

ПАРУС КЛЕЙНА И ДИОФАНТОВЫ ПРИБЛИЖЕНИЯ ВЕКТОРА

А. А. ЛОДКИН

АННОТАЦИЯ. В работах В. И. Арнольда и его последователей (основанных на идеях Пуанкаре и Клейна) парус Клейна связывался с оператором в \mathbb{R}^n и назывался многомерной цепной дробью. В его терминах формулировались многомерные обобщения теоремы Лагранжа о цепных дробях. Другие обобщения цепных дробей связывались с обобщениями алгоритма Евклида построения аппроксимирующей последовательности рациональных векторов. Мы предлагаем модификацию паруса Клейна, построенного непосредственно по иррациональному вектору (минуя оператор). Предложена числовая характеристика паруса Клейна, связанная с однопараметрической группой преобразований решетки и соответствующей деформацией ячейки Вороного (асимптотическая анизотропия). С этой характеристикой связана надежда дать геометрическую характеристику иррациональных векторов, хуже всего аппроксимируемых рациональными. В трехмерном пространстве предложен вектор (связанный с наименьшим числом Пизо) — кандидат на эту роль. Его можно считать аналогом золотого сечения в классической теории диофантовых приближений.

Классический объект — цепная дробь — настолько многогранен, что в многочисленных работах, посвященных его многомерным обобщениям, приводятся аналоги каких-то отдельных его атрибутов: подходящих дробей (диофантовых приближений), неполных частных, алгоритма Евклида, паруса (многогранника) Клейна, теоремы Лагранжа о периодичности неполных частных, теоремы Гаусса-Хинчина об их статистике. При этом другие атрибуты либо теряют смысл, либо уходят на второй план.

Многогранник Клейна в работах В. И. Арнольда, Е. И. Коркиной, Ж. Лапо, О. Н. Карпенкова и некоторых других авторов [1,3-7] появлялся таким образом: рассматривался линейный оператор из \mathbb{R}^{n+1} в \mathbb{R}^{n+1} , характеристический многочлен которого раскладывается в произведение линейных вещественных форм. Гиперплоскости нулей этих форм образуют разбиение пространства на симплицальные конусы («октанты»). В предположении, что на границе октанта нет целых точек, кроме начала координат, рассматривается выпуклая оболочка содержащихся в нем целых точек — многогранник Клейна — и его граница — парус Клейна. В двумерном случае ($n = 1$) парус — это бесконечная ломаная, в трехмерном — кусочно-линейная поверхность, составленная из граней-многогранников. Эти грани служат аналогом элементов обыкновенной цепной дроби. В терминах характеристик этих граней формулируются обобщения теоремы Лагранжа о периодических цепных дробях, причем периодичность заменяется на инвариантность комбинаторной структуры паруса относительно некоторого оператора, сохраняющего октант, и обобщения теоремы Гаусса-Хинчина.

Key words and phrases. Парус Клейна, многогранник Клейна, диофантовы приближения, золотое сечение, пластическое число, ячейка Вороного.

Поддержано грантом РФФИ № 17-01-00433.

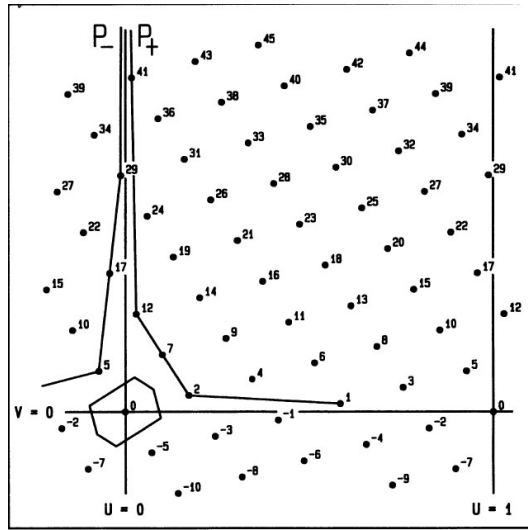


Рис. 1. Две половины паруса S_{\pm} и ячейка Вороного.

Другие обобщения цепных дробей связаны с диофантовыми приближениями иррационального вектора в \mathbb{R}^{n+1} (классический случай: $n = 1$). Имеется ряд алгоритмов (алгоритмы Пуанкаре, Бруна, Якоби-Перрона, Брюно, Парусникова и др.), обобщающих алгоритм Евклида, с помощью которого строится последовательность рациональных векторов-аппроксимантов. В этих алгоритмах рассматривается последовательность наборов (базисов) из $n + 1$ рациональных векторов и процедура перехода от одного такого базиса к следующему. При этом выпуклые оболочки этих базисов стягиваются к лучу, определяемому исходным вектором. При этом парус Клейна при $n > 1$ не используется.

