1.83)$$

$$\varkappa^2 : \quad (\omega_l, \varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + (\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (\varphi_l^{(2)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = 0. \quad (1.84)$$

Из (1.71) и (1.84) следуют равенства

$$(\omega_l, \tilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + (\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (\tilde{\varphi}_l^{(2)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = 0. \quad (1.85)$$

Далее нам будет удобно воспользоваться соотношением $(\mathfrak{B}(\varkappa)\varphi_l(\varkappa), \varphi_k(\varkappa))_{\mathfrak{H}} = \lambda_l(\varkappa)\delta_{lk}$.
Равенство коэффициентов при $\varkappa^6$ даёт

$$\begin{aligned}
& (X_0\varphi_l^{(2)}, X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_l^{(3)}, X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_l^{(4)}, X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + \\
& + c((X_0\varphi_l^{(4)}, X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_l^{(3)}, X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_l^{(2)}, X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + \\
& + (X_1\omega_l, X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(1)}, X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(2)}, X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}) + \\
\varkappa^6 : & + c^2((X_1\varphi_l^{(2)}, X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\varphi_l^{(1)}, X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_1\omega_l, X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*}) + \\
& + (Y_0\varphi_l^{(3)}, Y_2\omega_k)_{\mathfrak{H}} + (Y_0\varphi_l^{(2)}, Y_2\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + (Y_2\omega_l, Y_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}} + \\
& + c((Y_1\omega_l, Y_2\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (Y_1\varphi_l^{(1)}, Y_2\omega_k)_{\mathfrak{H}} + (Y_2\omega_l, Y_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_1\omega_k)_{\mathfrak{H}}) + \\
& + \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_k] + \lambda(Q_0\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)}\delta_{lk}.
\end{aligned} \tag{1.86}$$

В силу (1.71) и определений операторов R и S имеем

$$\begin{aligned}
& c(X_0\varphi_l^{(2)}, X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + c^2(X_1\omega_l, X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\varphi_l^{(2)}, X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + c^2(X_1\varphi_l^{(2)}, X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} = \\
& = c^2(R\omega_l, X_1\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + c^2(X_1\varphi_l^{(2)}, R\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} = c^3(Z^*X_1^*RP\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + c^3((RP)^*X_1Z\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + \\
& + c^2(S\omega_l, \tilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\tilde{\varphi}_l^{(2)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}}.
\end{aligned}$$

Далее, из (1.71) и тождества $(X_1\omega_l, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*} = -(X_0Z\omega_l, X_0\zeta)_{\mathfrak{H}_*}$ (см. определение оператора Z) следует, что

$$(X_0\varphi_l^{(2)}, X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\omega_l, X_0\varphi_k^{(4)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\varphi_l^{(4)}, X_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}_*} + c(X_0\varphi_l^{(4)}, X_1\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} = 0.$$

Затем воспользуемся (1.70) при $\zeta = \varphi_k^{(3)}$:

$$(X_0\varphi_l^{(3)}, X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*} + c(X_1\varphi_l^{(1)}, X_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}_*} + (Y_2\omega_l, Y_0\varphi_k^{(3)})_{\mathfrak{H}} = 0.$$

Наконец, в силу (1.71), (1.72), (1.76), (1.77) и тождества $(Y_0\tilde{Z}\omega_l, Y_2\zeta)_{\mathfrak{H}} = -(X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0\tilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*}$ (см. определение оператора $\tilde{Z}$),

$$\begin{aligned}
& c(X_0\varphi_l^{(3)}, X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + c^2(X_1\varphi_l^{(1)}, X_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (Y_0\varphi_l^{(3)}, Y_2\omega_k)_{\mathfrak{H}} + \\
& + (Y_0\varphi_l^{(2)}, Y_2\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_0\varphi_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} = c^2(S\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} - \\
& - c\left((X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0Z\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0Z\varphi_l^{(1)}, X_0\tilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0Z\omega_l, X_0\tilde{Z}\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\tilde{Z}\varphi_l^{(1)}, X_0Z\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}\right) - \\
& - (X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0\tilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*}.
\end{aligned}$$

В итоге, с учётом (1.36) равенство (1.86) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
& c^3(N_{11}\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + c^2(S\omega_l, \tilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\tilde{\varphi}_l^{(2)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} - \\
& - c((X_0\tilde{Z}\varphi_l^{(1)}, X_0Z\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0Z\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + \\
\varkappa^6 : & + (X_0Z\varphi_l^{(1)}, X_0\tilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0Z\omega_l, X_0\tilde{Z}\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*}) - (X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0\tilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + \tag{1.87} \\
& + c((Y_1\omega_l, Y_2\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (Y_1\varphi_l^{(1)}, Y_2\omega_k)_{\mathfrak{H}} + (Y_2\omega_l, Y_1\varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + (Y_2\varphi_l^{(1)}, Y_1\omega_k)_{\mathfrak{H}}) + \\
& + \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_k] + \lambda(Q_0\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)}\delta_{lk}.
\end{aligned}$$

Пусть $\lambda_q^{\circ,(4)}$ — собственное число задачи (1.75) кратности k_q (т.е. $\lambda_i^{(4)} = \dots = \lambda_{i+k_q-1}^{(4)}$, $i = i(q) = k_1 + \dots + k_{q-1} + 1$). Пусть $l, k = i, \dots, i + k_q - 1$. Используя (1.68), (1.75) и (1.85), получаем

$$\begin{aligned} c^2(S\omega_l, \tilde{\varphi}_k^{(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\tilde{\varphi}_l^{(2)}, \omega_k)_{\mathfrak{H}} &= c^2(S\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} - \lambda_q^{\circ,(4)}(\varphi_l^{(1)}, \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}} = \\ &= \sum_{r'=1}^n (\lambda_{r'}^{(4)} - \lambda_q^{\circ,(4)}) c_{lr'}^{(1)} \overline{c_{kr'}^{(1)}}, \quad l, k = i, \dots, i + k_q - 1. \end{aligned} \quad (1.88)$$

Далее, в силу (1.68), (1.79) и (1.80) имеем

$$\begin{aligned} c \left(-(X_0 \tilde{Z} \varphi_l^{(1)}, X_0 Z \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} - (X_0 Z \varphi_l^{(1)}, X_0 \tilde{Z} \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_1 \varphi_l^{(1)}, Y_2 \omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2 \varphi_l^{(1)}, Y_1 \omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \right) &= \\ = c \sum_{r'=1}^n c_{lr'}^{(1)} \left(-(X_0 \tilde{Z} \omega_{r'}, X_0 Z \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} - (X_0 Z \omega_{r'}, X_0 \tilde{Z} \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (Y_1 \omega_{r'}, Y_2 \omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2 \omega_{r'}, Y_1 \omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} \right) &= \\ = \sum_{r'=1}^n c_{lr'}^{(1)} \left((\lambda_{r'}^{(4)} - \lambda_q^{\circ,(4)}) c_{r'k}^{(1)} + \lambda_{r'}^{(5)} \delta_{r'k} \right), \quad l, k = i, \dots, i + k_q - 1. \end{aligned} \quad (1.89)$$

Аналогично, используя (1.68), (1.79) и (1.80), получаем

$$\begin{aligned} c \left(-(X_0 \tilde{Z} \omega_l, X_0 Z \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} - (X_0 Z \omega_l, X_0 \tilde{Z} \varphi_k^{(1)})_{\mathfrak{H}_*} + (Y_1 \omega_l, Y_2 \varphi_k^{(1)})_{\tilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2 \omega_l, Y_1 \varphi_k^{(1)})_{\tilde{\mathfrak{H}}} \right) &= \\ = c \sum_{r'=1}^n \overline{c_{kr'}^{(1)}} \left(-(X_0 \tilde{Z} \omega_l, X_0 Z \omega_{r'})_{\mathfrak{H}_*} - (X_0 Z \omega_l, X_0 \tilde{Z} \omega_{r'})_{\mathfrak{H}_*} + (Y_1 \omega_l, Y_2 \omega_{r'})_{\tilde{\mathfrak{H}}} + (Y_2 \omega_l, Y_1 \omega_{r'})_{\tilde{\mathfrak{H}}} \right) &= \\ = \sum_{r'=1}^n \overline{c_{kr'}^{(1)}} \left((\lambda_q^{\circ,(4)} - \lambda_{r'}^{(4)}) c_{lr'}^{(1)} + \lambda_{r'}^{(5)} \delta_{lr'} \right), \quad l, k = i, \dots, i + k_q - 1. \end{aligned} \quad (1.90)$$

Таким образом, учитывая (1.79), (1.80), (1.88)–(1.90) и равенство $c_{lk}^{(1)} = -\overline{c_{kl}^{(1)}}$ (следующее из (1.83)), мы можем записать (1.87) для $l, k = i, \dots, i + k_q - 1$ следующим образом:

$$\begin{aligned} c^3(N_{11}\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + c_{lk}^{(1)}(\lambda_k^{(5)} - \lambda_l^{(5)}) + \mathfrak{H}^{(a)}[\omega_l, \omega_k] - \\ - (X_0 \tilde{Z} \omega_l, X_0 \tilde{Z} \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_k] + \lambda(Q_0 \omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)} \delta_{lk}, \quad l, k = i, \dots, i + k_q - 1, \end{aligned} \quad (1.91)$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{H}^{(a)}[\omega_l, \omega_k] &= \sum_{r'=1}^n c_{lr'}^{(1)} (\lambda_{r'}^{(4)} - \lambda_q^{\circ,(4)}) c_{r'k}^{(1)} = \\ = c^2 \sum_{\substack{r' \in \{1, \dots, n\} \\ r' \neq i, \dots, i+k_q-1}} \left((X_0 \tilde{Z} \omega_l, X_0 Z \omega_{r'})_{\mathfrak{H}_*} + (X_0 Z \omega_l, X_0 \tilde{Z} \omega_{r'})_{\mathfrak{H}_*} - (Y_1 \omega_l, Y_2 \omega_{r'})_{\tilde{\mathfrak{H}}} - (Y_2 \omega_l, Y_1 \omega_{r'})_{\tilde{\mathfrak{H}}} \right) \times \\ \times \frac{(X_0 \tilde{Z} \omega_{r'}, X_0 Z \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0 Z \omega_{r'}, X_0 \tilde{Z} \omega_k)_{\mathfrak{H}_*} - (Y_1 \omega_{r'}, Y_2 \omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}} - (Y_2 \omega_{r'}, Y_1 \omega_k)_{\tilde{\mathfrak{H}}}}{\lambda_q^{\circ,(4)} - \lambda_{r'}^{(4)}} = \\ = \sum_{\substack{q' \in \{1, \dots, p\} \\ q' \neq q}} \frac{c^2}{\lambda_q^{\circ,(4)} - \lambda_{q'}^{\circ,(4)}} \left(P_{q'} \left((X_0 Z)^* X_0 \tilde{Z} + (X_0 \tilde{Z})^* X_0 Z - Y_2^* Y_1 - Y_1^* Y_2 \right) \omega_l, \right. \\ \left. \left((X_0 Z)^* X_0 \tilde{Z} + (X_0 \tilde{Z})^* X_0 Z - Y_2^* Y_1 - Y_1^* Y_2 \right) \omega_k \right)_{\mathfrak{H}}. \end{aligned}$$

Отметим, что форма $\check{\eta}^{(q)}$ не зависит от c в силу замечания 1.4.3.

Пусть $\lambda_{q',q}^{0,(5)}$ — $k_{q',q}$ -кратное собственное число задачи (1.82): $\lambda_j^{(5)} = \dots = \lambda_{j+k_{q',q}-1}^{(5)}$, где $j = j(q',q) = i(q) + k_{1,q} + \dots + k_{q'-1,q}$. Равенства (1.91) с $l, k = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$ образуют следующую систему:

$$c^3(N_{11}\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} + \check{\eta}^{(q)}[\omega_l, \omega_k] - (X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0\tilde{Z}\omega_k)_{\mathfrak{H}_*} + \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_k] + \lambda(Q_0\omega_l, \omega_k)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)}\delta_{lk},$$

$$l, k = j, \dots, j + k_{q',q} - 1.$$

Эти уравнения можно трактовать как задачу на собственные числа:

$$\mathcal{Y}^{(q',q)}(c)\omega_l = \lambda_l^{(6)}\omega_l, \quad l = j, \dots, j + k_{q',q} - 1, \quad (1.92)$$

для самосопряжённого оператора

$$\mathcal{Y}^{(q',q)}(c) = c^3 P_{q',q} N_{11}|_{\mathfrak{N}_{q',q}} + \Upsilon^{(q',q)},$$

где $\Upsilon^{(q',q)} = P_{q',q} \check{Y}^{(q)}|_{\mathfrak{N}_{q',q}} + P_{q',q} \left(-(X_0\tilde{Z})^* X_0\tilde{Z} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}} \right)|_{\mathfrak{N}_{q',q}}$, а $\check{Y}^{(q)}$ — оператор, отвечающий форме $\check{\eta}^{(q)}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.4.4. Векторы ω_l , $l = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, вообще говоря, зависят от c . Если при каком-то значении параметра c у задачи (1.92) имеется кратное собственное значение, то (1.92) недостаточно для определения базиса в соответствующем собственном подпространстве.

Выпишем получившееся выражение для $\lambda_l^{(6)}$:

$$c^3(N_{11}\omega_l, \omega_l)_{\mathfrak{H}} + \check{\eta}^{(q)}[\omega_l, \omega_l] - (X_0\tilde{Z}\omega_l, X_0\tilde{Z}\omega_l)_{\mathfrak{H}_*} + \mathfrak{q}[\omega_l, \omega_l] + \lambda(Q_0\omega_l, \omega_l)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{(6)},$$

$$l = 1, \dots, n. \quad (1.93)$$

Здесь q — номер, такой что $\lambda_q^{0,(4)} = \lambda_l^{(4)}$.

Проведём аналогичные рассуждения для оператора $L(\varkappa)$, который получается из (1.28) при $t = c\varkappa^2$, $\varepsilon = \varkappa^3$:

$$L(\varkappa) = c^2 \varkappa^4 S - c\varkappa^5 \left((X_0 Z)^*(X_0 \tilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + (X_0 \tilde{Z})^*(X_0 Z)|_{\mathfrak{N}} \right) +$$

$$+ c\varkappa^5 P(Y_2^* Y_1 + Y_1^* Y_2)|_{\mathfrak{N}} + \varkappa^6 \left(-(X_0 \tilde{Z})^*(X_0 \tilde{Z})|_{\mathfrak{N}} + Q_{\mathfrak{N}} + \lambda Q_{0\mathfrak{N}} \right).$$

Согласно общей аналитической теории возмущений при $|\varkappa| \leq \varkappa_0$ существуют вещественно-аналитические функции $\lambda_l^0(\varkappa)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{H}$ -значные функции $\varphi_l^0(\varkappa)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$L(\varkappa)\varphi_l^0(\varkappa) = \lambda_l^0(\varkappa)\varphi_l^0(\varkappa), \quad |\varkappa| \leq \varkappa_0, \quad l = 1, \dots, n,$$

причём $\varphi_l^0(\varkappa)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Для достаточно малого $\varkappa_* \leq \varkappa_0$ справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\lambda_l^0(\varkappa) = \lambda_l^{0,(4)}\varkappa^4 + \lambda_l^{0,(5)}\varkappa^5 + \lambda_l^{0,(6)}\varkappa^6 + \dots, \quad |\varkappa| \leq \varkappa_*, \quad (1.94)$$

$$\varphi_l^0(\varkappa) = \omega_l^0 + \varkappa\varphi_l^{0,(1)} + \varkappa^2\varphi_l^{0,(2)} + \varkappa^3\varphi_l^{0,(3)} + \varkappa^4\varphi_l^{0,(4)} + \varkappa^5\varphi_l^{0,(5)} + \dots, \quad |\varkappa| \leq \varkappa_*. \quad (1.95)$$

Векторы ω_l^0 , $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Можно записать

$$\varphi_l^{0,(r)} = \sum_{k=1}^n c_{lk}^{0,(r)} \omega_k^0, \quad l = 1, \dots, n.$$

Аналоги уравнений (1.74), (1.78), (1.87) для $L(\mathcal{K})$ выглядят следующим образом:

$$\mathcal{K}^4: \quad c^2(S\omega_l^0, \zeta)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{0,(4)}(\omega_l^0, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}, \quad (1.96)$$

$$\mathcal{K}^5: \quad c^2(S\varphi_l^{0,(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}} - c((X_0\tilde{Z}\omega_l^0, X_0Z\zeta)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0Z\omega_l^0, X_0\tilde{Z}\zeta)_{\mathfrak{H}_*}) + \\ + c((Y_1\omega_l^0, Y_2\zeta)_{\mathfrak{H}} + (Y_2\omega_l^0, Y_1\zeta)_{\mathfrak{H}}) = \lambda_l^{0,(5)}(\omega_l^0, \zeta)_{\mathfrak{H}} + \lambda_l^{0,(4)}(\varphi_l^{0,(1)}, \zeta)_{\mathfrak{H}}, \quad \zeta \in \mathfrak{N}, \quad (1.97)$$

$$\mathcal{K}^6: \quad c^2(S\omega_l^0, \varphi_k^{0,(2)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{0,(1)}, \varphi_k^{0,(1)})_{\mathfrak{H}} + c^2(S\varphi_l^{0,(2)}, \omega_k^0)_{\mathfrak{H}} - \\ - c((X_0\tilde{Z}\varphi_l^{0,(1)}, X_0Z\omega_k^0)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0\tilde{Z}\omega_l^0, X_0Z\varphi_k^{0,(1)})_{\mathfrak{H}_*} + \\ + (X_0Z\varphi_l^{0,(1)}, X_0\tilde{Z}\omega_k^0)_{\mathfrak{H}_*} + (X_0Z\omega_l^0, X_0\tilde{Z}\varphi_k^{0,(1)})_{\mathfrak{H}_*}) - (X_0\tilde{Z}\omega_l^0, X_0\tilde{Z}\omega_k^0)_{\mathfrak{H}_*} + \\ + c((Y_1\omega_l^0, Y_2\varphi_k^{0,(1)})_{\mathfrak{H}} + (Y_1\varphi_l^{0,(1)}, Y_2\omega_k^0)_{\mathfrak{H}} + (Y_2\omega_l^0, Y_1\varphi_k^{0,(1)})_{\mathfrak{H}} + (Y_2\varphi_l^{0,(1)}, Y_1\omega_k^0)_{\mathfrak{H}}) + \\ + \mathfrak{q}[\omega_l^0, \omega_k^0] + \lambda(Q_0\omega_l^0, \omega_k^0)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{0,(6)}\delta_{lk}.$$

Равенства (1.96), (1.97) совпадают с (1.74), (1.78), поэтому аналоги уравнений (1.75) и (1.82) для $L(\mathcal{K})$ выглядят также и мы можем выбрать $\lambda_l^{0,(4)} = \lambda_l^{(4)}$, $\lambda_l^{0,(5)} = \lambda_l^{(5)}$, $l = 1, \dots, n$. Если $\lambda_l^{(4)}$ — простое собственное число задачи (1.75), то можно положить $\omega_l^0 = \omega_l$. Далее, если среди собственных чисел задачи (1.75) есть собственное число $\lambda_q^{0,(4)}$ кратности $k_q > 1$, но $\lambda_l^{(5)}$ — простое собственное значение задачи (1.82), тогда мы также можем выбрать $\omega_l^0 = \omega_l$. Но, если среди собственных чисел задачи (1.82) есть $k_{q',q}$ -кратное ($k_{q',q} > 1$) собственное число $\lambda_{q',q}^{0,(5)}$, то в общем случае нельзя положить $\omega_l^0 = \omega_l$, $l = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, где $j = j(q', q) = i(q) + k_{1,q} + \dots + k_{q'-1,q}$. Аналог уравнения (1.92) для $L(\mathcal{K})$ выглядит следующим образом:

$$\Upsilon^{(q',q)}\omega_l^0 = \lambda_l^{0,(6)}\omega_l^0, \quad l = j, \dots, j + k_{q',q} - 1. \quad (1.98)$$

Отметим также, что если у задачи (1.98) имеется кратное собственное значение, то (1.98) недостаточно для определения базиса в соответствующем собственном подпространстве.

В заключение выпишем выражение для $\lambda_l^{0,(6)}$:

$$\mathfrak{H}^{(q)}[\omega_l^0, \omega_l^0] - (X_0\tilde{Z}\omega_l^0, X_0\tilde{Z}\omega_l^0)_{\mathfrak{H}_*} + \mathfrak{q}[\omega_l^0, \omega_l^0] + \lambda(Q_0\omega_l^0, \omega_l^0)_{\mathfrak{H}} = \lambda_l^{0,(6)}, \quad l = 1, \dots, n, \quad (1.99)$$

где q — номер, такой что $\lambda_q^{0,(4)} = \lambda_l^{(4)}$.

1.4.2 Теорема о подтверждении точности

Сейчас мы докажем, что результат теоремы 1.3.1 является точным.

ТЕОРЕМА 1.4.1. Пусть $P_{q',q}N_{11}P_{q',q} \neq 0$ для некоторых $q \in \{1, \dots, p\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leq r < 3$. Тогда не существует такой константы $C(s) > 0$, чтобы оценка

$$\|e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t;\varepsilon)}P - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t;\varepsilon)P}\| \varepsilon^r (t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq C(s)\varepsilon \quad (1.100)$$

выполнялась для всех достаточно малых $|t|$ и ε .

Доказательство. Достаточно считать, что $2 \leq r < 3$. Начнём с предварительного замечания. Поскольку $F(t, \varepsilon)^\perp P = (P - F(t, \varepsilon))P$, то из (1.29) вытекает оценка

$$\|e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t;\varepsilon)}F(t, \varepsilon)^\perp P\| \varepsilon(t^2 + \varepsilon^2)^{-1/2} \leq C_1\varepsilon, \quad |\tau| \leq \tau^0. \quad (1.101)$$

Фиксируем $0 \neq s \in \mathbb{R}$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что для некоторого $2 \leq r < 3$ существует такая постоянная $C(s) > 0$, что выполнено (1.100) при всех достаточно малых $|t|$ и ε . В силу оценки (1.101) это предположение равносильно существованию постоянной $\tilde{C}(s)$, такой что

$$\left\| \left(e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t;\varepsilon)}F(t, \varepsilon) - e^{-is\varepsilon^{-2}L(t;\varepsilon)P}P \right) P \right\| \varepsilon^r(t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \tilde{C}(s)\varepsilon \quad (1.102)$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε . Положим $t = c\varepsilon^{2/3}$, где константу $c > 0$ выберем позже.

