Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 15 мая 2019 года
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарного уравнения Шрёдингера: зависимость от времени*†

Дородный М. А.‡

Аннотация

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматривается самосопряжённый матричный эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ второго порядка с периодическими коэффициентами, зависящими от $\mathbf{x}/\varepsilon$. Для операторной экспоненты $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$, $\tau\in\mathbb{R}$, при малом ε получены аппроксимации по $(H^s\to L_2)$-операторной норме при подходящем s. Обсуждается точность полученных оценок в зависимости от τ. Результаты применяются к вопросу о поведении решения $\mathbf{u}_\varepsilon$ задачи Коши для нестационарного уравнения типа Шрёдингера $i\partial_\tau\mathbf{u}_\varepsilon = \mathcal{A}_\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon + \mathbf{F}$.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, нестационарные уравнения типа Шрёдингера, усреднение, эффективный оператор, операторные оценки погрешности.

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов (ДО). Задачам усреднения в пределе малого периода посвящена обширная литература; укажем в первую очередь книги [BeLP, BaPa, ZhKO]. Один из методов изучения задач усреднения в $\mathbb{R}^d$ — это спектральный метод, основанный на теории Флоке–Блоха. См., например, [BeLP, глава 4], [ZhKO, глава 2], [Se], [COrVa], [APi].

0.1. Класс операторов. Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — элементарная ячейка решётки Γ. Для Γ-периодических функций в $\mathbb{R}^d$ используется обозначение $\varphi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \varphi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассматриваются самосопряжённые эллиптические матричные ДО второго порядка следующего вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}). \qquad (0.1)$$

Здесь $b(\mathbf{D})$ — однородный матричный ДО первого порядка с постоянными коэффициентами. Предполагается, что символ $b(\boldsymbol{\xi})$ — $(m\times n)$-матрица ранга n (считаем, что $m \geqslant n$). Далее, $g(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная и положительно определённая $(m\times m)$-матрица-функция, $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая ограниченная вместе со своей обратной $(n\times n)$-матрица-функция.

*Представлено Т. А. Суслиной.

†Работа выполнена при поддержке гранта РНФ №17-11-01069.

‡Санкт-Петербургский государственный университет, Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., д. 7/9; e-mail: mdorodni@yandex.ru.

Целесообразно первоначально изучать более узкий класс операторов вида

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{0.2}$$

отвечающий случаю $f = \mathbf{1}_n$. Многие операторы математической физики допускают запись в виде (0.1) или (0.2), см., например, [BSu4, гл. 4]. Простейший пример — оператор акустики $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = \mathbf{D}^* g^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{D} = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla$.

0.2. Обзор. В 2001 году М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной (см. [BSu1]) был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода), основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. С помощью этого подхода были получены так называемые *операторные оценки погрешности* в задачах усреднения.

В случае усреднения эллиптических и параболических задач этот подход достаточно подробно разработан: укажем, в частности, работы [BSu2, BSu3, BSu4, Su1, Su2, VSu1, VSu2].

Другой подход к получению операторных оценок погрешности ("метод сдвига") для эллиптических и параболических задач был предложен В. В. Жиковым и С. Е. Пастуховой в работах [Zh, ZhPas1, ZhPas2]. См. также обзор [ZhPas3].

Операторные оценки погрешности для нестационарного уравнения типа Шрёдингера и гиперболических уравнений изучены в меньшей степени. Им были посвящены работы [BSu5, Su3, Su4, DSu, M1, M2], а также [D] и [M3], где рассматривался более широкий класс операторов, включающих младшие члены. В операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, где $\tau \in \mathbb{R}$. Остановимся подробнее на результатах для нестационарного уравнения типа Шрёдингера. В [BSu5] была доказана оценка

$$\| e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} \|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.3}$$

Здесь $\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D})$ — *эффективный оператор* с постоянной *эффективной матрицей* g^0. Затем в работе [Su4] (см. также [Su3]) была подтверждена точность этой оценки относительно типа операторной нормы. С другой стороны, были найдены достаточные условия (которые формулируются в терминах спектральных характеристик оператора на краю спектра), позволяющие усилить результат и получить оценку

$$\| e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} \|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.4}$$

0.3. Основные результаты работы. Настоящая работа посвящена оценкам погрешности при аппроксимации операторной экспоненты; особое внимание уделяется зависимости этих оценок от времени. Мы показываем, что множитель $(1+|\tau|)$ в оценке (0.3) нельзя улучшить (заменить на $(1+|\tau|^\alpha)$ с $\alpha < 1$) в общей ситуации. С другой стороны, мы доказываем, что оценку (0.4) (справедливую при дополнительных предположениях) можно улучшить:

$$\| e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0} \|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \check{\mathcal{C}}(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Этот результат позволяет получать сходимость решений с квалифицированной оценкой погрешности при больших временах, а именно, при $\tau = O(\varepsilon^{-\alpha})$ с $\alpha < 2$. Аналоги этих результатов получены и для более общего оператора (0.1). При этом оказывается, что удобно изучать оператор $f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}$ (операторную экспоненту, окаймлённую быстро осциллирующими множителями).

Результаты, полученные в операторных терминах, применяются затем к вопросу о поведении решения $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $\tau\in\mathbb{R}$, следующей задачи

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{0.5}$$

а также более общей задачи с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$.

0.4. Метод. Результаты получены с помощью теоретико-операторного подхода. Масштабное преобразование сводит изучение разности экспонент под знаком нормы (0.3) к изучению разности $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0}$, где $\widehat{\mathcal{A}} = b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D})$. Затем с помощью унитарного преобразования Гельфанда оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по зависящим от квазиимпульса $\mathbf{k}$ операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в пространстве $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Следуя [BSu2], мы выделяем одномерный параметр $t=|\mathbf{k}|$ и рассматриваем семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ как квадратичный пучок по отношению к параметру t. При этом часть построений удаётся провести в рамках абстрактной теории операторов. В абстрактной схеме изучается действующее в некотором гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ операторное семейство $A(t)$, допускающее факторизацию вида $A(t) = X(t)^* X(t)$, где $X(t) = X_0 + tX_1$.

0.5. Структура статьи. Работа состоит из трёх глав. В гл. I (§§1–3) содержится необходимый абстрактный теоретико-операторный материал. В гл. II (§§4–9) изучаются периодические ДО, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Гл. III (§§10–11) посвящена задачам усреднения для нестационарного уравнения типа Шрёдингера. В §10 получены основные результаты работы в операторных терминах. Затем в §11 эти результаты применяются к усреднению для задачи Коши (0.5), а также более общей задачи с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$.

0.6. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{H}$ и $\|\cdot\|_\mathfrak{H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы, если это не ведёт к смешениям. Через $I = I_\mathfrak{H}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $A\colon \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ и $\operatorname{Ker} A$ обозначаются область определения и ядро A, соответственно. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp := \mathfrak{H}\ominus\mathfrak{N}$. Если P — ортогональный проектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp$ — ортогональный проектор $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}^\perp$.

Символы $\langle\cdot,\cdot\rangle$ и $|\cdot|$ означают стандартные скалярное произведение и норму в $\mathbb{C}^n$; $\mathbf{1}_n$ — единичная $(n\times n)$-матрица. Для $(m\times n)$-матрицы a символ a^* означает эрмитово сопряжённую матрицу. Далее, $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_d)\in\mathbb{R}^d$, $iD_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j=1,\dots,d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1,\dots,D_d)$.

Классы L_p функций со значениями в $\mathbb{C}^n$, заданных в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$, обозначаются через $L_p(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Классы Соболева $\mathbb{C}^n$-значных функций в области $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^d$ порядка s с индексом суммирования p обозначаются $W_p^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$. При $p=2$ используем обозначения $H^s(\mathcal{O};\mathbb{C}^n)$, $s\in\mathbb{R}$. При $n=1$ пишем просто $L_p(\mathcal{O})$, $W_p^s(\mathcal{O})$, $H^s(\mathcal{O})$ и т.д., но иногда мы применяем такие обозначения и для пространств векторнозначных и матричнозначных функций.

Через C, c, $\mathcal{C}$, $\mathfrak{C}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные.

0.7. Благодарности. Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за полезные обсуждения и ценные советы.

Глава I. Абстрактная теоретико-операторная схема

§1. Квадратичные операторные семейства

1.1. Операторы $X(t)$ и $A(t)$. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Предположим, что $X_0\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — плотно определённый и замкнутый оператор, а $X_1\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — ограниченный оператор. Введём замкнутый на $\operatorname{Dom} X_0$ оператор $X(t) := X_0 + tX_1$, $t \in \mathbb{R}$. Рассмотрим семейство самосопряжённых операторов $A(t) := X(t)^*X(t)$ в $\mathfrak{H}$. Оператор $A(t)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\|X(t)u\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $u \in \operatorname{Dom} X_0$. Введём обозначения $A_0 := A(0)$, $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} A_0 = \operatorname{Ker} X_0$, $\mathfrak{N}_* := \operatorname{Ker} X_0^*$. Предполагается выполненным следующее условие.

Условие 1.1. *Точка $\lambda_0 = 0$ — изолированная точка спектра оператора A_0 и $0 < n := \dim \mathfrak{N} < \infty$, $n \leqslant n_* := \dim \mathfrak{N}_* \leqslant \infty$.*

Обозначим через d^0 *расстояние от точки $\lambda_0 = 0$ до остального спектра оператора* A_0. Пусть P и P_* — ортопроекторы в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и в $\mathfrak{H}_*$ на $\mathfrak{N}_*$, соответственно. Обозначим через $F(t;[a,b])$ спектральный проектор оператора $A(t)$ для промежутка $[a,b]$ и положим $\mathfrak{F}(t;[a,b]) := F(t;[a,b])\mathfrak{H}$. *Фиксируем число $\delta > 0$ такое, что $8\delta < d^0$.* Будем писать $F(t)$ вместо $F(t;[0,\delta])$ и $\mathfrak{F}(t)$ вместо $\mathfrak{F}(t;[0,\delta])$. Выберем число $t^0 > 0$ так, чтобы

$$t^0 \leqslant \delta^{1/2}\|X_1\|^{-1}. \tag{1.1}$$

Как показано в [BSu2, гл. 1, предложение 1.2], $F(t;[0,\delta]) = F(t;[0,3\delta])$ и $\operatorname{rank} F(t;[0,\delta]) = n$ при $|t| \leqslant t^0$.

1.2. Операторы Z, R и S. Следуя [BSu2, гл. 1, §1] и [BSu3, §1], введём операторы, которые возникают при рассмотрениях в духе теории возмущений.

Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и пусть $\psi = \psi(\omega) \in \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ — (слабое) решение уравнения

$$X_0^*(X_0\psi + X_1\omega) = 0.$$

Введём оператор $Z\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ по формуле $Zu = \psi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Далее, определим оператор $R := X_0Z + X_1\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}_*$. Оператор R также может быть определён формулой $R = P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$. Следуя [BSu2, гл. 1, п. 1.3], назовём оператор $S := R^*R\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$ *спектральным ростком* семейства $A(t)$ при $t = 0$. Для ростка справедливо также представление $S = PX_1^*P_*X_1|_{\mathfrak{N}}$. Спектральный росток называется *невырожденным*, если $\operatorname{Ker} S = \{0\}$.

1.3. Операторы Z_2 и R_2. Нам потребуется ввести операторы Z_2 и R_2, определённые в [VSu1, гл. 1, §1].

Пусть $\omega \in \mathfrak{N}$ и пусть $\phi = \phi(\omega) \in \operatorname{Dom} X_0 \cap \mathfrak{N}^\perp$ — (слабое) решение уравнения

$$X_0^*(X_0\phi + X_1Z\omega) = -P^\perp X_1^*R\omega.$$

Правая часть этого уравнения принадлежит $\mathfrak{N}^\perp = \operatorname{Ran} X_0^*$, поэтому выполнено условие разрешимости. Определим оператор $Z_2\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ по формуле $Z_2u = \phi(Pu)$, $u \in \mathfrak{H}$. Наконец, введём оператор $R_2 := X_0Z_2 + X_1Z\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{H}_*$.

1.4. Аналитические ветви собственных значений и собственных векторов оператора $A(t)$. Согласно общей аналитической теории возмущений (см. [K]), при $|t| \leqslant t^0$ существуют вещественно аналитические функции $\lambda_l(t)$ (ветви собственных значений) и вещественно аналитические $\mathfrak{H}$-значные функции $\varphi_l(t)$ (ветви собственных векторов), такие что $A(t)\varphi_l(t) = \lambda_l(t)\varphi_l(t)$, $l = 1, \dots, n$, причём набор $\varphi_l(t)$, $l = 1, \dots, n$, образует *ортонормированный базис* в $\mathfrak{F}(t)$. Более того, для *достаточно малого* t_* (где $0 < t_* \leqslant t^0$) при $|t| \leqslant t_*$ имеют место сходящиеся степенные разложения

$$\lambda_l(t) = \gamma_l t^2 + \mu_l t^3 + \nu_l t^4 + \dots, \qquad \gamma_l \geqslant 0, \ \mu_l, \nu_l \in \mathbb{R}, \qquad l = 1, \dots, n, \tag{1.2}$$

$$\varphi_l(t) = \omega_l + t\psi_l^{(1)} + t\psi_l^{(2)} + \dots, \qquad l = 1, \dots, n. \tag{1.3}$$

При этом элементы $\omega_l = \varphi_l(0)$, $l = 1, \dots, n$, образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$. В [BSu2, гл. 1, §1] и [BSu3, §1] было установлено, что $\widetilde{\omega}_l = \psi_l^{(1)} - Z\omega_l \in \mathfrak{N}$,

$$S\omega_l = \gamma_l \omega_l, \qquad l = 1, \dots, n, \tag{1.4}$$

$$(\widetilde{\omega}_j, \omega_k) + (\omega_j, \widetilde{\omega}_k) = 0, \qquad j, k = 1, \dots, n. \tag{1.5}$$

Таким образом, *числа γ_l и элементы ω_l, определённые в* (1.2) *и* (1.3)*, являются собственными для ростка S.* Справедливы представления $P = \sum_{l=1}^n (\cdot, \omega_l)\omega_l$, $SP = \sum_{l=1}^n \gamma_l (\cdot, \omega_l)\omega_l$.

1.5. Пороговые аппроксимации. Следующие утверждения были получены в [BSu2, гл. 1, теоремы 4.1 и 4.3] и [BSu3, теорема 4.1]. Договоримся ниже через β_j обозначать абсолютные константы (значения которых допускают явный контроль), причём считаем $\beta_j \geqslant 1$.

Теорема 1.2 ([BSu2]). *В условиях п. 1.1 при $|t| \leqslant t^0$ справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|F(t) - P\| &\leqslant C_1 |t|, \qquad & C_1 &= \beta_1 \delta^{-1/2} \|X_1\|, \\ \|A(t)F(t) - t^2 SP\| &\leqslant C_2 |t|^3, \qquad & C_2 &= \beta_2 \delta^{-1/2} \|X_1\|^3. \end{aligned} \tag{1.6}$$

Теорема 1.3 ([BSu3]). *В условиях п. 1.1 при $|t| \leqslant t^0$ справедливо представление*

$$A(t)F(t) = t^2 SP + t^3 K + \Xi(t), \qquad \|\Xi(t)\| \leqslant C_3 t^4, \qquad C_3 = \beta_3 \delta^{-1} \|X_1\|^4.$$

Здесь оператор K допускает представление $K = K_0 + N = K_0 + N_0 + N_*$, где K_0 переводит $\mathfrak{N}$ в $\mathfrak{N}^\perp$ и $\mathfrak{N}^\perp$ в $\mathfrak{N}$, а $N = N_0 + N_*$ переводит $\mathfrak{N}$ в себя и $\mathfrak{N}^\perp$ в $\{0\}$. В терминах коэффициентов степенных разложений операторы K_0, N_0, N_* имеют вид $K_0 = \sum_{l=1}^n \gamma_l \left((\cdot, Z\omega_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)Z\omega_l\right)$,

$$N_0 = \sum_{l=1}^n \mu_l (\cdot, \omega_l)\omega_l, \qquad N_* = \sum_{l=1}^n \gamma_l \left((\cdot, \widetilde{\omega}_l)\omega_l + (\cdot, \omega_l)\widetilde{\omega}_l\right). \tag{1.7}$$

В инвариантных терминах справедливы представления $K_0 = ZSP + SPZ^*$, $N = Z^* X_1^* RP + (RP)^* X_1 Z$.

Замечание 1.4. 1°. *Если $Z = 0$, то $K_0 = 0$, $N = 0$ и $K = 0$.* 2°. *В базисе $\{\omega_l\}_{l=1}^n$ операторы N, N_0, N_* (суженные на подпространство $\mathfrak{N}$) задаются матрицами размера $n \times n$. При этом оператор N_0 диагонален $(N_0\omega_j, \omega_k) = \mu_j \delta_{jk}$, $j, k = 1, \dots, n$. Матричные элементы оператора N_* имеют вид $(N_*\omega_j, \omega_k) = \gamma_k(\omega_j, \widetilde{\omega}_k) + \gamma_j(\widetilde{\omega}_j, \omega_k) = (\gamma_j - \gamma_k)(\widetilde{\omega}_j, \omega_k)$, $j, k = 1, \dots, n$. Видно, что диагональные элементы для N_* обращаются в ноль. Более того, $(N_*\omega_j, \omega_k) = 0$ если $\gamma_j = \gamma_k$.* 3°. *Если $n = 1$, то $N_* = 0$ и $N = N_0$.*

1.6. Условие невырожденности. Ниже мы предполагаем выполненным следующее дополнительное условие.

Условие 1.5. *Существует константа $c_* > 0$ такая, что $A(t) \geqslant c_* t^2 I$ при $|t| \leqslant t^0$.*

Из условия 1.5 следует, что $\lambda_l(t) \geqslant c_* t^2$, $l = 1, \dots, n$, при $|t| \leqslant t^0$. В силу (1.2) это влечёт $\gamma_l \geqslant c_* > 0$, $l = 1, \dots, n$, т. е. невырожденность спектрального ростка:

$$S \geqslant c_* I_{\mathfrak{N}}. \tag{1.8}$$

1.7. Разбиение собственных значений оператора $A(t)$ на кластеры. Материал этого пункта заимствован из [Su4, раздел 2]. Он содержателен при $n \geqslant 2$.