В настоящей заметке предлагается несколько иное определение паруса Клейна, связанное не с оператором, а с произвольным иррациональным лучом. При этом решетка \mathbb{Z}^{n+1} заменяется семейством решеток, зависящих от числового параметра $h > 0$. Для рассмотрения некоторых асимптотических вопросов, связанных с диофантовыми приближениями (например, со скоростью аппроксимации) оказывается удобным изучение деформации ячейки Вороного решетки при $h \rightarrow 0$.

Размерность 1. В одномерном (то есть числовом) варианте задача о приближении вещественного числа x рациональными может быть сформулирована в терминах приближения луча $R_x \in \mathbb{R}^2$ с направляющим вектором $(\cos \alpha, \sin \alpha)$, где $\operatorname{tg} \alpha = x$, целочисленными векторами $(p, q) \in \mathbb{Z}^2$. Эквивалентно, после подходящей линейной замены координат в \mathbb{R}^2 , можно говорить о приближении луча $\{0\} \times \mathbb{R}_+$ точками решетки $L(x, h) \subset \mathbb{R}^2$ с базисом $\{e_1, e_2\}$, где $e_1 = (1, 0), e_2 = (x, h)$ ($h > 0$). Это соответствует идее рассмотрения *многоугольника Клейна*, состоящего из выпуклых оболочек S_{\pm} двух множеств $L(x, h) \cap (\pm \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+) \setminus \{0\}$. Если $x \notin \mathbb{Q}$, то границы многоугольников S_{\pm} представляют собой две бесконечные выпуклые ломаные, составляющие половины *паруса Клейна*.

Вместо того, чтобы, поднимаясь вдоль вертикального луча, следить за приближением к нему слева и справа ломаных, ограничивающих половины паруса, можно уменьшать параметр h и наблюдать крайние точки этих пол, то есть вершины двух ломаных, ограничивающих S_{\pm} , по мере их приближения к началу координат.

Удобно следить за эволюцией *ячейки Вороного* $V = V(x, h)$, то есть многоугольника, который состоит из точек плоскости, удаленных от начала координат менее, чем до остальных точек решетки $L(x, h)$ (Рис. 1). Нетрудно заметить, что в случае, когда $x = \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$ (*золотое сечение*), то есть число, медленнее всего аппроксимируемое рациональными, эти

ячейки в процессе эволюции остаются шестиугольниками с малой асферичностью (наглядное представление об этом дают три семейства хорошо различимых параллельных прямых, на которых лежат все точки решетки, углы между которыми близки к $\pi/3$). Мы предполагаем, что золотое сечение является рекордным в этом (малая асферичность) качестве. Это перекликается с экстремальным свойством золотого сечения в задаче о равномерном распределении арифметической прогрессии на окружности (теорема о трех интервалах), см. [8].

Определение 1. Пусть $V \in \mathbb{R}^n$ — выпуклая компактная окрестность нуля, Γ — её граница. Назовем *асферичностью* V число

$$A(V) = \frac{\max\{\|t\| \mid t \in \Gamma\}}{\min\{\|t\| \mid t \in \Gamma\}}.$$

Определение 2. Пусть $v \in \mathbb{R}^n, h > 0$. Символом $L(v, h)$ обозначим решетку в \mathbb{R}^{n+1} , базисом которой служит набор $\{(e_i, 0) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ векторов, образующих ортонормальный базис в $\mathbb{R}^n \times \{0\}$, и вектор $e_{n+1} = (v, h) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

Определение 3. Назовем *асимптотической анизотропией* семейства решеток $L(v, h)$, $v \in \mathbb{R}^n, h > 0$, величину

$$AA(v) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0} A(V(v, h)),$$

где $V(v, h)$ — ячейка Вороного соответствующей решетки. Эту характеристику можно также назвать *асимптотической асферичностью* ячеек Вороного $V(v, h)$. При $n = 1, v = x$ будем писать $AA(x)$.

Теорема 1. $AA(\varphi) \leq AA(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}$.

Доказательство экстремального свойства числа φ для похожей (немного отличной от $AA(x)$ характеристики) имеется в [2]. Вполне вероятно, что известны и другие переформулировки утверждения об экстремальности.

Диофантовы свойства числа x определяются асимптотическими свойствами паруса при подъеме вдоль вертикальной прямой ($(n + 1)$ -й координатной оси). Это объясняется тем, что целочисленная длина ребра бесконечной ломаной, представляющей собой одномерный парус (она, по определению, равна числу интервалов, на которые ребро делится целыми точками), совпадает с неполным частным цепной дроби в разложении числа x (четность номера неполного частного зависит от того, с какой стороны мы приближаемся к вертикальной прямой). Этот подъем можно заменить сжатием решетки вдоль $(n + 1)$ -й координатной оси ($h \rightarrow 0$) и наблюдением за вершинами паруса, ближе всего подходящими к точке 0. Золотому сечению отвечает парус, состоящий из отрезков равной и минимальной длины (целочисленная их длина равна единице, согласно разложению φ в цепную дробь: $\varphi = [1, 1, 1, \dots]$).