При $|\varkappa| < \varkappa_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения (1.64), (1.65), (1.94), (1.95). При $|\varkappa| \leq \varkappa_0$ имеем:

$$e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(\varkappa)}F(\varkappa) = \sum_{k=1}^n e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_k(\varkappa)}(\cdot, \varphi_k(\varkappa))\varphi_k(\varkappa), \quad (1.103)$$

$$e^{-is\varepsilon^{-2}L(\varkappa)P}P = \sum_{k=1}^n e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_k^0(\varkappa)}(\cdot, \varphi_k^0(\varkappa))\varphi_k^0(\varkappa). \quad (1.104)$$

Из сходимости рядов (1.65), (1.95) следует, что

$$\|\varphi_k(\varkappa) - \omega_k\| \leq c_1|\varkappa|, \quad |\varkappa| \leq \varkappa_*, \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.105)$$

$$\|\varphi_k^0(\varkappa) - \omega_k^0\| \leq c_1|\varkappa|, \quad |\varkappa| \leq \varkappa_*, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.106)$$

В силу (1.102)–(1.106) существует постоянная $\widehat{C}(s)$, такая что

$$\left\| \sum_{j'=1}^n \left(e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}(\varkappa)}(\cdot, \omega_{j'})\omega_{j'} - e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}^0(\varkappa)}(\cdot, \omega_{j'}^0)\omega_{j'}^0 \right) \right\| \varepsilon^r(t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \widehat{C}(s)\varepsilon, \quad (1.107)$$

$$t = c\varepsilon^{2/3} = c\varkappa^2,$$

при всех достаточно малых $\varkappa$. Рассмотрим блок оператора под знаком нормы в (1.107) в подпространстве $\mathfrak{N}_{q',q}$. Справедлива оценка

$$\left\| \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \left(e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}(\varkappa)}(\cdot, \omega_{j'})\omega_{j'} - e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}^0(\varkappa)}(\cdot, \omega_{j'}^0)\omega_{j'}^0 \right) \right\| \varepsilon^r(t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \widehat{C}(s)\varepsilon, \quad (1.108)$$

$$t = c\varepsilon^{2/3} = c\varkappa^2,$$

при всех достаточно малых $\varkappa$, где $j = k_1 + \dots + k_{q-1} + k_{1,q} + \dots + k_{q'-1,q} + 1$. Используя сходящиеся степенные ряды (1.64) и (1.94), мы можем записать

$$e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}(\varkappa)} = e^{-is(\varkappa^{-2}\lambda_q^{\circ,(4)} + \varkappa^{-1}\lambda_{q',q}^{\circ,(5)})} e^{-is(\lambda_{j'}^{(6)} + O(\varkappa))}, \quad j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1, \quad (1.109)$$

$$e^{-is\varepsilon^{-2}\lambda_{j'}^0(\varkappa)} = e^{-is(\varkappa^{-2}\lambda_q^{\circ,(4)} + \varkappa^{-1}\lambda_{q',q}^{\circ,(5)})} e^{-is(\lambda_{j'}^{0,(6)} + O(\varkappa))}, \quad j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1. \quad (1.110)$$

Очевидно,

$$\left| e^{-is(\lambda_{j'}^{(6)} + O(\varkappa))} - e^{-is\lambda_{j'}^{(6)}} \right| = O(\varkappa), \quad \left| e^{-is(\lambda_{j'}^{0,(6)} + O(\varkappa))} - e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}} \right| = O(\varkappa),$$

$$j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1. \quad (1.111)$$

Из (1.108)–(1.111) следует, что справедлива оценка

$$\left\| \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \left(e^{-is\lambda_{j'}^{(6)}}(\cdot, \omega_{j'})\omega_{j'} - e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}}(\cdot, \omega_{j'}^0)\omega_{j'}^0 \right) \right\| \varepsilon^r (t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \widehat{C}(s)\varepsilon,$$

$$t = c\varepsilon^{2/3}, \quad (1.112)$$

при всех достаточно малых $\varepsilon = \varkappa^3$.

Предположим, что $\dim \mathfrak{N}_{q',q} = 1$. Тогда $\omega_j = \omega_j^0$ и из (1.112) следует, что

$$\left| e^{-is\lambda_j^{(6)}} - e^{-is\lambda_j^{0,(6)}} \right| \varepsilon^r (t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \widehat{C}(s)\varepsilon, \quad t = c\varepsilon^{2/3}, \quad (1.113)$$

при всех достаточно малых ε . Левая часть неравенства (1.113) может быть записана как $2 \left| \sin \left(\frac{1}{2}s(\lambda_j^{(6)} - \lambda_j^{0,(6)}) \right) \right| \varepsilon^r (t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2}$. Пользуясь формулами (1.93) и (1.99), получаем равенство $\lambda_j^{(6)} - \lambda_j^{0,(6)} = c^3(N_{11}\omega_j, \omega_j)$. Выберем $c = \pi^{1/3}|s(N_{11}\omega_j, \omega_j)|^{-1/3}$. Тогда

$$2 \left| \sin \left(\frac{1}{2}s(\lambda_j^{(6)} - \lambda_j^{0,(6)}) \right) \right| = 2.$$

Отсюда и из (1.113) следует, что функция $\varepsilon^{r/3-1}(c^2 + \varepsilon^{2/3})^{-r/2}$ равномерно ограничена при малых ε . Но это неверно, если $r < 3$. Мы приходим к противоречию.

Теперь пусть $\dim \mathfrak{N}_{q',q} > 1$. В силу (1.92), (1.98) выражение под знаком нормы допускает инвариантную запись:

$$\sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \left(e^{-is\lambda_{j'}^{(6)}}(\cdot, \omega_{j'})\omega_{j'} - e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}}(\cdot, \omega_{j'}^0)\omega_{j'}^0 \right) = e^{-is(c^3 P_{q',q} N_{11}|_{\mathfrak{N}_{q',q}} + \Upsilon^{(q',q)})} - e^{-is\Upsilon^{(q',q)}}. \quad (1.114)$$

Будем считать, что параметр c большой. Положим $v = c^{-3}$ и рассмотрим операторный пучок $P_{q',q} N_{11}|_{\mathfrak{N}_{q',q}} + v\Upsilon^{(q',q)}$. Согласно общей аналитической теории возмущений при достаточно малом v существуют вещественно-аналитические функции $\widetilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(v)$ (ветви собственных значений) и вещественно-аналитические $\mathfrak{N}_{q',q}$ -значные функции $\widetilde{\omega}_{j'}(v)$ (ветви собственных векторов), такие что

$$P_{q',q}(N_{11} + v\Upsilon^{(q',q)})\widetilde{\omega}_{j'}(v) = \widetilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(v)\widetilde{\omega}_{j'}(v), \quad j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1,$$

причём $\widetilde{\omega}_{j'}(v)$, $j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{q',q}$. Для достаточно малого v_* справедливы сходящиеся степенные разложения:

$$\widetilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(v) = \chi_{j'} + \widetilde{\lambda}_{j'}^{(1,6)}v + \dots, \quad |v| \leq v_*, \quad (1.115)$$

$$\widetilde{\omega}_{j'}(v) = \varpi_{j'} + v\widetilde{\omega}_{j'}^{(1)} + \dots, \quad |v| \leq v_*, \quad (1.116)$$

Здесь $\chi_{j'}$ и $\varpi_{j'}$ — собственные числа и собственные векторы оператора $P_{q',q} N_{11}|_{\mathfrak{N}_{q',q}}$:

$$P_{q',q} N_{11}\varpi_{j'} = \chi_{j'}\varpi_{j'}, \quad j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1. \quad (1.117)$$

Векторы $\varpi_{j'}$, $j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{q',q}$.

Далее, пусть $\tilde{\omega}_{j'}^0$, $j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, — ортонормированные собственные векторы оператора $\Upsilon^{(q',q)}$:

$$\Upsilon^{(q',q)}\tilde{\omega}_{j'}^0 = \lambda_{j'}^{0,(6)}\tilde{\omega}_{j'}^0, \quad j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1.$$

Векторы $\tilde{\omega}_{j'}^0$, $j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{q',q}$. Справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} e^{-is(c^3 P_{q',q} N_{11} |_{\mathfrak{N}_{q',q}} + \Upsilon^{(q',q)})} - e^{-is\Upsilon^{(q',q)}} &= \\ &= \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \left(e^{-is\lambda_{j'}^{(6)}(c)}(\cdot, \tilde{\omega}_{j'}(c^{-3}))\tilde{\omega}_{j'}(c^{-3}) - e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}}(\cdot, \tilde{\omega}_{j'}^0)\tilde{\omega}_{j'}^0 \right), \end{aligned} \quad (1.118)$$

где $\lambda_{j'}^{(6)}(c) = c^3 \tilde{\lambda}_{j'}^{(6)}(c^{-3})$.

По условию $P_{q',q} N_{11} P_{q',q} \neq 0$. Тогда в силу (1.117) найдётся номер l такой, что $\chi_l \neq 0$. Применим оператор (1.118) к элементу $\tilde{\omega}_l(c^{-3})$:

$$\begin{aligned} e^{-is\lambda_l^{(6)}(c)}\tilde{\omega}_l(c^{-3}) - \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}}(\tilde{\omega}_l(c^{-3}), \tilde{\omega}_{j'}^0)\tilde{\omega}_{j'}^0 &= \\ &= \sum_{j'=j}^{j+k_{q',q}-1} \left(e^{-is\lambda_l^{(6)}(c)} - e^{-is\lambda_{j'}^{0,(6)}} \right) (\tilde{\omega}_l(c^{-3}), \tilde{\omega}_{j'}^0)\tilde{\omega}_{j'}^0. \end{aligned} \quad (1.119)$$

Из (1.116) следует оценка

$$\|\tilde{\omega}_{j'}(c^{-3}) - \varpi_{j'}\| = O\left(\frac{1}{c^3}\right), \quad j' = j, \dots, j + k_{q',q} - 1, \quad (1.120)$$

при больших c . Ясно, что найдётся номер k такой, что $(\varpi_l, \tilde{\omega}_k^0) \neq 0$, а значит, в силу (1.120) $(\tilde{\omega}_l(c^{-3}), \tilde{\omega}_k^0) \neq 0$ при достаточно больших c . Очевидно,

$$\left| e^{-is\lambda_l^{(6)}(c)} - e^{-is\lambda_k^{0,(6)}} \right| = 2 \left| \sin\left(\frac{1}{2}s(\lambda_l^{(6)}(c) - \lambda_k^{0,(6)})\right) \right|.$$

Воспользуемся рядами (1.115). Имеем при больших c :

$$\lambda_l^{(6)}(c) - \lambda_k^{0,(6)} = c^3 \chi_l + \tilde{\lambda}_l^{(1,6)} - \lambda_k^{0,(6)} + O\left(\frac{1}{c^3}\right).$$

Выберем c так, чтобы число $s(\lambda_l^{(6)}(c) - \lambda_k^{0,(6)})$ попало в $\frac{\pi}{2}$ -окрестность одной из точек множества $\pi + 2\pi\mathbb{Z}$. Тогда

$$2 \left| \sin\left(\frac{1}{2}s(\lambda_l^{(6)}(c) - \lambda_k^{0,(6)})\right) \right| \geq \sqrt{2}.$$

Таким образом, из (1.112), (1.114), (1.118) и (1.119) следует, что справедлива оценка

$$\left| e^{-is\lambda_l^{(6)}(c)} - e^{-is\lambda_k^{0,(6)}} \right| |(\tilde{\omega}_l(c^{-3}), \tilde{\omega}_k^0)| \varepsilon^r (t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \widehat{C}(s)\varepsilon, \quad t = c\varepsilon^{2/3}, \quad (1.121)$$

при всех достаточно малых ε , причём модули в левой части (1.121) не равны нулю. Поэтому функция $\varepsilon^{r/3-1}(c^2 + \varepsilon^{2/3})^{-r/2}$ равномерно ограничена при малых ε , что неверно, если $r < 3$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

1.5 Пороговые аппроксимации в случае семейства

$$\mathfrak{B}(\tau; \vartheta) = M^* \mathfrak{B}(\tau; \vartheta) M$$

1.5.1 Операторное семейство вида $A(t) = M^* \widehat{A}(t) M$

Наряду с пространством $\mathfrak{H}$ рассмотрим ещё одно сепарабельное гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$. Пусть $\widehat{X}(t) = \widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1: \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}_*$ — семейство операторов того же вида, что и $X(t)$, причём для $\widehat{X}(t)$ выполнены предположения п. 1.1.1. При этом пространство $\widehat{\mathfrak{H}}_*$ остаётся прежним. Пусть $M: \mathfrak{H} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм. Предположим, что

$$M \operatorname{Dom} X_0 = \operatorname{Dom} \widehat{X}_0, \quad X(t) = \widehat{X}(t) M, \quad (1.122)$$

а тогда и $X_0 = \widehat{X}_0 M$, $X_1 = \widehat{X}_1 M$. В $\widehat{\mathfrak{H}}$ введём семейство самосопряжённых операторов $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^* \widehat{X}(t)$. Тогда, очевидно,

$$A(t) = M^* \widehat{A}(t) M.$$

Все объекты, отвечающие семейству $\widehat{A}(t)$, далее помечаются значком “ $\widehat{}$ ”. Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$, $\widehat{n} = n$, $\widehat{\mathfrak{N}}_* = M\mathfrak{N}_*$, $\widehat{n}_* = n_*$, $\widehat{P}_* = P_*$.

В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим положительно определённый оператор

$$\Omega := (MM^*)^{-1}: \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}. \quad (1.123)$$

Пусть $\Omega_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора Ω в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$, т.е.

$$\Omega_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P}\Omega|_{\widehat{\mathfrak{N}}}: \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Очевидно, $\Omega_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [Su2, предложение 1.2], ортопроектор P в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и ортопроектор $\widehat{P}$ в $\widehat{\mathfrak{H}}$ на $\widehat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением

$$P = M^{-1}(\Omega_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1}. \quad (1.124)$$

Пусть $\widehat{S}: \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$, а S — росток семейства $A(t)$. В [BSu1, гл. 1, п. 1.5] установлено следующее тождество:

$$S = PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \quad (1.125)$$

1.5.2 Операторное семейство $\mathfrak{B}(\tau; \vartheta) = M^* \widehat{\mathfrak{B}}(\tau; \vartheta) M$

Пусть $\widehat{Y}(t) = \widehat{Y}_0 + t\widehat{Y}_1: \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}$ — семейство операторов того же вида, что и $Y(t)$, причём для $\widehat{Y}(t)$ выполнены предположения п. 1.1.2. Пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$ при этом остаётся прежним. Положим $Y(t) = \widehat{Y}(t)M$, $M \operatorname{Dom} Y_0 = \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$, а тогда и $Y_0 = \widehat{Y}_0 M$, $Y_1 = \widehat{Y}_1 M$. Поскольку $\operatorname{Dom} \widehat{X}_0 \subset \operatorname{Dom} \widehat{Y}_0$ и выполнено (1.122), то справедливо $\operatorname{Dom} X_0 \subset \operatorname{Dom} Y_0$. В силу наших предположений $\widehat{X}(t)$ и $\widehat{Y}(t)$ удовлетворяют условию 1.1.2 с некоторой константой $\widehat{c}_1$:

$$\|\widehat{Y}(t)u\|_{\widehat{\mathfrak{H}}} \leq \widehat{c}_1 \|\widehat{X}(t)u\|_{\widehat{\mathfrak{H}}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} \widehat{X}_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Тогда для $Y(t)$ условие 1.1.2 выполнено с той же константой $c_1 = \widehat{c}_1$:

$$\|Y(t)u\|_{\mathfrak{H}} \leq c_1 \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}_*}, \quad u \in \operatorname{Dom} X_0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Теперь, пусть $\widehat{Y}_2: \widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widetilde{\mathfrak{H}}$ — оператор, удовлетворяющий требованиям п. 1.1.2. Положим $Y_2 = \widehat{Y}_2 M$, $M \text{Dom } Y_2 = \text{Dom } \widehat{Y}_2$. Поскольку $\text{Dom } \widehat{X}_0 \subset \text{Dom } \widehat{Y}_2$ и выполнено (1.122), то справедливо $\text{Dom } X_0 \subset \text{Dom } Y_2$. Пусть условие сильной подчинённости 1.1.3 для $\widehat{Y}_2$ выполнено с некоторой константой $\widehat{C}(\nu) > 0$. Тогда для Y_2 выполнено

$$\|Y_2 u\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \nu \|X(t)u\|_{\mathfrak{H}^*}^2 + C(\nu) \|u\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad u \in \text{Dom } X_0, \quad t \in \mathbb{R},$$

для любого $\nu > 0$ с константой $C(\nu) = \widehat{C}(\nu) \|M\|^2 > 0$.

Далее, пусть $\widehat{\mathfrak{q}}[u, v]$ — форма, заданная на пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$, для которой выполнено условие 1.1.4 с постоянными $\widehat{\kappa}, \widehat{c}_0, \widehat{c}_2, \widehat{c}_3$. Введём в рассмотрение форму $\mathfrak{q}[u, v] = \widehat{\mathfrak{q}}[Mu, Mv]$, $M \text{Dom } \mathfrak{q} = \text{Dom } \widehat{\mathfrak{q}}$. Условие 1.1.4 для формы $\mathfrak{q}$ выполнено с константами

$$\begin{aligned} c_0 &= \|M\|^2 \widehat{c}_0, & \text{если } \widehat{c}_0 \geq 0, & & c_0 &= \|M^{-1}\|^{-2} \widehat{c}_0, & \text{если } \widehat{c}_0 < 0, \\ \kappa &= \widehat{\kappa}, & c_2 &= \widehat{c}_2, & c_3 &= \|M\|^2 \widehat{c}_3. \end{aligned} \quad (1.126)$$

Постоянную c_4 можно выбрать следующим образом:

$$c_4 = \|M\|^2 \widehat{c}_4, \quad (1.127)$$

где $\widehat{c}_4 = 4\widehat{\kappa}^{-1} \widehat{c}_1^2 \widehat{C}(\nu)$ при $\nu = \widehat{\kappa}^2 (16\widehat{c}_1^2)^{-1}$.

Наконец, если $\widehat{Q}_0$ — ограниченный положительно определённый оператор в $\widehat{\mathfrak{H}}$, то $Q_0 = M^* \widehat{Q}_0 M$ — ограниченный положительно определённый оператор в $\mathfrak{H}$.

Рассмотрим операторные пучки вида

$$\widehat{\mathfrak{B}}(t, \varepsilon) = \widehat{A}(t) + \varepsilon(\widehat{Y}_2^* \widehat{Y}(t) + \widehat{Y}(t)^* \widehat{Y}_2) + \varepsilon^2 \widehat{Q} + \lambda \varepsilon^2 \widehat{Q}_0, \quad (1.128)$$

$$\mathfrak{B}(t, \varepsilon) = A(t) + \varepsilon(Y_2^* Y(t) + Y(t)^* Y_2) + \varepsilon^2 Q + \lambda \varepsilon^2 Q_0. \quad (1.129)$$

Они связаны соотношением

$$\mathfrak{B}(t, \varepsilon) = M^* \widehat{\mathfrak{B}}(t, \varepsilon) M. \quad (1.130)$$

Параметр λ выберем так, чтобы выполнялось условие (1.5) для пучка $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$. В силу (1.126), (1.127) и связи $Q_0 = M^* \widehat{Q}_0 M$, получаем, что условие (1.5) выполнено и для пучка $\widehat{\mathfrak{B}}(t, \varepsilon)$.

Отметим, что для оператора $\widehat{\mathfrak{B}}(t, \varepsilon)$ соотношения (1.6) имеют вид

$$\begin{aligned} \widehat{\beta} &= \lambda \|\widehat{Q}_0^{-1}\|^{-1} - \widehat{c}_0 - \widehat{c}_4, & \text{если } \lambda \geq 0, \\ \widehat{\beta} &= \lambda \|\widehat{Q}_0\| - \widehat{c}_0 - \widehat{c}_4, & \text{если } \lambda < 0 \text{ и } \widehat{c}_0 + \widehat{c}_4 < 0. \end{aligned}$$

Тогда из (1.126), (1.127) вытекает оценка

$$\begin{aligned} \beta &\leq \|M\|^2 \widehat{\beta}, & \text{если } \lambda \geq 0, \\ \beta &\leq \|M^{-1}\|^{-2} \widehat{\beta}, & \text{если } \lambda < 0. \end{aligned}$$

В [M1, лемма 1.7] были установлены следующие равенства:

$$\widehat{X}_0 \widehat{Z} M|_{\mathfrak{N}} = X_0 Z|_{\mathfrak{N}}, \quad \widehat{X}_0 \widetilde{Z} M|_{\mathfrak{N}} = X_0 \widetilde{Z}|_{\mathfrak{N}}. \quad (1.131)$$

Пусть $\widehat{\mathcal{S}}(\vartheta): \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{\mathfrak{B}}(t, \varepsilon)$, а $\mathcal{S}(\vartheta)$ — росток семейства $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$. Из (1.125), (1.131) и равенств $PM^* = PM^* \widehat{P}$, $Y_1 = \widehat{Y}_1 M$, $Y_2 = \widehat{Y}_2 M$, $Q = M^* \widehat{Q} M$, $Q_0 = M^* \widehat{Q}_0 M$ следует следующее тождество:

$$\mathcal{S}(\vartheta) = PM^* \widehat{\mathcal{S}}(\vartheta) M|_{\mathfrak{N}}. \quad (1.132)$$

1.5.3 Операторы $\widehat{Z}_\Omega$ и $\widehat{N}_{11,\Omega}$

Для операторного семейства $\widehat{A}(t)$ введём оператор $\widehat{Z}_\Omega$, действующий в $\widehat{\mathfrak{H}}$ и сопоставляющий элементу $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ решение $\widehat{\phi}_\Omega$ задачи

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\phi}_\Omega + \widehat{X}_1\widehat{\omega}) = 0, \quad \Omega\widehat{\phi}_\Omega \perp \widehat{\mathfrak{N}},$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Как показано в [BSu2, лемма 6.1], оператор Z для семейства $A(t)$ и введённый оператор $\widehat{Z}_\Omega$ связаны соотношением

$$\widehat{Z}_\Omega = MZM^{-1}\widehat{P}.$$

Введём оператор

$$\widehat{N}_{11,\Omega} := \widehat{Z}_\Omega^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_\Omega. \quad (1.133)$$

Согласно [BSu2, лемма 6.2], оператор N_{11} для семейства $A(t)$ и введённый оператор (1.133) связаны соотношением

$$\widehat{N}_{11,\Omega} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_{11}M^{-1}\widehat{P}. \quad (1.134)$$

Справедлива следующая лемма, доказанная в [Su8, лемма 5.1].