Предположим, что выполнено условие 1.5. Сейчас нам будет удобно изменить обозначения, отслеживая кратности собственных значений оператора S. Пусть p — число различных собственных значений ростка S. Будем считать, что они занумерованы в порядке возрастания и обозначим их через γ_j°, $j = 1, \dots, p$. Пусть $k_1, \dots, k_p$ — их кратности (разумеется, $k_1 + \ldots + k_p = n$). Введём обозначения для собственных подпространств: $\mathfrak{N}_j = \operatorname{Ker}(S - \gamma_j^\circ I_{\mathfrak{N}})$, $j = 1, \dots, p$. Тогда $\mathfrak{N} = \sum_{j=1}^p \oplus \mathfrak{N}_j$. Пусть P_j — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_j$. Тогда $P = \sum_{j=1}^p P_j$, $P_j P_l = 0$ при $j \neq l$.

Мы разбиваем первые n собственных значений оператора $A(t)$ на p кластеров при $|t| \leqslant t^0$; j-ый кластер состоит из собственных значений $\lambda_l(t)$, $l = i, \dots, i + k_j - 1$, где $i = i(j) = k_1 + \ldots + k_{j-1} + 1$.

Для каждой пары индексов (j, l), $1 \leqslant j, l \leqslant p$, $j \neq l$, введём обозначение

$$c_{jl}^\circ := \min\{c_*, n^{-1}|\gamma_l^\circ - \gamma_j^\circ|\}.$$

Ясно, что найдётся номер $i_0 = i_0(j, l)$, где $j \leqslant i_0 \leqslant l - 1$ при $j < l$ и $l \leqslant i_0 \leqslant j - 1$ при $l < j$, такой, что $\gamma_{i_0+1}^\circ - \gamma_{i_0}^\circ \geqslant c_{jl}^\circ$. Это означает, что на промежутке между γ_j° и γ_l° в спектре оператора S имеется лакуна длины не меньше c_{jl}°. Возможно, выбор i_0 неоднозначен, в этом случае договоримся брать наименьшее возможное i_0 (для определённости). Далее, выберем число $t_{jl}^{00} \leqslant t^0$ так, чтобы

$$t_{jl}^{00} \leqslant (4C_2)^{-1} c_{jl}^\circ = (4\beta_2)^{-1} \delta^{1/2} \|X_1\|^{-3} c_{jl}^\circ.$$

Пусть $\Delta_{jl}^{(1)} := [\gamma_1^\circ - c_{jl}^\circ/4, \gamma_{i_0}^\circ + c_{jl}^\circ/4]$ и $\Delta_{jl}^{(2)} := [\gamma_{i_0+1}^\circ - c_{jl}^\circ/4, \gamma_p^\circ + c_{jl}^\circ/4]$. Отрезки $\Delta_{jl}^{(1)}$ и $\Delta_{jl}^{(2)}$ не пересекаются и отделены друг от друга на расстояние, не меньшее $c_{jl}^\circ/2$. Как показано в [Su4, раздел 2], при $|t| \leqslant t_{jl}^{00}$ у оператора $A(t)$ в промежутке $t^2 \Delta_{jl}^{(1)}$ ровно $k_1 + \ldots + k_{i_0}$ собственных значений (с учётом кратностей) и ровно $k_{i_0+1} + \ldots + k_p$ собственных значений в промежутке $t^2 \Delta_{jl}^{(2)}$.

Замечание 1.6. *Операторы N_0 и N_* допускают инвариантное представление:*

$$N_0 = \sum_{j=1}^p P_j N P_j, \qquad N_* = \sum_{\substack{1 \leqslant l, j \leqslant p \\ j \neq l}} P_l N P_j. \tag{1.9}$$

1.8. Коэффициенты ν_l, $l = 1, \dots, n$. Нам потребуется указать связь коэффициентов ν_l, $l = 1, \dots, n$, с некоторой задачей на собственные числа.

В [VSu1, (1.34), (1.37)] было установлено, что

$$\begin{aligned} &\psi_l^{(2)} - Z\widetilde{\omega}_l - Z_2 \omega_l =: \widetilde{\omega}_l^{(2)} \in \mathfrak{N}, && l = 1, \dots, n, \\ &(\widetilde{\omega}_l^{(2)}, \omega_k) + (Z\omega_l, Z\omega_k) + (\widetilde{\omega}_l, \widetilde{\omega}_k) + (\omega_l, \widetilde{\omega}_k^{(2)}) = 0, && l, k = 1, \dots, n. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Далее, из [VSu1, (2.47), формула после (2.46)] получаем

$$(N_1\omega_l,\omega_k)-\mu_l(\widetilde{\omega}_l,\omega_k)-\mu_k(\omega_l,\widetilde{\omega}_k)-\gamma_l(\widetilde{\omega}_l^{(2)},\omega_k)-\gamma_k(\omega_l,\widetilde{\omega}_k^{(2)})-(S\widetilde{\omega}_l,\widetilde{\omega}_k)=\nu_l\delta_{lk},$$
$$l,k=1,\dots,n, \quad (1.11)$$

где $N_1=N_1^0-Z^*ZSP-SPZ^*Z$, $N_1^0=Z_2^*X_1^*RP+(RP)^*X_1Z_2+R_2^*R_2P$.

Пусть γ_q° — собственное число задачи (1.4) кратности k_q (т. е. $\gamma_i=\ldots=\gamma_{i+k_q-1}$, $i=i(q)=k_1+\ldots+k_{q-1}+1$). Рассмотрим задачу на собственные значения (см. замечание 1.4)

$$P_qN\omega_l=\mu_l\omega_l,\qquad l=i,\dots,i+k_q-1. \quad (1.12)$$

Будем считать, что μ_l, $l=i,\dots,i+k_q-1$, занумерованы в порядке неубывания. Обозначим количество различных собственных значений через $p'(q)$ и обозначим их кратности через $k_{1,q},\dots,k_{p'(q),q}$ (разумеется, $k_{1,q}+\ldots+k_{p'(q),q}=k_q$). Переобозначим различные собственные значения через $\mu_{j,q}^\circ$, $j=1,\dots,p'(q)$ и введём следующие обозначения для собственных подпространств: $\mathfrak{N}_{j,q}=\operatorname{Ker}(P_qN|_{\mathfrak{N}_q}-\mu_{j,q}^\circ I_{\mathfrak{N}_q})$, $j=1,\dots,p'(q)$. Тогда $\mathfrak{N}_q=\sum_{j=1}^{p'(q)}\oplus\mathfrak{N}_{j,q}$. Пусть $P_{j,q}$ — ортопроектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}_{j,q}$. Тогда $P_q=\sum_{j=1}^{p'(q)}P_{j,q}$ и $P_{j,q}P_{r,q}=0$ при $j\neq r$.

Пусть $\mu_{q',q}^\circ$ — $k_{q',q}$-кратное собственное значение задачи (1.12): $\mu_{i'}=\ldots=\mu_{i'+k_{q',q}-1}$, где $i'=i'(q',q)=i(q)+k_{1,q}+\ldots+k_{q'-1,q}$. Используя соотношения (1.5), (1.10) и учитывая, что $\gamma_l=\gamma_k=\gamma_q^\circ$, $\mu_l=\mu_k=\mu_{q',q}^\circ$, $l,k=i',\dots,i'+k_{q',q}-1$, из (1.11) получаем

$$(N_1\omega_l,\omega_k)+\gamma_l(Z\omega_l,Z\omega_k)+\gamma_l(\widetilde{\omega}_l,\widetilde{\omega}_k)-(S\widetilde{\omega}_l,\widetilde{\omega}_k)=\nu_l\delta_{lk},\qquad l,k=i',\dots,i'+k_{q',q}-1. \quad (1.13)$$

Далее, в силу замечания 1.4 имеем

$$\gamma_l(\widetilde{\omega}_l,\widetilde{\omega}_k)-(S\widetilde{\omega}_l,\widetilde{\omega}_k)=\sum_{l'=1}^{n}(\gamma_l-\gamma_{l'})(\widetilde{\omega}_l,\omega_{l'})(\omega_{l'},\widetilde{\omega}_k)=$$
$$=\sum_{\substack{l'\in\{1,\dots,n\}\\ l'\neq i,\dots,i+k_q-1}}\frac{(N\omega_l,\omega_{l'})(\omega_{l'},N\omega_k)}{\gamma_q^\circ-\gamma_{l'}}=\sum_{\substack{j\in\{1,\dots,p\}\\ j\neq q}}\frac{(P_jN\omega_l,N\omega_k)}{\gamma_q^\circ-\gamma_j^\circ}=:\mathfrak{n}_0^{(q',q)}[\omega_l,\omega_k],$$
$$l,k=i',\dots,i'+k_{q',q}-1.$$

Уравнения (1.13) можно трактовать как задачу на собственные числа для оператора $\mathcal{N}^{(q',q)}$:

$$\mathcal{N}^{(q',q)}\omega_l=\nu_l\omega_l,\qquad l=i',\dots,i'+k_{q',q}-1, \quad (1.14)$$

где

$$\mathcal{N}^{(q',q)}:=P_{q',q}\left(N_1^0-\frac{1}{2}Z^*ZSP-\frac{1}{2}SPZ^*Z\right)\Big|_{\mathfrak{N}_{q',q}}+\mathcal{N}_0^{(q',q)},$$

а $\mathcal{N}_0^{(q',q)}$ — оператор в $\mathfrak{N}_{q',q}$, порождённый формой $\mathfrak{n}_0^{(q',q)}[\cdot,\cdot]$.

Отметим, что в случае, когда $N_0=0$ (что равносильно $\mu_l=0$ для всех $l=1,\dots,n$) выполнено $\mathfrak{N}_{1,q}=\mathfrak{N}_q$, $q=1,\dots,p$. Тогда вместо $\mathcal{N}^{(1,q)}$ мы будем писать $\mathcal{N}^{(q)}$.

§2. Аппроксимация оператора $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P$

2.1. Аппроксимация оператора $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P$. Пусть $\varepsilon>0$. Исследуем поведение оператора $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}$ при малом ε. Домножим этот оператор на “сглаживающий множитель”

$\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2}P$, где $s>0$. (Термин объясняется тем, что в приложениях к ДО такое домножение переходит в сглаживание.) Наша цель — получить аппроксимацию сглаженного оператора с оценкой погрешности порядка $O(\varepsilon)$ при минимально возможном s.

Следующие утверждения были доказаны в [BSu5, теорема 2.1] и [Su4, следствия 3.3, 3.5].

Теорема 2.1 ([BSu5]). *При $\tau\in\mathbb{R}$ и $|t|\leqslant t^0$ справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P\| \leqslant 2C_1|t| + C_2|\tau||t|^3. \tag{2.1}$$

Теорема 2.2 ([Su4]). *Пусть $N=0$. Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$ и $|t|\leqslant t^0$ справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P\| \leqslant 2C_1|t| + C_4|\tau|t^4. \tag{2.2}$$

Константа C_4 полиномиально зависит от величин $\delta^{-1/2}$, $\|X_1\|$.

Теорема 2.3 ([Su4]). *Пусть $N_0=0$. Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$ и $|t|\leqslant t^{00}$ справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P\| \leqslant C_5|t| + C_6|\tau|t^4.$$

Здесь t^{00} подчинено условию

$$t^{00} \leqslant (4\beta_2)^{-1}\delta^{1/2}\|X_1\|^{-3}c^\circ, \tag{2.3}$$

где

$$c^\circ := \min_{(j,l)\in\mathcal{Z}} c^\circ_{jl}, \qquad \mathcal{Z} := \{(j,l)\colon 1\leqslant j,l\leqslant p, j\neq l, P_jNP_l\neq 0\}. \tag{2.4}$$

Константы C_5, C_6 полиномиально зависят от $\delta^{-1/2}$, $\|X_1\|$, n, $(c^\circ)^{-1}$.

Применим сформулированные теоремы. Начнём с теоремы 2.1. Пусть $|t|\leqslant t^0$. В силу (2.1) (с заменой τ на $\varepsilon^{-2}\tau$)

$$\begin{aligned}\Big\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 SP}P\Big\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \\ \leqslant (2C_1|t| + C_2\varepsilon^{-2}|\tau||t|^3)\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant (C_1+C_2|\tau|)\varepsilon.\end{aligned}$$

Здесь пришлось взять $s=3$. Мы приходим к следующему результату, полученному в [BSu5, теорема 2.6].

Теорема 2.4 ([BSu5]). *При $\tau\in\mathbb{R}$ и $|t|\leqslant t^0$ справедлива оценка*

$$\Big\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 SP}P\Big\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant (C_1+C_2|\tau|)\varepsilon.$$

Постоянные C_1, C_2 контролируются через многочлены от величин $\delta^{-1/2}$, $\|X_1\|$.

Теорема 2.2 позволяет усилить результат теоремы 2.4 в случае, когда $N=0$.

Теорема 2.5. *Пусть $N=0$. Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$ и $|t|\leqslant t^0$ справедлива оценка*

$$\Big\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 SP}P\Big\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant (C_1+C_4'|\tau|^{1/2})\varepsilon. \tag{2.5}$$

Постоянные C_1, C_4' контролируются через многочлены от величин $\delta^{-1/2}$, $\|X_1\|$.

Доказательство. Заметим, что при $|t| \geqslant \varepsilon^{1/2}/|\tau|^{1/4}$ выполнено

$$\frac{\varepsilon^2}{t^2+\varepsilon^2} \leqslant \frac{\varepsilon^2}{\left(\frac{\varepsilon^{1/2}}{|\tau|^{1/4}}\right)^2+\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon|\tau|^{1/2}}{1+\varepsilon|\tau|^{1/2}} \leqslant \varepsilon|\tau|^{1/2},$$

поэтому левая часть в (2.5) не превосходит $2|\tau|^{1/2}\varepsilon$. Таким образом, достаточно считать, что $|t| < \varepsilon^{1/2}/|\tau|^{1/4}$. Воспользуемся неравеством (2.2) с заменой τ на $\varepsilon^{-2}\tau$. Тогда при $|t| < \varepsilon^{1/2}/|\tau|^{1/4}$ получаем оценку

$$\left\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2SP}P\right\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \left(2C_1|t| + C_4\varepsilon^{-2}|\tau|t^4\right)\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant$$
$$\leqslant C_1\varepsilon + C_4|\tau|t^2 \leqslant C_1\varepsilon + C_4|\tau|^{1/2}\varepsilon.$$

В результате получаем оценку (2.5) с постоянной $C_4' = \max\{2, C_4\}$. $\square$

Аналогично, применение теоремы 2.3 позволяет получить следующий результат.

Теорема 2.6. *Пусть $N_0 = 0$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leqslant t^{00}$ справедлива оценка*

$$\left\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2SP}P\right\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant (C_5 + C_6'|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Здесь t^{00} подчинено условию (2.3), константы C_5, C_6' контролируются через многочлены от величин $\delta^{-1/2}$, $\|X_1\|$, n, $(c^\circ)^{-1}$.

Замечание 2.7. *Теоремы 2.5 и 2.6 усиливают результаты теорем 4.2 и 4.3 из [Su4] в отношении зависимости оценок от τ.*

2.2. Точность результатов относительно сглаживающего множителя.

Покажем, что полученные результаты точны относительно сглаживающего множителя. Следующая теорема, доказанная в [Su4, теорема 4.4], подтверждает точность теоремы 2.4.

Теорема 2.8 ([Su4]). *Пусть $N_0 \neq 0$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 3$. Тогда не существует такой константы $C(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\left\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2SP}P\right\|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon$$

выполнялась для всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Далее, подтвердим точность теорем 2.5, 2.6.

Теорема 2.9. *Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ для некоторого $q \in \{1,\dots,p\}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой константы $C(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\left\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2SP}P\right\|\varepsilon^s(t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon \tag{2.6}$$

выполнялась для всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Доказательство. Начнём с предварительных замечаний. Поскольку $F(t)^\perp P = (P-F(t))P$, то из (1.6) вытекает оценка

$$\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}F(t)^\perp P\|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_1|t|\varepsilon(t^2+\varepsilon^2)^{-1/2} \leqslant C_1\varepsilon, \qquad |t| \leqslant t^0. \tag{2.7}$$

Далее, при $|t| \leqslant t^0$ имеем:

$$e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}F(t) = \sum_{l=1}^{n} e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\lambda_l(t)}(\cdot, \varphi_l(t))\varphi_l(t). \tag{2.8}$$

Затем, из сходимости рядов (1.3) следует, что

$$\|\varphi_l(t) - \omega_l\| \leqslant c_1|t|, \qquad |t| \leqslant t_*, \quad l = 1, \dots, n. \tag{2.9}$$

Фиксируем $0 \neq \tau \in \mathbb{R}$. Будем рассуждать от противного. Предположим, что для некоторого $1 \leqslant s < 2$ существует константа $C(\tau) > 0$ такая, что выполнено (2.6) при всех достаточно малых $|t|$ и ε. В силу (2.7)–(2.9) это предположение равносильно существованию положительной константы $\widetilde{C}(\tau)$ такой, что выполнено

$$\left\| \sum_{l=1}^{n} \left(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\lambda_l(t)} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2\gamma_l} \right) (\cdot, \omega_l)\omega_l \right\| \varepsilon^s (t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{2.10}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Условие $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ для некоторого $q \in \{1, \dots, p\}$ означает, что в разложениях (1.2) $\mu_l = 0$ при всех $l = 1, \dots, n$, и что хотя бы для одного j выполнено $\nu_j \neq 0$. Применим оператор под знаком нормы в (2.10) к элементу ω_j. Тогда

$$\left| e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\lambda_j(t)} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2\gamma_j} \right| \varepsilon^s (t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{2.11}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε. Левую часть (2.11) с учётом (1.2) можно записать в виде $2 \left| \sin \left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\nu_j t^4 + O(t^5)) \right) \right| \varepsilon^s (t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2}$. Будем считать, что t_* достаточно мало, так что $\frac{1}{2}|\nu_j||t|^4 \leqslant |\nu_j t^4 + O(t^5)| \leqslant \frac{3}{2}|\nu_j||t|^4$, $|t| \leqslant t_*$. Далее, для фиксированного $\tau \neq 0$, предполагая, что ε достаточно мало (а именно, $\varepsilon \leqslant \pi^{-1/2}|\nu_j\tau|^{1/2}t_*^2$), положим $t = t(\varepsilon) = \pi^{1/4}|\nu_j\tau|^{-1/4}\varepsilon^{1/2} = c\varepsilon^{1/2}$. Для таких t справедливо $2 \left| \sin \left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\nu_j t^4 + O(t^5)) \right) \right| \geqslant \sqrt{2}$, поэтому из (2.11) следует, что $\sqrt{2}\varepsilon^s (c^2\varepsilon + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon$. Это означает, что функция $\varepsilon^{s/2-1}(c^2 + \varepsilon)^{-s/2}$ равномерно ограничена при малых ε. Но это неверно, если $s < 2$. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

2.3. Точность результатов относительно времени. Теперь мы докажем следующее утверждение, подтверждающее точность теоремы 2.4 относительно времени.