Высшие размерности. Задача об аппроксимации n -мерного вектора $v \in \mathbb{R}^n$ рациональными, или, эквивалентно, луча $R_a = \mathbb{R}_+ a, a \in \mathbb{R}^{n+1}$, точками из \mathbb{Z}_+^{n+1} , имеет несколько конкурирующих формулировок, связанных с различными числовыми характеристиками и выбором алгоритма перехода от базиса к базису. Уместно предположить, что со скоростью аппроксимации по-прежнему связана асимптотическая анизотропия решетки. При $n = 2$ представляется правдоподобным следующее предположение.

Гипотеза 1. Пусть ψ — вещественный корень многочлена $x^3 - x - 1$, $v_\psi = (\psi, \psi^2)$. Тогда $AA(v_\psi) \leq AA(v)$ для любого $v \in \mathbb{R}^2$.

В пользу этой гипотезы выступает то обстоятельство (аналогия), что если φ является наименьшим числом Пизо-Виджаярагхавана второй степени, то ψ — наименьшее такое

число третьей степени (и вообще наименьшее среди всех чисел Пизо). Хотя цепная дробь для этого числа уже не является периодической ни в классическом смысле, ни в смысле Арнольда и др., не исключено, что с ψ связан парус Клейна (в нашем смысле), имеющий простую комбинаторную структуру. С. М. Блюдзе [2] изучал приближение лучей в \mathbb{R}_+^3 последовательностями целочисленных векторов, генерируемых алгоритмом Якоби – Перрона (обобщение алгоритма Евклида). Им была доказана экстремально плохая аппроксимируемость вектора (ψ, ψ^2) среди векторов (x, y) с $x \neq y$.

Альтернативное определение паруса. Дадим еще одно определение паруса, связанного с лучом $R_a \in \mathbb{R}^{n+1}$. Заметим, что решетка $L(v, h)$ инвариантна относительно сдвигов на элементы группы $\mathbb{Z}^n \times \{0\}$ и отображения симметрии $\sigma : x \mapsto -x$. Фундаментальной областью группы $L(v, h)/G$, где G – группа симметрий $\langle \mathbb{Z}^n \times \{0\}, \sigma \rangle$, является пересечение решетки $L(v, h)$ с полуцилиндром $[0, 1)^n \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Обозначим её выпуклую оболочку через $M = M(v, h)$ (многогранник). Если координаты вектора v иррациональны, то граница $S = S(v, h)$ множества $M \setminus \{0\}$ (парус) не пересекается с границей полуцилиндра и представляет собой выпуклую неограниченную многогранную n -мерную поверхность («парус в стакане»). По сравнению с многогранником Клейна и парусом, определенными выше, многогранник и парус в стакане обладают двумя преимуществами:

- (1) вместо 2^n компонент они имеют всего одну компоненту связности;
- (2) точки многогранника M лежат на одном луче и имеют линейный порядок, так как имеют вид $p_k = (kv \bmod \mathbb{Z}^n, kh)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. В частности, парус S — это просто подпоследовательность $\{p_{k_i} \mid i \in \mathbb{N}, k_i \in \mathbb{N}\}$ (см. Рис. 1), что может оказаться удобным для описания его структуры.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. И. Арнольд. Цепные дроби. МЦНМО. М., 2001.
- [2] С. М. Блюдзе. Оптимальные цепные дроби. Дипломная работа. С.-Петербург, 1998.
- [3] А. Д. Брюно, В. И. Парусников. Сравнение разных обобщений цепных дробей, Матем. заметки, **61**:3 (1997), 339-348.
- [4] О. Н. Карпенков. О триангуляциях торов, связанных с двумерными цепными дробями кубических иррациональностей. Функциональный анализ и его прил., **38**:2 (2004), 28–37.
- [5] Е. И. Коркина. Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры. Тр. МИАН, **209** (1995), 143–166.
- [6] M. L. Kontsevich. Yu. M. Suhov. Statistics of Klein polyhedra and multidimensional continued fractions. In: Pseudoperiodic topology, 9–27, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **197**, Adv. Math. Sci., 46, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [7] G. Lachaud, Voiles et polyèdres de Klein, Prétirage n°95 – 22. Laboratoire de Mathématiques Discrettes du C.N.R.S, 1995; Sails and Klein polyhedra. Number theory (Tiruchirapalli, 1996), 373–385, Contemp. Math., 210, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [8] T. van Ravenstein. Optimal spacing of points on a circle. Fibonacci Quart. **27**:1 (1989), 18–24.

САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
E-mail address: alodkin@gmail.com