ЛЕММА 1.5.1 ([Su8]). *Пусть оператор N_{11} определён в (1.36), а оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}$ определён в (1.133). Тогда условие $N_{11} = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_{11,\Omega} = 0$.*

1.5.4 Аппроксимация окаймлённой операторной экспоненты

В этом пункте мы находим аппроксимацию для операторной экспоненты $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathfrak{B}(t,\varepsilon)}$ семейства вида (1.130) в терминах оператора $\widehat{L}(t,\varepsilon)$, отвечающего семейству (1.128), и изоморфизма M . При этом оказывается удобным окаймить экспоненту подходящими множителями.

Положим

$$M_0 := (\Omega_{\widehat{\mathfrak{H}}})^{-1/2}. \quad (1.135)$$

Следующее утверждение является аналогом предложения 3.1 из [BSu5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.5.1. *Справедливо равенство*

$$Me^{-is\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P}PM^* = M_0e^{-is\tau^2M_0\widehat{\mathfrak{S}}(\vartheta)M_0}M_0\widehat{P}. \quad (1.136)$$

Доказательство. Пусть $\phi \in \mathfrak{H}$. Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} i\frac{d}{ds}U(s) = \tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)U(s), \\ U(0) = PM^*\phi. \end{cases} \quad (1.137)$$

Очевидно, $U(s) = e^{-is\tau^2\mathfrak{S}(\vartheta)P}PM^*\phi$ — решение этой задачи. Используя соотношение (1.132) и принимая во внимание равенство $PM^* = M^{-1}M_0^2\widehat{P}$ (которое следует из (1.124) и (1.135)), получаем, что задача (1.137) эквивалентна следующей задаче:

$$\begin{cases} i\frac{d}{ds}U(s) = \tau^2M^{-1}M_0^2\widehat{\mathfrak{S}}(\vartheta)M_0^2(M^*)^{-1}U(s), \\ U(0) = M^{-1}M_0^2\widehat{P}\phi. \end{cases}$$

Сделаем замену $\widehat{U}(s) = M_0^{-1}MU(s)$. Учитывая (1.123) и (1.135), получаем, что $\widehat{U}(s)$ является решением задачи

$$\begin{cases} i \frac{d}{ds} \widehat{U}(s) = \tau^2 M_0 \widehat{\mathfrak{S}}(\vartheta) M_0 \widehat{U}(s), \\ \widehat{U}(0) = M_0 \widehat{P} \phi. \end{cases}$$

Её решение: $\widehat{U}(s) = e^{-is\tau^2 M_0 \widehat{\mathfrak{S}}(\vartheta) M_0} M_0 \widehat{P} \phi$. Из равенства $M_0 \widehat{U}(s) = MU(s)$ следует (1.136). $\square$

Введём обозначение

$$J(t; \varepsilon; s) = M e^{-is\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} M^{-1} \widehat{P} - M_0 e^{-isM_0 \widehat{L}(t, \varepsilon) M_0} M_0^{-1} \widehat{P}. \quad (1.138)$$

Следующая лемма является аналогом [Su8, лемма 5.3].

ЛЕММА 1.5.2. В предположениях пп. 1.5.1, 1.5.2 справедливы оценки

$$\|J(t; \varepsilon; s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}} \leq \|M\|^2 \|M^{-1}\|^2 \|e^{-is\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} P - e^{-isL(t, \varepsilon) P} P\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}}, \quad (1.139)$$

$$\|e^{-is\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} P - e^{-isL(t, \varepsilon) P} P\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \|M\|^2 \|M^{-1}\|^2 \|J(t; \varepsilon; s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}}. \quad (1.140)$$

Доказательство. С учётом равенства $M_0 = (Q_{\widehat{\mathfrak{H}}})^{-1/2}$ имеем

$$\|J(t; \varepsilon; s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}} = \left\| \left(M e^{-is\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} M^{-1} Q_{\widehat{\mathfrak{H}}}^{-1} \widehat{P} - M_0 e^{-isM_0 \widehat{L}(t, \varepsilon) M_0} M_0 \widehat{P} \right) Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \widehat{P} \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}}.$$

Воспользуемся соотношением $M^{-1} Q_{\widehat{\mathfrak{H}}}^{-1} \widehat{P} = PM^*$ (см. (1.124)), (1.28) и тождеством (1.136). Тогда

$$\|J(t; \varepsilon; s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}} = \left\| \left(M e^{-is\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} PM^* - M e^{-isL(t, \varepsilon) P} PM^* \right) Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \widehat{P} \right\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}}.$$

Отсюда следует, что

$$\|J(t; \varepsilon; s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}} \leq \|M\|^2 \|Q_{\widehat{\mathfrak{H}}} \widehat{P}\| \|e^{-is\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} P - e^{-isL(t, \varepsilon) P} P\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}}.$$

Учитывая, что $\|Q_{\widehat{\mathfrak{H}}}\| \leq \|Q\| = \|M^{-1}\|^2$, приходим к оценке (1.139).

Оценка (1.140) проверяется аналогичными рассуждениями “обратным ходом”. Очевидно,

$$\|e^{-is\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} P - e^{-isL(t, \varepsilon) P} P\|_{\mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}} \leq \|M^{-1}\|^2 \|M e^{-is\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} PM^* - M e^{-isL(t, \varepsilon) P} PM^*\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}}.$$

Учитывая $PM^* = M^{-1} Q_{\widehat{\mathfrak{H}}}^{-1} \widehat{P}$, (1.28) и тождество (1.136), получаем

$$\|M^{-1}\|^2 \|M e^{-is\mathfrak{B}(t, \varepsilon)} PM^* - M e^{-isL(t, \varepsilon) P} PM^*\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}} = \|M^{-1}\|^2 \|J(t; \varepsilon; s) Q_{\widehat{\mathfrak{H}}}^{-1} \widehat{P}\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}}.$$

Отсюда и из неравенства $\|Q_{\widehat{\mathfrak{H}}}^{-1} \widehat{P}\| \leq \|M\|^2$ (которое вытекает из тождества $Q_{\widehat{\mathfrak{H}}}^{-1} \widehat{P} = MPM^*$), получаем (1.140). $\square$

Применяя неравенство (1.139) и принимая во внимание лемму 1.5.1, из теорем 1.3.1, 1.3.2 получаем следующие результаты. Здесь используется обозначение (1.138).

ТЕОРЕМА 1.5.1. В предположениях пп. 1.5.1, 1.5.2 при $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|\tau| \leq \tau^0$ выполнена оценка

$$\|J(t; \varepsilon; \varepsilon^{-2}s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}} \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \leq \|M\|^2 \|M^{-1}\|^2 (2C_1 + C_2 |s|) \varepsilon.$$

Число τ^0 подчинено (1.9), а постоянные C_1, C_2 определены в теореме 1.3.1.

ТЕОРЕМА 1.5.2. Пусть выполнены предположения пп. 1.5.1, 1.5.2 и пусть оператор $\widehat{N}_{11, \Omega}$, определённый в (1.133), равен нулю: $\widehat{N}_{11, \Omega} = 0$. Тогда при $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|\tau| \leq \tau^0$ выполнена оценка

$$\|J(t; \varepsilon; \varepsilon^{-2}s)\|_{\widehat{\mathfrak{H}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{H}}} \varepsilon^2 (t^2 + \varepsilon^2)^{-1} \leq \|M\|^2 \|M^{-1}\|^2 (2C_1 + C_6 |s|) \varepsilon.$$

Число τ^0 подчинено (1.9), а постоянные C_1, C_6 определены в теореме 1.3.2.

1.5.5 Подтверждение точности результата

Укажем связь коэффициентов $\lambda_l^{(4)}$, ω_l , $l = 1, \dots, n$, степенных разложений (1.64), (1.65) при $c = 1$ и операторов $\widehat{S}$ и $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Положим $\zeta_l := M\omega_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1, \dots, n$. Тогда из (1.75) и (1.124), (1.125) видно, что

$$\widehat{S}\zeta_l = \lambda_l^{(4)} \mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \quad l = 1, \dots, n. \quad (1.141)$$

Набор $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ образует базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$, ортонормированный с весом $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$:

$$(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \zeta_k)_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \delta_{lk}, \quad l, k = 1, \dots, n.$$

Перейдём теперь к обозначениям, принятым в замечании 1.4.1. Напомним, что различные собственные значения оператора S обозначаются через $\lambda_q^{\circ, (4)}$, $q = 1, \dots, p$, а соответствующие собственные подпространства через $\mathfrak{N}_q$. Векторы ω_l , $l = i(q), \dots, i(q) + k_q - 1$, где $i(q) = k_1 + \dots + k_{q-1} + 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_q$. Тогда те же числа $\lambda_q^{\circ, (4)}$, $q = 1, \dots, p$, — это различные собственные значения задачи (1.141), а $M\mathfrak{N}_q$ — соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_l = M\omega_l$, $l = i(q), \dots, i(q) + k_q - 1$, образуют базис в $M\mathfrak{N}_q$, ортонормированный с весом $\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}$.

Далее, свяжем собственные числа и собственные векторы задачи (1.82) при $c = 1$ и оператор

$$\widehat{\mathcal{Y}}_M^{(q)} = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q} \left(-(\widehat{X}_0 \widehat{Z})^* \widehat{X}_0 \widehat{Z} - (\widehat{X}_0 \widehat{Z})^* \widehat{X}_0 \widehat{Z} + \widehat{Y}_2^* \widehat{Y}_1 + \widehat{Y}_1^* \widehat{Y}_2 \right) \Big|_{M\mathfrak{N}_q},$$

где $\widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q}$ — ортопроектор на подпространство $M\mathfrak{N}_q$. Из (1.131) и равенств $Y_1 = \widehat{Y}_1 M$, $Y_2 = \widehat{Y}_2 M$ видно, что

$$\widehat{\mathcal{Y}}_M^{(q)} \zeta_l = \lambda_l^{(5)} \mathfrak{Q}_{M\mathfrak{N}_q} \zeta_l, \quad l = i(q), \dots, i(q) + k_q - 1, \quad (1.142)$$

где $\mathfrak{Q}_{M\mathfrak{N}_q} = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q} \mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}} \Big|_{M\mathfrak{N}_q}$.

Перейдём к обозначениям, принятым в замечании 1.4.2. Различные собственные значения оператора $\mathcal{Y}^{(q)}$ обозначаются через $\lambda_{q',q}^{\circ, (5)}$, $q' = 1, \dots, p'(q)$, а соответствующие собственные подпространства через $\mathfrak{N}_{q',q}$. Векторы ω_l , $l = j(q',q), \dots, j(q',q) + k_{q',q} - 1$, где $j(q',q) = k_1 + \dots + k_{q-1} + k_{1,q} + \dots + k_{q'-1,q} + 1$, образуют ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{q',q}$. Тогда те же числа $\lambda_{q',q}^{\circ, (5)}$, $q' = 1, \dots, p'(q)$, — это различные собственные значения задачи (1.142), а $M\mathfrak{N}_{q',q}$ — соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_l = M\omega_l$, $l = j(q',q), \dots, j(q',q) + k_{q',q} - 1$, образуют базис в $M\mathfrak{N}_{q',q}$. Через $\mathcal{P}_{q',q}$ обозначим “косой” проектор на $M\mathfrak{N}_{q',q}$, ортогональный относительно скалярного произведения $(\mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}, \cdot)_{\widehat{\mathfrak{N}}}$, т.е.

$$\mathcal{P}_{q',q} = \sum_{l=j(q',q)}^{j(q',q)+k_{q',q}-1} (\cdot, \mathfrak{Q}_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l)_{\widehat{\mathfrak{N}}} \zeta_l, \quad q = 1, \dots, p, \quad q' = 1, \dots, p'(q).$$

Легко видеть, что

$$\mathcal{P}_{q',q} = M \mathcal{P}_{q',q} M^{-1} \widehat{P}. \quad (1.143)$$

ЛЕММА 1.5.3. Пусть оператор N_{11} определён в (1.36), а оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}$ определён в (1.133). Тогда условие $\mathcal{P}_{q',q} N_{11} \mathcal{P}_{q',q} = 0$ равносильно равенству $\mathcal{P}_{q',q}^* \widehat{N}_{11,\Omega} \mathcal{P}_{q',q} = 0$.

Доказательство. В силу (1.134) условие $\mathcal{P}_{q',q} N_{11} \mathcal{P}_{q',q} = 0$ влечёт $\mathcal{P}_{q',q}^* \widehat{N}_{11,\Omega} \mathcal{P}_{q',q} = 0$. Обратно, пусть $\mathcal{P}_{q',q}^* \widehat{N}_{11,\Omega} \mathcal{P}_{q',q} = 0$. Тогда из (1.134) и (1.143) следует, что

$$\widehat{P} (M^*)^{-1} \mathcal{P}_{q',q} N_{11} \mathcal{P}_{q',q} M^{-1} \widehat{\omega} = 0, \quad \forall \widehat{\omega} \in \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Поскольку M^{-1} — изоморфизм $\widehat{\mathfrak{N}}$ на $\mathfrak{N}$, то $\widehat{P}(M^*)^{-1}P_{q',q}N_{11}P_{q',q}\omega = 0$ при любом $\omega \in \mathfrak{N}$. Домножая последнее равенство скалярно на $\widehat{\eta} \in \widehat{\mathfrak{N}}$, получаем, что

$$(P_{q',q}N_{11}P_{q',q}\omega, M^{-1}\widehat{\eta})_{\mathfrak{S}} = 0, \quad \forall \widehat{\eta} \in \widehat{\mathfrak{N}}.$$

Снова используя свойство $M^{-1}\widehat{\mathfrak{N}} = \mathfrak{N}$, заключаем, что оператор $P_{q',q}N_{11}P_{q',q}$ равен нулю. $\square$

Используя теорему 1.4.1, лемму 1.5.3 и оценку (1.140), мы подтверждаем точность теоремы 1.5.1.

ТЕОРЕМА 1.5.3. Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}$ определён в (1.133). Пусть $\mathcal{P}_{q',q}^*\widehat{N}_{11,\Omega}\mathcal{P}_{q',q} \neq 0$ для некоторых $q \in \{1, \dots, p\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leq r < 3$. Тогда не существует такой константы $C(s) > 0$, чтобы оценка

$$\|J(t; \varepsilon; \varepsilon^{-2}s)\|_{\widehat{\mathfrak{S}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{S}}} \varepsilon^r (t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq C(s)\varepsilon \quad (1.144)$$

выполнялась для всех достаточно малых $|t|$ и ε .

Доказательство. В силу леммы 1.5.3 из условий теоремы следует, что $P_{q',q}N_{11}P_{q',q} \neq 0$. Рассуждаем от противного. Фиксируем $s \neq 0$. Пусть для некоторого $0 \leq r < 3$ существует такая постоянная $C(s) > 0$, что выполнено (1.144) при всех достаточно малых $|t|$ и ε . В силу оценки (1.140) это означает, что выполнено также неравенство вида (1.100) (с другой константой). Но это противоречит утверждению теоремы 1.4.1. $\square$

2 Усреднение периодических дифференциальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

2.1 Предварительные сведения

2.1.1 Решётки Γ и $\widetilde{\Gamma}$

Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, порождённая базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$:

$$\Gamma = \left\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d n^j \mathbf{a}_j, n^j \in \mathbb{Z} \right\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решётки Γ :

$$\Omega := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \xi^j \mathbf{a}_j, 0 < \xi^j < 1 \right\}.$$

Базис $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^d$, двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}^l, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi\delta_j^l$. Этот базис порождает решётку $\widetilde{\Gamma}$, двойственную к решётке Γ :

$$\widetilde{\Gamma} = \left\{ \mathbf{b} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{b} = \sum_{j=1}^d m_j \mathbf{b}^j, m_j \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Обозначим через $\widetilde{\Omega}$ зону Бриллюэна решётки $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega} = \left\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d : |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|, 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma} \right\}. \quad (2.1)$$

Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \text{meas } \Omega$, $|\tilde{\Omega}| = \text{meas } \tilde{\Omega}$ и отметим, что $|\Omega||\tilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Пусть r_0 — радиус шара, *вписанного* в $\text{clos } \tilde{\Omega}$. Отметим, что

$$2r_0 = \min |\mathbf{b}|, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}. \quad (2.2)$$

С решёткой Γ связано дискретное преобразование Фурье

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}} e^{i(\mathbf{b}, \mathbf{x})}, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (2.3)$$

которое унитарно отображает $l_2(\tilde{\Gamma}; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$:

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 = \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2. \quad (2.4)$$

Через $\tilde{H}^\sigma(\Omega; \mathbb{C}^n)$ обозначается подпространство тех функций из $H^\sigma(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ -периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H_{\text{loc}}^\sigma(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Имеет место равенство

$$\int_{\Omega} |(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2, \quad \mathbf{u} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \quad (2.5)$$

причём сходимость ряда в правой части (2.5) равносильна включению $\mathbf{u} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Из (2.1), (2.4) и (2.5) следует оценка

$$\int_{\Omega} |(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \geq \sum_{\mathbf{b} \in \tilde{\Gamma}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2 = |\mathbf{k}|^2 \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}. \quad (2.6)$$

2.1.2 Преобразование Гельфанда

Преобразование Гельфанда $\mathcal{U}$ первоначально определяется на функциях из класса Шварца $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ формулой:

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = (\mathcal{U} \mathbf{v})(\mathbf{k}, \mathbf{x}) = |\tilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a} \in \Gamma} e^{-i(\mathbf{k}, \mathbf{x} + \mathbf{a})} \mathbf{v}(\mathbf{x} + \mathbf{a}), \quad \mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}.$$

При этом

$$\int_{\tilde{\Omega}} \int_{\Omega} |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^d} |\mathbf{v}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$$

и $\mathcal{U}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathcal{U} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow \int_{\tilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n) d\mathbf{k} =: \mathcal{K}.$$

Включение $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ при п.в. $\mathbf{k} \in \tilde{\Omega}$ и

$$\int_{\tilde{\Omega}} \int_{\Omega} (|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2 + |\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \mathbf{x})|^2) d\mathbf{x} d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ под действием $\mathcal{U}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$. Действие оператора $b(\mathbf{D})$ на $\mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ переходит в послойное действие оператора $b(\mathbf{D} + \mathbf{k})$ на $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$.

2.2 Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

2.2.1 Факторизованные операторы $\mathcal{A}$ второго порядка

Пусть $b(\mathbf{D}): L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$ — однородный дифференциальный оператор первого порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что $m \geq n$. Символ $b(\boldsymbol{\xi})$ — $(m \times n)$ -матричнозначная линейная однородная функция от $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$.

Предположим, что $\text{rank } b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Это равносильно тому, что для некоторых $\alpha_0, \alpha_1 > 0$ выполнены неравенства:

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leq b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leq \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leq \alpha_1 < \infty. \quad (2.7)$$

Пусть $f(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, — Γ -периодическая $(n \times n)$ -матричнозначная функция и $h(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, — Γ -периодическая $(m \times m)$ -матричнозначная функция, такие что

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h, h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \quad (2.8)$$

Рассмотрим ДО

$$\mathcal{X} = hb(\mathbf{D})f: L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m), \quad \text{Dom } \mathcal{X} = \{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n): f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)\}.$$

Оператор $\mathcal{X}$ замкнут. Самосопряжённый оператор $\mathcal{A} = \mathcal{X}^* \mathcal{X}$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2$, $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}$. Формально,

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}),$$

где $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x})$. Используя преобразование Фурье и (2.7), (2.8), можно показать

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \mathbf{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \quad (2.9)$$

2.2.2 Операторы $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Y}_2$

Рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{Y}: L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$, действующий по формуле

$$\mathcal{Y}\mathbf{u} = \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \{D_1(f\mathbf{u}), \dots, D_d(f\mathbf{u})\}^T.$$

Нижняя оценка (2.9) означает, что

$$\|\mathcal{Y}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq c_1 \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}, \quad (2.10)$$

где

$$c_1 = \alpha_0^{-1/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}. \quad (2.11)$$

Пусть в $\mathbb{R}^d$ заданы Γ -периодические $(n \times n)$ -матричнозначные функции $a_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, d$, такие, что

$$a_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geq 2; \quad j = 1, \dots, d. \quad (2.12)$$

Рассмотрим оператор $\mathcal{Y}_2: L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^{dn})$, действующий как умножение на $(dn \times n)$ -матричнозначную функцию, составленную из матриц a_j^* , $j = 1, \dots, d$. Иначе говоря,

$$\mathcal{Y}_2\mathbf{u} = \{a_1^* f\mathbf{u}, \dots, a_d^* f\mathbf{u}\}^T, \quad \text{Dom } \mathcal{Y}_2 = \text{Dom } \mathcal{X}.$$

Формально можно записать

$$(\mathcal{Y}_2^* \mathcal{Y} + \mathcal{Y}^* \mathcal{Y}_2) \mathbf{u} = \sum_{j=1}^d (f^* a_j D_j(f \mathbf{u}) + f^* D_j(a_j^* f \mathbf{u})).$$

Используя неравенство Гёльдера, (2.9), (2.12), компактность вложения $H^1(\Omega) \hookrightarrow L_p(\Omega)$ при $p = 2\rho/(\rho - 2)$, можно показать (см. [Su4, п. 5.2]), что для любого $\nu > 0$ существует постоянная $C(\nu) > 0$ такая, что

$$\|\mathcal{Y}_2 \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \nu \|\mathcal{X} \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + C(\nu) \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \quad (2.13)$$

При фиксированном ν постоянная $C(\nu)$ зависит лишь от норм $\|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}$, $j = 1, \dots, d$, от $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, α_0 , d , ρ и от параметров решётки Γ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2.1. Отметим, что если $a_j \in L_\infty$, $j = 1, \dots, d$, то (2.13) выполнено при $\nu = 0$, $C(0) = \sum_{j=1}^d \|a_j\|_{L_\infty}^2 \|f\|_{L_\infty}^2$.

2.2.3 Форма $q[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$

Пусть в $\mathbb{R}^d$ задана Γ -периодическая борелевская σ -конечная мера $d\mu(\mathbf{x}) = \{d\mu_{jl}(\mathbf{x})\}$, $j, l = 1, \dots, n$, со значениями в классе эрмитовых $(n \times n)$ -матриц. Предположим, что мера $d\mu$ такова, что функция $|u(\mathbf{x})|^2$ суммируема по каждой мере $d\mu_{jl}$ для любой функции $u \in H^1(\mathbb{R}^d)$.