Теорема 2.10. *Пусть $N_0 \neq 0$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка*

$$\left\| e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2SP}P \right\| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon \tag{2.12}$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Доказательство. Будем рассуждать от противного. Предположим, что существует положительная функция $C(\tau)$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнено (2.12) при всех достаточно малых $|t|$ и ε. В силу (2.7)–(2.9) это предположение равносильно существованию положительной функции $\widetilde{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} \widetilde{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнено

$$\left\| \sum_{l=1}^{n} \left(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\lambda_l(t)} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2\gamma_l} \right) (\cdot, \omega_l)\omega_l \right\| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{2.13}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Условие $N_0 \neq 0$ означает, что хотя бы для одного j выполнено $\mu_j \neq 0$. Применим оператор под знаком нормы в (2.13) к элементу ω_j. Тогда

$$\left| e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\lambda_j(t)} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2\gamma_j} \right| \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{2.14}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε. Модуль в левой части (2.14) с учётом (1.2) может быть записан следующим образом:

$$\left|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\lambda_j(t)} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2\gamma_j}\right| = 2\left|\sin\left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\lambda_j(t) - t^2\gamma_j)\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\mu_j t^3 + O(t^4))\right)\right|.$$

Поэтому

$$2\left|\sin\left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\mu_j t^3 + O(t^4))\right)\right|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \widetilde{C}(\tau)\varepsilon \tag{2.15}$$

при всех достаточно малых $|t|$ и ε. Мы хотим оценить снизу максимум левой части (2.15) (как функции от t). Введём функцию

$$h(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}y, & \text{при}\, y \in [0,\pi/2], \\ \dfrac{2}{\pi}(\pi - y), & \text{при}\, y \in (\pi/2,\pi], \end{cases}$$

(и продолжим её π-периодическим образом). Очевидно, $|\sin y| \geqslant h(y)$. Будем считать, что t_* достаточно мало, так что

$$\frac{1}{2}|\mu_j||t|^3 \leqslant |\mu_j t^3 + O(t^4)| \leqslant \frac{3}{2}|\mu_j||t|^3, \qquad |t| \leqslant t_*. \tag{2.16}$$

Далее, пусть ε достаточно мало, а именно, $\varepsilon \leqslant (2\pi)^{-1/2}|\mu_j\tau|^{1/2}t_*^{3/2}$. Тогда множество $T = \left\{t\colon \frac{1}{2}|\tau|\varepsilon^{-2}|t^3\mu_j + O(t^4)| \leqslant \frac{\pi}{2}\right\}$ содержится в интервале $|t| \leqslant t_*$. Левая часть (2.15) при $t \in T$ допускает оценку снизу

$$2\left|\sin\left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\mu_j t^3 + O(t^4))\right)\right|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \geqslant$$
$$\geqslant 2h\left(\frac{1}{2}\tau\varepsilon^{-2}(\mu_j t^3 + O(t^4))\right)\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \geqslant \varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\cdot\frac{1}{\pi}|\tau|\varepsilon^{-2}|\mu_j||t|^3.$$

Положим $t_\diamond = (2\pi/3)^{1/3}|\mu_j\tau|^{-1/3}\varepsilon^{2/3}$. Тогда $\frac{3}{4}\tau\varepsilon^{-2}|\mu_j|t_\diamond^3 \leqslant \frac{\pi}{2}$, а поэтому $t_\diamond \in T$ в силу (2.16). Максимум левой части (2.15) оценивается снизу через

$$\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\cdot\frac{1}{\pi}|\tau|\varepsilon^{-2}|\mu_j|t_\diamond^3 = \frac{2}{3}\cdot\frac{\varepsilon|\tau|}{\left((2\pi/3)^{2/3}|\mu_j|^{-2/3} + \varepsilon^{2/3}|\tau|^{2/3}\right)^{3/2}} \geqslant \frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\varepsilon|\tau|}{2\pi/(3|\mu_j|) + \varepsilon|\tau|}.$$

Это означает, что

$$\frac{\sqrt{2}}{3}\left(\frac{2\pi}{3|\mu_j|} + \varepsilon|\tau|\right)^{-1} \leqslant \frac{\widetilde{C}(\tau)}{|\tau|} \tag{2.17}$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Но, поскольку $\lim_{\tau\to\infty}\widetilde{C}(\tau)/|\tau| = 0$, оценка (2.17) не может выполняться при больших $|\tau|$ и $\varepsilon = O(|\tau|^{-1})$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Аналогично доказывается следующее утверждение, подтверждающее точность теорем 2.5, 2.6.

Теорема 2.11. *Пусть $N_0 = 0$ и $\mathcal{N}^{(q)} \neq 0$ для некоторого $q \in \{1,\dots,p\}$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка*

$$\left\|e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}P - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2SP}P\right\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant C(\tau)\varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

§3. Аппроксимация окаймлённой операторной экспоненты

3.1. Операторное семейство вида $A(t) = M^*\widehat{A}(t)M$. Наряду с пространством $\mathfrak{H}$ рассмотрим ещё одно сепарабельное гильбертово пространство $\widehat{\mathfrak{H}}$. Пусть $\widehat{X}(t) = \widehat{X}_0 + t\widehat{X}_1 : \widehat{\mathfrak{H}} \to \mathfrak{H}_*$ — семейство операторов того же вида, что и $X(t)$, причём для $\widehat{X}(t)$ выполнены предположения п. 1.1. Пусть $M : \mathfrak{H} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ — изоморфизм. Предположим, что $M \operatorname{Dom} X_0 = \operatorname{Dom} \widehat{X}_0$, $X(t) = \widehat{X}(t)M$, а тогда и $X_0 = \widehat{X}_0 M$, $X_1 = \widehat{X}_1 M$. В $\widehat{\mathfrak{H}}$ введём семейство самосопряжённых операторов $\widehat{A}(t) = \widehat{X}(t)^*\widehat{X}(t)$. Тогда, очевидно,

$$A(t) = M^*\widehat{A}(t)M. \tag{3.1}$$

Все объекты, отвечающие семейству $\widehat{A}(t)$, далее помечаются значком "$\widehat{\ }$". Отметим, что $\widehat{\mathfrak{N}} = M\mathfrak{N}$ и $\widehat{\mathfrak{N}}_* = \mathfrak{N}_*$. В пространстве $\widehat{\mathfrak{H}}$ рассмотрим положительно определённый оператор $Q := (MM^*)^{-1} : \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}$. Пусть $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — блок оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$, т. е. $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}} = \widehat{P}Q|_{\widehat{\mathfrak{N}}} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$. Очевидно, $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$ — изоморфизм в $\widehat{\mathfrak{N}}$.

Как показано в [Su2, предложение 1.2], ортопроектор P в $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$ и ортопроектор $\widehat{P}$ в $\widehat{\mathfrak{H}}$ на $\widehat{\mathfrak{N}}$ связаны соотношением

$$P = M^{-1}(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}(M^*)^{-1}. \tag{3.2}$$

Пусть $\widehat{S} : \widehat{\mathfrak{N}} \to \widehat{\mathfrak{N}}$ — спектральный росток семейства $\widehat{A}(t)$ при $t = 0$, а S — росток семейства $A(t)$. В [BSu2, гл. 1, п. 1.5] установлено следующее тождество:

$$S = PM^*\widehat{S}M|_{\mathfrak{N}}. \tag{3.3}$$

3.2. Операторы $\widehat{Z}_Q$ и $\widehat{N}_Q$. Для операторного семейства $\widehat{A}(t)$ введём оператор $\widehat{Z}_Q$, действующий в $\widehat{\mathfrak{H}}$ и сопоставляющий элементу $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ решение $\widehat{\psi}_Q$ задачи $\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\psi}_Q + \widehat{X}_1\widehat{\omega}) = 0$, $Q\widehat{\psi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}}$, где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Как показано в [BSu3, §6], оператор Z для семейства $A(t)$ и введённый оператор $\widehat{Z}_Q$ связаны соотношением

$$\widehat{Z}_Q = MZM^{-1}\widehat{P}. \tag{3.4}$$

Введём оператор $\widehat{N}_Q := \widehat{Z}_Q^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_Q$. Согласно [BSu3, §6], оператор N для семейства $A(t)$ и введённый оператор $\widehat{N}_Q$ связаны соотношением

$$\widehat{N}_Q = \widehat{P}(M^*)^{-1}NM^{-1}\widehat{P}. \tag{3.5}$$

Поскольку $N = N_0 + N_*$, то $\widehat{N}_Q = \widehat{N}_{0,Q} + \widehat{N}_{*,Q}$, где

$$\widehat{N}_{0,Q} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_0M^{-1}\widehat{P}, \qquad \widehat{N}_{*,Q} = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_*M^{-1}\widehat{P}. \tag{3.6}$$

Справедлива следующая лемма, доказанная в [Su4, лемма 5.1].

Лемма 3.1 ([Su4]). *Условие $N = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_Q = 0$. Условие $N_0 = 0$ равносильно равенству $\widehat{N}_{0,Q} = 0$.*

3.3. Операторы $\widehat{Z}_{2,Q}$, $\widehat{R}_{2,Q}$ и $\widehat{N}_{1,Q}^0$. Пусть $\widehat{u} \in \widehat{\mathfrak{H}}$ и пусть $\widehat{\phi}_Q = \widehat{\phi}_Q(\widehat{u}) \in \operatorname{Dom} \widehat{X}_0$ — (слабое) решение уравнения

$$\widehat{X}_0^*(\widehat{X}_0\widehat{\phi}_Q + \widehat{X}_1\widehat{Z}_Q\widehat{\omega}) = -\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{\omega} + Q(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1}\widehat{P}\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{\omega}, \qquad Q\widehat{\phi}_Q \perp \widehat{\mathfrak{N}},$$

где $\widehat{\omega} = \widehat{P}\widehat{u}$. Ясно, что правая часть этого уравнения принадлежит $\widehat{\mathfrak{N}}^\perp = \operatorname{Ran} \widehat{X}_0^*$, поэтому условие разрешимости выполнено. Определим оператор $\widehat{Z}_{2,Q} \colon \widehat{\mathfrak{H}} \to \widehat{\mathfrak{H}}$ по формуле $\widehat{Z}_{2,Q}\widehat{u} = \widehat{\phi}_Q(\widehat{u})$.

Теперь, введём оператор $\widehat{R}_{2,Q} \colon \widehat{\mathfrak{N}} \to \mathfrak{H}_*$ по формуле $\widehat{R}_{2,Q} = \widehat{X}_0\widehat{Z}_{2,Q} + \widehat{X}_1\widehat{Z}_Q$. Наконец, определим оператор $\widehat{N}_{1,Q}^0$:

$$\widehat{N}_{1,Q}^0 = \widehat{Z}_{2,Q}^*\widehat{X}_1^*\widehat{R}\widehat{P} + (\widehat{R}\widehat{P})^*\widehat{X}_1\widehat{Z}_{2,Q} + \widehat{R}_{2,Q}^*\widehat{R}_{2,Q}\widehat{P}.$$

В [VSu1, §6, п. 6.3] были установлены следующие соотношения:

$$\begin{gathered}\widehat{Z}_{2,Q} = MZ_2M^{-1}\widehat{P}, \\ R_2 = \widehat{R}_{2,Q}M|_{\mathfrak{N}}, \quad \widehat{R}_{2,Q} = R_2M^{-1}|_{\widehat{\mathfrak{N}}}, \\ \widehat{N}_{1,Q}^0 = \widehat{P}(M^*)^{-1}N_1^0M^{-1}\widehat{P}.\end{gathered} \tag{3.7}$$

3.4. Связь операторов и коэффициентов степенных разложений. Укажем связь коэффициентов степенных разложений (1.2), (1.3) и операторов $\widehat{S}$ и $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. (См. [BSu3, п. 1.6, 1.7].) Положим $\zeta_l := M\omega_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1, \dots, n$. Тогда из (1.4) и (3.2), (3.3) видно, что

$$\widehat{S}\zeta_l = \gamma_l Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \qquad l = 1, \dots, n. \tag{3.8}$$

Набор $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ образует базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$, ортонормированный с весом $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$: $(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l, \zeta_j) = \delta_{lj}$, $l, j = 1, \dots, n$.

Операторы $\widehat{N}_{0,Q}$ и $\widehat{N}_{*,Q}$ можно описать в терминах коэффициентов степенных разложений (1.2) и (1.3); ср. (1.7). Положим $\widetilde{\zeta}_l := M\widetilde{\omega}_l \in \widehat{\mathfrak{N}}$, $l = 1, \dots, n$. Тогда

$$\widehat{N}_{0,Q} = \sum_{k=1}^{n} \mu_k(\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k)Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k, \qquad \widehat{N}_{*,Q} = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \left((\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_k)Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k + (\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_k)Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\widetilde{\zeta}_k\right). \tag{3.9}$$

Перейдём теперь к обозначениям, принятым в п. 1.7. Напомним, что различные собственные значения ростка S обозначаются через γ_q°, $q = 1, \dots, p$, а соответствующие собственные подпространства через $\mathfrak{N}_q$. Набор векторов ω_l, $l = i, \dots, i+k_q-1$, где $i = i(q) = k_1 + \ldots + k_{q-1} + 1$, образует ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_q$. Тогда те же числа γ_q°, $q = 1, \dots, p$ — это различные собственные значения задачи (3.8), а $M\mathfrak{N}_q$ — соответствующие собственные подпространства. Векторы $\zeta_l = M\omega_l$, $l = i, \dots, i + k_q - 1$, образуют базис в $M\mathfrak{N}_q$, ортонормированный с весом $Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}$. Через $\mathcal{P}_q$ обозначим "косой" проектор на $M\mathfrak{N}_q$, ортогональный относительно скалярного произведения $(Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\cdot, \cdot)$, т. е. $\mathcal{P}_q = \sum_{l=i}^{i+k_q-1}(\cdot, Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}\zeta_l)\zeta_l$. Легко видеть, что $\mathcal{P}_q = MP_qM^{-1}\widehat{P}$. Используя (1.9), (3.5) и (3.6), нетрудно проверить равенства

$$\widehat{N}_{0,Q} = \sum_{j=1}^{p} \mathcal{P}_j^*\widehat{N}_Q\mathcal{P}_j, \qquad \widehat{N}_{*,Q} = \sum_{\substack{1 \leqslant l,j \leqslant p \\ j \neq l}} \mathcal{P}_l^*\widehat{N}_Q\mathcal{P}_j. \tag{3.10}$$

Далее, можно указать связь между собственными числами и собственными векторами задачи (1.12) и оператором $\widehat{N}_Q$. Пусть γ_q° — k_q-кратное собственное значение задачи (3.8). Тогда из (3.5) и очевидного равенства $MP_q = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q}MP_q$, где $\widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q}$ — ортопроектор на подпространство $M\mathfrak{N}_q$, видно, что

$$\widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q}\widehat{N}_Q\zeta_l = \mu_l Q_{M\mathfrak{N}_q}\zeta_l, \qquad l = i(q), \dots, i(q) + k_q - 1, \tag{3.11}$$

где $Q_{M\mathfrak{N}_q} = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_q}Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}|_{M\mathfrak{N}_q}$. Напомним, что различные собственные значения задачи (1.12) обозначаются через $\mu_{q',q}^\circ$, $q' = 1, \dots, p'(q)$, а соответствующие собственные подпространства через $\mathfrak{N}_{q',q}$. Тогда те же числа $\mu^\circ_{q',q}$, $q' = 1, \dots, p'(q)$ — это различные собственные значения задачи (3.11), а $M\mathfrak{N}_{q',q}$ — соответствующие собственные подпространства.

Наконец, свяжем собственные числа и собственные векторы задачи (1.14) и оператор

$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q',q)} = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_{q',q}} \left(\widehat{N}^0_{1,Q} - \frac{1}{2}\widehat{Z}_Q^* Q \widehat{Z}_Q (MM^*)\widehat{S}\widehat{P} - \frac{1}{2}\widehat{S}(MM^*)\widehat{Z}_Q^* Q \widehat{Z}_Q \right)\Big|_{M\mathfrak{N}_{q',q}} + \widehat{\mathcal{N}}_{0,Q}^{(q',q)},$$

где $\widehat{\mathcal{N}}_{0,Q}^{(q',q)}$ — оператор в $M\mathfrak{N}_{q',q}$, порождённый формой

$$\widehat{\mathfrak{n}}_{0,Q}^{(q',q)}[\cdot,\cdot] = \sum_{\substack{j\in\{1,\dots,p\}\\ j\neq q}} \frac{(\widehat{P}_{M\mathfrak{N}_j}(MM^*)\widehat{P}_{M\mathfrak{N}_j}\widehat{N}_Q\cdot, \widehat{N}_Q\cdot)}{\gamma^\circ_q - \gamma^\circ_j},$$

а $\widehat{P}_{M\mathfrak{N}_{q',q}}$ — ортопроектор на подпространство $M\mathfrak{N}_{q',q}$. Из (3.3), (3.4), (3.7) и равенств $MP_j = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_j} M P_j$, $\widehat{P}_{M\mathfrak{N}_j} M(I - P_j) = 0$, $j = 1, \dots, p$, $MP_{q',q} = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_{q',q}} M P_{q',q}$, где $\widehat{P}_{M\mathfrak{N}_{q',q}}$ — ортопроектор на подпространство $M\mathfrak{N}_{q',q}$, видно, что

$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q',q)}\zeta_l = \nu_l Q_{M\mathfrak{N}_{q',q}}\zeta_l, \qquad l = i', \dots, i' + k_{q',q} - 1. \tag{3.12}$$

Здесь $i' = i'(q', q) = i(q) + k_{1,q} + \ldots + k_{q'-1,q}$ и $Q_{M\mathfrak{N}_{q',q}} = \widehat{P}_{M\mathfrak{N}_{q',q}} Q_{\widehat{\mathfrak{N}}}|_{M\mathfrak{N}_{q',q}}$.