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$q[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n).$$

На меру $d\mu$ накладывается следующее условие:

УСЛОВИЕ 2.2.1. Для любых $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^n)$ существуют постоянные $\hat{c}_0 \in \mathbb{R}$, $\tilde{c}_2 \geq 0$, $\hat{c}_3 \geq 0$, $0 \leq \tilde{c} < \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}$, такие что справедливы оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle \right| &\leq (\tilde{c}_2 \|\mathbf{D} \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \hat{c}_3 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/2} (\tilde{c}_2 \|\mathbf{D} \mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2 + \hat{c}_3 \|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/2}, \\ \int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &\geq -\tilde{c} \|\mathbf{D} \mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2 - \hat{c}_0 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\Omega, \mathbb{C}^n). \end{aligned}$$

Из условия 2.2.1 вытекают оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) f \mathbf{u}, f \mathbf{v} \rangle \right| &\leq (\tilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f \mathbf{u})\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_3 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/2} (\tilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f \mathbf{v})\|_{L_2(\Omega)}^2 + c_3 \|\mathbf{v}\|_{L_2(\Omega)}^2)^{1/2}, \\ \int_{\Omega} \langle d\mu(\mathbf{x}) f \mathbf{u}, f \mathbf{u} \rangle &\geq -\tilde{c} \|\mathbf{D}(f \mathbf{u})\|_{L_2(\Omega)}^2 - c_0 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Dom } \mathcal{X} \end{aligned} \quad (2.14)$$

с постоянными $c_0 = \hat{c}_0 \|f\|_{L_\infty}^2$, если $\hat{c}_0 \geq 0$, $c_0 = \hat{c}_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2}$, если $\hat{c}_0 < 0$; $c_3 = \hat{c}_3 \|f\|_{L_\infty}^2$. Запишем неравенства (2.14) по сдвинутым ячейкам $\Omega + \mathbf{a}$, $\mathbf{a} \in \Gamma$, и просуммируем. Тогда получаем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu(\mathbf{x}) f \mathbf{u}, f \mathbf{v} \rangle \right| &\leq \left(\tilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f \mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + c_3 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2} \left(\tilde{c}_2 \|\mathbf{D}(f \mathbf{v})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + c_3 \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2}, \\ \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu(\mathbf{x}) f \mathbf{u}, f \mathbf{u} \rangle &\geq -\tilde{c} \|\mathbf{D}(f \mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - c_0 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \end{aligned}$$

С учётом (2.9) отсюда вытекают оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{v} \rangle \right| &\leq \left(c_2 \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + c_3 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2} \left(c_2 \|\mathcal{X}\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + c_3 \|\mathbf{v}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \right)^{1/2}, \\ \int_{\mathbb{R}^d} \langle d\mu(\mathbf{x}) f\mathbf{u}, f\mathbf{u} \rangle &\geq -(1 - \kappa) \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 - c_0 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Dom } \mathcal{X}, \end{aligned} \quad (2.15)$$

где

$$c_2 = \tilde{c}_2 \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad \kappa = 1 - \tilde{c} \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \quad 0 < \kappa \leq 1. \quad (2.16)$$

Примеры форм, заведомо удовлетворяющих условию 2.2.1, приведены в [Su4, п. 5.5]. Приведём один пример.

ПРИМЕР 2.2.1. Предположим, что мера $d\mu$ абсолютно непрерывна относительно меры Лебега, т.е. $d\mu(\mathbf{x}) = \mathcal{Q}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$, где $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая эрмитова $(n \times n)$ -матричнозначная функция в $\mathbb{R}^d$ такая, что

$$\mathcal{Q} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > \frac{d}{2} \text{ при } d \geq 2. \quad (2.17)$$

Тогда $q[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_{\mathbb{R}^d} \langle \mathcal{Q}(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle d\mathbf{x}$, $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При условии (2.17) в силу теорем вложения для любого $\nu > 0$ существует положительная постоянная $C_{\mathcal{Q}}(\nu)$ такая, что

$$\int_{\Omega} |\mathcal{Q}(\mathbf{x})| |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} \leq \nu \int_{\Omega} |\mathbf{D}\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x} + C_{\mathcal{Q}}(\nu) \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\mathbf{x}, \quad \mathbf{u} \in H^1(\Omega; \mathbb{C}^n).$$

Отсюда следует, что условие 2.2.1 выполнено, причём постоянные можно выбирать следующим образом: $\tilde{c}_2 = 1$, $c_3 = C_{\mathcal{Q}}(1)$, $\tilde{c} = \nu$ и $c_0 = C_{\mathcal{Q}}(\nu)$ при $2\nu = \alpha_0 \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1}$. Тогда неравенства (2.15) выполнены при $\kappa = 1/2$, $c_2 = \alpha_0^{-1} \|g^{-1}\|_{L_\infty}$. Постоянная c_3 контролируется через d , s , норму $\|\mathcal{Q}\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решётки, а c_0 — через d , s , α_0 , $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|\mathcal{Q}\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решётки.

2.2.4 Операторный пучок $\mathcal{B}(\varepsilon)$

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим квадратичную форму

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\varepsilon \text{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2 q[f\mathbf{u}, f\mathbf{u}] + \varepsilon^2 \lambda(\mathcal{Q}_0 f\mathbf{u}, f\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}, \quad (2.18)$$

где $0 \leq \varepsilon \leq 1$, а $\mathcal{Q}_0$ — оператор в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, действующий как умножение на $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ -периодическую положительно-определённую и ограниченную $(n \times n)$ -матричнозначную функцию. Ограничение на λ наложим позже.

Оценим форму (2.18) снизу. В силу (2.10)

$$\begin{aligned} 2\varepsilon |\text{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| &\leq 2c_1 \varepsilon \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\leq \frac{\kappa}{4} \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + \frac{4c_1^2}{\kappa} \varepsilon^2 \|\mathcal{Y}_2\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Положим

$$c_4 = 4\kappa^{-1} c_1^2 C(\nu) \text{ при } \nu = \kappa^2 (16c_1^2)^{-1}. \quad (2.20)$$

Тогда из (2.13), (2.19), (2.20) следует, что

$$2\varepsilon |\text{Re}(\mathcal{Y}\mathbf{u}, \mathcal{Y}_2\mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)}| \leq \frac{\kappa}{2} \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + c_4 \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \quad (2.21)$$

Чтобы форма (2.18) была положительной, наложим на λ следующее ограничение:

$$\begin{aligned} \lambda &> \|(f^* \mathcal{Q}_0 f)^{-1}\|_{L_\infty} (c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda \geq 0, \\ \lambda &> \|f^* \mathcal{Q}_0 f\|_{L_\infty}^{-1} (c_0 + c_4), \quad \text{если } \lambda < 0 \text{ и } c_0 + c_4 < 0, \end{aligned} \quad (2.22)$$

которое обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda(\mathcal{Q}_0 f \mathbf{u}, f \mathbf{u})_{L_2(\mathbb{R}^d)} \geq (c_0 + c_4 + \beta) \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \quad (2.23)$$

где $\beta > 0$ определено по числу λ следующим образом:

$$\begin{aligned} \beta &= \lambda \|(f^* \mathcal{Q}_0 f)^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda \geq 0, \\ \beta &= \lambda \|f^* \mathcal{Q}_0 f\|_{L_\infty} - c_0 - c_4, \quad \text{если } \lambda < 0 \text{ и } c_0 + c_4 < 0. \end{aligned}$$

Теперь из нижней оценки (2.15), (2.21) и (2.23) с учётом $0 \leq \varepsilon \leq 1$ вытекает оценка

$$\mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq \frac{\kappa}{2} \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + \beta \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \quad (2.24)$$

Далее, из (2.9), (2.10), (2.13) (при $\nu = 1$) и верхней оценки (2.15) следует верхняя оценка для квадратичной формы (2.18):

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &\leq (2 + c_1^2 + c_2) \mathfrak{a}[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + (C(1) + c_3 + |\lambda| \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}^2) \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 \leq \\ &\leq (2 + c_1^2 + c_2) \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f \mathbf{u})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 + (C(1) + c_3 + |\lambda| \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}^2) \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2, \\ &\quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Оценки (2.24), (2.25) показывают, что форма (2.18) замкнута и положительно определена. Через $\mathfrak{B}(\varepsilon)$ обозначим оператор в пространстве $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ порождённый этой формой. Формально можно записать

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(\varepsilon) &= \mathcal{A} + \varepsilon(\mathcal{Y}_2^* \mathcal{Y} + \mathcal{Y}^* \mathcal{Y}_2) + \varepsilon^2 f^* \mathcal{Q} f + \varepsilon^2 \lambda f^* \mathcal{Q}_0 f = \\ &= f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d f(\mathbf{x})^* (a_j(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j(\mathbf{x})^*) f(\mathbf{x}) + \\ &\quad + \varepsilon^2 f(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \lambda f(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (2.26)$$

где $\mathcal{Q}(\mathbf{x})$ следует интерпретировать как обобщённый матричный потенциал, порождённый мерой $d\mu(\mathbf{x})$.

Для удобства дальнейших ссылок будем называть “исходными данными” следующие величины:

$$\begin{aligned} &d, m, n, \rho; \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|f\|_{L_\infty}, \|f^{-1}\|_{L_\infty}, \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}, j = 1, \dots, d; \\ &\tilde{c}, \hat{c}_0, \tilde{c}_2, \hat{c}_3 \text{ из условия 2.2.1;} \\ &\lambda, \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty}, \|\mathcal{Q}_0^{-1}\|_{L_\infty}; \text{ параметры решётки } \Gamma. \end{aligned} \quad (2.27)$$

2.2.5 Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$

Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m), \quad \tilde{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^{dn}) \quad (2.28)$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k}): \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}_*$, $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$, заданный соотношениями

$$\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D} + \mathbf{k})f, \quad \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \left\{ \mathbf{u} \in \mathfrak{H}: f \mathbf{u} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n) \right\}.$$

Самосопряжённый оператор

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{X}(\mathbf{k})^* \mathcal{X}(\mathbf{k}): \mathfrak{H} \rightarrow \mathfrak{H}$$

порождается квадратичной формой

$$\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}^*}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}).$$

Используя разложение функции $\mathbf{u}$ в ряд Фурье (2.3) и условия (2.7), (2.8), легко проверить, что

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|_{L^\infty}^{-1} \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})f\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \leq \alpha_1 \|g\|_{L^\infty} \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})f\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}). \quad (2.29)$$

Из нижней оценки (2.29) и из (2.6) вытекает, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geq c_* |\mathbf{k}|^2 I, \quad \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, \quad c_* = \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L^\infty}^{-2} \|g^{-1}\|_{L^\infty}^{-1}. \quad (2.30)$$

Положим

$$\mathfrak{N} := \text{Ker } \mathcal{A}(0) = \text{Ker } \mathcal{X}(0). \quad (2.31)$$

Соотношения (2.29) при $\mathbf{k} = 0$ показывают, что

$$\mathfrak{N} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n): f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \quad \dim \mathfrak{N} = n. \quad (2.32)$$

Как видно из (2.2) и (2.5) при $\mathbf{k} = 0$ для функции $\mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ такой, что $\int_\Omega \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0$, т.е. $\hat{\mathbf{v}}_0 = 0$, выполнено

$$\|\mathbf{D}\mathbf{v}\|_{\mathfrak{H}}^2 \geq 4r_0^2 \|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \int_\Omega \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0. \quad (2.33)$$

Из (2.33) и из нижней оценки (2.29) при $\mathbf{k} = 0$ следует, что расстояние d^0 от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ подчинено оценке

$$d^0 \geq 4c_* r_0^2. \quad (2.34)$$

2.2.6 Операторы $\mathcal{Y}(\mathbf{k})$ и Y_2

Рассмотрим оператор $\mathcal{Y}(\mathbf{k}): \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$, действующий по формуле

$$\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u} = (\mathbf{D} + \mathbf{k})f\mathbf{u} = \{(D_1 + k_1)f\mathbf{u}, \dots, (D_d + k_d)f\mathbf{u}\}^T, \quad \text{Dom } \mathcal{Y}(\mathbf{k}) = \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}). \quad (2.35)$$

Используя нижнюю оценку (2.29), убеждаемся, что

$$\|\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathfrak{H}}} \leq c_1 \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}^*}, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}), \quad (2.36)$$

где постоянная c_1 определена в (2.11).

Рассмотрим оператор $Y_2: \mathfrak{H} \rightarrow \tilde{\mathfrak{H}}$, действующий по формуле

$$Y_2\mathbf{u} = \{a_1(\mathbf{x})^* f\mathbf{u}, \dots, a_d(\mathbf{x})^* f\mathbf{u}\}^T, \quad \text{Dom } Y_2 = \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}). \quad (2.37)$$

Как показано в [Su4, п. 5.7], для любого $\nu > 0$ существуют постоянные $C_j(\nu) > 0$, $j = 1, \dots, d$, такие, что

$$\|a_j^* \mathbf{v}\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \nu \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{v}\|_{\mathfrak{H}}^2 + C_j(\nu) \|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \quad j = 1, \dots, d.$$

Подставим $\mathbf{v} = f\mathbf{u}$, $\mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k})$, просуммируем по j и, учитывая нижнюю оценку (2.29), получим, что для любого $\nu > 0$ найдётся постоянная $C(\nu) > 0$ (та же, что и в (2.13)) такая, что

$$\|Y_2\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathfrak{H}}}^2 \leq \nu \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}^*}^2 + C(\nu) \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \quad (2.38)$$

2.2.7 Форма $q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{u}]$

В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим полуторалинейную форму

$$q_\Omega[\mathbf{u}, \mathbf{v}] = \int_\Omega \langle d\mu(\mathbf{x})\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \tilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n). \quad (2.39)$$

Заменяя в (2.14) $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и $f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x})$ на $f(\mathbf{x})\mathbf{u}(\mathbf{x}) \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle)$ и $f(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) \exp(i \langle \mathbf{k}, \mathbf{x} \rangle)$ соответственно (эти функции принадлежат $H^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$ одновременно) и используя (2.29), получаем, что выполнены оценки

$$\begin{aligned} |q_\Omega[f\mathbf{u}, f\mathbf{v}]| &\leq (c_2 \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + c_3 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2} (c_2 \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{v}\|_{\mathfrak{H}_*}^2 + c_3 \|\mathbf{v}\|_{\mathfrak{H}}^2)^{1/2}, \\ q_\Omega[f\mathbf{u}, f\mathbf{u}] &\geq -(1 - \kappa) \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}_*}^2 - c_0 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}), \end{aligned} \quad (2.40)$$

где постоянные κ, c_0, c_2, c_3 — те же, что в (2.15).

2.2.8 Операторный пучок $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$

В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим квадратичную форму

$$\mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] = \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + 2\varepsilon \text{Re}(\mathcal{Y}(\mathbf{k})\mathbf{u}, Y_2\mathbf{u})_{\tilde{\mathfrak{H}}} + \varepsilon^2 q_\Omega[f\mathbf{u}, f\mathbf{u}] + \varepsilon^2 \lambda(\mathcal{Q}_0 f\mathbf{u}, f\mathbf{u})_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}), \quad (2.41)$$

где $0 \leq \varepsilon \leq 1$, а $\mathcal{Q}_0$ — оператор в $\mathfrak{H}$, действующий как умножение на функцию $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$.

Оценим форму (2.41) снизу. Условие (2.22) обеспечивает выполнение неравенства

$$\lambda(\mathcal{Q}_0 f\mathbf{u}, f\mathbf{u})_{\mathfrak{H}} \geq (c_0 + c_4 + \beta) \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{H}. \quad (2.42)$$

Используя (2.36), (2.38), (2.40), (2.42), нетрудно проверить, что выполнена оценка

$$\mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] \geq \frac{\kappa}{2} \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + \beta \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2, \quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}). \quad (2.43)$$

Из (2.29), (2.36), (2.38) (при $\nu = 1$) и верхней оценки (2.40) следует верхняя оценка для квадратичной формы (2.41):

$$\begin{aligned} \mathfrak{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{u}] &\leq (2 + c_1^2 + c_2) \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u}, \mathbf{u}] + (C(1) + c_3 + |\lambda| \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}^2) \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2 \leq \\ &\leq (2 + c_1^2 + c_2) \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|(\mathbf{D} + \mathbf{k})f\mathbf{u}\|_{\tilde{\mathfrak{H}}}^2 + (C(1) + c_3 + |\lambda| \|\mathcal{Q}_0\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}^2) \varepsilon^2 \|\mathbf{u}\|_{\mathfrak{H}}^2, \\ &\quad \mathbf{u} \in \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Оценки (2.43), (2.44) показывают, что форма (2.41) замкнута и положительно определена. Через $\mathfrak{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ обозначим оператор в пространстве $\mathfrak{H}$, порождённый этой формой. Формально можно записать

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}(\mathbf{k}, \varepsilon) &= \mathcal{A}(\mathbf{k}) + \varepsilon(Y_2^* \mathcal{Y}(\mathbf{k}) + \mathcal{Y}(\mathbf{k})^* Y_2) + \varepsilon^2 f^* \mathcal{Q}f + \varepsilon^2 \lambda f^* \mathcal{Q}_0 f = \\ &= f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) f(\mathbf{x}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d f(\mathbf{x})^* (a_j(\mathbf{x})(D_j + k_j) + (D_j + k_j) a_j(\mathbf{x})^*) f(\mathbf{x}) + \\ &\quad + \varepsilon^2 f(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \lambda f(\mathbf{x})^* \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) f(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

2.2.9 Прямой интеграл для оператора $\mathcal{B}(\varepsilon)$

Под действием преобразования Гельфанда $\mathcal{U}$ оператор $\mathcal{B}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$:

$$\mathcal{U}\mathcal{B}(\varepsilon)\mathcal{U}^{-1} = \int_{\tilde{\Omega}} \oplus \mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon) d\mathbf{k}. \quad (2.45)$$

Говоря подробнее, имеется ввиду следующее. Пусть $\mathbf{v} \in \text{Dom } \mathcal{X}$, тогда

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}) \quad \text{при п.в. } \mathbf{k} \in \tilde{\Omega}, \quad (2.46)$$

$$\mathbf{b}(\varepsilon)[\mathbf{v}, \mathbf{v}] = \int_{\tilde{\Omega}} \mathbf{b}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot), \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot)] d\mathbf{k}. \quad (2.47)$$

Обратно, если для $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}$ выполнено (2.46) и интеграл в (2.47) конечен, тогда $\mathbf{v} \in \text{Dom } \mathcal{X}$ и выполнено (2.47).

2.2.10 Включение операторов $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ в абстрактную схему

Если $d > 1$, то операторы $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ зависят от многомерного параметра $\mathbf{k}$. Следуя [BSu1, гл. 2], введём одномерный параметр $t = |\mathbf{k}|$. Будем использовать схему главы 1. При этом все построения будут зависеть от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta} = \mathbf{k}/|\mathbf{k}| \in \mathbb{S}^{d-1}$ и мы должны следить за равномерностью оценок по $\boldsymbol{\theta}$. Пространства $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_*$ и $\tilde{\mathfrak{H}}$ определены в (2.28). Положим $X(t) = X(t; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. При этом выполнено $X(t; \boldsymbol{\theta}) = X_0 + tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где $X_0 = h(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})$, $\text{Dom } X_0 = \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k})$, а $X_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x})$. Далее, положим $A(t) = A(t; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. Согласно (2.31), (2.32), $\mathfrak{N} = \text{Ker } X_0 = \text{Ker } \mathcal{A}(0)$, $\dim \mathfrak{N} = n$. Число d^0 удовлетворяет оценке (2.34). Как было показано в [BSu1, гл. 2, §3], условие $n \leq n_* = \dim \text{Ker } X_0^*$ также выполнено. Более того, либо $n_* = n$ (если $m = n$), либо $n_* = \infty$ (если $m > n$).

Роль $Y(t)$ играет оператор $Y(t; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{Y}(t\boldsymbol{\theta})$. В силу (2.35) имеет место равенство $Y(t; \boldsymbol{\theta}) = Y_0 + tY_1(\boldsymbol{\theta})$, где

$$\begin{aligned} Y_0\mathbf{u} &= \mathbf{D}(f\mathbf{u}) = \{D_1f\mathbf{u}, \dots, D_df\mathbf{u}\}^T, \quad \text{Dom } Y_0 = \text{Dom } \mathcal{X}(\mathbf{k}), \\ Y_1(\boldsymbol{\theta})\mathbf{u} &= \{\theta_1f\mathbf{u}, \dots, \theta_df\mathbf{u}\}^T. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Условие 1.1.2 выполнено благодаря оценке (2.36). Оператор Y_2 определён в (2.37). Условие 1.1.3 выполнено в силу (2.38). Роль формы $\mathfrak{q}$ из п. 1.1.3 играет форма $q_\Omega[f \cdot, f \cdot]$, определённая в (2.39). Условие 1.1.4 выполнено благодаря оценкам (2.40).

Наконец, роль операторного пучка $\mathfrak{B}(t, \varepsilon)$ играет семейство $\mathfrak{B}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) := \mathcal{B}(t\boldsymbol{\theta}, \varepsilon)$. Роль оператора Q_0 из п. 1.1.4 играет оператор умножения на матричнозначную функцию $f(\mathbf{x})^* Q_0(\mathbf{x}) f(\mathbf{x})$. Ограничение (1.5) на параметр λ выполнено благодаря (2.22).

Следуя пункту 1.1.5, мы должны фиксировать число $\delta > 0$, такое что $\delta < \kappa d^0/13$. Учитывая (2.30) и (2.34), положим

$$\delta = \frac{1}{4} \kappa c_* r_0^2 = \frac{1}{4} \kappa \alpha_0 \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} r_0^2. \quad (2.49)$$

Отметим, что в силу (2.7), (2.8) и (2.48)

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} \|f\|_{L_\infty}, \quad \|Y_1(\boldsymbol{\theta})\| \leq \|f\|_{L_\infty}, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}. \quad (2.50)$$

Для τ^0 (см. (1.9)) примем следующее значение:

$$\tau^0 = \delta^{1/2} ((2 + c_1^2 + c_2)\alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}^2 + C(1) + c_3 + |\lambda| \|f\|_{L_\infty}^2 \|Q_0\|_{L_\infty}^2)^{-1/2}, \quad (2.51)$$

которое подходит при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

2.3 Эффективные характеристики

2.3.1 Случай $f = \mathbf{1}_n$

Приведём в этом пункте эффективные характеристики для случая $f = \mathbf{1}_n$, которые были построены в [Su4, пп. 6.3, 6.4, 7.1].

Все объекты, отвечающие случаю $f = \mathbf{1}_n$, далее помечаются значком “ $\widehat{}$ ”. В частности, для оператора

$$\begin{aligned}\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon) &= \widehat{\mathcal{A}} + \varepsilon(\widehat{\mathcal{Y}}_2^* \widehat{\mathcal{Y}} + \widehat{\mathcal{Y}}^* \widehat{\mathcal{Y}}_2) + \varepsilon^2 \mathcal{Q} + \varepsilon^2 \lambda \mathcal{Q}_0 = \\ &= b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \varepsilon \sum_{j=1}^d (a_j(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j(\mathbf{x})^*) + \varepsilon^2 \mathcal{Q}(\mathbf{x}) + \varepsilon^2 \lambda \mathcal{Q}_0(\mathbf{x})\end{aligned}\quad (2.52)$$

соответствующее операторное семейство $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ обозначается $\widehat{\mathfrak{B}}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$.

Имеем:

$$\begin{aligned}\widehat{\mathfrak{H}} &= \mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n), \\ \widehat{X}_0 &= h(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \quad \text{Dom } \widehat{X}_0 = \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \\ \widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta}) &\text{ — ограниченный оператор умножения на матрицу } h(\mathbf{x}) b(\boldsymbol{\theta}), \\ \widehat{\mathfrak{N}} &= \left\{ \mathbf{u} \in \widehat{\mathfrak{H}} : \mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n \right\}, \quad \dim \widehat{\mathfrak{N}} = n, \\ \widehat{P}\mathbf{u} &= |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathbf{u}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \text{ — ортопроектор на } \widehat{\mathfrak{N}}, \\ \widehat{Y}_0 \mathbf{u} &= \mathbf{D}(\mathbf{u}) = \{D_1 \mathbf{u}, \dots, D_d \mathbf{u}\}^T, \quad \text{Dom } \widehat{Y}_0 = \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \\ \widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{u} &= \{\theta_1 \mathbf{u}, \dots, \theta_d \mathbf{u}\}^T, \\ \widehat{Y}_2 \mathbf{u} &= \{a_1(\mathbf{x})^* \mathbf{u}, \dots, a_d(\mathbf{x})^* \mathbf{u}\}^T, \quad \text{Dom } \widehat{Y}_2 = \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n).\end{aligned}\quad (2.53)$$

Согласно п. 1.1.6 введём операторы $\widehat{Z}$ и $\widetilde{Z}$. Оператор $\widehat{Z}$ зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Как показано в [BSu3, п. 4.1], $\widetilde{Z}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}$, где $\Lambda(\mathbf{x})$ — периодическая $(n \times m)$ -матричнозначная функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Lambda(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (2.54)$$

В соответствии с [Su4, п. 6.3] $\widetilde{Z} = \widetilde{\Lambda} \widehat{P}$, где $\widetilde{\Lambda}(\mathbf{x})$ — периодическая $(n \times n)$ -матричнозначная функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^d D_j a_j(\mathbf{x})^* = 0, \quad \int_{\Omega} \widetilde{\Lambda}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0. \quad (2.55)$$

Оператор $\widehat{S}$, определённый в п. 1.1.7, теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Согласно [BSu1, гл. 3, §1], оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) : \widehat{\mathfrak{N}} \rightarrow \widehat{\mathfrak{N}}$ действует как умножение на матрицу $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})$. Здесь g^0 — постоянная положительная $(m \times m)$ -матрица, называемая *эффективной* матрицей. Эффективная матрица g^0 может быть определена в терминах матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$:

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m), \quad (2.56)$$

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \widetilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}. \quad (2.57)$$

Введём в соответствии с [Su4, (7.2), (7.3)] постоянные матрицы:

$$V := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \quad (2.58)$$

$$W := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}))^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (2.59)$$

Оператор $\widehat{L}(t, \varepsilon)$, определённый в (1.28), теперь зависит от $\boldsymbol{\theta}$. Для него справедливо представление (см. [Su4, (7.8)]):

$$\begin{aligned} \widehat{L}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) =: \widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) = & b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}) + \varepsilon \left(-b(\mathbf{k})^* V - V^* b(\mathbf{k}) + \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)} k_j \right) + \\ & + \varepsilon^2 (-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda \overline{\mathcal{Q}}_0), \end{aligned}$$

где используются обозначения

$$\overline{\mathcal{Q}} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} d\mu(\mathbf{x}), \quad \overline{\mathcal{Q}}_0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \overline{a_j + a_j^*} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (a_j(\mathbf{x}) + a_j^*(\mathbf{x})) d\mathbf{x}.$$

В $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) = & b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + \\ & + \varepsilon \left(-b(\mathbf{D} + \mathbf{k})^* V - V^* b(\mathbf{D} + \mathbf{k}) + \sum_{j=1}^d \overline{(a_j + a_j^*)} (D_j + k_j) \right) + \varepsilon^2 (-W + \overline{\mathcal{Q}} + \lambda \overline{\mathcal{Q}}_0) \end{aligned}$$

при периодических граничных условиях. Имеет место равенство

$$\widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) \widehat{P} = \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) \widehat{P}. \quad (2.60)$$

2.3.2 Свойства эффективной матрицы

Следующие свойства g^0 были проверены в [BSu1, гл. 3, теорема 1.5].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.1. *Для эффективной матрицы справедливы оценки*

$$\underline{g} \leq g^0 \leq \overline{g}, \quad (2.61)$$

где

$$\overline{g} := |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad \underline{g} := \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} g(\mathbf{x})^{-1} d\mathbf{x} \right)^{-1}.$$

В случае $m = n$ всегда выполнено $g^0 = \underline{g}$.

Оценки (2.61) известны в теории усреднений для конкретных ДО как вилка Фойгта–Рейсса. Теперь выделим условия, при которых реализуется верхняя или нижняя грань в (2.61). Следующие утверждения были проверены в [BSu1, гл. 3, предложения 1.6, 1.7].

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.2. *Равенство $g^0 = \overline{g}$ равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.62)$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$ — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.3. *Равенство $g^0 = \underline{g}$ равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D}) \mathbf{w}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, \dots, m, \quad (2.63)$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$ — столбцы матрицы $g(\mathbf{x})^{-1}$.

2.3.3 Оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$

Нам понадобится описать оператор N_{11} (в абстрактных терминах определённый в (1.36)). Как проверено в [BSu3, п. 4.2], для семейства $\widehat{\mathcal{B}}(t, \boldsymbol{\theta})$ этот оператор принимает вид

$$\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \quad (2.64)$$

где $L(\boldsymbol{\theta})$ — $(m \times m)$ -матричнозначная функция, заданная соотношением

$$L(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (2.65)$$

Здесь $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ -периодическое решение задачи (2.54), а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция (2.56).

В [BSu3, следствие 4.4 и предложение 4.5] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (2.64) обращается в ноль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.3.4. Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:

- 1°. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ имеет вид $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.
- 2°. Выполнены соотношения (2.62), т. е. $g^0 = \bar{g}$.
- 3°. Выполнены соотношения (2.63), т. е. $g^0 = \underline{g}$. (В частности, это автоматически выполнено, если $m = n$.)

Тогда $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

2.4 Аппроксимация оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)}$

2.4.1 Аппроксимация сглаженного оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)}$ в общем случае

Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При разложении в прямой интеграл оператору $\mathcal{H}_0$ отвечает семейство операторов $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Оператор $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ задаётся дифференциальным выражением $|\mathbf{D} + \mathbf{k}|^2$ на области $\widetilde{H}^2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Введём обозначение

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}. \quad (2.66)$$

Очевидно,

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{r/2} \widehat{P} = \varepsilon^r (t^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \widehat{P}, \quad r > 0. \quad (2.67)$$

Отметим, что при $\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} > \widehat{\tau}^0$ выполнено

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2} \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (\widehat{\tau}^0)^{-1} \varepsilon, \quad \varepsilon > 0, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}, \sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} > \widehat{\tau}^0. \quad (2.68)$$

Далее, используя разложение в ряд Фурье, получаем

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{r/2} (I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \sup_{0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}} \varepsilon^r (|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq r_0^{-r} \varepsilon^r, \quad \varepsilon > 0, \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \quad (2.69)$$

Обозначим

$$\widehat{J}(\mathbf{k}, \varepsilon; s) := e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)} - e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)}. \quad (2.70)$$

Мы применим к оператору $\widehat{\mathcal{B}}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ теоремы из п. 1.3. Согласно замечанию 1.3.1, мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от исходных данных.

Отметим что $\widehat{c}_1, \widehat{c}_2, \widehat{\kappa}, \widehat{C}(1), \widehat{\delta}$ и $\widehat{\tau}^0$ не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (2.11), (2.13), (2.16), (2.49), (2.51) при $f = \mathbf{1}_n$). Согласно (2.50) (при $f = \mathbf{1}_n$) норму $\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}$ и подставить $\|\widehat{Y}_1(\boldsymbol{\theta})\| = 1$. Поэтому постоянные в теоремах 1.3.1 и 1.3.2 (применённых к оператору $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от

$$\begin{aligned} & d, m, n, \rho; \alpha_0, \alpha_1, \|g\|_{L_\infty}, \|g^{-1}\|_{L_\infty}, \|a_j\|_{L_\rho(\Omega)}, j = 1, \dots, d; \\ & \widetilde{c}, \widehat{c}_0, \widetilde{c}_2, \widehat{c}_3 \text{ из условия 2.2.1;} \\ & \lambda, \|Q_0\|_{L_\infty}, \|Q_0^{-1}\|_{L_\infty} \text{ и параметров решётки } \Gamma. \end{aligned} \quad (2.71)$$

Применяя теорему 1.3.1 с учётом (2.67), (2.68), (2.69) и очевидного неравенства

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\| \leq 1, \quad (2.72)$$

приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2.4.1. *При $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|\widehat{J}(\mathbf{k}, \varepsilon; s)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_1(1 + |s|)\varepsilon,$$

где константа $\widehat{C}_1$ зависит только от данных задачи (2.71).

2.4.2 Улучшение аппроксимации сглаженной экспоненты $e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)}$ при условии $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = 0$

Применим теперь теорему 1.3.2, предполагая, что $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (2.67), (2.68), (2.69) и (2.72) это влечёт следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.4.2. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.64). Пусть $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|\widehat{J}(\mathbf{k}, \varepsilon; s)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_2(1 + |s|)\varepsilon,$$

где константа $\widehat{C}_2$ зависит только от данных задачи (2.71).

Напомним, что некоторые достаточные условия, гарантирующие равенство $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, указаны в предложении 2.3.4.

2.4.3 Подтверждение точности результата

Перейдём к обозначениям, принятым в замечаниях 1.4.1, 1.4.2. Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\widehat{\lambda}_1^{\circ, (4)}(\boldsymbol{\theta}), \dots, \widehat{\lambda}_{p(\boldsymbol{\theta})}^{\circ, (4)}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\lambda}_q^{\circ, (4)}(\boldsymbol{\theta})$.

Далее, количество $p'(q, \boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\widehat{\lambda}_{1,q}^{\circ, (5)}(\boldsymbol{\theta}), \dots, \widehat{\lambda}_{p'(q, \boldsymbol{\theta}), q}^{\circ, (5)}(\boldsymbol{\theta})$ оператора

$$\widehat{\mathcal{Y}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta}) \left(-b(\boldsymbol{\theta})^*V - V^*b(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^d (a_j + a_j^*)\theta_j \right) \Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})} \quad (2.73)$$

и их кратности $k_{1,q}(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p'(q, \boldsymbol{\theta}), q}(\boldsymbol{\theta})$ также зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\widehat{P}_{q', q}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q', q}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{\mathcal{Y}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\lambda}_{q', q}^{\circ, (5)}(\boldsymbol{\theta})$.

ТЕОРЕМА 2.4.3. Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.64). Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ имеет место

$$\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$$

для некоторых $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q, \boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leq r < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка

$$\left\| \left(e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)} - e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k},\varepsilon)} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{r/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(s)\varepsilon \quad (2.74)$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма, аналогичная [Su8, лемма 9.10].

ЛЕММА 2.4.1. Пусть $\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) = \widehat{F}(\tau, \boldsymbol{\theta})$ — спектральный проектор оператора $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ для промежутка $[0, \widehat{\delta}]$. Тогда при $\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \leq \widehat{\tau}^0$, $\sqrt{|\mathbf{k}_0|^2 + \varepsilon^2} \leq \widehat{\tau}^0$ справедливы оценки

$$\|\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) - \widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}'|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (2.75)$$

$$\|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) - \widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)\widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}''|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \quad (2.76)$$

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k},\varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0,\varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq (2\widehat{C}' + \widehat{C}''|s|)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|. \quad (2.77)$$

Доказательство. Рассмотрим разность полуторалинейных форм операторов $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ и $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)$ на элементах $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{v}] - \widehat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{v}] &= \\ &= (gb(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{u}, b(\mathbf{D} + \mathbf{k}_0)\mathbf{v})_{L_2(\Omega)} + (gb(\mathbf{D} + \mathbf{k})\mathbf{u}, b(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{v})_{L_2(\Omega)} + \\ &\quad + \varepsilon((\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{u}, \widehat{Y}_2\mathbf{v})_{L_2(\Omega)} + \varepsilon(\widehat{Y}_2\mathbf{u}, (\mathbf{k} - \mathbf{k}_0)\mathbf{v})_{L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Применяя (2.7) и (2.38) при $\nu = 1$, легко получить оценку

$$\begin{aligned} |\widehat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{v}] - \widehat{\mathbf{b}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)[\mathbf{u}, \mathbf{v}]| &\leq \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \|\mathbf{u}\|_{L_2} \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{1/2}\mathbf{v}\|_{L_2} + \\ &+ \alpha_1^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{1/2} |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2} \|\mathbf{v}\|_{L_2} + \widehat{\tau}^0 \|\mathbf{u}\|_{L_2} |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| (\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k}_0)^{1/2}\mathbf{v}\|_{L_2} + \widehat{C}(1)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{L_2}) + \\ &\quad + \widehat{\tau}^0 \|\mathbf{v}\|_{L_2} |\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| (\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2} + \widehat{C}(1)^{1/2} \|\mathbf{u}\|_{L_2}). \quad (2.78) \end{aligned}$$

Далее, пользуясь (2.43), получаем неравенство

$$\|\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2} \leq 2^{1/2}\kappa^{-1/2} \|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2}\mathbf{u}\|_{L_2}. \quad (2.79)$$

Согласно предложению 1.1.1 при $\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \leq \widehat{\tau}^0$ первые n собственных значений оператора $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ находятся в отрезке $[0, \widehat{\delta}]$, а остальной спектр лежит на полуоси $[\widehat{3}\widehat{\delta}, \infty)$. Рассмотрим контур $\Gamma_{\widehat{\delta}} \subset \mathbb{C}$ охватывающий отрезок $[0, \widehat{\delta}]$ эквидистантно на расстоянии $\widehat{\delta}$. Пусть $z \in \Gamma_{\widehat{\delta}}$. Подставим $\mathbf{u} = (\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon) - zI)^{-1}\boldsymbol{\varphi}$ и $\mathbf{v} = (\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon) - z^*I)^{-1}\boldsymbol{\psi}$, где $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\psi} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. В силу оценок

$$\begin{aligned} \|(\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon) - zI)^{-1}\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2} &\leq \widehat{\delta}^{-1} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2}, & \|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{1/2}(\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon) - zI)^{-1}\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2} &\leq \sqrt{\widehat{3}\widehat{\delta}^{-1/2}} \|\boldsymbol{\varphi}\|_{L_2}, \\ \|(\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon) - z^*I)^{-1}\boldsymbol{\psi}\|_{L_2} &\leq \widehat{\delta}^{-1} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2}, & \|\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)^{1/2}(\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon) - z^*I)^{-1}\boldsymbol{\psi}\|_{L_2} &\leq \sqrt{\widehat{3}\widehat{\delta}^{-1/2}} \|\boldsymbol{\psi}\|_{L_2}, \end{aligned}$$

из (2.78) и (2.79) следует оценка

$$\|(\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon) - zI)^{-1} - (\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon) - zI)^{-1}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0| \quad (2.80)$$

при $z \in \Gamma_{\widehat{\delta}}$ и $\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \leq \widehat{\tau}^0$, $\sqrt{|\mathbf{k}_0|^2 + \varepsilon^2} \leq \widehat{\tau}^0$.

Из представления

$$\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\widehat{\delta}}} (\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon) - zI)^{-1} dz$$

(записанного в точках $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$) и (2.80) следует оценка (2.75).

Неравенство (2.76) вытекает из представления

$$\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)F(\mathbf{k}, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_{\widehat{\delta}}} z(\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon) - zI)^{-1} dz$$

(записанного в точках $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_0$) и (2.80).

Докажем третье неравенство. Имеем:

$$e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon) = e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon)(\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) - \widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)) + (\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) - \widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon))e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon) + \Xi(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \varepsilon), \quad (2.81)$$

где

$$\Xi(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \varepsilon) = e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon)\widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon) - \widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon)e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon).$$

Сумма первых двух слагаемых в (2.81) оценивается через $2\widehat{C}'|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|$ ввиду (2.75). Третье слагаемое запишем в виде

$$\begin{aligned} \Xi(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \varepsilon) &= e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)}\Sigma(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \varepsilon), \\ \Sigma(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \varepsilon) &= \widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon)\widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon) - e^{is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon)e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon). \end{aligned}$$

Имеем $\Sigma(0, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \varepsilon) = 0$,

$$\frac{d\Sigma(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \varepsilon)}{ds} = -i\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon)e^{is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)} \left(\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) - \widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)\widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon) \right) e^{-is\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}_0, \varepsilon).$$

Отсюда интегрированием по промежутку $[0, s]$ с учётом оценки (2.76) получаем

$$\|\Xi(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} = \|\Sigma(s, \mathbf{k}, \mathbf{k}_0, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}''|s||\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|.$$

Вместе со сказанным выше это влечёт (2.77). $\square$

Доказательство теоремы 2.4.3. Достаточно считать $1 \leq r < 3$. Рассуждаем от противного. Фиксируем $s \neq 0$. Предположим, что для некоторого $1 \leq r < 3$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(s) > 0$ такая, что выполнена оценка (2.74) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. С учётом (2.68) и (2.69) отсюда следует, что найдётся постоянная $\widetilde{\mathcal{C}}(s) > 0$ такая, что выполнена оценка

$$\left\| \left(e^{-ise^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)} - e^{-ise^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)} \right) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \varepsilon^r (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \widetilde{\mathcal{C}}(s)\varepsilon \quad (2.82)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon \in (0, \widehat{\tau}^0/\sqrt{2}]$.

Рассмотрим теперь значения $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leq \hat{\tau}^0/\sqrt{2}$. В силу (1.29)

$$\|\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) - \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \widehat{C}_1(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}, \quad |\mathbf{k}| \leq \hat{\tau}^0/\sqrt{2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \hat{\tau}^0/\sqrt{2}. \quad (2.83)$$

Из (2.82) и (2.83) вытекает справедливость неравенства

$$\|e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)}\widehat{F}(\mathbf{k}, \varepsilon) - e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}\varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \check{C}(s)\varepsilon \quad (2.84)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leq \hat{\tau}^0/\sqrt{2}$ и достаточно малом $\varepsilon \in (0, \hat{\tau}^0/\sqrt{2}]$ с некоторой константой $\check{C}(s)$.

Заметим, что проектор $\widehat{P}$ является спектральным проектором оператора $\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$ для промежутка $[0, \widehat{\delta}]$. Поэтому из леммы 2.4.1 (в применении к $\widehat{\mathcal{B}}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ и $\widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$) следует, что при фиксированных s и ε оператор, стоящий под знаком нормы в (2.84), непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leq \hat{\tau}^0/\sqrt{2}$. Следовательно, оценка (2.84) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leq \hat{\tau}^0/\sqrt{2}$. Применяя снова неравенство (2.83), получаем, что справедливо неравенство

$$\left\| \left(e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(t\boldsymbol{\theta}_0, \varepsilon)} - e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(t\boldsymbol{\theta}_0, \varepsilon)} \right) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \varepsilon^r(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \check{C}'(s)\varepsilon \quad (2.85)$$

при всех $t \leq \hat{\tau}^0/\sqrt{2}$ и достаточно малом $\varepsilon \in (0, \hat{\tau}^0/\sqrt{2}]$.

Оценка (2.85) в абстрактных терминах соответствует оценке (1.100). Поскольку по условию выполнено $\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, то применение теоремы 1.4.1 приводит нас к противоречию. $\square$

2.5 Операторное семейство $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$. Применение схемы п. 1.5

2.5.1 Случай $f \neq 1_n$

Возвращаемся к рассмотрению операторов $\mathcal{B}(\varepsilon)$ общего вида (2.26) и соответствующих семейств $\mathfrak{B}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta})$ из п. 2.2.10.

Будем использовать схему из раздела 1.5. У нас $\widehat{\mathfrak{H}} = \mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, а роль изоморфизма M играет оператор умножения на $f(\mathbf{x})$. В качестве оператора $\mathfrak{Q}$ (см. (1.123)) выступает оператор умножения на матричнозначную функцию $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) := (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$. Блок $\mathfrak{N}$ в ядре $\widehat{\mathfrak{N}}$ — оператор умножения на постоянную матрицу $\overline{\mathfrak{Q}} = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1} d\mathbf{x}$. Роль оператора M_0 (см. (1.135)) играет оператор умножения на постоянную матрицу

$$f_0 := (\overline{\mathfrak{Q}})^{-1/2} = \left(|\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1} d\mathbf{x} \right)^{-1/2}. \quad (2.86)$$

Отметим, что

$$|f_0| \leq \|f\|_{L_{\infty}}, \quad |f_0^{-1}| \leq \|f^{-1}\|_{L_{\infty}}. \quad (2.87)$$

В $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ определим оператор

$$\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) := f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) f_0.$$

Согласно (2.53), (2.60) справедливо равенство

$$f_0 \widehat{L}(\mathbf{k}, \varepsilon) f_0 \widehat{P} = \mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon) \widehat{P}.$$

2.5.2 Оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta})$

Нам понадобится описать оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}$ (определённый в абстрактных терминах в п. 1.5.3). Для этого введём Γ -периодическое решение $\Lambda_\Omega(\mathbf{x})$ задачи

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda_\Omega(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \quad \int_{\Omega} \Omega(\mathbf{x})\Lambda_\Omega(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Ясно, что $\Lambda_\Omega(\mathbf{x})$ отличается от периодического решения $\Lambda(\mathbf{x})$ задачи (2.54) на постоянное слагаемое:

$$\Lambda_\Omega(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) + \Lambda_\Omega^0, \quad \Lambda_\Omega^0 = -(\overline{\Omega})^{-1}(\overline{\Omega\Lambda}). \quad (2.88)$$

Как проверено в [BSu3, п. 5.3], оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta})$ сейчас принимает вид

$$\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^*L_\Omega(\boldsymbol{\theta})b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \quad (2.89)$$

где $L_\Omega(\boldsymbol{\theta})$ — $(m \times m)$ -матрица, заданная соотношением

$$L_\Omega(\boldsymbol{\theta}) = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} (\Lambda_\Omega(\mathbf{x})^*b(\boldsymbol{\theta})^*\tilde{g}(\mathbf{x}) + \tilde{g}(\mathbf{x})^*b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_\Omega(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \quad (2.90)$$

Сопоставляя (2.88), (2.90) с (2.65), убеждаемся, что справедливо равенство

$$L_\Omega(\boldsymbol{\theta}) = L(\boldsymbol{\theta}) + L_\Omega^0(\boldsymbol{\theta}), \quad L_\Omega^0(\boldsymbol{\theta}) = (\Lambda_\Omega^0)^*b(\boldsymbol{\theta})^*g^0 + g^0b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_\Omega^0.$$

В [BSu3, п. 5.4] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (2.89) обращается в ноль.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.5.1. Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:

1°. Оператор $\mathcal{A}$ имеет вид $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^*\mathbf{D}^*g(\mathbf{x})\mathbf{D}f(\mathbf{x})$, где $g(\mathbf{x})$ — симметричная матрица с вещественными элементами.