3.5. Аппроксимация окаймлённой операторной экспоненты. В этом пункте мы находим аппроксимацию для операторной экспоненты $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}$ семейства вида (3.1) в терминах ростка $\widehat{S}$ оператора $\widehat{A}(t)$ и изоморфизма M. При этом оказывается удобным окаймить операторную экспоненту подходящими множителями.

Положим $M_0 := (Q_{\widehat{\mathfrak{N}}})^{-1/2}$. В [Su4, лемма 5.3] были доказаны следующие оценки

$$\|Me^{-i\tau A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P\|, \tag{3.13}$$

$$\|e^{-i\tau A(t)}P - e^{-i\tau t^2 SP}P\| \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2\|Me^{-i\tau A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\|. \tag{3.14}$$

Из теорем 2.4, 2.5, 2.6, леммы 3.1 и неравенства (3.13) непосредственно вытекают следующие результаты.

Теорема 3.2 ([BSu5]). *В предположениях п. 3.1 при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|t| \leqslant t^0$ выполнена оценка*

$$\|Me^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0\widehat{S}M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\|\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(C_1 + C_2|\tau|)\varepsilon.$$

Теорема 3.3. *Пусть выполнены предположения п. 3.1 и пусть $\widehat{N}_Q = 0$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $|t| \leqslant t^0$ выполнена оценка*

$$\|Me^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0\widehat{S}M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(C_1 + C_4'|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Теорема 3.4. *Пусть выполнены предположения пп. 3.1 и условие 1.5. Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$ и $|t| \leqslant t^{00}$ выполнена оценка*

$$\|Me^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)}M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0\widehat{S}M_0} M_0^{-1}\widehat{P}\|\varepsilon^2(t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant \|M\|^2\|M^{-1}\|^2(C_5 + C_6'|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Теорема 3.2 была доказана в [BSu5, теорема 3.2].

Замечание 3.5. *Теоремы 3.3 и 3.4 усиливают результаты теорем* 5.8 *и* 5.9 *из* [Su4] *в отношении зависимости оценок от τ.*

3.6. Подтверждение точности. Из теорем 2.8, 2.9, 2.10, 2.11 и неравенства (3.14) непосредственно вытекают следующие утверждения.

Теорема 3.6 ([Su4]). *Пусть $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 3$. Тогда не существует такой константы $C(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\| M e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)} M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P} \big\| \varepsilon^s (t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon$$

выполнялась для всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Теорема 3.7. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ и $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ для некоторого $q \in \{1, \dots, p\}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой константы $C(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\| M e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)} M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P} \big\| \varepsilon^s (t^2+\varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon$$

выполнялась для всех достаточно малых $|t|$ и ε.

Теорема 3.8. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q} \neq 0$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка*

$$\big\| M e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)} M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P} \big\| \varepsilon^3 (t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant C(\tau)\varepsilon \tag{3.15}$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Теорема 3.9. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q} = 0$ и $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)} \neq 0$ для некоторого $q \in \{1, \dots, p\}$. Тогда не существует положительной функции $C(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} C(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка*

$$\big\| M e^{-i\tau\varepsilon^{-2}A(t)} M^{-1}\widehat{P} - M_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}t^2 M_0 \widehat{S} M_0} M_0^{-1}\widehat{P} \big\| \varepsilon^2 (t^2+\varepsilon^2)^{-1} \leqslant C(\tau)\varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $|t|$ и $\varepsilon > 0$.

Теорема 3.6 была доказана в [Su4, теорема 5.10].

Глава II. Усреднение периодических дифференциальных операторов в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

§4. Периодические дифференциальные операторы в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$

4.1. Предварительные сведения: решётки и преобразование Гельфанда. Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, порождённая базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, т. е. $\Gamma = \Big\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d n_j \mathbf{a}_j,\ n_j \in \mathbb{Z} \Big\}$, и пусть Ω — элементарная ячейка решётки Γ: $\Omega := \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \xi_j \mathbf{a}_j,\ 0 < \xi_j < 1 \Big\}$. Базис $\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_d$, двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}_l, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi\delta_{lj}$. Этот базис порождает решётку $\widetilde{\Gamma}$, *двойственную* к решётке Γ. Обозначим через $\widetilde{\Omega}$ центральную *зону Бриллюэна* решётки $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega} = \Big\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \colon |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|,\ 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma} \Big\}. \tag{4.1}$$

Будем пользоваться обозначениями $|\Omega| = \operatorname{meas}\Omega$, $|\widetilde{\Omega}| = \operatorname{meas}\widetilde{\Omega}$ и отметим, что $|\Omega||\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$. Пусть r_0 — радиус шара, *вписанного* в $\operatorname{clos}\widetilde{\Omega}$. Отметим, что

$$2r_0 = \min |\mathbf{b}|, \quad 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma}.$$

С решёткой Γ связано разложение в ряд Фурье $\{\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}\} \mapsto \mathbf{u}$: $\mathbf{u}(\mathbf{x}) = |\Omega|^{-1/2} \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}} e^{i\langle \mathbf{b},\mathbf{x}\rangle}$, которое унитарно отображает $l_2(\widetilde{\Gamma}; \mathbb{C}^n)$ на $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. *Через* $\widetilde{H}^\sigma(\Omega; \mathbb{C}^n)$ *обозначается подпространство тех функций из* $H^\sigma(\Omega; \mathbb{C}^n)$, Γ-*периодическое продолжение которых на* $\mathbb{R}^d$ *принадлежит* $H^\sigma_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. Имеет место равенство

$$\int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{b}+\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2, \qquad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n),\ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d, \tag{4.2}$$

причём сходимость ряда в правой части (4.2) равносильна включению $\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Из (4.1) и (4.2) следует оценка

$$\int_\Omega |(\mathbf{D}+\mathbf{k})\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x} \geqslant \sum_{\mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} |\mathbf{k}|^2 |\hat{\mathbf{u}}_{\mathbf{b}}|^2 = |\mathbf{k}|^2 \int_\Omega |\mathbf{u}|^2\, d\mathbf{x}, \qquad \mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n),\ \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{4.3}$$

Преобразование Гельфанда $\mathscr{U}$ первоначально определяется на функциях из класса Шварца $\mathbf{v} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ формулой:

$$\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\mathbf{x}) = (\mathscr{U}\mathbf{v})(\mathbf{k},\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2} \sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle} \mathbf{v}(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \qquad \mathbf{x} \in \Omega,\ \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega},$$

и продолжается по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathscr{U} : L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)\, d\mathbf{k} =: \mathcal{K}.$$

4.2. Факторизованные операторы $\mathcal{A}$ второго порядка. Пусть $b(\mathbf{D}) = \sum_{l=1}^d b_l D_l$, где b_l — постоянные $(m \times n)$-матрицы (вообще говоря, с комплексными элементами). *Предполагается, что* $m \geqslant n$. Рассмотрим символ $b(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{l=1}^d b_l \xi_l$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. *Предположим, что* $\operatorname{rank} b(\boldsymbol{\xi}) = n$, $0 \neq \boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^d$. Это равносильно тому, что для некоторых α_0, α_1 выполнены неравенства

$$\alpha_0 \mathbf{1}_n \leqslant b(\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}_n, \quad \boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}, \quad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty. \tag{4.4}$$

Пусть $f(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(n\times n)$-матричнозначная функция и $h(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая $(m \times m)$-матричнозначная функция, такие что

$$f, f^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d); \quad h, h^{-1} \in L_\infty(\mathbb{R}^d). \tag{4.5}$$

Рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}\colon L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \to L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^m)$, заданный выражением $\mathcal{X} = hb(\mathbf{D})f$ на области определения $\operatorname{Dom} \mathcal{X} = \big\{\mathbf{u} \in L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n) \colon f\mathbf{u} \in H^1(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)\big\}$. Самосопряжённый оператор $\mathcal{A} = \mathcal{X}^*\mathcal{X}$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ порождается замкнутой квадратичной формой $\mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}\mathbf{u}\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}$, $\mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}$. Формально,

$$\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f(\mathbf{x}), \tag{4.6}$$

где $g(\mathbf{x}) = h(\mathbf{x})^* h(\mathbf{x})$. Используя преобразование Фурье и (4.4), (4.5), легко проверить оценки

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{a}[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|\mathbf{D}(f\mathbf{u})\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d)}, \qquad \mathbf{u} \in \operatorname{Dom}\mathcal{X}.$$

4.3. Операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Положим

$$\mathfrak{H} = L_2(\Omega; \mathbb{C}^n), \qquad \mathfrak{H}_* = L_2(\Omega; \mathbb{C}^m) \tag{4.7}$$

и рассмотрим замкнутый оператор $\mathcal{X}(\mathbf{k})\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$, зависящий от параметра $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^d$ и заданный выражением $\mathcal{X}(\mathbf{k}) = hb(\mathbf{D}+\mathbf{k})f$ на области

$$\operatorname{Dom} \mathcal{X}(\mathbf{k}) = \left\{\mathbf{u} \in \mathfrak{H}\colon f\mathbf{u} \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n)\right\} =: \mathfrak{d}.$$

Самосопряжённый оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \mathcal{X}(\mathbf{k})^*\mathcal{X}(\mathbf{k})\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}$ порождается квадратичной формой $\mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] = \|\mathcal{X}(\mathbf{k})\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}_*}$, $\mathbf{u} \in \mathfrak{d}$. Используя разложение функции $\mathbf{u}$ в ряд Фурье и условия (4.4), (4.5), легко проверить, что

$$\alpha_0 \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty} \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}} \leqslant \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\mathbf{u},\mathbf{u}] \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|(\mathbf{D}+\mathbf{k})f\mathbf{u}\|^2_{\mathfrak{H}}, \quad \mathbf{u} \in \mathfrak{d}. \tag{4.8}$$

Из (4.3) и нижней оценки (4.8) вытекает, что

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) \geqslant c_*|\mathbf{k}|^2 I, \qquad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega},\ c_* = \alpha_0 \|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty} \|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}. \tag{4.9}$$

Положим $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker} \mathcal{A}(0) = \operatorname{Ker} \mathcal{X}(0)$. Соотношения (4.8) при $\mathbf{k} = 0$ показывают, что

$$\mathfrak{N} = \{\mathbf{u} \in L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)\colon f\mathbf{u} = \mathbf{c} \in \mathbb{C}^n\}, \qquad \dim \mathfrak{N} = n. \tag{4.10}$$

4.4. Зонные функции. Обозначим через $E_j(\mathbf{k})$, $j \in \mathbb{N}$, последовательные (с учётом кратностей) собственные значения оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ (зонные функции):

$$E_1(\mathbf{k}) \leqslant E_2(\mathbf{k}) \leqslant \ldots \leqslant E_j(\mathbf{k}) \leqslant \ldots, \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d.$$

Зонные функции $E_j(\mathbf{k})$ непрерывны и $\widetilde{\Gamma}$-периодичны. Как показано в [BSu2, гл. 2, п. 2.2] (на основании простых вариационных соображений), зонные функции удовлетворяют следующим оценкам:

$$\begin{aligned}
E_j(\mathbf{k}) &\geqslant c_*|\mathbf{k}|^2, &\quad \mathbf{k} &\in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega}, \quad j = 1, \ldots, n,\\
E_{n+1}(\mathbf{k}) &\geqslant c_* r_0^2, &\quad \mathbf{k} &\in \operatorname{clos} \widetilde{\Omega},\\
E_{n+1}(0) &\geqslant 4c_* r_0^2. &&
\end{aligned}$$

4.5. Прямой интеграл для оператора $\mathcal{A}$. Под действием преобразования Гельфанда $\mathscr{U}$ оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$:

$$\mathscr{U} \mathcal{A} \mathscr{U}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{4.11}$$

Подразумевается следующее. Пусть $\mathbf{v} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}$, тогда $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}, \cdot) \in \mathfrak{d}$ при п.в. $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и

$$\mathfrak{a}[\mathbf{v},\mathbf{v}] = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot), \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot)]\, d\mathbf{k}. \tag{4.12}$$

Обратно, если для $\tilde{\mathbf{v}} \in \mathcal{K}$ справедливо $\tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k},\cdot) \in \mathfrak{d}$ при п.в. $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и интеграл в (4.12) конечен, то $\mathbf{v} \in \operatorname{Dom} \mathcal{X}$ и выполнено (4.12).

4.6. Включение операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ в абстрактную схему. Если $d>1$, то операторы $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ зависят от многомерного параметра $\mathbf{k}$. Следуя [BSu2, гл. 2], введём одномерный параметр $t=|\mathbf{k}|$. Будем использовать схему главы I. При этом все построения будут зависеть от дополнительного параметра $\boldsymbol{\theta}=\mathbf{k}/|\mathbf{k}|\in\mathbb{S}^{d-1}$ и мы должны следить за равномерностью оценок по $\boldsymbol{\theta}$. Пространства $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ определены в (4.7). Положим $X(t)=X(t;\boldsymbol{\theta}):=\mathcal{X}(t\boldsymbol{\theta})$. При этом выполнено $X(t;\boldsymbol{\theta})=X_0+tX_1(\boldsymbol{\theta})$, где $X_0=h(\mathbf{x})b(\mathbf{D})f(\mathbf{x})$, $\operatorname{Dom}X_0=\mathfrak{d}$, а $X_1(\boldsymbol{\theta})$ — ограниченный оператор умножения на матрицу $h(\mathbf{x})b(\boldsymbol{\theta})f(\mathbf{x})$. Далее, положим $A(t)=A(t;\boldsymbol{\theta}):=\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta})$. Ядро $\mathfrak{N}=\operatorname{Ker}X_0$ описано в (4.10). Как было показано в [BSu2, гл. 2, §3], расстояние d^0 от точки $\lambda_0=0$ до остального спектра оператора $\mathcal{A}(0)$ подчинено оценке $d^0\geqslant 4c_*r_0^2$. Условие $n\leqslant n_*=\dim\operatorname{Ker}X_0^*$ также выполнено. Более того, либо $n_*=n$ (если $m=n$), либо $n_*=\infty$ (если $m>n$).

Следуя пункту 1.1, мы должны фиксировать $\delta\in(0,d^0/8)$. Так как $d^0\geqslant 4c_*r_0^2$, положим

$$\delta=\frac{1}{4}c_*r_0^2=\frac{1}{4}\alpha_0\|f^{-1}\|^{-2}_{L_\infty}\|g^{-1}\|^{-1}_{L_\infty}r_0^2. \tag{4.13}$$

Отметим, что в силу (4.4) и (4.5) справедлива оценка

$$\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|\leqslant\alpha_1^{1/2}\|h\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty},\qquad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}. \tag{4.14}$$

Для t^0 (см. (1.1)) примем следующее значение:

$$t^0=\delta^{1/2}\alpha_1^{-1/2}\|h\|^{-1}_{L_\infty}\|f\|^{-1}_{L_\infty}=\frac{r_0}{2}\alpha_0^{1/2}\alpha_1^{-1/2}\left(\|h\|_{L_\infty}\|h^{-1}\|_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty}\right)^{-1}. \tag{4.15}$$

Отметим, что $t^0\leqslant r_0/2$. Следовательно, шар $|\mathbf{k}|\leqslant t^0$ целиком лежит внутри $\widetilde{\Omega}$. Важно, что величины c_*, δ, t^0 (см. (4.9), (4.13), (4.15)) не зависят от $\boldsymbol{\theta}$. Условие 1.5 выполнено в силу (4.9). Росток $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$ невырожден равномерно по $\boldsymbol{\theta}$: выполнено $S(\boldsymbol{\theta})\geqslant c_*I_{\mathfrak{N}}$ (ср. (1.8)).

§5. Эффективные характеристики оператора $\widehat{\mathcal{A}}=b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D})$

5.1. Оператор $A(t,\boldsymbol{\theta})$ в случае $f=\mathbf{1}_n$. Особую роль играет оператор $A(t,\boldsymbol{\theta})$ при $f=\mathbf{1}_n$. Условимся в этом случае отмечать все объекты шляпкой "$\,\widehat{}\,$". Тогда для оператора

$$\widehat{\mathcal{A}}=b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})b(\mathbf{D}) \tag{5.1}$$

семейство $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ обозначается $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$. Ядро (4.10) принимает вид

$$\widehat{\mathfrak{N}}=\{\mathbf{u}\in L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\colon \mathbf{u}=\mathbf{c}\in\mathbb{C}^n\}, \tag{5.2}$$

т. е. $\widehat{\mathfrak{N}}$ состоит из постоянных вектор-функций. Ортопроектор $\widehat{P}$ пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство (5.2) есть оператор усреднения по ячейке:

$$\widehat{P}\mathbf{u}=|\Omega|^{-1}\int_\Omega\mathbf{u}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}. \tag{5.3}$$

Согласно [BSu2, гл. 3, §1], спектральный росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\colon\widehat{\mathfrak{N}}\to\widehat{\mathfrak{N}}$ семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ представим в виде $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})=b(\boldsymbol{\theta})^*g^0b(\boldsymbol{\theta})$, $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$, где g^0 — так называемая *эффективная матрица*. Постоянная $(m\times m)$-матрица g^0 определяется следующим образом. Пусть $\Lambda\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ — периодическая $(n\times m)$-матричнозначная функция, удовлетворяющая уравнению

$$b(\mathbf{D})^*g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x})+\mathbf{1}_m)=0,\qquad\int_\Omega\Lambda(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}=0. \tag{5.4}$$

Эффективная матрица g^0 может быть определена в терминах матрицы $\Lambda(\mathbf{x})$:

$$g^0 = |\Omega|^{-1} \int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \tag{5.5}$$

$$\widetilde{g}(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m). \tag{5.6}$$

Выясняется, что матрица g^0 положительно определена. Рассмотрим символ

$$\widehat{S}(\mathbf{k}) := t^2 \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) = b(\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{k}), \qquad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{5.7}$$

Выражение (5.7) является символом ДО

$$\widehat{\mathcal{A}}^0 = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}), \tag{5.8}$$

действующего в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ и называемого *эффективным оператором* для оператора $\widehat{\mathcal{A}}$.

Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})$ — операторное семейство в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$, отвечающее оператору (5.8). Тогда $\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k}) = b(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g^0 b(\mathbf{D}+\mathbf{k})$ при периодических граничных условиях. Отсюда с учётом (5.3) и (5.7) вытекает тождество

$$\widehat{S}(\mathbf{k})\widehat{P} = \widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{5.9}$$

5.2. Свойства эффективной матрицы. Следующие свойства g^0 были проверены в [BSu2, гл. 3, теорема 1.5].

Предложение 5.1 ([BSu2]). *Для эффективной матрицы справедливы оценки*

$$\underline{g} \leqslant g^0 \leqslant \overline{g}, \tag{5.10}$$

где $\overline{g} := |\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$ *и* $\underline{g} := \left(|\Omega|^{-1} \int_\Omega g(\mathbf{x})^{-1}\, d\mathbf{x}\right)^{-1}$. *В случае* $m = n$ *всегда выполнено* $g^0 = \underline{g}$.

Оценки (5.10) известны в теории усреднения для конкретных ДО как вилка Фойгта–Рейсса. Выделим теперь условия, при которых реализуется верхняя или нижняя грань в (5.10). Следующие утверждения были проверены в [BSu2, гл. 3, предложения 1.6, 1.7].

Предложение 5.2 ([BSu2]). *Равенство* $g^0 = \overline{g}$ *равносильно соотношениям*

$$b(\mathbf{D})^* \mathbf{g}_k(\mathbf{x}) = 0, \quad k = 1, \dots, m, \tag{5.11}$$

где $\mathbf{g}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$ *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})$.

Предложение 5.3 ([BSu2]). *Равенство* $g^0 = \underline{g}$ *равносильно представлениям*

$$\mathbf{l}_k(\mathbf{x}) = \mathbf{l}_k^0 + b(\mathbf{D})\mathbf{w}_k(\mathbf{x}), \quad \mathbf{l}_k^0 \in \mathbb{C}^m, \quad \mathbf{w}_k \in \widetilde{H}^1(\Omega; \mathbb{C}^n), \quad k = 1, \dots, m, \tag{5.12}$$

где $\mathbf{l}_k(\mathbf{x})$, $k = 1, \dots, m$ *— столбцы матрицы* $g(\mathbf{x})^{-1}$.

5.3. Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов. Аналитические (по t) ветви собственных значений $\widehat{\lambda}_l(t, \boldsymbol{\theta})$ и ветви собственных элементов $\widehat{\varphi}_l(t, \boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{\mathcal{A}}(t, \boldsymbol{\theta})$ допускают степенные разложения вида (1.2), (1.3) с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{\theta}$ (интервал сходимости $t = |\mathbf{k}| \leqslant t_*(\boldsymbol{\theta})$ мы не контролируем):

$$\widehat{\lambda}_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta}) t^2 + \widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) t^3 + \widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta}) t^4 + \dots, \qquad l = 1, \dots, n, \tag{5.13}$$

$$\widehat{\varphi}_l(t, \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) + t \widehat{\psi}_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \qquad l = 1, \dots, n. \tag{5.14}$$

Согласно (1.4) числа $\widehat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными значениями и собственными элементами ростка: $b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}_l(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$.

5.4. Оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$. Нам понадобится описать оператор N (в абстрактных терминах определённый в теореме 1.3). Как проверено в [BSu4, §4], для семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$ этот оператор принимает вид

$$\begin{aligned} &\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \\ &L(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1} \int_\Omega (\Lambda(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Здесь $\Lambda(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи (5.4), а $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — матрица-функция (5.6).

В [BSu3, §4] указаны некоторые достаточные условия, при которых $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$.

Предложение 5.4 ([BSu3]). *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:*

1°. $\widehat{\mathcal{A}} = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D}$, *где* $g(\mathbf{x})$ *— симметричная матрица с вещественными элементами.*

2°. *Выполнены соотношения* (5.11), *т. е.* $g^0 = \overline{g}$.

3°. *Выполнены соотношения* (5.12), *т. е.* $g^0 = \underline{g}$. *(В частности, это автоматически выполнено, если* $m = n$.*)*

Тогда $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Напомним (см. замечание 1.4), что $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) + \widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta})$, где оператор $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ диагонален в базисе $\{\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})\}_{l=1}^n$, а оператор $\widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta})$ имеет нулевые диагональные элементы. При этом

$$(\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = 1, \dots, n.$$

В [BSu4, п. 4.3] было доказано следующее предложение.

Предложение 5.5 ([BSu4]). *Пусть* $b(\boldsymbol{\theta})$ *и* $g(\mathbf{x})$ *— матрицы с вещественными элементами. Пусть в разложениях* (5.14) *"зародыши"* $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$, *можно выбрать вещественными. Тогда в* (5.13) *выполнено* $\widehat{\mu}_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l = 1, \dots, n$, *то есть,* $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$.

В рассматриваемом "вещественном" случае росток $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ представляет собой симметричную вещественную матрицу. Ясно, что в случае простого собственного значения $\widehat{\gamma}_j(\boldsymbol{\theta})$ ростка зародыш $\widehat{\omega}_j(\boldsymbol{\theta})$ определяется однозначно с точностью до фазового множителя, и его всегда можно выбрать вещественным. Мы получаем следующее следствие.

Следствие 5.6. *Пусть* $b(\boldsymbol{\theta})$ *и* $g(\mathbf{x})$ *— матрицы с вещественными элементами и пусть спектр ростка* $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ *простой. Тогда* $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$.

Однако, как показывают примеры [Su4, пример 8.7], [DSu, п. 14.3], в "вещественном" случае не всегда возможно выбрать векторы $\widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta})$ вещественными. Может случиться, что $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ в некоторых точках $\boldsymbol{\theta}$.

5.5. Операторы $\widehat{Z}_2(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}_2(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta})$. Опишем операторы Z_2, R_2, N_1^0 (в абстрактных терминах определённые в пп. 1.3 и 1.8) для семейства $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta})$. Пусть $\Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x}) (b(\mathbf{D}) \Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x}) + b_l \Lambda(\mathbf{x})) = b_l^* (g^0 - \widetilde{g}(\mathbf{x})), \qquad \int_\Omega \Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Положим $\Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) := \sum_{l=1}^d \Lambda_l^{(2)}(\mathbf{x}) \theta_l$. Как проверено в [VSu2, п. 6.3]

$$\widehat{Z}_2(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}, \qquad \widehat{R}_2(\boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x})(b(\mathbf{D}) \Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda(\mathbf{x})) b(\boldsymbol{\theta}).$$

Наконец, в [VSu2, п. 6.4] было получено представление

$$\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_2(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P},$$

$$L_2(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \left(\Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) \right) d\mathbf{x} +$$
$$+ |\Omega|^{-1} \int_\Omega \left(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda(\mathbf{x}) \right)^* g(\mathbf{x}) \left(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda(\mathbf{x}) \right) d\mathbf{x}.$$

5.6. Кратности собственных значений ростка. В данном пункте считаем, что $n \geqslant 2$. Перейдём к обозначениям, принятым в п. 1.7, следя за кратностями собственных значений спектрального ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$. Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\widehat{\gamma}_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \widehat{\gamma}_{p(\boldsymbol{\theta})}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ спектрального ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\gamma}_j^\circ(\boldsymbol{\theta})$. В силу (1.9) справедливы инвариантные (не зависящие от выбора базиса) представления для операторов $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta})$:

$$\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{p(\boldsymbol{\theta})} \widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta}), \qquad \widehat{N}_*(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\substack{1 \leqslant l,j \leqslant p(\boldsymbol{\theta}) \\ j \neq l}} \widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_l(\boldsymbol{\theta}). \tag{5.16}$$

5.7. Коэффициенты $\widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = 1, \dots, n$. Количество $p'(q,\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\widehat{\mu}_{1,q}^\circ(\boldsymbol{\theta}), \dots, \widehat{\mu}_{p'(q,\boldsymbol{\theta}),q}^\circ(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{P}_q(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})|_{\widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})}$ и их кратности $k_{1,q}(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p'(\boldsymbol{\theta}),q}(\boldsymbol{\theta})$ также зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство $\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\mu}_{q',q}^\circ(\boldsymbol{\theta})$.

Коэффициенты $\widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = i'(q',q,\boldsymbol{\theta}), \dots, i'(q',q,\boldsymbol{\theta}) + k_{q',q}(\boldsymbol{\theta}) - 1$, где $i'(q',q,\boldsymbol{\theta}) = i(q,\boldsymbol{\theta}) + k_{1,q}(\boldsymbol{\theta}) + \ldots + k_{q'-1,q}(\boldsymbol{\theta})$, $i(q,\boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta}) + \ldots + k_{q-1}(\boldsymbol{\theta}) + 1$, являются собственными числами следующей задачи

$$\widehat{\mathcal{N}}^{(q',q)}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\nu}_l(\boldsymbol{\theta}) \widehat{\omega}_l(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = i'(q',q,\boldsymbol{\theta}), \dots, i'(q',q,\boldsymbol{\theta}) + k_{q',q}(\boldsymbol{\theta}) - 1,$$

где

$$\widehat{\mathcal{N}}^{(q',q)}(\boldsymbol{\theta}) := \widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}) \left(\widehat{N}_1^0(\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{2}\widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} - \frac{1}{2}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P} \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{Z}(\boldsymbol{\theta}) \right) \Big|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q}} +$$
$$+ \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta})\} \\ j \neq q}} \left(\gamma_q^\circ(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_j^\circ(\boldsymbol{\theta}) \right)^{-1} \widehat{P}_{q',q}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}(\boldsymbol{\theta})|_{\widehat{\mathfrak{N}}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})}.$$

Отметим, что в случае, когда $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$, имеет место $\widehat{\mathfrak{N}}_{1,q}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathfrak{N}}_q(\boldsymbol{\theta})$, $q = 1, \dots, p(\boldsymbol{\theta})$. Тогда вместо $\widehat{\mathcal{N}}^{(1,q)}(\boldsymbol{\theta})$ мы будем писать $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$.

5.8. Пример. Рассмотрим скалярный эллиптический оператор

$$\widehat{\mathcal{A}} = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}) \nabla = \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D},$$

действующий в $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, который является частным случаем оператора (5.1). Сейчас $n = 1$, $m = d$, $b(\mathbf{D}) = \mathbf{D}$.

Эффективная матрица g^0 определяется стандартным образом. Пусть $\psi_j \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ — (слабое) Γ-периодическое решение задачи

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j) = 0, \qquad \int_\Omega \psi_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{5.17}$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_d$ — стандартные орты в $\mathbb{R}^d$. Матрица $\widetilde{g}(\mathbf{x})$ — это $(d\times d)$-матрица со столбцами $\widetilde{\mathbf{g}}_j(\mathbf{x}) := g(\mathbf{x})(\nabla\psi_j(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_j)$, $j = 1, \dots, d$. Тогда $g^0 = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \widetilde{g}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}$.

Если $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с вещественными элементами, то согласно предложению 5.4(1°) выполнено $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Если же $g(\mathbf{x})$ — эрмитова матрица с комплексными элементами, то в общей ситуации оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ отличен от нуля. Сейчас $n = 1$, а потому оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta})$ есть оператор умножения на $\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$, где $\widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})$ — коэффициент в разложении для первого собственного значения

$$\widehat{\lambda}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\gamma}(\boldsymbol{\theta})t^2 + \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta})t^3 + \widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots$$

оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. Вычисление (см. [BSu4, п. 10.3]) показывает, что

$$\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta}) = -i \sum_{j,l,r=1}^{d} (a_{jlr} - a_{ljr}^*)\theta_j\theta_l\theta_r,$$
$$a_{jlr} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega \psi_j(\mathbf{x})^* \left\langle g(\mathbf{x})(\nabla\psi_l(\mathbf{x}) + \mathbf{e}_l), \mathbf{e}_r\right\rangle\, d\mathbf{x}, \qquad j,l,r = 1,\dots,d.$$

Следующий пример заимствован из [BSu4, п. 10.4].

Пример 5.7 ([BSu4])**.** Пусть $d = 2$, $\Gamma = (2\pi\mathbb{Z})^2$ и матрица $g(\mathbf{x})$ задана соотношением

$$g(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 1 & i\beta'(x_1) \\ -i\beta'(x_1) & 1 \end{pmatrix},$$

где $\beta(x_1)$ — гладкая вещественная (2π)-периодическая функция такая, что $1 - (\beta'(x_1))^2 > 0$ и $\int_0^{2\pi}\beta(x_1)\, dx_1 = 0$. В этом случае $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = -\alpha\pi^{-1}\theta_2^3$, где $\alpha = \int_0^{2\pi}\beta(x_1)(\beta'(x_1))^2 dx_1$. Легко указать конкретный пример, когда $\alpha \neq 0$: достаточно положить $\beta(x_1) = c(\sin x_1 + \cos 2x_1)$ при $0 < c < 1/3$; тогда $\alpha = -(3\pi/2)c^3 \neq 0$. В данном примере $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mu}(\boldsymbol{\theta}) \neq 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^1$ за исключением точек $(\pm 1, 0)$.

Далее, пусть $\phi_{jl}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$-\operatorname{div} g(\mathbf{x})(\nabla\phi_{jl}(\mathbf{x}) - \psi_j(\mathbf{x})\mathbf{e}_l) = g_{lj}^0 - \widetilde{g}_{lj}(\mathbf{x}), \qquad \int_\Omega \phi_{jl}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0. \tag{5.18}$$

Оператор $\widehat{\mathcal{N}}^{(1,1)}(\boldsymbol{\theta})$ есть оператор умножения на $\widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta})$. Вычисление (см. [VSu2, п. 14.5]) показывает, что

$$\widehat{\mathcal{N}}^{(1,1)}(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\nu}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{p,q,l,r=1}^{d} (\alpha_{pqlr} - (\overline{\psi_p^*\psi_q})g_{lr}^0)\theta_p\theta_q\theta_l\theta_r, \tag{5.19}$$
$$\alpha_{pqlr} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (\widetilde{g}_{lp}(\mathbf{x})\phi_{qr}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}_{rq}(\mathbf{x})\phi_{pl}(\mathbf{x}))\, d\mathbf{x} +$$
$$+ |\Omega|^{-1}\int_\Omega \left\langle g(\mathbf{x})(\nabla\phi_{qr}(\mathbf{x}) - \psi_q(\mathbf{x})\mathbf{e}_r), \nabla\phi_{pl}(\mathbf{x}) - \psi_p(\mathbf{x})\mathbf{e}_l\right\rangle\, d\mathbf{x},$$
$$p,q,l,r = 1,\dots,d.$$

Лемма 5.8. *Пусть $d = 1$. Если $g \neq \mathrm{const}$, то $\widehat{\nu}(-1) = \widehat{\nu}(1) \neq 0$.*

Доказательство. Задача (5.17) сейчас имеет вид $\frac{d}{dx} g(x)(\frac{d}{dx}\psi_1(x) + 1) = 0$, $\overline{\psi_1} = 0$. Тогда $\frac{d}{dx}\psi_1(x) = \underline{g}(g(x))^{-1} - 1$. Поскольку $g(x) \neq \mathrm{const}$, то $\underline{g}(g(x))^{-1} - 1 \not\equiv 0$ и поэтому $\psi_1 \not\equiv 0$. Далее, $\widetilde{g}(x) = \underline{g} = g^0$ и уравнение (5.18) имеет вид $\frac{d}{dx} g(x)(\frac{d}{dx}\phi_{11}(x) - \psi_1(x)) = 0$, $\overline{\phi_{11}} = 0$. Тогда $\frac{d}{dx}\phi_{11}(x) - \psi_1(x) = 0$. Нетрудно убедиться в том, что α_{1111} в (5.19) сейчас равно нулю: $\alpha_{1111} = 0$. Так как $\overline{\psi_1^2} g^0 \neq 0$, то $\widehat{\nu}(-1) = \widehat{\nu}(1) \neq 0$. $\square$

§6. Аппроксимация сглаженного оператора $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})}$

6.1. Общий случай. Рассмотрим оператор $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ в $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$. При разложении в прямой интеграл оператору $\mathcal{H}_0$ отвечает семейство операторов $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$, действующих в $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$. Оператор $\mathcal{H}_0(\mathbf{k})$ задаётся дифференциальным выражением $|\mathbf{D} + \mathbf{k}|^2$ при периодических граничных условиях. Введём обозначение

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0(\mathbf{k}) + \varepsilon^2 I)^{-1}. \tag{6.1}$$

Очевидно,

$$\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2}\widehat{P} = \varepsilon^s(t^2 + \varepsilon^2)^{-s/2}\widehat{P}, \qquad s > 0. \tag{6.2}$$

Отметим, что при $|\mathbf{k}| > \widehat{t}^0$ выполнено неравенство

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2}\widehat{P}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant (\widehat{t}^0)^{-s}\varepsilon^s, \qquad \varepsilon > 0,\ \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega},\ |\mathbf{k}| > \widehat{t}^0. \tag{6.3}$$

Далее, используя разложение в ряд Фурье, получаем

$$\|\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2}(I - \widehat{P})\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} = \sup_{0\neq \mathbf{b}\in\widetilde{\Gamma}} \varepsilon^s(|\mathbf{b} + \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-s/2} \leqslant r_0^{-s}\varepsilon^s, \qquad \varepsilon > 0,\ \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{6.4}$$

Обозначим

$$\widehat{J}(\mathbf{k}, \varepsilon; \tau) := e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}. \tag{6.5}$$

Мы применим к оператору $\widehat{A}(t; \boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ теоремы из §2. При этом мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от исходных данных. Отметим, что $\widehat{c}_*$, $\widehat{\delta}$ и $\widehat{t}^0$ не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (4.9), (4.13), (4.15) при $f = \mathbf{1}_n$). Согласно (4.14) (при $f = \mathbf{1}_n$) норму $\|\widehat{X}_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}$. Поэтому постоянные в теоремах 2.4 и 2.5 (применённых к оператору $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от следующих величин: α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Применяя теорему 2.4 с учётом (5.9), (6.2)–(6.4), приходим к следующему утверждению, ранее доказанному в [BSu5, теорема 7.1].