2°. Выполнены соотношения (2.62), т. е. $g^0 = \bar{g}$.

Тогда $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

2.6 Аппроксимация окаймлённого оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}$

Обозначим

$$J(\mathbf{k}, \varepsilon; s) := f e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)} f^{-1} - f_0 e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)} f_0^{-1}. \quad (2.91)$$

Мы применим к оператору $\mathfrak{B}(t, \varepsilon; \boldsymbol{\theta}) = \mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ теоремы из п. 1.5.4. Согласно замечанию 1.3.1, мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от исходных данных. Отметим что $c_1, c_2, \kappa, C(1), \delta$ и τ^0 не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (2.11), (2.13), (2.16), (2.49), (2.51)). Согласно (2.50) норму $\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|f\|_{L_\infty}$, а норму $\|Y_1(\boldsymbol{\theta})\|$ — на $\|f\|_{L_\infty}$. Поэтому постоянные в теоремах 1.5.1 и 1.5.2 (применённых к оператору $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от данных задачи (2.27).

Применяя теорему 1.5.1 с учётом (2.67), (2.68), (2.69) и (2.72), приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 2.6.1. При $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка

$$\|J(\mathbf{k}, \varepsilon; s)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1(1 + |s|)\varepsilon,$$

где константа C_1 зависит только от данных задачи (2.27).

2.6.1 Улучшение аппроксимации сглаженной окаймлённой экспоненты при условии $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = 0$

Применим теперь теорему 1.5.2, предполагая, что $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (2.67), (2.68), (2.69) и (2.72) это влечёт следующий результат.

ТЕОРЕМА 2.6.2. Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.89). Пусть $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка

$$\|J(\mathbf{k}, \varepsilon; s)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_2(1 + |s|)\varepsilon,$$

где константа C_2 зависит только от данных задачи (2.27).

Напомним, что в предложении 2.5.1 указаны некоторые достаточные условия, гарантирующие равенство $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

2.6.2 Подтверждение точности результата

Коэффициенты $\lambda_l^{(4)}(\boldsymbol{\theta})$ и $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, являются собственными для оператора $S(\boldsymbol{\theta})$. Однако, удобнее перейти к обобщённой спектральной задаче для $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (1.141) числа $\lambda_l^{(4)}(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, являются собственными значениями и собственными элементами следующей обобщённой спектральной задачи:

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \lambda_l^{(4)}(\boldsymbol{\theta}) \overline{\Sigma} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \quad l = 1, \dots, n. \quad (2.92)$$

При этом n векторы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$, ортонормированный с весом: $(\overline{\Sigma} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_j(\boldsymbol{\theta})) = \delta_{jl}$, $j, l = 1, \dots, n$.

Перейдём к обозначениям, принятым в замечании 1.4.1, следя за кратностями собственных значений спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$. В силу сказанного в п. 1.5.5 эти же значения являются собственными числами обобщённой задачи (2.92). Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\lambda_1^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta}), \dots, \lambda_{p(\boldsymbol{\theta})}^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $S(\boldsymbol{\theta})$ и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство оператора $S(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\lambda_q^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})$ — собственное подпространство задачи (2.92), отвечающее тому же значению $\lambda_q^{\circ,(4)}(\boldsymbol{\theta})$.

Далее, коэффициенты $\lambda_l^{(5)}(\boldsymbol{\theta})$ и $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = i(q, \boldsymbol{\theta}), \dots, i(q, \boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1$, где $i(q, \boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta}) + \dots + k_{q-1}(\boldsymbol{\theta}) + 1$, являются собственными для оператора $\mathscr{Y}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$ (см. (1.82)). Согласно (1.142) числа $\lambda_l^{(5)}(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, являются собственными значениями и собственными элементами следующей обобщённой спектральной задачи:

$$\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})} \left(-b(\boldsymbol{\theta})^* V - V^* b(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^d (a_j + a_j^*) \theta_j \right) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \lambda_l^{(5)}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_{f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})} \overline{\Sigma} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}),$$

$$l = i(q, \boldsymbol{\theta}), \dots, i(q, \boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1, \quad (2.93)$$

где $\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})}$ — ортопроектор на $f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})$.

Количество $p'(q, \boldsymbol{\theta})$ различных собственных чисел $\lambda_{1,q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta}), \dots, \lambda_{p'(q,\boldsymbol{\theta}),q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta})$ задачи (2.93) и их кратности $k_{1,q}(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p'(q,\boldsymbol{\theta}),q}(\boldsymbol{\theta})$ также зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathfrak{N}'_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство оператора $\mathscr{Y}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $f\mathfrak{N}'_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ — собственное

подпространство задачи (2.93), отвечающее тому же значению $\lambda_{q',q}^{\circ,(5)}(\boldsymbol{\theta})$. Введём обозначение $\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ для “косого” проектора пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство $f\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$; $\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ ортогонален относительно скалярного произведения с весом $\overline{\Omega}$.

Применение теоремы 1.5.3 позволяет подтвердить точность результата теоремы 2.6.1.

ТЕОРЕМА 2.6.3. Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.89). Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ имеет место

$$\mathcal{P}_{q',q}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$$

для некоторых $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q, \boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leq r < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка

$$\left\| \left(f e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)} f^{-1} - f_0 e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)} f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{r/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq \mathcal{C}(s)\varepsilon \quad (2.94)$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$.

Для доказательства нам понадобится следующая лемма, которую легко проверить по аналогии с доказательством леммы 2.4.1.

ЛЕММА 2.6.1. Пусть $F(\mathbf{k}, \varepsilon) = F(\tau, \boldsymbol{\theta})$ — спектральный проектор оператора $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ для промежутка $[0, \delta]$. Тогда при $\sqrt{|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2} \leq \tau^0$, $\sqrt{|\mathbf{k}_0|^2 + \varepsilon^2} \leq \tau^0$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{k}, \varepsilon) - F(\mathbf{k}_0, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C'|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \\ \|\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)F(\mathbf{k}, \varepsilon) - \mathcal{B}(\mathbf{k}_0, \varepsilon)F(\mathbf{k}_0, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq C''|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|, \\ \|e^{-is\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)}F(\mathbf{k}, \varepsilon) - e^{-is\mathcal{B}(\mathbf{k}_0,\varepsilon)}F(\mathbf{k}_0, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} &\leq (2C' + C''|s|)|\mathbf{k} - \mathbf{k}_0|. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 2.6.3. Достаточно считать $1 \leq r < 3$. Рассуждаем от противного. Фиксируем $s \neq 0$. Предположим, что для некоторого $1 \leq r < 3$ найдётся постоянная $\mathcal{C}(s) > 0$ такая, что выполнена оценка (2.94) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. С учётом (2.67) и (2.69) отсюда следует, что найдётся постоянная $\widetilde{\mathcal{C}}(s) > 0$ такая, что выполнена оценка

$$\left\| \left(f e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)} f^{-1} - f_0 e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)} f_0^{-1} \right) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \varepsilon^r (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \widetilde{\mathcal{C}}(s)\varepsilon \quad (2.95)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon \in (0, \tau^0/\sqrt{2}]$.

В силу (1.124) справедливо тождество $f^{-1}\widehat{P} = P f^* \overline{\Omega}$, где P — ортогональный проектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство $\mathfrak{N}$ (см. (2.32)). Тогда оператор под знаком нормы в (2.95) можно записать в виде $f e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)} P f^* \overline{\Omega} - f_0 e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)} f_0^{-1} \widehat{P}$.

Рассмотрим теперь значения $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leq \tau^0/\sqrt{2}$. В силу (1.29)

$$\|F(\mathbf{k}, \varepsilon) - P\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \leq C_1(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{1/2}, \quad |\mathbf{k}| \leq \tau^0/\sqrt{2}, \quad 0 < \varepsilon \leq \tau^0/\sqrt{2}. \quad (2.96)$$

Из (2.95) и (2.96) вытекает справедливость неравенства

$$\|f e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\mathbf{k},\varepsilon)} F(\mathbf{k}, \varepsilon) f^* \overline{\Omega} - f_0 e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\mathbf{k},\varepsilon)} f_0^{-1} \widehat{P}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \varepsilon^r (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \check{\mathcal{C}}(s)\varepsilon \quad (2.97)$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leq \tau^0/\sqrt{2}$ и достаточно малом $\varepsilon \in (0, \tau^0/\sqrt{2}]$ с некоторой константой $\check{\mathcal{C}}(s)$.

Заметим, что проектор $\widehat{P}$ является спектральным проектором оператора $\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$ для промежутка $[0, \delta]$. Поэтому из леммы 2.6.1 (в применении к $\mathcal{B}(\mathbf{k}, \varepsilon)$ и $\mathcal{B}^0(\mathbf{k}, \varepsilon)$) следует, что при фиксированных s и ε оператор, стоящий под знаком нормы в (2.97), непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leq \tau^0/\sqrt{2}$. Следовательно, оценка (2.97) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leq \tau^0/\sqrt{2}$. Применяя снова неравенство (2.96) и тождество $Pf^*\widehat{\Omega} = f^{-1}\widehat{P}$, получаем, что справедливо неравенство

$$\left\| \left(f e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(t\boldsymbol{\theta}_0, \varepsilon)} f^{-1} - f_0 e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(t\boldsymbol{\theta}_0, \varepsilon)} f_0^{-1} \right) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)} \varepsilon^r (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leq \check{C}'(s)\varepsilon \quad (2.98)$$

при всех $t \leq \tau^0/\sqrt{2}$ и достаточно малом $\varepsilon \in (0, \tau^0/\sqrt{2}]$.

Оценка (2.98) в абстрактных терминах соответствует оценке (1.144). Поскольку по условию выполнено $\mathcal{P}_{q',q}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, то применение теоремы 1.5.3 приводит нас к противоречию. $\square$

2.7 Аппроксимация сглаженного оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)}$

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор (2.52). Введём эффективный оператор с постоянными коэффициентами:

$$\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon) = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) + \varepsilon \left(-b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) D_j \right) + \varepsilon^2 (\overline{Q} + \lambda \overline{Q}_0 - W), \quad (2.99)$$

где эффективная матрица g^0 определена в (2.57), а матрицы V, W — в (2.58) и (2.59).

Обозначим

$$\widehat{\mathcal{J}}(\varepsilon; s) := e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)} - e^{-is\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)}.$$

Напомним обозначение $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ и положим

$$\mathcal{R}(\varepsilon) := \varepsilon^2 (\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1}. \quad (2.100)$$

Оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам (2.66):

$$\mathcal{R}(\varepsilon) = \mathcal{U}^{-1} \left(\int_{\widehat{\Omega}} \oplus \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) d\mathbf{k} \right) \mathcal{U}.$$

Напомним также обозначение (2.70). Из разложений вида (2.45) для $\widehat{\mathcal{B}}(\varepsilon)$ и $\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)$ следует равенство

$$\left\| \widehat{\mathcal{J}}(\varepsilon; s) \mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess-sup}_{\mathbf{k} \in \widehat{\Omega}} \left\| \widehat{\mathcal{J}}(\mathbf{k}, \varepsilon; s) \mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{r/2} \right\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}. \quad (2.101)$$

Поэтому из теорем 2.4.1, 2.4.2 прямо вытекают следующие утверждения.

ТЕОРЕМА 2.7.1. *Для $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| \widehat{\mathcal{J}}(\varepsilon; s) \mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_1 (1 + |s|) \varepsilon.$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}_1$ зависит только от данных задачи (2.71).

ТЕОРЕМА 2.7.2. *Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.64). Пусть $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда для $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| \widehat{\mathcal{J}}(\varepsilon; s) \mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_2 (1 + |s|) \varepsilon.$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}_2$ зависит только от данных задачи (2.71).

Применение теоремы 2.4.3 позволяет подтвердить точность результата теоремы 2.7.1.

ТЕОРЕМА 2.7.3. Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.64). Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ имеет место

$$\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$$

для некоторых $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q, \boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leq r < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка

$$\|\widehat{J}(\varepsilon; s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(s)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

2.8 Аппроксимация “окаймлённого” оператора $e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\varepsilon)}$

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор (2.26). Пусть f_0 — матрица (2.86). Введём оператор $\mathcal{B}^0(\varepsilon) = f_0\widehat{\mathcal{B}}^0(\varepsilon)f_0$. Обозначим

$$J(\varepsilon; s) := fe^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\varepsilon)}f^{-1} - f_0e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}^0(\varepsilon)}f_0^{-1}.$$

Аналогично (2.101) имеем

$$\|J(\varepsilon; s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname{ess-sup}_{\mathbf{k} \in \bar{\Omega}} \|J(\mathbf{k}, \varepsilon; s)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{r/2}\|_{L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, из теорем 2.6.1 и 2.6.2 получаем следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2.8.1. Для $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|J(\varepsilon; s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}_1(1 + |s|)\varepsilon.$$

Константа $\mathcal{C}_1$ зависит только от данных задачи (2.27).

ТЕОРЕМА 2.8.2. Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.89). Пусть $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда для $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|J(\varepsilon; s)\mathcal{R}(\varepsilon)\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}_2(1 + |s|)\varepsilon.$$

Константа $\mathcal{C}_2$ зависит только от данных задачи (2.27).

Используя теорему 2.6.3, мы подтверждаем точность результата теоремы 2.8.1.

ТЕОРЕМА 2.8.3. Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.89). Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ имеет место

$$\mathcal{P}_{q',q}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$$

для некоторых $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q, \boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leq r < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка

$$\|J(\varepsilon; s)\mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(s)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3 Задачи усреднения для нестационарных уравнений типа Шрёдингера

3.1 Усреднение оператора $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$

3.1.1 Операторы $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon$. Постановка задачи.

Если $\psi(\mathbf{x})$ — измеримая Γ -периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, условимся использовать обозначение $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Наши основные объекты — операторы $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon, \mathcal{B}_\varepsilon$, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, формально заданные выражениями

$$\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon := b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (a_j^\varepsilon(\mathbf{x}) D_j + D_j a_j^\varepsilon(\mathbf{x})^*) + \mathcal{Q}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda \mathcal{Q}_0^\varepsilon(\mathbf{x}), \quad (3.1)$$

$$\mathcal{B}_\varepsilon := f^\varepsilon(\mathbf{x})^* \widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon f^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (3.2)$$

Строгие определения даются через соответствующие квадратичные формы (ср. п. 2.2.4). Коэффициенты операторов (3.1) и (3.2) быстро осциллируют при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Введём *эффективный оператор* с постоянными коэффициентами:

$$\widehat{\mathcal{B}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) + \left(-b(\mathbf{D})^* V - V^* b(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*}) D_j \right) + (\overline{\mathcal{Q}} + \lambda \overline{\mathcal{Q}}_0 - W), \quad (3.3)$$

а также оператор

$$\mathcal{B}^0 = f_0 \widehat{\mathcal{B}}^0 f_0, \quad (3.4)$$

где эффективная матрица g^0 определена в (2.57), а матрицы V, W — в (2.58) и (2.59). Матрица f_0 задана формулой (2.86).

Наша цель — получить аппроксимацию оператора $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ и применить полученные результаты к усреднению задачи Коши для нестационарных уравнений типа Шрёдингера.

3.1.2 Масштабное преобразование

Пусть T_ε — унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования:

$$(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2} \mathbf{u}(\varepsilon \mathbf{x}), \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда справедливо тождество $\mathcal{B}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{B}(\varepsilon) T_\varepsilon$. Следовательно,

$$e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon} = T_\varepsilon^* e^{-is\varepsilon^{-2}\mathcal{B}(\varepsilon)} T_\varepsilon. \quad (3.5)$$

Применяя масштабное преобразование к резольвенте оператора $\mathcal{H}_0 = -\Delta$, получаем

$$(\mathcal{H}_0 + I)^{-1} = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* (\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon = T_\varepsilon^* \mathcal{R}(\varepsilon) T_\varepsilon. \quad (3.6)$$

Здесь использовано обозначение (2.100).

Наконец, если $\psi(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая функция, то оператор $[\psi^\varepsilon]$ умножения на функцию $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) = \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$ под действием масштабного преобразования перейдёт в оператор $[\psi]$ умножения на $\psi(\mathbf{x})$: $[\psi^\varepsilon] = T_\varepsilon^* [\psi] T_\varepsilon$.

3.1.3 Усреднение оператора $e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon}$

Начнём с более простого оператора $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$. Пусть $\widehat{\mathcal{B}}^0$ — эффективный оператор (3.3). Применяя соотношения вида (3.5) (для операторов $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{B}}^0$), а также (3.6), получаем тождество

$$(e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0})(\mathcal{H}_0 + I)^{-r/2} = T_\varepsilon^* \widehat{\mathcal{J}}(\varepsilon; s) \mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.7)$$

В общем случае справедлив следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1.1. Пусть $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$ — оператор (3.1) и $\widehat{\mathcal{B}}^0$ — соответствующий эффективный оператор (3.3). Тогда при $0 \leq r \leq 3$ и $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_1(r; s) \varepsilon^{r/3}, \quad (3.8)$$

где постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_1(r; s)$ задана равенством

$$\widehat{\mathcal{C}}_1(r; s) = 2^{1-r/3} \widehat{\mathcal{C}}_1^{r/3} (1 + |s|)^{r/3}. \quad (3.9)$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}_1$ зависит только от данных задачи (2.71).

Доказательство. Ввиду унитарности оператора T_ε и (3.7) из теоремы 2.7.1 следует оценка

$$\|(e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0})(\mathcal{H}_0 + I)^{-3/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_1(1 + |s|)\varepsilon, \quad s \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0. \quad (3.10)$$

Очевидно,

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2, \quad s \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0. \quad (3.11)$$

Интерполируя между (3.10) и (3.11), при $0 \leq r \leq 3$ получаем

$$\|(e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0})(\mathcal{H}_0 + I)^{-r/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2^{1-r/3} \widehat{\mathcal{C}}_1^{r/3} (1 + |s|)^{r/3} \varepsilon^{r/3}, \quad s \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0. \quad (3.12)$$

Оператор $(\mathcal{H}_0 + I)^{r/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$, поскольку для $\mathbf{u} \in H^r(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ выполнено

$$\|(\mathcal{H}_0 + I)^{r/2} \mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}^2 = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + |\boldsymbol{\xi}|^2)^r |\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})|^2 d\boldsymbol{\xi} = \|\mathbf{u}\|_{H^r(\mathbb{R}^d)}^2,$$

где $\widehat{\mathbf{u}}(\boldsymbol{\xi})$ — Фурье-образ функции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$. Поэтому оценка (3.12) эквивалентна (3.8). $\square$

Этот результат может быть усилен при дополнительных предположениях. Применяя теорему 2.7.2, получаем следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.1.1. Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.64). Предположим, что $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $0 \leq r \leq 2$ и $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0}\|_{H^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \widehat{\mathcal{C}}_2(r; s) \varepsilon^{r/2},$$

где постоянная $\widehat{\mathcal{C}}_2(r; s)$ задана равенством

$$\widehat{\mathcal{C}}_2(r; s) = 2^{1-r/2} \widehat{\mathcal{C}}_2^{r/2} (1 + |s|)^{r/2}. \quad (3.13)$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}_2$ зависит только от данных задачи (2.71).

Применение теоремы 2.7.3 позволяет подтвердить точность результата теоремы 3.1.1.

ТЕОРЕМА 3.1.3. Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.64). Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ имеет место

$$\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$$

для некоторых $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q, \boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leq r < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка

$$\|(e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} - e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0})(\mathcal{H}_0 + I)^{-r/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(s)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3.1.4 Усреднение окаймлённого оператора $e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon}$

Рассмотрим теперь более общий оператор $\mathcal{B}_\varepsilon$ (см. (3.2)). Пусть оператор $\mathcal{B}^0$ определён в (3.4). Применяя соотношения вида (3.5) (для операторов $\mathcal{B}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}^0$), а также (3.6), получаем тождество

$$(f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1})(\mathcal{H}_0 + I)^{-r/2} = T_\varepsilon^* J(\varepsilon; s) \mathcal{R}(\varepsilon)^{r/2} T_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \quad (3.14)$$

Из теоремы 2.8.1, тождества (3.14) и очевидного равенства

$$\|f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty}$$

вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1.4. Пусть $\mathcal{B}_\varepsilon$ и $\mathcal{B}^0$ — операторы, определённые выражениями (3.2) и (3.4). Тогда при $0 \leq r \leq 3$ и $s \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедливы оценки

$$\|f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1}\|_{H^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_1(r; s) \varepsilon^{r/3},$$

где постоянная $\mathfrak{C}_1(r; s)$ задана равенством

$$\mathfrak{C}_1(r; s) = (2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-r/3} \mathcal{C}_1^{r/3} (1 + |s|)^{r/3}. \quad (3.15)$$

Константа $\mathcal{C}_1$ зависит только от данных задачи (2.27).

Этот результат может быть усилен при дополнительных предположениях. Теорема 2.8.2 позволяет получить следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.1.5. Пусть выполнены условия теоремы 3.1.4. Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.89). Предположим, что $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $0 \leq r \leq 2$ и $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1}\|_{H^r(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathfrak{C}_2(r; s) \varepsilon^{r/2},$$

где постоянная $\mathfrak{C}_2(r; s)$ задана равенством

$$\mathfrak{C}_2(r; s) = (2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-r/2} \mathcal{C}_2^{r/2} (1 + |s|)^{r/2}. \quad (3.16)$$

Константа $\mathcal{C}_2$ зависит только от данных задачи (2.27).

Используя теорему 2.8.3, мы подтверждаем точность результата теоремы 3.1.4.

ТЕОРЕМА 3.1.6. Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.89). Пусть хотя бы в одной точке $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$ имеет место

$$\mathcal{P}_{q',q}^*(\boldsymbol{\theta}_0)\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}_0)\mathcal{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$$

для некоторых $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$, $q' \in \{1, \dots, p'(q, \boldsymbol{\theta}_0)\}$. Пусть $s \neq 0$ и $0 \leq r < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(s) > 0$, чтобы оценка

$$\left\| (f^\varepsilon e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1}) (\mathcal{H}_0 + I)^{-r/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \mathcal{C}(s)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

3.2 Усреднение задачи Коши для уравнения типа Шрёдингера

3.2.1 Задача Коши для уравнения с оператором $\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon$

Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (3.17)$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n))$ — заданные функции. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) = e^{-is\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} \boldsymbol{\phi} - i \int_0^s e^{-i(s-\tilde{s})\widehat{\mathcal{B}}_\varepsilon} \mathbf{F}(\cdot, \tilde{s}) d\tilde{s}.$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)$ — решение “усреднённой” задачи:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\widehat{\mathcal{B}}^0 \mathbf{u}_0)(\mathbf{x}, s) + \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (3.18)$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot, s) = e^{-is\widehat{\mathcal{B}}^0} \boldsymbol{\phi} - i \int_0^s e^{-i(s-\tilde{s})\widehat{\mathcal{B}}^0} \mathbf{F}(\cdot, \tilde{s}) d\tilde{s}.$$

Из теоремы 3.1.1 непосредственно вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2.1. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (3.17) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (3.18).