Теорема 6.1 ([BSu5]). *При $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|\widehat{J}(\mathbf{k}, \varepsilon; \tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1(1 + |\tau|)\varepsilon,$$

где константа $\widehat{\mathcal{C}}_1$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

6.2. Случай, когда $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Применим теперь теорему 2.5, предполагая, что $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (5.9), (6.2)–(6.4) это влечёт следующий результат.

Теорема 6.2. *Пусть оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (5.15). Пусть $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|\widehat{J}(\mathbf{k}, \varepsilon; \tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2(1 + |\tau|^{1/2})\varepsilon,$$

где константа $\widehat{\mathcal{C}}_2$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

6.3. Случай, когда $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Теперь мы отказываемся от предположения теоремы 6.2, но взамен предположим, что $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta}$. Нам хотелось бы применить теорему 2.6. Однако, возникает дополнительное осложнение: кратность спектра ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ может меняться в некоторых точках $\boldsymbol{\theta}$. При приближении к таким точкам расстояние между какой-то парой различных собственных значений стремится к нулю и мы не можем выбрать величины $\widehat{c}^{\circ}_{jl}$, $\widehat{t}^{00}_{jl}$ не зависящими от $\boldsymbol{\theta}$. Поэтому мы вынуждены накладывать дополнительные условия. Заботиться надо только о тех собственных значениях, для которых соответствующее слагаемое во второй формуле (5.16) отлично от нуля. При формулировке дополнительного условия удобнее пользоваться исходной нумерацией собственных значений $\widehat{\gamma}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \widehat{\gamma}_n(\boldsymbol{\theta})$ ростка $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ (каждое собственное значение повторяется столько раз, какова его кратность), условившись нумеровать их в порядке неубывания: $\widehat{\gamma}_1(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \widehat{\gamma}_2(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \dots \leqslant \widehat{\gamma}_n(\boldsymbol{\theta})$. Через $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим ортопроектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство оператора $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$. Ясно, что при каждом $\boldsymbol{\theta}$ оператор $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с одним из проекторов $\widehat{P}_j(\boldsymbol{\theta})$, введённых в п. 5.6 (но номер j может зависеть от $\boldsymbol{\theta}$).

Условие 6.3. 1°. $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. *Для каждой пары индексов* (k, r), $1 \leqslant k, r \leqslant n$, $k \neq r$, *такой, что* $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta}_0) = \widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta}_0)$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, *выполнено* $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 2° может быть переформулировано: мы требуем, чтобы для ненулевых (тождественно) "блоков" $\widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ соответствующие ветви собственных значений $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})$ не пересекались.

Разумеется, выполнение условия 6.3 гарантируется следующим более сильным условием.

Условие 6.4. 1°. $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. *Количество* p *различных собственных значений спектрального ростка* $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ *не зависит от* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

При условии 6.4 обозначим различные собственные значения ростка, занумерованные в порядке возрастания, через $\widehat{\gamma}^{\circ}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \widehat{\gamma}^{\circ}_p(\boldsymbol{\theta})$. Тогда их кратности $k_1, \dots, k_p$ не зависят от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Замечание 6.5. 1°. *Предположение пункта* 2° *условия* 6.4 *заведомо выполнено, если спектр ростка* $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ *простой при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. *Из следствия* 5.6 *вытекает, что условие* 6.4 *выполнено, если* $b(\boldsymbol{\theta})$ *и* $g(\mathbf{x})$ *— матрицы с вещественными элементами и спектр ростка* $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ *простой при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Итак, предполагаем выполненным условие 6.3. Нас интересуют только пары индексов из множества

$$\widehat{\mathcal{K}} := \{(k, r) \colon 1 \leqslant k, r \leqslant n,\ k \neq r,\ \widehat{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) \not\equiv 0\}.$$

Введём обозначение $\widehat{c}^{\circ}_{kr}(\boldsymbol{\theta}) := \min\{\widehat{c}_*, n^{-1}|\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})|\}$, $(k, r) \in \widehat{\mathcal{K}}$. Поскольку оператор $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ непрерывно зависит от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, то из теории возмущений дискретного спектра следует, что $\widehat{\gamma}_j(\boldsymbol{\theta})$ — непрерывные функции на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$. В силу условия 6.3(2°) при $(k, r) \in \widehat{\mathcal{K}}$ выполнено $|\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta}) - \widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})| > 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, а тогда $\widehat{c}^{\circ}_{kr} := \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}} \widehat{c}^{\circ}_{kr}(\boldsymbol{\theta}) > 0$ при $(k, r) \in \widehat{\mathcal{K}}$. Положим

$$\widehat{c}^{\circ} := \min_{(k,r) \in \widehat{\mathcal{K}}} \widehat{c}^{\circ}_{kr}. \tag{6.6}$$

Ясно, что число (6.6) — это реализация величины (2.4), выбранная не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$. Число $\widehat{t}^{00}$, подчинённое (2.3), при условии 6.3 также можно выбрать не зависящим от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (4.13) и (4.14) (при $f = \mathbf{1}_n$) положим

$$\widehat{t}^{00} = (8\beta_2)^{-1} r_0 \alpha_1^{-3/2} \alpha_0^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-3/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2} \widehat{c}^{\circ},$$

где $\widehat{c}^\circ$ определено в (6.6). (Условие $\widehat{t}^{00} \leqslant \widehat{t}^0$ выполнено автоматически, поскольку $\widehat{c}^\circ \leqslant \|\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty}$.)

Замечание 6.6. *В отличие от числа $\widehat{t}^0$ (см. (4.15) при $f = \mathbf{1}_n$), которое контролируется только через r_0, α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$ и $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, величина $\widehat{t}^{00}$ зависит от спектральной характеристики ростка — минимального расстояния между его различными собственными значениями $\widehat{\gamma}_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\widehat{\gamma}_r(\boldsymbol{\theta})$ (где (k,r) пробегает $\widehat{\mathcal{K}}$).*

Применяя теорему 2.6, получаем следующий результат.

Теорема 6.7. *Пусть выполнено условие 6.3 (или более сильное условие 6.4). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|\widehat{J}(\mathbf{k}, \varepsilon; \tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3(1 + |\tau|^{1/2})\varepsilon,$$

где константа $\widehat{\mathcal{C}}_3$ зависит от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0, а также от n и $\widehat{c}^\circ$.

6.4. Подтверждение точности относительно сглаживания. Применение теорем 2.8, 2.9 позволяет подтвердить точность теорем 6.1, 6.2, 6.7 в отношении сглаживания.

Теорема 6.8 ([Su4]). *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\left\|\left(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 6.9. *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и пусть $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некоторых $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\left\|\left(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 6.8 была доказана в [Su4, теорема 9.8].

6.5. Подтверждение точности относительно времени. Применение теоремы 2.10 позволяет подтвердить точность теоремы 6.1 в отношении зависимости оценки от времени.

Теорема 6.10. *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка*

$$\left\|\left(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}\right)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{6.7}$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Доказательство проведём от противного. Предположим, что найдётся функция $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (6.7) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Учитывая (6.2), (6.4), а также оценку

$$\left\|\widehat{F}(\mathbf{k}) - \widehat{P}\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \widehat{C}_1|\mathbf{k}|, \qquad |\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^0, \tag{6.8}$$

(см. (1.6)), убеждаемся, что найдётся функция $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty} \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка

$$\bigl\| e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})}\widehat{F}(\mathbf{k}) - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}\widehat{P}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^3(|\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{6.9}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^{\,0}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$. Оператор, стоящий под знаком нормы в (6.9), непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant \widehat{t}^{\,0}$ при фиксированных τ и ε (см. [Su4, лемма 9.9]). Следовательно, оценка (6.9) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant \widehat{t}^{\,0}$. Применяя снова неравенство (6.8), получаем, что справедливо неравенство

$$\bigl\| \bigl(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(t\boldsymbol{\theta}_0)} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)}\bigr)\widehat{P}\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^3(t^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{6.10}$$

с функцией $\check{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\check{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$, при всех $t \leqslant \widehat{t}^{\,0}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Оценка (6.10) в абстрактных терминах соответствует оценке (2.12). Поскольку по условию выполнено $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, то применение теоремы 2.10 приводит нас к противоречию. $\square$

Аналогично, применение теоремы 2.11 позволяет подтвердить точность теорем 6.2, 6.7.

Теорема 6.11. *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и пусть $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некоторых $q \in \{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка*

$$\bigl\| \bigl(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})}\bigr)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\bigr\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

§7. Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Применение схемы §3

7.1. Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k}) = f^*\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})f$ изучается на основании схемы §3. Сейчас $\mathfrak{H} = \widehat{\mathfrak{H}} = L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$, $\mathfrak{H}_* = L_2(\Omega;\mathbb{C}^m)$, роль оператора $A(t)$ играет $A(t,\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{A}(\mathbf{k})$, роль оператора $\widehat{A}(t)$ играет $\widehat{A}(t,\boldsymbol{\theta}) = \widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$. В качестве изоморфизма M выступает оператор умножения на матричнозначную функцию $f(\mathbf{x})$. Оператор Q является оператором умножения на матрицу-функцию $Q(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}$. Блок оператора Q в подпространстве $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (5.2)) — это оператор умножения на постоянную матрицу $\overline{Q} = (\underline{ff^*})^{-1} = |\Omega|^{-1}\int_\Omega (f(\mathbf{x})f(\mathbf{x})^*)^{-1}d\mathbf{x}$. Далее, M_0 есть оператор умножения на постоянную матрицу

$$f_0 = (\overline{Q})^{-1/2} = (\underline{ff^*})^{1/2}. \tag{7.1}$$

Отметим элементарные неравенства $|f_0| \leqslant \|f\|_{L_\infty}$, $|f_0^{-1}| \leqslant \|f^{-1}\|_{L_\infty}$.

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ определим оператор

$$\mathcal{A}^0 \coloneqq f_0\widehat{\mathcal{A}}^0 f_0 = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0. \tag{7.2}$$

Пусть $\mathcal{A}^0(\mathbf{k})$ — соответствующее операторное семейство в $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$. Тогда $\mathcal{A}^0(\mathbf{k}) = f_0\widehat{\mathcal{A}}^0(\mathbf{k})f_0$. С учётом (5.2) и (5.9) справедливо тождество

$$f_0\widehat{S}(\mathbf{k})f_0\widehat{P} = \mathcal{A}^0(\mathbf{k})\widehat{P}. \tag{7.3}$$

7.2. Аналитические ветви собственных значений и собственных элементов. Согласно (3.3), спектральный росток $S(\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$, действующий в подпространстве $\mathfrak{N}$ (см. (4.10)), представляется в виде $S(\boldsymbol{\theta}) = Pf^* b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta}) f|_{\mathfrak{N}}$, где P — ортопроектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на $\mathfrak{N}$.

Аналитические (по t) ветви собственных значений $\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta})$ и собственных элементов $\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta})$ оператора $A(t,\boldsymbol{\theta})$ допускают степенные разложения вида (1.2), (1.3) с коэффициентами, зависящими от $\boldsymbol{\theta}$:

$$\lambda_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})t^2 + \mu_l(\boldsymbol{\theta})t^3 + \nu_l(\boldsymbol{\theta})t^4 + \dots, \qquad l = 1,\dots,n, \tag{7.4}$$

$$\varphi_l(t,\boldsymbol{\theta}) = \omega_l(\boldsymbol{\theta}) + t\psi_l^{(1)}(\boldsymbol{\theta}) + \dots, \qquad l = 1,\dots,n. \tag{7.5}$$

При этом $\omega_1(\boldsymbol{\theta}),\dots,\omega_n(\boldsymbol{\theta})$ образуют ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}$, а векторы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l=1,\dots,n$, образуют базис в $\widehat{\mathfrak{N}}$ (см. (5.2)), ортонормированный с весом $\overline{Q}$. Числа $\gamma_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ являются собственными для спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (3.8),

$$b(\boldsymbol{\theta})^* g^0 b(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \gamma_l(\boldsymbol{\theta})\overline{Q}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = 1,\dots,n. \tag{7.6}$$

7.3. Оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$. Нам понадобится описать оператор $\widehat{N}_Q$ (см. п. 3.2). Для этого введём Γ-периодическое решение $\Lambda_Q(\mathbf{x})$ задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda_Q(\mathbf{x}) + \mathbf{1}_m) = 0, \qquad \int_\Omega Q(\mathbf{x})\Lambda_Q(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = 0.$$

Ясно, что $\Lambda_Q(\mathbf{x}) = \Lambda(\mathbf{x}) - (\overline{Q})^{-1}(\overline{Q\Lambda})$. Как проверено в [BSu4, §5], оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ сейчас принимает вид

$$\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_Q(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \tag{7.7}$$

$$L_Q(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1}\int_\Omega (\Lambda_Q(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}.$$

В [BSu4, §5] указаны некоторые достаточные условия, при которых оператор (7.7) обращается в ноль.

Предложение 7.1 ([BSu4]). *Пусть выполнено хотя бы одно из следующих предположений:*

1°. $\mathcal{A} = f(\mathbf{x})^* \mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D} f(\mathbf{x})$, *где* $g(\mathbf{x})$ *— симметричная матрица с вещественными элементами.*

2°. *Выполнены соотношения* (5.11), *т. е.* $g^0 = \overline{g}$.

Тогда $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Напомним (см. п. 3.2), что $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = \widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) + \widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta})$. Согласно (3.9),

$$\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^{n} \mu_l(\boldsymbol{\theta})(\cdot, \overline{Q}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)}\overline{Q}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}).$$

При этом

$$(\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = (\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \zeta_l(\boldsymbol{\theta}))_{L_2(\Omega)} = \mu_l(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = 1,\dots,n.$$

В [BSu4, предложение 5.2] было доказано следующее утверждение.

Предложение 7.2 ([BSu4]). *Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $Q(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть в разложениях (7.5) “зародыши” $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l=1,\dots,n$, можно выбрать так, чтобы векторы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_l(\boldsymbol{\theta})$ оказались вещественными. Тогда в (7.4) выполнено $\mu_l(\boldsymbol{\theta}) = 0$, $l=1,\dots,n$, то есть, $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.*

В рассматриваемом “вещественном” случае $\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})$ и $\overline{Q}$ являются симметричными вещественными матрицами. Ясно, что в случае простого собственного значения $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ обобщённой задачи (7.6) собственный вектор $\zeta_j(\boldsymbol{\theta}) = f\omega_j(\boldsymbol{\theta})$ определяется однозначно с точностью до фазового множителя, и его всегда можно выбрать вещественным. Мы получаем следующее следствие.

Следствие 7.3. *Пусть $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ и $Q(\mathbf{x})$ — матрицы с вещественными элементами. Пусть обобщённая спектральная задача (7.6) имеет простой спектр. Тогда $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.*

7.4. Операторы $\widehat{Z}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{R}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta})$, $\widehat{N}^0_{1,Q}(\boldsymbol{\theta})$. Опишем операторы $\widehat{Z}_{2,Q}$, $\widehat{R}_{2,Q}$, $\widehat{N}^0_{1,Q}$ в абстрактных терминах определённые в п. 3.3. Пусть $\Lambda^{(2)}_{Q,l}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическое решение задачи

$$b(\mathbf{D})^* g(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_{Q,l}(\mathbf{x}) + b_l \Lambda_Q(\mathbf{x})) = -b_l^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + Q(\mathbf{x})(\overline{Q})^{-1} b_l^* g^0, \qquad \int_\Omega Q(\mathbf{x})\Lambda^{(2)}_{Q,l}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

Положим $\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) := \sum_{l=1}^d \Lambda^{(2)}_{Q,l}(\mathbf{x})\theta_l$. Как проверено в [VSu2, п. 8.4]

$$\widehat{Z}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \Lambda^{(2)}(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}, \qquad \widehat{R}_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) = h(\mathbf{x})(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x}))b(\boldsymbol{\theta}).$$

Наконец, в [VSu2, п. 8.5] было получено представление

$$\begin{aligned}
&\widehat{N}^0_{1,Q}(\boldsymbol{\theta}) = b(\boldsymbol{\theta})^* L_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) b(\boldsymbol{\theta})\widehat{P},\\
&L_{2,Q}(\boldsymbol{\theta}) := |\Omega|^{-1} \int_\Omega \big(\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})^* b(\boldsymbol{\theta})^* \widetilde{g}(\mathbf{x}) + \widetilde{g}(\mathbf{x})^* b(\boldsymbol{\theta}) \Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta})\big)\, d\mathbf{x} +\\
&\qquad + |\Omega|^{-1} \int_\Omega \big(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x})\big)^* g(\mathbf{x}) \big(b(\mathbf{D})\Lambda^{(2)}_Q(\mathbf{x};\boldsymbol{\theta}) + b(\boldsymbol{\theta})\Lambda_Q(\mathbf{x})\big)\, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

7.5. Кратности собственных значений ростка. В данном пункте считаем, что $n \geqslant 2$. Перейдём к обозначениям, принятым в п. 1.7. Вообще говоря, количество $p(\boldsymbol{\theta})$ различных собственных значений $\gamma^\circ_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \gamma^\circ_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ спектрального ростка $S(\boldsymbol{\theta})$ (или задачи (7.6)) и их кратности $k_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, k_{p(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство ростка $S(\boldsymbol{\theta})$, отвечающее собственному значению $\gamma^\circ_j(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $f\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta})$ — собственное подпространство задачи (7.6), отвечающее тому же значению $\gamma^\circ_j(\boldsymbol{\theta})$. Введём обозначение $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ для “косого” проектора пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на подпространство $f\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta})$; $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$ ортогонален относительно скалярного произведения с весом $\overline{Q}$. Согласно (3.10),

$$\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^{p(\boldsymbol{\theta})} \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta}), \qquad \widehat{N}_{*,Q}(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{\substack{1\leqslant l,j\leqslant p(\boldsymbol{\theta})\\ j\neq l}} \mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}_l(\boldsymbol{\theta}).$$

7.6. Коэффициенты $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$, $l=1,\dots,n$. Согласно (1.12), числа $\mu_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\omega_l(\boldsymbol{\theta})$, $l = i(q,\boldsymbol{\theta}), \dots, i(q,\boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1$, где $i(q,\boldsymbol{\theta}) = k_1(\boldsymbol{\theta}) + \ldots + k_{q-1}(\boldsymbol{\theta}) + 1$, являются собственными для оператора $P_q(\boldsymbol{\theta}) N(\boldsymbol{\theta})|_{\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})}$. Тогда, в силу (3.11),

$$\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta}) \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \zeta_l(\boldsymbol{\theta}) = \mu_l(\boldsymbol{\theta}) \widehat{P}_{f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})} \overline{Q} \zeta_l(\boldsymbol{\theta}), \qquad l = i(q,\boldsymbol{\theta}), \dots, i(q,\boldsymbol{\theta}) + k_q(\boldsymbol{\theta}) - 1, \tag{7.8}$$

где $\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})$ — ортопроектор на $f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})$.

Количество $p'(q,\boldsymbol{\theta})$ различных собственных чисел $\mu^\circ_{1,q}(\boldsymbol{\theta}),\dots,\mu^\circ_{p'(q,\boldsymbol{\theta}),q}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $P_q(\boldsymbol{\theta})N(\boldsymbol{\theta})|_{\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})}$ и их кратности $k_{1,q}(\boldsymbol{\theta}),\dots,k_{p'(\boldsymbol{\theta}),q}(\boldsymbol{\theta})$ зависят от параметра $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. При каждом фиксированном $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим собственное подпространство, отвечающее собственному значению $\mu^\circ_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $f\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$ — собственное подпространство задачи (7.8), отвечающее тому же значению $\mu^\circ_{q',q}(\boldsymbol{\theta})$.

Наконец, согласно (3.12), числа $\nu_l(\boldsymbol{\theta})$ и элементы $\zeta_l(\boldsymbol{\theta})$, $l=i'(q',q,\boldsymbol{\theta}),\dots,i'(q',q,\boldsymbol{\theta})+k_{q',q}(\boldsymbol{\theta})-1$, где $i'(q',q,\boldsymbol{\theta})=i(q,\boldsymbol{\theta})+k_{1,q}(\boldsymbol{\theta})+\dots+k_{q'-1,q}(\boldsymbol{\theta})$, являются собственными значениями и собственными элементами следующей обобщённой спектральной задачи:

$$\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q',q)}(\boldsymbol{\theta})\zeta_l(\boldsymbol{\theta})=\nu_l(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})}\overline{Q}\zeta_l(\boldsymbol{\theta}),\qquad l=i'(q',q,\boldsymbol{\theta}),\dots,i'(q',q,\boldsymbol{\theta})+k_q(\boldsymbol{\theta})-1,$$

где

$$\begin{aligned}&\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q',q)}(\boldsymbol{\theta}):=\\&\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})\left(\widehat{N}^0_{1,Q}(\boldsymbol{\theta})-\frac{1}{2}\widehat{Z}^*_Q(\boldsymbol{\theta})Q\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})(ff^*)\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}-\frac{1}{2}\widehat{S}(\boldsymbol{\theta})(ff^*)\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})^*Q\widehat{Z}_Q(\boldsymbol{\theta})\right)\Big|_{f\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})}+\\&\quad+\sum_{\substack{j\in\{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta})\}\\ j\ne q}}\left(\gamma^\circ_q(\boldsymbol{\theta})-\gamma^\circ_j(\boldsymbol{\theta})\right)^{-1}\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})}\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})(ff^*)\widehat{P}_{f\mathfrak{N}_j(\boldsymbol{\theta})}(\boldsymbol{\theta})\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})|_{f\mathfrak{N}_{q',q}(\boldsymbol{\theta})}.\end{aligned}$$

Отметим, что в случае, когда $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})=0$ имеет место $f\mathfrak{N}_{1,q}(\boldsymbol{\theta})=f\mathfrak{N}_q(\boldsymbol{\theta})$, $q=1,\dots,p(\boldsymbol{\theta})$. Тогда вместо $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(1,q)}(\boldsymbol{\theta})$ мы будем писать $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta})$.

§8. Аппроксимация окаймлённого оператора $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}$

8.1. Общий случай. Обозначим

$$J(\mathbf{k},\varepsilon;\tau):=fe^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1}-f_0e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}. \tag{8.1}$$

Мы применим к оператору $A(t;\boldsymbol{\theta})=\mathcal{A}(\mathbf{k})$ теоремы из п. 3.5. При этом мы можем отследить зависимость постоянных в оценках от исходных данных. Отметим что c_*, δ и t^0 не зависят от $\boldsymbol{\theta}$ (см. (4.9), (4.13), (4.15)). Согласно (4.14) норму $\|X_1(\boldsymbol{\theta})\|$ можно заменить на $\alpha_1^{1/2}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|f\|_{L_\infty}$. Поэтому постоянные в теоремах 3.2 и 3.3 (применённых к оператору $\mathcal{A}(\mathbf{k})$) не будут зависеть от $\boldsymbol{\theta}$. Они будут зависеть только от следующих величин: α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Применяя теорему 3.2 с учётом (6.2)–(6.4), (7.3) получаем следующий результат, ранее доказанный в [BSu5, теорема 8.1]

Теорема 8.1 ([BSu5]). *При $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|J(\mathbf{k},\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{3/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{C}_1(1+|\tau|)\varepsilon,$$

где константа $\mathcal{C}_1$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

8.2. Случай, когда $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})=0$. Применим теорему 3.3, предполагая, что $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (6.2)–(6.4), (7.3) это влечёт следующий результат.

Теорема 8.2. *Пусть оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ определён в (7.7). Пусть $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$ и $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ выполнена оценка*

$$\|J(\mathbf{k},\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\leqslant\mathcal{C}_2(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon,$$

где константа $\mathcal{C}_2$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

8.3. Случай, когда $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$. Теперь мы отказываемся от предположения теоремы 8.2, но взамен предположим, что $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta}$. Как и в п. 6.3, для того, чтобы применить теорему 3.4, приходится накладывать дополнительные условия. Используем исходную нумерацию собственных значений $\gamma_1(\boldsymbol{\theta}) \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n(\boldsymbol{\theta})$ ростка $S(\boldsymbol{\theta})$. Они также являются собственными значениями обобщённой спектральной задачи (7.6). При каждом $\boldsymbol{\theta}$ через $\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ обозначим "косой" (ортогональный с весом $\overline{Q}$) проектор пространства $L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)$ на собственное подпространство задачи (7.6), отвечающее собственному значению $\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$. Ясно, что при каждом $\boldsymbol{\theta}$ оператор $\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta})$ совпадает с одним из проекторов $\mathcal{P}_j(\boldsymbol{\theta})$, введённых в п. 7.5 (но номер j может зависеть от $\boldsymbol{\theta}$).

Условие 8.3. 1°. $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. *Для каждой пары индексов* (k,r), $1 \leqslant k,r \leqslant n$, $k \neq r$, *такой, что* $\gamma_k(\boldsymbol{\theta}_0) = \gamma_r(\boldsymbol{\theta}_0)$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$, *выполнено* $(\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 2° может быть переформулировано: мы требуем, чтобы для ненулевых (тождественно) "блоков" $(\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta})$ оператора $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ соответствующие ветви собственных значений $\gamma_k(\boldsymbol{\theta})$ и $\gamma_r(\boldsymbol{\theta})$ не пересекались.

Разумеется, выполнение условия 8.3 гарантируется следующим более сильным условием.

Условие 8.4. 1°. $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. *Предположим, что количество* p *различных собственных значений обобщённой спектральной задачи* (7.6) *не зависит от* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

При условии 8.4 обозначим различные собственные значения ростка, занумерованные в порядке возрастания, через $\gamma_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), \ldots, \gamma_p^\circ(\boldsymbol{\theta})$. Тогда из их кратности $k_1, \ldots, k_p$ не зависят от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Замечание 8.5. 1°. *Предположение пункта* 2° *условия* 8.4 *заведомо выполнено, если спектр задачи* (7.6) *простой при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. 2°. *Из следствия* 7.3 *вытекает, что условие* 8.4 *выполнено, если* $b(\boldsymbol{\theta})$, $g(\mathbf{x})$ *и* $Q(\mathbf{x})$ — *матрицы с вещественными элементами и спектр задачи* (7.6) *простой при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Итак, предположим выполненным условие 8.3 и введём обозначение

$$\mathcal{K} := \{(k,r) \colon 1 \leqslant k,r \leqslant n,\ k \neq r,\ (\mathcal{P}^{(k)}(\boldsymbol{\theta}))^* \widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) \mathcal{P}^{(r)}(\boldsymbol{\theta}) \not\equiv 0\}.$$

Обозначим $c^\circ_{kr}(\boldsymbol{\theta}) := \min\{c_*, n^{-1}|\gamma_k(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_r(\boldsymbol{\theta})|\}$, $(k,r) \in \mathcal{K}$.

Поскольку оператор $S(\boldsymbol{\theta})$ непрерывно зависит от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, то из теории возмущений дискретного спектра следует, что $\gamma_j(\boldsymbol{\theta})$ — непрерывные функции на $\mathbb{S}^{d-1}$. В силу условия 8.3(2°) при $(k,r) \in \mathcal{K}$ выполнено $|\gamma_k(\boldsymbol{\theta}) - \gamma_r(\boldsymbol{\theta})| > 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$, а тогда $c^\circ_{kr} := \min_{\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}} c^\circ_{kr}(\boldsymbol{\theta}) > 0$, $(k,r) \in \mathcal{K}$. Положим

$$c^\circ := \min_{(k,r) \in \mathcal{K}} c^\circ_{kr}. \tag{8.2}$$

Ясно, что число (8.2) — это реализация величины (2.4), выбранная не зависящей от $\boldsymbol{\theta}$. Число, подчинённое (2.3), при условии 8.3 также можно выбрать не зависящим от $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. С учётом (4.13) и (4.14) положим

$$t^{00} = (8\beta_2)^{-1} r_0 \alpha_1^{-3/2} \alpha_0^{1/2} \|g\|_{L_\infty}^{-3/2} \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2} \|f\|_{L_\infty}^{-3} \|f^{-1}\|_{L_\infty}^{-1} c^\circ.$$

(Условие $t^{00} \leqslant t^0$ выполнено автоматически, поскольку $c^\circ \leqslant \|S(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant \alpha_1 \|g\|_{L_\infty} \|f\|_{L_\infty}^2$.)

Предполагая выполненным условие 8.3, применим теорему 3.4.

Теорема 8.6. *Пусть выполнено условие 8.3 (или более сильное условие 8.4). Тогда при $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ и $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ справедлива оценка*

$$\|J(\mathbf{k}, \varepsilon; \tau)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}_3(1 + |\tau|^{1/2})\varepsilon,$$

где константа $\mathcal{C}_3$ зависит от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0, а также от n и c°.

8.4. Подтверждение точности относительно сглаживания. Применение теорем 3.6, 3.7 позволяет подтвердить точность теорем 8.1, 8.2, 8.6 в отношении сглаживания.

Теорема 8.7 ([Su4]). *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\|\big(fe^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\big)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 8.8. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и пусть $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некоторых $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\big\|\big(fe^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\big)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{s/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

выполнялась при почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 8.7 была доказана в [Su4, теорема 11.7].

8.5. Подтверждение точности относительно времени. Применение теоремы 3.8 позволяет подтвердить точность теоремы 8.1 в отношении зависимости оценки от времени.

Теорема 8.9. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка*

$$\big\|\big(fe^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\big)\mathcal{R}(\mathbf{k}, \varepsilon)^{3/2}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon \tag{8.3}$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Доказательство проведём от противного. Предположим, что найдётся функция $\mathcal{C}(\tau) > 0$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка (8.3) при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малом $\varepsilon > 0$. Тогда, с учётом (6.2), (6.4), отсюда следует, что найдётся функция $\widetilde{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty} \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка

$$\big\|\big(fe^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\big)\widehat{P}\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}\varepsilon^3(|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \widetilde{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{8.4}$$

В силу (3.2) справедливо тождество $f^{-1}\widehat{P} = Pf^*\overline{Q}$, где P — ортогональный проектор пространства $L_2(\Omega; \mathbb{C}^n)$ на подпространство $\mathfrak{N}$ (см. (4.10)). Тогда оператор под знаком нормы в (8.4) можно записать в виде $fe^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}Pf^*\overline{Q} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})}f_0^{-1}\widehat{P}$.

Затем, воспользуемся оценкой

$$\big\|F(\mathbf{k}) - P\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant C_1|\mathbf{k}|, \qquad |\mathbf{k}| \leqslant t^0, \tag{8.5}$$

(см. (1.6)). Отсюда следует, что найдётся функция $\check{\mathcal{C}}(\tau) > 0$ такая, что $\lim_{\tau\to\infty}\check{\mathcal{C}}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка

$$\left\| f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})} F(\mathbf{k}) f^* \overline{Q} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0^{-1} \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^3 (|\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}(\tau)\varepsilon \tag{8.6}$$

при почти всех $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$. Оператор, стоящий под знаком нормы в (8.6) непрерывен по $\mathbf{k}$ в шаре $|\mathbf{k}| \leqslant t^0$ при фиксированных τ и ε (см. [Su4, лемма 11.8]). Следовательно, оценка (8.6) справедлива при всех значениях $\mathbf{k}$ из данного шара. В частности, она верна в точке $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta}_0$, если $t \leqslant t^0$. Применяя снова неравенство (8.5) и равенство $P f^* \overline{Q} = f^{-1}\widehat{P}$, получаем, что справедливо неравенство

$$\left\| \left(f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(t\boldsymbol{\theta}_0)} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(t\boldsymbol{\theta}_0)} f_0^{-1} \right) \widehat{P} \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \varepsilon^3 (t^2 + \varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant \check{\mathcal{C}}'(\tau)\varepsilon \tag{8.7}$$

с функцией $\check{\mathcal{C}}'(\tau) > 0$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\check{\mathcal{C}}'(\tau)/|\tau| = 0$, при всех $t \leqslant t^0$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Оценка (8.7) в абстрактных терминах соответствует оценке (3.15). Поскольку по условию выполнено $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$, то применение теоремы 3.8 приводит нас к противоречию. $\square$

Аналогично, применение теоремы 3.9 позволяет подтвердить точность теорем 8.2, 8.6.

Теорема 8.10. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и пусть $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка*

$$\left\| \left(f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0(\mathbf{k})} f_0^{-1} \right) \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon) \right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$, почти всех $\mathbf{k} = t\boldsymbol{\theta} \in \widetilde{\Omega}$ и достаточно малых $\varepsilon > 0$.

§9. Аппроксимация операторной экспоненты $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}}$

9.1. Аппроксимация оператора $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}}$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор (5.1). Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор (5.8). Обозначим $\widehat{J}(\varepsilon;\tau) := e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\widehat{\mathcal{A}}^0}$. Напомним обозначение $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ и положим

$$\mathcal{R}(\varepsilon) := \varepsilon^2(\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1}. \tag{9.1}$$

Оператор $\mathcal{R}(\varepsilon)$ раскладывается в прямой интеграл по операторам (6.1):

$$\mathcal{R}(\varepsilon) = \mathscr{U}^{-1}\left(\int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)\, d\mathbf{k}\right)\mathscr{U}.$$

Напомним также обозначение (6.5). Из разложений вида (4.11) для $\widehat{\mathcal{A}}$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0$ следует равенство

$$\|\widehat{J}(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \|\widehat{J}(\mathbf{k},\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}. \tag{9.2}$$

Поэтому из теорем 6.1, 6.2, 6.7 прямо вытекают следующие утверждения.

Теорема 9.1 ([BSu5]). *Для $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\left\| \widehat{J}(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_1(1+|\tau|)\varepsilon.$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}_1$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Теорема 9.2. *Пусть оператор* $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ *определён в* (5.15)*. Пусть* $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$*. Тогда для* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| \widehat{J}(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}_2$ *зависит только от* α_0*,* α_1*,* $\|g\|_{L_\infty}$*,* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* r_0*.*

Теорема 9.3. *Пусть выполнено условие* 6.3 (*или более сильное условие* 6.4)*. Тогда для* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *справедлива оценка*

$$\left\| \widehat{J}(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_3(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Константа $\widehat{\mathcal{C}}_3$ *зависит от* α_0*,* α_1*,* $\|g\|_{L_\infty}$*,* $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$*,* r_0*, а также от* n *и* $\widehat{c}^{\circ}$*.*

Теорема 9.1 была доказана в [BSu5, теорема 9.1]. Теоремы 9.2 и 9.3 усиливают результаты теорем 12.2 и 12.3 из [Su4] в отношении зависимости оценок от τ.

Применение теорем 6.8, 6.9 позволяет подтвердить точность теорем 9.1, 9.2, 9.3 в отношении сглаживания.

Теорема 9.4 ([Su4])**.** *Пусть* $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$*. Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant s < 3$*. Тогда не существует такой константы* $\mathcal{C}(\tau) > 0$*, чтобы оценка*

$$\left\| \widehat{J}(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$*.*

Теорема 9.5. *Пусть* $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ *и пусть* $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некоторых* $q \in \{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ *и* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$*. Пусть* $\tau \neq 0$ *и* $0 \leqslant s < 2$*. Тогда не существует такой константы* $\mathcal{C}(\tau) > 0$*, чтобы оценка*

$$\left\| \widehat{J}(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$*.*

Теорема 9.4 была доказана в [Su4, теорема 12.4].

Далее, применение теорем 6.10, 6.11 позволяет подтвердить точность теорем 9.1, 9.2, 9.3 в отношении зависимости оценки от времени.