1°. Если $\boldsymbol{\phi} \in H^r(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n))$, где $0 \leq r \leq 3$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{r/3} \widehat{\mathcal{C}}_1(r; s) (\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s); H^r(\mathbb{R}^d))}). \quad (3.19)$$

Величина $\widehat{\mathcal{C}}_1(r; s)$ определена в (3.9).

2°. Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n))$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Утверждение 2° в силу теоремы Банаха–Штейнгауза прямо следует из (3.19) и очевидной оценки

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq 2\|\phi\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} + 2|s|\|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);L_2(\mathbb{R}^d))}.$$

Утверждение 1° можно усилить при дополнительных предположениях. Применяя теорему 3.1.2, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2.2. Пусть выполнены условия теоремы 3.2.1. Пусть оператор $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.64). Предположим, что $\widehat{N}_{11}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Если $\phi \in H^r(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n))$, где $0 \leq r \leq 2$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{r/2} \widehat{\mathfrak{C}}_2(r; s) (\|\phi\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^r(\mathbb{R}^d))}).$$

Величина $\widehat{\mathfrak{C}}_2(r; s)$ определена в (3.13).

3.2.2 Задача Коши для уравнения с оператором $\mathcal{B}_\varepsilon$

Рассмотрим более общую задачу Коши для уравнения с оператором $\mathcal{B}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathcal{B}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}, \\ f^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (3.20)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n))$ — заданные функции. Для решения этой задачи справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) = e^{-is\mathcal{B}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} \phi - i \int_0^s e^{-i(s-\tilde{s})\mathcal{B}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} \mathbf{F}(\cdot, \tilde{s}) d\tilde{s}.$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)$ — решение “усреднённой” задачи:

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathcal{B}^0 \mathbf{u}_0)(\mathbf{x}, s) + f_0^{-1} \mathbf{F}(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}, \\ f_0 \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (3.21)$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot, s) = e^{-is\mathcal{B}^0} f_0^{-1} \phi - i \int_0^s e^{-i(s-\tilde{s})\mathcal{B}^0} f_0^{-1} \mathbf{F}(\cdot, \tilde{s}) d\tilde{s}.$$

Из теоремы 3.1.4 непосредственно вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 3.2.3. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (3.20) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (3.21).

1°. Если $\phi \in H^r(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n))$, где $0 \leq r \leq 3$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{r/3} \mathfrak{C}_1(r; s) (\|\phi\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^r(\mathbb{R}^d))}).$$

Величина $\mathfrak{C}_1(r; s)$ определена в (3.15).

2°. Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n))$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Утверждение 1° можно усилить при дополнительных предположениях. Применяя теорему 3.1.5, получаем следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 3.2.4. Пусть выполнены условия теоремы 3.2.3. Пусть оператор $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (2.89). Предположим, что $\widehat{N}_{11,\Omega}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Если $\phi \in H^r(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d, \mathbb{C}^n))$, где $0 \leq r \leq 2$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - f_0 \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{r/2} \mathfrak{C}_2(r; s) (\|\phi\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s); H^r(\mathbb{R}^d))}).$$

Величина $\mathfrak{C}_2(r; s)$ определена в (3.16).

4 Применение общих результатов: нестационарное уравнение Шрёдингера

4.1 Уравнение Шрёдингера с сингулярным потенциалом

В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим скалярный (т.е. $n = 1$) оператор

$$\mathcal{M}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (4.1)$$

Здесь $g(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая ограниченная и положительно определённая $(d \times d)$ -матрица с вещественными элементами, $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}^T$, где $A_j(\mathbf{x})$ — Γ -периодические вещественные функции, такие что

$$A_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho = 2 \text{ при } d = 1, \quad \rho > d \text{ при } d \geq 2; \quad j = 1, \dots, d. \quad (4.2)$$

Наконец, $v(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}(\mathbf{x})$ — Γ -периодические функции, причём

$$v, \mathcal{V} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > \frac{d}{2} \text{ при } d \geq 2; \quad (4.3)$$

$$\int_{\Omega} v(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Точное определение оператора $\mathcal{M}_\varepsilon$ даётся через квадратичную форму

$$\mathfrak{m}_\varepsilon[u, u] = \int_{\mathbb{R}^d} (\langle g^\varepsilon(\mathbf{x})(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))u, (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))u \rangle + (\varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x}))|u|^2) d\mathbf{x},$$

$$u \in H^1(\mathbb{R}^d). \quad (4.4)$$

Оператор (4.1) можно трактовать как периодический оператор Шрёдингера с метрикой g^ε , магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1} v^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{V}^\varepsilon(\mathbf{x})$, содержащим “сингулярное” первое слагаемое.

В [Su4, п. 13.1]) показано, что оператор (4.1) можно представить в виде (3.1). Обозначим $g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) =: \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \{\eta_1(\mathbf{x}), \dots, \eta_d(\mathbf{x})\}^T$. Тогда первое слагаемое в (4.1) переписется в виде

$$(\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon)^* g^\varepsilon (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon) = -\text{div } g^\varepsilon \nabla + i \sum_{j=1}^d (\eta_j^\varepsilon \partial_j + \partial_j (\eta_j^\varepsilon \cdot)) + \langle g^\varepsilon \mathbf{A}^\varepsilon, \mathbf{A}^\varepsilon \rangle.$$

Пусть Φ — Γ -периодическое решение уравнения $\Delta\Phi(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x})$, $\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$. Определим функции $\zeta_j = -\partial_j\Phi$. Тогда верно $v = -\sum_{j=1}^d \partial_j\zeta_j$.

Положим

$$a_j = -\eta_j + i\zeta_j. \quad (4.5)$$

Можно убедиться (подробнее см. [Su4, п. 13.1]), что функции (4.5) удовлетворяют (2.12) с подходящим показателем ρ' (зависящим от ρ и s); нормы $\|a_j\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$ контролируются через $\|g\|_{L_{\infty}}$, $\|\mathbf{A}\|_{L_{\rho}(\Omega)}$, $\|v\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решётки Γ . Видно, что

$$\sum_{j=1}^d (a_j^{\varepsilon} D_j + D_j(a_j^{\varepsilon})^*) = i \sum_{j=1}^d (\eta_j^{\varepsilon} \partial_j + \partial_j(\eta_j^{\varepsilon} \cdot)) + \varepsilon^{-1} v^{\varepsilon}.$$

Функция $\mathcal{Q}(\mathbf{x}) := \mathcal{V}(\mathbf{x}) + \langle g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle$ удовлетворяет условию (2.17) с подходящим показателем $s' = \min\{s, \rho/2\}$. Реализуется пример 2.2.1. За счёт добавления слагаемого $\lambda\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$ будем считать, что оператор $\mathcal{M}_{\varepsilon} + \lambda\mathcal{Q}_0^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ положительно определён. Здесь $\mathcal{Q}_0(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая положительно определённая и ограниченная функция, а параметр λ подчинён ограничению (2.22) (при $f = 1$). Таким образом, оператор $\mathcal{M}_{\varepsilon} + \lambda\mathcal{Q}_0^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ приведён к виду (3.1):

$$\mathcal{M}_{\varepsilon} := \mathcal{M}_{\varepsilon} + \lambda\mathcal{Q}_0^{\varepsilon}(\mathbf{x}) = -\operatorname{div} g^{\varepsilon}(\mathbf{x})\nabla + \sum_{j=1}^d (a_j^{\varepsilon}(\mathbf{x})D_j + D_j a_j^{\varepsilon}(\mathbf{x})^*) + \mathcal{Q}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{Q}_0^{\varepsilon}(\mathbf{x}).$$

Исходные данные (2.71) сейчас сводятся к следующему набору:

$$\begin{aligned} & d, \rho, s; \|g\|_{L_{\infty}}, \|g^{-1}\|_{L_{\infty}}, \|\mathbf{A}\|_{L_{\rho}(\Omega)}, \|v\|_{L_s(\Omega)}, \|\mathcal{V}\|_{L_s(\Omega)}, \\ & \lambda, \|\mathcal{Q}_0\|_{L_{\infty}}, \|\mathcal{Q}_0^{-1}\|_{L_{\infty}}, \quad \text{параметры решётки } \Gamma. \end{aligned}$$

Построим эффективный оператор. Матрица $\Lambda(\mathbf{x})$ является матрицей-строкой $\Lambda(\mathbf{x}) = i(\psi_1(\mathbf{x}), \dots, \psi_d(\mathbf{x}))$, где $\psi_j \in \tilde{H}^1(\Omega)$ — (слабое) решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \quad \int_{\Omega} \psi_j(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — стандартные орты в $\mathbb{R}^d$. Матрица $\tilde{g}(\mathbf{x})$ — это $(d \times d)$ -матрица со столбцами $g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$. Эффективная матрица определяется стандартным образом: $g^0 = |\Omega|^{-1} \int_{\Omega} \tilde{g}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}$.

Γ -периодическая матричнозначная функция $\tilde{\Lambda}(\mathbf{x})$, являющаяся решением задачи (2.55), представляется в виде

$$\tilde{\Lambda}(\mathbf{x}) = \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + i\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}),$$

где вещественные Γ -периодические функции $\tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x})$, $\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x})$ являются решениями задач

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) + v(\mathbf{x}) &= 0, & \int_{\Omega} \tilde{\Lambda}_1(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0, \\ -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla\tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) + \operatorname{div} g(\mathbf{x})\mathbf{A}(\mathbf{x}) &= 0, & \int_{\Omega} \tilde{\Lambda}_2(\mathbf{x}) d\mathbf{x} &= 0. \end{aligned}$$

Постоянные матрица-столбец V и число W определяются согласно (2.58) и (2.59). Имеем:

$$\begin{aligned} -\mathbf{D}^*Vu - V^*\mathbf{D}u + \sum_{j=1}^d (\overline{a_j + a_j^*})D_ju &= \\ = i \operatorname{div}(V_1 + iV_2)u + (V_1^T - iV_2^T)i\nabla u + 2i \sum_{j=1}^d \overline{\eta_j} \partial_j u &= 2i \langle \nabla u, V_1 + \overline{\eta} \rangle, \end{aligned}$$

где $V_1 = \operatorname{Re} V, V_2 = \operatorname{Im} V$. В итоге эффективный оператор $\mathcal{M}^0$ принимает вид

$$\mathcal{M}^0 u = -\operatorname{div} g^0 \nabla u + 2i \langle \nabla u, V_1 + \bar{\eta} \rangle + (\bar{\mathcal{Q}} + \lambda \bar{\mathcal{Q}}_0 - W)u,$$

что можно записать в виде

$$\mathcal{M}^0 u = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0)^* g^0 (\mathbf{D} - \mathbf{A}^0) u + \mathcal{V}^0 u. \quad (4.6)$$

где

$$\mathbf{A}^0 = (g^0)^{-1} (V_1 + \overline{g\mathbf{A}}), \quad \mathcal{V}^0 = \bar{\mathcal{V}} + \lambda \bar{\mathcal{Q}}_0 + \overline{\langle g\mathbf{A}, \mathbf{A} \rangle} - \langle g^0 \mathbf{A}^0, \mathbf{A}^0 \rangle - W. \quad (4.7)$$

Рассмотрим задачу Коши

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathcal{M}_\varepsilon u_\varepsilon)(\mathbf{x}, s) + F(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (4.8)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, и соответствующую ей усреднённую задачу

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathcal{M}^0 u_0)(\mathbf{x}, s) + F(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}, \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (4.9)$$

Сейчас выполнены условия предложения 2.3.4(1°). Поэтому применима теорема 3.2.2, которая даёт следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.1.1. Пусть u_ε — решение задачи (4.8) и пусть u_0 — решение задачи (4.9).

1°. Если $\phi \in H^r(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d))$, где $0 \leq r \leq 2$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$\|u_\varepsilon(\cdot, s) - u_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{r/2} \widehat{\mathfrak{C}}_2(r; s) (\|\phi\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,s); H^r(\mathbb{R}^d))}),$$

где константа $\widehat{\mathfrak{C}}_2(r; s)$ определена в (3.13).

2°. Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $F \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon(\cdot, s) - u_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

4.2 Уравнение Шрёдингера с сильно сингулярным потенциалом

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} + \check{v}(\mathbf{x})$, где $\check{g}(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая симметричная $(d \times d)$ -матрица-функция с вещественными элементами, ограниченная и положительно определённая, а $\check{v}(\mathbf{x})$ — вещественная Γ -периодическая функция такая, что

$$\check{v} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > \frac{d}{2} \text{ при } d \geq 2.$$

Строгое определение оператора $\tilde{\mathcal{A}}$ даётся через квадратичную форму

$$\tilde{\mathfrak{a}}[u, u] = \int_{\mathbb{R}^d} (\langle \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D}u, \mathbf{D}u \rangle + \check{v}(\mathbf{x})|u|^2) dx, \quad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \quad (4.10)$$

За счёт добавления к $\check{v}$ постоянной будем считать, что краем спектра оператора $\tilde{\mathcal{A}}$ является точка $\lambda_0 = 0$. При этом условия оператора $\tilde{\mathcal{A}}$ допускает удобную факторизацию (см., например, [BSu1, гл. 6, п. 1.1]). Для описания этой факторизации рассмотрим уравнение

$$\mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} \omega(\mathbf{x}) + \check{v}(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) = 0. \quad (4.11)$$

Существует Γ -периодическое решение $\omega \in \tilde{H}^1(\Omega)$ этого уравнения, определённое с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, чтобы $\omega(\mathbf{x}) > 0$ и

$$\int_{\Omega} \omega^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = |\Omega|. \quad (4.12)$$

Оказывается, что решение $\omega(\mathbf{x})$ положительно определено и ограничено, а нормы $\|\omega\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ контролируются через $\|\check{g}\|_{L_\infty}$, $\|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\|\check{v}\|_{L_s(\Omega)}$. Функция ω является мультипликатором как в $H^1(\mathbb{R}^d)$, так и в $\tilde{H}^1(\Omega)$. Подстановка $u = \omega \varphi$ преобразует форму (4.10) к виду

$$\tilde{\mathfrak{a}}[u, u] = \int_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\mathbf{x}) \langle \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} \varphi, \mathbf{D} \varphi \rangle \, d\mathbf{x}, \quad \varphi \in H^1(\mathbb{R}^d).$$

Это означает, что справедлива факторизация

$$\tilde{\mathcal{A}} = \omega^{-1} \mathbf{D}^* g \mathbf{D} \omega^{-1}, \quad g = \omega^2 \check{g}. \quad (4.13)$$

Рассмотрим теперь оператор

$$\tilde{\mathcal{A}}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1} \mathbf{D}^* g^\varepsilon \mathbf{D} (\omega^\varepsilon)^{-1}. \quad (4.14)$$

В исходных терминах это выражение запишется в виде

$$\tilde{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* \check{g}^\varepsilon \mathbf{D} + \varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon, \quad (4.15)$$

что можно толковать как оператор Шрёдингера с быстро осциллирующими метрикой $\check{g}^\varepsilon$ и сильно сингулярным потенциалом $\varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon$.

Далее, пусть $\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \{A_1(\mathbf{x}), \dots, A_d(\mathbf{x})\}^T$, где $A_j(\mathbf{x})$ — вещественные Γ -периодические функции, удовлетворяющие (4.2). Пусть $\tilde{v}(\mathbf{x})$ и $\tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{x})$ — Γ -периодические вещественные функции, такие что

$$\begin{aligned} \tilde{v}, \tilde{\mathcal{V}} \in L_s(\Omega), \quad s = 1 \text{ при } d = 1, \quad s > \frac{d}{2} \text{ при } d \geq 2; \\ \int_{\Omega} \omega^2(\mathbf{x}) \tilde{v}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{M}}_\varepsilon$, формально заданный выражением

$$\tilde{\mathcal{M}}_\varepsilon = (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x}))^* \check{g}^\varepsilon(\mathbf{x}) (\mathbf{D} - \mathbf{A}^\varepsilon(\mathbf{x})) + \varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-1} \tilde{v}^\varepsilon(\mathbf{x}) + \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (4.17)$$

(Строгое определение даётся через квадратичную форму.) Оператор (4.17) можно трактовать как оператор Шрёдингера с метрикой $\check{g}^\varepsilon$, магнитным потенциалом $\mathbf{A}^\varepsilon$ и электрическим потенциалом $\varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon + \varepsilon^{-1} \tilde{v}^\varepsilon + \tilde{\mathcal{V}}^\varepsilon$, включающим сингулярные слагаемые $\varepsilon^{-2} \check{v}^\varepsilon$ и $\varepsilon^{-1} \tilde{v}^\varepsilon$. За счёт добавления подходящей константы λ всегда можно считать, что оператор $\tilde{\mathcal{M}}_\varepsilon := \tilde{\mathcal{M}}_\varepsilon + \lambda$ положительно определён.

Положим

$$v(\mathbf{x}) := \tilde{v}(\mathbf{x}) \omega^2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{V}(\mathbf{x}) := \tilde{\mathcal{V}}(\mathbf{x}) \omega^2(\mathbf{x}), \quad \mathcal{Q}_0(\mathbf{x}) := \omega^2(\mathbf{x}). \quad (4.18)$$

Учитывая (4.14), (4.15), убеждаемся в справедливости тождества $\widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon = (\omega^\varepsilon)^{-1} \mathcal{M}_\varepsilon (\omega^\varepsilon)^{-1}$, где оператор $\mathcal{M}_\varepsilon$ описан в предыдущем пункте, причём для него g определено в (4.13), а v , $\mathcal{V}$ и $\mathcal{Q}_0$ — в (4.18). В силу (4.16) коэффициенты v и $\mathcal{V}$ удовлетворяют требуемым условиям (4.3).

Воспользуемся результатами п. 3.2.2. Сейчас $f = \omega^{-1}$. Функция $\mathfrak{Q} = (ff^*)^{-1}$ равна $\mathfrak{Q}(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x})$. В силу условия (4.12) имеем $\overline{\mathfrak{Q}} = 1$ и $f_0 = (\overline{\mathfrak{Q}})^{-1/2} = 1$. Исходные данные (2.27) сейчас сводятся к следующему набору:

$$d, \rho, s; \|\check{g}\|_{L_\infty}, \|\check{g}^{-1}\|_{L_\infty}, \|\mathbf{A}\|_{L_\rho(\Omega)}, \|\check{v}\|_{L_s(\Omega)}, \|\check{v}\|_{L_s(\Omega)}, \|\check{\mathcal{V}}\|_{L_s(\Omega)}, \\ \lambda, \quad \text{параметры решётки } \Gamma.$$

Рассмотрим задачу Коши с оператором $\widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\widetilde{\mathcal{M}}_\varepsilon u_\varepsilon)(\mathbf{x}, s) + \omega^\varepsilon(\mathbf{x}) F(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}, \\ (\omega^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1} u_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \quad (4.19)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, и соответствующую ей усреднённую задачу

$$\begin{cases} i \frac{\partial u_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathcal{M}^0 u_0)(\mathbf{x}, s) + F(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, s \in \mathbb{R}, \\ u_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d. \end{cases} \quad (4.20)$$

Здесь $\mathcal{M}^0$ — эффективный оператор (4.6) для оператора $\mathcal{M}$ с коэффициентами (4.13), (4.18). Сейчас выполнены условия предложения 2.5.1(1°). Поэтому применима теорема 3.2.4, которая даёт следующий результат.

ТЕОРЕМА 4.2.1. Пусть u_ε — решение задачи (4.19) и пусть u_0 — решение задачи (4.20).

1°. Если $\phi \in H^r(\mathbb{R}^d)$, $F \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; H^r(\mathbb{R}^d))$, где $0 \leq r \leq 2$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$\|(\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon(\cdot, s) - u_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leq \varepsilon^{r/2} \mathfrak{C}_2(r; s) (\|\phi\|_{H^r(\mathbb{R}^d)} + \|F\|_{L_1((0,s); H^r(\mathbb{R}^d))}),$$

где константа $\mathfrak{C}_2(r; s)$ определена в (3.16).

2°. Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^d)$ и $F \in L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d))$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|(\omega^\varepsilon)^{-1} u_\varepsilon(\cdot, s) - u_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

5 Применение общих результатов: двумерное волновое уравнение Паули

5.1 Оператор $\mathcal{P}$

Пусть магнитный потенциал задан вектор-функцией $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = \{\check{A}_1(\mathbf{x}), \check{A}_2(\mathbf{x})\}$, где $\check{A}_j(\mathbf{x})$ — Γ -периодические вещественные функции в $\mathbb{R}^2$, причём

$$\check{A}_j \in L_\rho(\Omega), \quad \rho > 2, \quad j = 1, 2. \quad (5.1)$$

Напомним стандартные обозначения для матриц Паули:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

В пространстве $L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$ рассмотрим оператор $\mathcal{D} = (D_1 - \check{A}_1)\sigma_1 + (D_2 - \check{A}_2)\sigma_2$, $\text{Dom } \mathcal{D} = H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$. По определению оператор Паули $\mathcal{P}$ есть квадрат оператора $\mathcal{D}$:

$$\mathcal{P} = \mathcal{D}^2 = \begin{pmatrix} P_- & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

Точное определение оператора $\mathcal{P}$ даётся через замкнутую квадратичную форму $\|\mathcal{D}\mathbf{u}\|_{L_2(\mathbb{R}^2)}^2$, $\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$. Если потенциал $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ — липшицева функция, то блоки оператора (5.2) задаются выражениями

$$P_{\pm} = (\mathbf{D} - \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}))^2 \pm \check{B}(\mathbf{x}), \quad \check{B}(\mathbf{x}) := \partial_1 \check{A}_2(\mathbf{x}) - \partial_2 \check{A}_1(\mathbf{x}).$$

Здесь $\check{B}(\mathbf{x})$ имеет смысл напряжённости магнитного поля.

Оператор $\mathcal{P}$ допускает удобную факторизацию. За счёт калибровочного преобразования можно подчинить потенциал $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ условиям

$$\text{div } \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_{\Omega} \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0, \quad (5.3)$$

не нарушая (5.1). (Первое равенство в (5.3) понимается в смысле распределений.) Тогда существует Γ -периодическая вещественная функция φ такая, что $\nabla\varphi(\mathbf{x}) = \{\check{A}_2(\mathbf{x}), -\check{A}_1(\mathbf{x})\}$ и $\bar{\varphi} = 0$. Отметим, что $\varphi \in \widetilde{W}_{\rho}^1(\Omega) \subset C^{\sigma}$, $\sigma = 1 - 2/\rho$. Положим $\omega_{\pm}(\mathbf{x}) := e^{\pm\varphi(\mathbf{x})}$. Тогда оператор (5.2) может быть записан в виде:

$$\mathcal{P} = f_{\times}(\mathbf{x})b_{\times}(\mathbf{D})g_{\times}(\mathbf{x})b_{\times}(\mathbf{D})f_{\times}(\mathbf{x}), \quad (5.4)$$

где

$$b_{\times}(\mathbf{D}) = \begin{pmatrix} 0 & D_1 - iD_2 \\ D_1 + iD_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad f_{\times}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_+(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \omega_-(\mathbf{x}) \end{pmatrix}, \quad g_{\times}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \omega_+^2(\mathbf{x}) & 0 \\ 0 & \omega_-^2(\mathbf{x}) \end{pmatrix}.$$

Блоки $P_{\pm}$ оператора (5.2) могут быть записаны в виде

$$P_+ = \omega_- \partial_+ \omega_+^2 \partial_- \omega_-, \quad P_- = \omega_+ \partial_- \omega_-^2 \partial_+ \omega_+,$$

где мы ввели обозначение $\partial_{\pm} = D_1 \pm iD_2$.

5.2 Оператор $\widehat{\mathcal{B}}_{\times}$

Пусть заданы $\eta_{j,\times}(\mathbf{x})$, $j = 1, 2$, $v_{\times}(\mathbf{x})$, $\mathcal{Q}_{\times}(\mathbf{x})$ — Γ -периодические эрмитовы (2×2) -матричнозначные функции в $\mathbb{R}^2$ такие, что

$$\eta_{j,\times} \in L_{\rho}(\Omega), \quad \rho > 2, \quad j = 1, 2; \quad v_{\times}, \mathcal{Q}_{\times} \in L_s(\Omega), \quad s > 1; \\ \int_{\Omega} v_{\times}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Рассмотрим оператор $\widehat{\mathcal{B}}_\times$, формально заданный выражением

$$\widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} = b_\times(\mathbf{D})g_\times^\varepsilon(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D}) + i \sum_{j=1}^2 (\eta_{j,\times}^\varepsilon(\mathbf{x})\partial_j + \partial_j(\eta_{j,\times}^\varepsilon(\mathbf{x})\cdot)) + \varepsilon^{-1}v_\times^\varepsilon(\mathbf{x}) + \mathcal{Q}_\times^\varepsilon(\mathbf{x}). \quad (5.5)$$

Чтобы записать оператор (5.5) в требуемом виде, введём $\Phi_\times$ — Γ -периодическое решение уравнения $\Delta\Phi_\times(\mathbf{x}) = v_\times(\mathbf{x})$, $\int_\Omega \Phi_\times(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0$ и положим $\zeta_{j,\times} = -\partial_j\Phi_\times$. Тогда $v_\times = -\sum_{j=1}^2 \partial_j\zeta_{j,\times}$. Положим $a_{j,\times} = -\eta_{j,\times} + i\zeta_{j,\times}$. Легко проверить, что $a_{j,\times} \in L_{\rho'}(\Omega)$ при некотором $\rho' > 2$ (зависящем от ρ и s), причём $\|a_{j,\times}\|_{L_{\rho'}(\Omega)}$ контролируется через $\|\eta_{j,\times}\|_{L_\rho(\Omega)}$, $\|v_\times\|_{L_s(\Omega)}$ и параметры решётки Γ ; подробнее см. [Su4, п. 14.2]. За счёт добавления слагаемого $\lambda\mathcal{Q}_{0,\times}(\mathbf{x})$ будем считать, что оператор $\widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} + \lambda\mathcal{Q}_{0,\times}^\varepsilon(\mathbf{x})$ положительно определён. Здесь $\mathcal{Q}_{0,\times}(\mathbf{x})$ — Γ -периодическая положительно определённая и ограниченная (2×2) -матричнозначная функция, а параметр λ подчинён ограничению (2.22) (при $f = \mathbf{1}_2$). Таким образом, оператор $\widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} + \lambda\mathcal{Q}_{0,\times}^\varepsilon(\mathbf{x})$ можно записать в виде (3.1):

$$\begin{aligned} \widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} &:= \widehat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} + \lambda\mathcal{Q}_{0,\times}^\varepsilon(\mathbf{x}) = \\ &= b_\times(\mathbf{D})g_\times^\varepsilon(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D}) + \sum_{j=1}^d (a_{j,\times}^\varepsilon(\mathbf{x})D_j + D_j(a_{j,\times}^\varepsilon(\mathbf{x}))^*) + \mathcal{Q}_\times^\varepsilon(\mathbf{x}) + \lambda\mathcal{Q}_{0,\times}^\varepsilon(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Опишем эффективный оператор. Уравнение (2.54) сейчас имеет вид

$$b_\times(\mathbf{D})g_\times(\mathbf{x})(b_\times(\mathbf{D})\Lambda_\times(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_2) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda_\times(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Его решение $\Lambda_\times$ можно представить в виде

$$\Lambda_\times(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 0 & \Lambda_-(\mathbf{x}) \\ \Lambda_+(\mathbf{x}) & 0 \end{pmatrix},$$

где $\Lambda_\pm$ являются Γ -периодическими решениями задачи

$$\partial_\pm \omega_\pm^2(\mathbf{x})(\partial_\mp \Lambda_\pm(\mathbf{x}) + 1) = 0, \quad \int_\Omega \Lambda_\pm(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Поскольку $m = n$, эффективная матрица равна $g_\times^0 = \underline{g}_\times = \begin{pmatrix} g_+^0 & 0 \\ 0 & g_-^0 \end{pmatrix}$, $g_\pm^0 = \underline{\omega}_\pm^2$. В качестве $\tilde{\Lambda}$ выступает Γ -периодическое решение $\tilde{\Lambda}_\times$ задачи

$$b_\times(\mathbf{D})g_\times(\mathbf{x})b_\times(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x}) + v_\times(\mathbf{x}) + i \sum_{j=1}^2 \partial_j \eta_{j,\times}(\mathbf{x}) = 0, \quad \int_\Omega \tilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Матрицы (2.58) и (2.59) сейчас реализуются в виде

$$\begin{aligned} V_\times &:= |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b_\times(\mathbf{D})\Lambda_\times(\mathbf{x}))^* g_\times(\mathbf{x}) (b_\times(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x})) d\mathbf{x}, \\ W_\times &:= |\Omega|^{-1} \int_\Omega (b_\times(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x}))^* g_\times(\mathbf{x}) (b_\times(\mathbf{D})\tilde{\Lambda}_\times(\mathbf{x})) d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Вычисление эффективного оператора по общему правилу даёт

$$\widehat{\mathcal{B}}_\times^0 = -g_\times^0 \Delta + 2i(\eta_{1,\times}^0 \partial_1 + \eta_{2,\times}^0 \partial_2) + \overline{\mathcal{Q}_\times} - W_\times + \lambda \overline{\mathcal{Q}_{0,\times}},$$

где $2\eta_{1,\times}^0 = 2\overline{\eta_{1,\times}} + \sigma_1 V_\times + V_\times^* \sigma_1$, $2\eta_{2,\times}^0 = 2\overline{\eta_{2,\times}} + \sigma_2 V_\times + V_\times^* \sigma_2$.

5.3 Оператор $\mathcal{B}_{\times,\varepsilon}$

Рассмотрим оператор $\mathcal{B}_{\times,\varepsilon}$, формально заданный выражением

$$\mathcal{B}_{\times,\varepsilon} = f_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x})b_{\times}(\mathbf{D})g_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x})b_{\times}(\mathbf{D})f_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) + i \sum_{j=1}^2 \left(\check{\eta}_{j,\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x})\partial_j + \partial_j(\check{\eta}_{j,\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x})\cdot) \right) + \varepsilon^{-1}\check{v}_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \check{\mathcal{Q}}_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x}). \quad (5.6)$$

(Строгое определение даётся через квадратичную форму.) Здесь $\check{\eta}_{j,\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$, $j = 1, 2$, — Γ -периодические *диагональные* (2×2) -матрицы-функции с вещественными элементами такие, что $\check{\eta}_{j,\times}^{\varepsilon} \in L_{\rho}(\Omega)$, $\rho > 2$; $\check{v}_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ и $\check{\mathcal{Q}}_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x})$ — Γ -периодические эрмитовы (2×2) -матрицы-функции, причём

$$\check{v}_{\times}, \check{\mathcal{Q}}_{\times} \in L_s(\Omega), \quad s > 1, \quad \int_{\Omega} f_{\times}(\mathbf{x})^{-1}\check{v}_{\times}(\mathbf{x})f_{\times}(\mathbf{x})^{-1}d\mathbf{x} = 0;$$

ЗАМЕЧАНИЕ 5.3.1. *Считая потенциалы $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ и $\check{\mathbf{A}}(\mathbf{x})$ липшицевыми функциями, рассмотрим оператор*

$$\mathfrak{B}_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \mathfrak{B}_{-,\varepsilon} & 0 \\ 0 & \mathfrak{B}_{+,\varepsilon} \end{pmatrix}, \quad (5.7)$$

$$\mathfrak{B}_{\pm,\varepsilon} = (\mathbf{D} - \varepsilon^{-1}\check{\mathbf{A}}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) - \mathbf{A}^{\varepsilon}(\mathbf{x}))^2 \pm (\varepsilon^{-2}\check{B}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \varepsilon^{-1}B^{\varepsilon}(\mathbf{x})),$$

где $B(\mathbf{x}) = \partial_1 A_2(\mathbf{x}) - \partial_2 A_1(\mathbf{x})$. Оператор (5.7) — это матричный оператор Паули с магнитным потенциалом $\varepsilon^{-1}\check{\mathbf{A}}^{\varepsilon} + \mathbf{A}^{\varepsilon}$ (содержащим сингулярное слагаемое). Пусть $\check{v}_{\times}(\mathbf{x})$ и $\mathcal{V}_{\times}(\mathbf{x})$ — Γ -периодические эрмитовы (2×2) -матрицы-функции, причём $\check{v}_{\times}, \mathcal{V}_{\times} \in L_s(\Omega)$, $s > 1$. Рассмотрим возмущённый электрическим потенциалом $\varepsilon^{-1}\check{v}_{\times}^{\varepsilon} + \mathcal{V}_{\times}^{\varepsilon}$ (также содержащим сингулярное слагаемое) оператор Паули

$$\tilde{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} = \mathfrak{B}_{\varepsilon} + \varepsilon^{-1}\check{v}_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \mathcal{V}_{\times}^{\varepsilon}(\mathbf{x}). \quad (5.8)$$

Дополнительно наложим условие нормировки на $\check{v}_{\times}$:

$$\int_{\Omega} f_{\times}(\mathbf{x})^{-1} (\check{v}_{\times}(\mathbf{x}) + 2\langle \check{\mathbf{A}}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{x}) \rangle \mathbf{1}_2 - B(\mathbf{x})\sigma_3) f_{\times}(\mathbf{x})^{-1}d\mathbf{x} = 0.$$

Тогда оператор (5.8) может быть записан в виде (5.6) при

$$\check{\eta}_{j,\times} = A_j \mathbf{1}_2, \quad j = 1, 2; \quad \check{v}_{\times} = \tilde{v}_{\times} + 2\langle \check{\mathbf{A}}, \mathbf{A} \rangle \mathbf{1}_2 - B\sigma_3, \quad \check{\mathcal{Q}}_{\times} = \mathcal{V}_{\times} + |\mathbf{A}|^2 \mathbf{1}_2.$$

За счёт добавления подходящего слагаемого $\lambda \mathbf{1}_2$ всегда можно считать, что оператор $\mathcal{B}_{\times,\varepsilon} := \mathfrak{B}_{\times,\varepsilon} + \lambda \mathbf{1}_2$ положительно определён.

Справедливо тождество $\mathcal{B}_{\times,\varepsilon} = f_{\times}^{\varepsilon} \hat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon} f_{\times}^{\varepsilon}$, где коэффициенты оператора $\hat{\mathcal{B}}_{\times,\varepsilon}$ выбраны следующим образом:

$$\eta_{j,\times} = f_{\times}^{-1} \check{\eta}_{j,\times} f_{\times}^{-1}, \quad j = 1, 2; \quad v_{\times} = f_{\times}^{-1} \check{v}_{\times} f_{\times}^{-1}, \quad \mathcal{Q}_{\times} = f_{\times}^{-1} \check{\mathcal{Q}}_{\times} f_{\times}^{-1}; \quad \mathcal{Q}_{0,\times} = f_{\times}^{-2}.$$

Роль $\mathcal{Q}$ играет матрица $\mathfrak{Q}_{\times} = f_{\times}^{-2} = g_{\times}^{-1}$. Тогда $\bar{\mathfrak{Q}}_{\times} = \begin{pmatrix} (g_{+}^0)^{-1} & 0 \\ 0 & (g_{-}^0)^{-1} \end{pmatrix}$. Матрица f_0 сейчас равна $f_{\times,0} = \begin{pmatrix} (g_{+}^0)^{1/2} & 0 \\ 0 & (g_{-}^0)^{1/2} \end{pmatrix}$, а оператор (3.4) имеет вид $\mathcal{B}_{\times}^0 = f_{\times,0} \hat{\mathcal{B}}_{\times}^0 f_{\times,0}$.

5.4 Задача Коши для оператора $\mathcal{B}_{\times, \varepsilon}$

Рассмотрим задачу Коши для волнового уравнения Паули

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathcal{B}_{\times, \varepsilon} \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, s \in \mathbb{R}, \\ f_\times^\varepsilon(\mathbf{x}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, \end{cases} \quad (5.9)$$

где $\phi \in L_2(\mathbb{R}^2; \mathbb{C}^2)$, и соответствующую ей усреднённую задачу

$$\begin{cases} i \frac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)}{\partial s} = (\mathcal{B}_\times^0 \mathbf{u}_0)(\mathbf{x}, s), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2, s \in \mathbb{R}, \\ f_{\times, 0} \mathbf{u}_0(\mathbf{x}, 0) = \phi(\mathbf{x}), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (5.10)$$

Применима теорема 3.2.3. Исходные данные (2.27) сейчас сводятся к следующему набору:

$$\rho, s; \|\omega_+\|_{L_\infty}, \|\omega_+^{-1}\|_{L_\infty}, \|\omega_-\|_{L_\infty}, \|\omega_-^{-1}\|_{L_\infty}, \\ \|\check{\eta}_{j, \times}\|_{L_\rho(\Omega)}, j = 1, 2; \|\check{v}_\times\|_{L_s(\Omega)}, \|\check{Q}_\times\|_{L_s(\Omega)}, \lambda, \quad \text{параметры решётки } \Gamma.$$

Мы приходим к следующему утверждению.

ТЕОРЕМА 5.4.1. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (5.9) и пусть $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (5.10).

1°. Если $\phi \in H^r(\mathbb{R}^2)$, где $0 \leq r \leq 3$, то при $s \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка

$$\|f_\times^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - f_{\times, 0} \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} \leq \varepsilon^{r/3} \mathfrak{C}_1(r; s) \|\phi\|_{H^r(\mathbb{R}^2)},$$

где константа $\mathfrak{C}_1(r; s)$ определена в (3.15).

2°. Если $\phi \in L_2(\mathbb{R}^2)$, то

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_\times^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, s) - f_{\times, 0} \mathbf{u}_0(\cdot, s)\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Результат теоремы 5.4.1 является точным. Покажем это. Для этого рассмотрим оператор $\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_{11, \Omega, \times}(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})$. Здесь оператор $\widehat{N}_{11, \Omega, \times}(\boldsymbol{\theta})$ играет роль $\widehat{N}_{11, \Omega}(\boldsymbol{\theta})$ для $\mathcal{B}_\times$ (см. п. 2.5.2). Используя формулы (см. (1.143) и (1.134))

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) &= f_\times P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1} \widehat{P}, \\ \widehat{N}_{11, \Omega, \times}(\boldsymbol{\theta}) &= \widehat{P} f_\times^{-1} N_{11, \times}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1} \widehat{P}, \end{aligned}$$

получаем $\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_{11, \Omega, \times}(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{P} f_\times^{-1} P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) N_{11, \times}(\boldsymbol{\theta}) P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1} \widehat{P}$. Как показано в [BSu3, п. 12.4] (см. также [Su8, пп. 16.2 и 16.3]), оператор $N_{11, \times}(\boldsymbol{\theta})$, играющий роль $N_{11}(\boldsymbol{\theta})$ для $\mathcal{B}_\times$, имеет вид $N_{11, \times}(\boldsymbol{\theta}) = \mu(\boldsymbol{\theta}) I|_{\mathfrak{H}}$. Здесь

$$\begin{aligned} \mu(\boldsymbol{\theta}) &= -2g_-^0 \gamma \left(\theta_1 \operatorname{Re} \overline{\omega_+^2 w} + \theta_2 \operatorname{Im} \overline{\omega_+^2 w} \right), \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1, \\ \gamma &= g_+^0 g_-^0 = |\Omega|^2 \|\omega_+\|_{L_2(\Omega)}^{-2} \|\omega_-\|_{L_2(\Omega)}^{-2}, \end{aligned}$$

а $w(\mathbf{x})$ — Γ -периодическое решение уравнения

$$(D_1 - iD_2)w(\mathbf{x}) = g_+^0 \omega_-^2(\mathbf{x}) - 1, \quad \int_{\Omega} w(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0.$$

Поэтому $\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_{11, \Omega, \times}(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) = \mu(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} f_\times^{-1} P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1} \widehat{P}$. Ясно, что $P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1} \widehat{P} \neq 0$ при любом $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1$, а потому $\widehat{P} f_\times^{-1} P_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) f_\times^{-1} \widehat{P} \neq 0$ при любом $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1$. Приведём пример, заимствованный из [Su8, пример 16.2], в котором $\mu(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$.

ПРИМЕР 5.4.1. Пусть $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^2$ и пусть $\overline{\omega_-^2}(\mathbf{x}) = 1 + \alpha(\sin x_2 + 4 \sin 2x_2)$. Тогда $g_+^0 = 1$ и $w(\mathbf{x}) = \alpha(\cos x_2 + 4 \cos 2x_2)$. Вычислим $\overline{\omega_+^2}w$:

$$\begin{aligned}\overline{\omega_+^2}w &= \frac{\alpha}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos x + 2 \cos 2x}{1 + \alpha(\sin x + 4 \sin 2x)} dx = \frac{3\alpha}{8\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos x}{1 + \alpha(\sin x + 4 \sin 2x)} dx = \\ &= -\frac{6\alpha^2}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{t\sqrt{1-t^2}}{(1+\alpha t)^2 - 64\alpha^2 t^2(1-t^2)} dt = \\ &= \frac{24\alpha^3}{\pi} \int_0^1 \frac{t^2\sqrt{1-t^2}}{((1+\alpha t)^2 - 64\alpha^2 t^2(1-t^2))((1-\alpha t)^2 - 64\alpha^2 t^2(1-t^2))} dt.\end{aligned}$$

Для достаточно малого $\alpha > 0$ (например, можно взять $\alpha = \frac{1}{16}$) подынтегральная функция в последнем интеграле положительна, поэтому $\overline{\omega_+^2}w > 0$ и $\mu(\boldsymbol{\theta}) = -2g_-^0\gamma\theta_1\overline{\omega_+^2}w \neq 0$ при $\theta_1 \neq 0$. Таким образом, $\mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_{11,\Omega,\times}(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_{1,1}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при $\theta_1 \neq 0$. Применима теорема 3.1.6.

Список литературы

- [APi] Allaire G., Piatnitski A., *Homogenization of the Schrödinger equation and effective mass theorems*, Comm. Math. Phys. **258** (2005), 1–22.
- [BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.
- [BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. **5**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.
- [BSu1] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ, **15:5** (2003), 1–108.
- [BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряжённого семейства с учётом корректора*, Алгебра и анализ, **17:5** (2005), 69–90.
- [BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ, **17:6** (2005), 1–104.
- [BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Алгебра и анализ, **18:6** (2006), 1–130.
- [BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ, **20:6** (2008), 30–107.
- [Bo] Борисов Д. И., *Асимптотики решений эллиптических систем с быстро осциллирующими коэффициентами*, Алгебра и анализ, **20:2** (2008), 19–42.
- [COrVa] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *Bloch approximation in homogenization and applications*, SIAM J. Math. Anal., **33:5** (2002), 1166–1198.
- [V] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ, **21:1** (2009), 3–60.

- [VSu] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учёте первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ, **24**:2 (2012), 1–103.
- [DSu1] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений*, Функц. анализ и его прил., **50**:4 (2016), 91–96.
- [DSu2] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral Approach to Homogenization of Hyperbolic Equations With Periodic Coefficients*, J. Differ. Equ., **264**:12 (2018), 7463–7522.
- [Zh] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН, **406**:5 (2006), 597–601.
- [ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.
- [ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys., **12**:4 (2005), 515–524.
- [ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys., **13**:2 (2006), 224–237.
- [ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН, **71**:3(429) (2016), 27–122.
- [K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.
- [M1] Мешкова Ю. М., *Усреднение задачи Коши для параболических систем с периодическими коэффициентами*, Алгебра и анализ, **25**:6 (2013), 125–177.
- [M2] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coefficients*, preprint (2017), <https://arxiv.org/abs/1705.02531>.
- [M3] Мешкова Ю. М., *Об усреднении периодических гиперболических систем*, Матем. заметки, принято к печати.
- [Se] Севостьянова Е. В., *Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами*, Матем. сб., **115(157)**:2(6) (1981), 204–222.
- [Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 86–90.
- [Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. **220**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233.
- [Su3] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$* , Math. Model. Nat. Phenom., **5**:4 (2010), 390–447.
- [Su4] Суслина Т. А., *Усреднение в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$ для периодических эллиптических дифференциальных операторов второго порядка при включении членов первого порядка*, Алгебра и анализ, **22**:1 (2010), 108–221.
- [Su5] Суслина Т. А., *Аппроксимация резольвенты дупараметрического квадратичного операторного пучка вблизи нижнего края спектра*, Алгебра и анализ, **25**:5 (2013), 221–251.

[Su6] Суслина Т. А., *Усреднение эллиптических систем с периодическими коэффициентами: операторные оценки погрешности в $L_2(\mathbb{R}^d)$ с учётом корректора*, Алгебра и анализ, **26**:4 (2014), 195–263.

[Su7] Суслина Т. А., *Усреднение уравнений типа Шрёдингера*, Функц. анализ и его прил., **50**:3 (2016), 90–96.

[Su8] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. and Appl., **446**:2 (2017), 1466–1523.