Теорема 9.6. *Пусть* $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некотором* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$*. Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка*

$$\left\| \widehat{J}(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ *и всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$*.*

Теорема 9.7. *Пусть* $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ *и пусть* $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ *при некотором* $q \in \{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ *и* $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$*. Тогда не существует положительной функции* $\mathcal{C}(\tau)$ *такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка*

$$\left\| \widehat{J}(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ *и всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$*.*

9.2. Аппроксимация окаймлённого оператора $e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}}$. В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор (4.6). Пусть f_0 — матрица (7.1), а $\mathcal{A}^0$ — оператор (7.2). Обозначим

$$J(\varepsilon;\tau) \coloneqq f e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}} f^{-1} - f_0 e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^0} f_0^{-1}.$$

Аналогично (9.2) имеем

$$\|J(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} = \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \|J(\mathbf{k},\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\mathbf{k},\varepsilon)^{s/2}\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}.$$

Здесь $J(\mathbf{k},\varepsilon;\tau)$ определено в (8.1). Таким образом, из теорем 8.1, 8.2, 8.6 получаем следующие результаты.

Теорема 9.8 ([BSu5]). *Для $\tau\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\left\|J(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_1(1+|\tau|)\varepsilon.$$

Константа $\mathcal{C}_1$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Теорема 9.9. *Пусть оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$, определённый в (7.7), равен нулю: $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\left\|J(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_2(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Константа $\mathcal{C}_2$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Теорема 9.10. *Пусть выполнено условие 8.3 (или более сильное условие 8.4). Тогда при $\tau\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ справедлива оценка*

$$\left\|J(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}_3(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon.$$

Константа $\mathcal{C}_3$ зависит от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0, а также от n и c°.

Теорема 9.8 была доказана в [BSu5, теорема 10.1]. Теоремы 9.9 и 9.10 усиливают результаты теорем 12.6 и 12.7 из [Su4] в отношении зависимости оценок от τ.

Применение теорем 8.7, 8.8 позволяет подтвердить точность теорем 9.8, 9.9, 9.10 в отношении сглаживания.

Теорема 9.11 ([Su4]). *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0)\neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0\in\mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau\neq 0$ и $0\leqslant s<3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(\tau)>0$, чтобы оценка*

$$\left\|J(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon>0$.

Теорема 9.12. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ и пусть $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0)\neq 0$ при некоторых $q\in\{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ и $\boldsymbol{\theta}_0\in\mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau\neq 0$ и $0\leqslant s<2$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(\tau)>0$, чтобы оценка*

$$\left\|J(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon>0$.

Теорема 9.11 была доказана в [Su4, теорема 12.8].

Далее, применение теорем 8.9, 8.10 позволяет подтвердить точность теорем 9.8, 9.9, 9.10 в отношении зависимости оценки от времени.

Теорема 9.13. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ *и выполнена оценка*

$$\left\| J(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{3/2} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 9.14. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и пусть $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $q \in \{1,\dots,p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что* $\lim_{\tau\to\infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ *и выполнена оценка*

$$\left\| J(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon) \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Глава III. Задачи усреднения для нестационарных уравнений типа Шрёдингера

§10. Усреднение оператора $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$

10.1. Операторы $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_\varepsilon$. Масштабное преобразование. Если $\psi(\mathbf{x})$ — измеримая Γ-периодическая функция в $\mathbb{R}^d$, условимся использовать обозначение $\psi^\varepsilon(\mathbf{x}) := \psi(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. *Наши основные объекты* — операторы $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$, $\mathcal{A}_\varepsilon$, действующие в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, формально заданные выражениями

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon := b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}), \tag{10.1}$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon := (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{10.2}$$

Строгие определения даются через соответствующие квадратичные формы (ср. п. 4.2).

Пусть T_ε — *унитарный в $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ оператор масштабного преобразования*: $(T_\varepsilon \mathbf{u})(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2}\mathbf{u}(\varepsilon\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$. Тогда справедливо тождество $\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* \mathcal{A} T_\varepsilon$. Следовательно,

$$e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} = T_\varepsilon^* e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}} T_\varepsilon. \tag{10.3}$$

Аналогичные соотношения выполнены и для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Применяя масштабное преобразование к резольвенте оператора $\mathcal{H}_0 = -\Delta$ и используя обозначение (9.1), получаем

$$(\mathcal{H}_0 + I)^{-1} = \varepsilon^2 T_\varepsilon^* (\mathcal{H}_0 + \varepsilon^2 I)^{-1} T_\varepsilon = T_\varepsilon^* \mathcal{R}(\varepsilon) T_\varepsilon. \tag{10.4}$$

Наконец, если $\psi(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция, то $[\psi^\varepsilon] = T_\varepsilon^*[\psi]T_\varepsilon$.

10.2. Усреднение оператора $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$. Начнём с более простого оператора (10.1). Пусть $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор (5.8). Применяя соотношения вида (10.3) (для операторов $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ и $\widehat{\mathcal{A}}^0$), а также (10.4), получаем тождество

$$(e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0})(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = T_\varepsilon^* \widehat{J}(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon, \qquad \varepsilon > 0. \tag{10.5}$$

Используя теорему 9.1 и (10.5), можно получить следующий результат, ранее доказанный в [BSu5, теорема 12.2]

Теорема 10.1 ([BSu5]). *Пусть $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$ — оператор* (10.1) *и $\widehat{\mathcal{A}}^0$ — эффективный оператор* (5.8). *Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 3$ и $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_1(s)(1+|\tau|)^{s/3}\varepsilon^{s/3},$$

где $\widehat{\mathfrak{C}}_1(s) = 2^{1-s/3}\widehat{\mathcal{C}}_1^{s/3}$. Константа $\widehat{\mathcal{C}}_1$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Этот результат может быть усилен при дополнительных предположениях. Из теоремы 9.2 выводится следующий результат.

Теорема 10.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.1. *Пусть оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ определён в* (5.15). *Предположим, что $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 2$ и $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_2(s)(1+|\tau|^{1/2})^{s/2}\varepsilon^{s/2}, \tag{10.6}$$

где $\widehat{\mathfrak{C}}_2(s) = 2^{1-s/2}\widehat{\mathcal{C}}_2^{s/2}$. Константа $\widehat{\mathcal{C}}_2$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Доказательство. Ввиду унитарности оператора T_ε и (10.5) из теоремы 9.2 следует оценка

$$\|(e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0})(\mathcal{H}_0+I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathcal{C}}_2(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon. \tag{10.7}$$

Очевидно,

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2. \tag{10.8}$$

Интерполируя между (10.8) и (10.7), при $0 \leqslant s \leqslant 2$ получаем

$$\|(e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0})(\mathcal{H}_0+I)^{-s/2}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2^{1-s/2}\widehat{\mathcal{C}}_2^{s/2}(1+|\tau|^{1/2})^{s/2}\varepsilon^{s/2}. \tag{10.9}$$

Оператор $(\mathcal{H}_0+I)^{s/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ на $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Поэтому оценка (10.9) эквивалентна (10.6). □

Аналогично, применяя теорему 9.3, получаем следующую теорему.

Теорема 10.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 10.1. *Кроме того, пусть выполнено условие* 6.3 (*или более сильное условие* 6.4). *Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 2$ и $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \widehat{\mathfrak{C}}_3(s)(1+|\tau|^{1/2})^{s/2}\varepsilon^{s/2},$$

где $\widehat{\mathfrak{C}}_3(s) = 2^{1-s/2}\widehat{\mathcal{C}}_3^{s/2}$. Константа $\widehat{\mathcal{C}}_3$ зависит от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0, а также от n и $\widehat{c}^\circ$.

Теоремы 10.2 и 10.3 усиливают результаты теорем 13.2 и 13.4 из [Su4] в отношении зависимости оценок от τ.

Применение теорем 9.4, 9.5 позволяет подтвердить точность теорем 10.1, 10.2, 10.3 в отношении типа операторной нормы.

Теорема 10.4 ([Su4]). *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 10.5. *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и пусть $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некоторых $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 10.4 была доказана в [Su4, теорема 13.6].

Наконец, применение теорем 9.6, 9.7 позволяет подтвердить точность теорем 10.1, 10.2, 10.3 в отношении зависимости оценки от времени.

Теорема 10.6. *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 10.7. *Пусть $\widehat{N}_0(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и пусть $\widehat{\mathcal{N}}^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau\to\infty}\mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка*

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau)\varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

10.3. Усреднение окаймлённого оператора $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$. Рассмотрим теперь более общий оператор $\mathcal{A}_\varepsilon$ (см. (10.2)). Пусть оператор $\mathcal{A}^0$ определён в (7.2). Применяя соотношения вида (10.3) (для операторов $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{A}^0$), а также (10.4), получаем тождество

$$\big(f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\big)(\mathcal{H}_0 + I)^{-s/2} = T_\varepsilon^* J(\varepsilon;\tau)\mathcal{R}(\varepsilon)^{s/2} T_\varepsilon, \qquad \varepsilon > 0. \tag{10.10}$$

Из теоремы 9.8 и тождества (10.10) можно получить следующий результат, ранее доказанный в [BSu5, теорема 12.4].

Теорема 10.8 ([BSu5])**.** *Пусть $\mathcal{A}_\varepsilon$ и $\mathcal{A}^0$ — операторы, определённые выражениями (10.2) и (7.2). Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 3$ и $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_1(s)(1 + |\tau|)^{s/3}\varepsilon^{s/3},$$

где $\mathfrak{C}_1(s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/3}\mathcal{C}_1^{s/3}$. Константа $\mathcal{C}_1$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Этот результат может быть усилен при дополнительных предположениях. Применяя теорему 9.9 с учётом (10.10) и очевидной оценки

$$\|f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant 2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty},$$

получаем следующий результат.

Теорема 10.9. *Пусть выполнены условия теоремы 10.8. Пусть оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$, определённый в (7.7), равен нулю: $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 2$ и $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\|f^\varepsilon e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_2(s)(1 + |\tau|^{1/2})^{s/2}\varepsilon^{s/2},$$

где $\mathfrak{C}_2(s) = (2\|f\|_{L_\infty}\|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/2}\mathcal{C}_2^{s/2}$. Константа $\mathcal{C}_2$ зависит только от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$ и r_0.

Аналогично, применяя теорему 9.10, получаем следующее утверждение.

Теорема 10.10. *Пусть выполнены условия теоремы 10.8. Кроме того, пусть выполнено условие 8.3 (или более сильное условие 8.4). Тогда при $0 \leqslant s \leqslant 2$ и $\tau \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ справедлива оценка*

$$\| f^\varepsilon e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau \mathcal{A}^0} f_0^{-1} \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathfrak{C}_3(s) (1 + |\tau|^{1/2})^{s/2} \varepsilon^{s/2},$$

где $\mathfrak{C}_3(s) = (2\|f\|_{L_\infty} \|f^{-1}\|_{L_\infty})^{1-s/2} \mathcal{C}_3^{s/2}$. Константа $\mathcal{C}_3$ зависит от α_0, α_1, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|g^{-1}\|_{L_\infty}$, $\|f\|_{L_\infty}$, $\|f^{-1}\|_{L_\infty}$, r_0, а также от n и c°.

Теоремы 10.9 и 10.10 усиливают результаты теорем 13.8 и 13.10 из [Su4] в отношении зависимости оценок от τ.

Применение теорем 9.11, 9.12 позволяет подтвердить точность теорем 10.8, 10.9, 10.10 в отношении типа операторной нормы.

Теорема 10.11 ([Su4]). *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 3$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\| f^\varepsilon e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau \mathcal{A}^0} f_0^{-1} \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 10.12. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и пусть $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некоторых $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Пусть $\tau \neq 0$ и $0 \leqslant s < 2$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(\tau) > 0$, чтобы оценка*

$$\| f^\varepsilon e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau \mathcal{A}^0} f_0^{-1} \|_{H^s(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Теорема 10.11 была доказана в [Su4, теорема 13.12].

Применение теоремы 9.13 позволяет подтвердить точность теоремы 10.8 в отношении зависимости оценки от времени.

Теорема 10.13. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \to \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau| = 0$ и выполнена оценка*

$$\| f^\varepsilon e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau \mathcal{A}^0} f_0^{-1} \|_{H^3(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Аналогично, применение теоремы 9.14 позволяет подтвердить точность теорем 10.9, 10.10.

Теорема 10.14. *Пусть $\widehat{N}_{0,Q}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$ и пусть $\widehat{\mathcal{N}}_Q^{(q)}(\boldsymbol{\theta}_0) \neq 0$ при некотором $q \in \{1, \dots, p(\boldsymbol{\theta}_0)\}$ и $\boldsymbol{\theta}_0 \in \mathbb{S}^{d-1}$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(\tau)$ такой, что $\lim_{\tau \to \infty} \mathcal{C}(\tau)/|\tau|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка*

$$\| f^\varepsilon e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon} (f^\varepsilon)^{-1} - f_0 e^{-i\tau \mathcal{A}^0} f_0^{-1} \|_{H^2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(\tau) \varepsilon$$

при всех $\tau \in \mathbb{R}$ и всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

§11. Усреднение задачи Коши для уравнения типа Шрёдингера

11.1. Задача Коши для уравнения с оператором $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{11.1}$$

где $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}\boldsymbol{\phi} - i\int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde\tau)\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}\mathbf{F}(\cdot,\tilde\tau)\,d\tilde\tau.$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)$ — решение “усреднённой” задачи:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) \mathbf{u}_0(\mathbf{x},\tau) + \mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}, \\ \mathbf{u}_0(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \end{cases} \tag{11.2}$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^0}\boldsymbol{\phi} - i\int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde\tau)\widehat{\mathcal{A}}^0}\mathbf{F}(\cdot,\tilde\tau)\,d\tilde\tau.$$

Из теоремы 10.1 непосредственно вытекает следующий результат (доказанный ранее в [BSu5, теорема 14.2]).

Теорема 11.1 ([BSu5]). *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (11.1) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (11.2).*

1°. *Если $\boldsymbol{\phi}\in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, где $0\leqslant s\leqslant 3$, то при $\tau\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{s/3}(1+|\tau|)^{s/3}\widehat{\mathfrak{C}}_1(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

При дополнительном предположении $\mathbf{F}\in L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, где $p\in[1,\infty]$, и при $\tau=\pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, $0<\alpha<s(s+3/p')^{-1}$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})-\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ &\qquad \leqslant \varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\cdot 2^{s/3}\widehat{\mathfrak{C}}_1(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right). \end{aligned}$$

Величина $\widehat{\mathfrak{C}}_1(s)$ определена в теореме 10.1. Здесь $p^{-1}+(p')^{-1}=1$.

2°. *Если $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau)-\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad \tau\in\mathbb{R}.$$

При дополнительном предположении $\mathbf{F}\in L_1(\mathbb{R}_\pm;L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$ справедливо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})-\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad 0<\alpha<1.$$

Результат теоремы 11.1 можно усилить при дополнительных предположениях. Применяя теорему 10.2, получаем следующее утверждение.

Теорема 11.2. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1. Пусть оператор $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta})$ определён в (5.15). Предположим, что $\widehat{N}(\boldsymbol{\theta}) = 0$ при всех $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{S}^{d-1}$.*

1°. *Если $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, где $0 \leqslant s \leqslant 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{s/2}(1+|\tau|^{1/2})^{s/2}\widehat{\mathfrak{C}}_2(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

При дополнительном предположении $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, где $p \in [1,\infty]$, и при $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $0 < \alpha < 2s(s+4/p')^{-1}$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon^{s(1-\alpha/2)/2}\cdot 2^{s/2}\widehat{\mathfrak{C}}_2(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Величина $\widehat{\mathfrak{C}}_2(s)$ определена в теореме 10.2. Здесь $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$.

2°. *Если $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_1(\mathbb{R}_\pm; L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad 0 < \alpha < 2.$$

Аналогично, применяя теорему 10.3, получаем следующее утверждение.

Теорема 11.3. *Пусть выполнены условия теоремы 11.1. Предположим, что выполнено условие 6.3 (или более сильное условие 6.4).*

1°. *Если $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, где $0 \leqslant s \leqslant 2$, то при $\tau \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$ выполнена оценка*

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - \mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{s/2}(1+|\tau|^{1/2})^{s/2}\widehat{\mathfrak{C}}_3(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

При дополнительном предположении $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, где $p \in [1,\infty]$, и при $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$, $0 < \alpha < 2s(s+4/p')^{-1}$ справедлива оценка

$$\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon^{s(1-\alpha/2)/2}\cdot 2^{s/2}\widehat{\mathfrak{C}}_3(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Величина $\widehat{\mathfrak{C}}_3(s)$ определена в теореме 10.3. Здесь $p^{-1} + (p')^{-1} = 1$.

2°. *Если $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F} \in L_1(\mathbb{R}_\pm; L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - \mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad 0 < \alpha < 2.$$

11.2. Задача Коши для уравнения с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$. Рассмотрим более общую задачу Коши для уравнения с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^* b(\mathbf{D})^* g^\varepsilon(\mathbf{x}) b(\mathbf{D}) f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + (f^\varepsilon(\mathbf{x}))^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,\ \tau \in \mathbb{R}, \\ f^\varepsilon(\mathbf{x})\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

где $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$. Справедливо представление

$$\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}\boldsymbol{\phi} - i\int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}_\varepsilon}(f^\varepsilon)^{-1}\mathbf{F}(\cdot,\tilde{\tau})\,d\tilde{\tau}.$$

Пусть $\mathbf{u}_0(\mathbf{x}, s)$ — решение "усреднённой" задачи:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial \tau} = f_0 b(\mathbf{D})^* g^0 b(\mathbf{D}) f_0 \mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau) + f_0^{-1}\mathbf{F}(\mathbf{x},\tau), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}, \\ f_0\mathbf{u}_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d. \end{cases}$$

Тогда

$$\mathbf{u}_0(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\boldsymbol{\phi} - i\int_0^\tau e^{-i(\tau-\tilde{\tau})\mathcal{A}^0} f_0^{-1}\mathbf{F}(\cdot,\tilde{\tau})\,d\tilde{\tau}.$$

Из теоремы 10.8 непосредственно вытекает следующий результат (доказанный ранее в [BSu5, теорема 14.5]).

Теорема 11.4 ([BSu5]). *Пусть $\mathbf{u}_\varepsilon$ — решение задачи (11.1) и $\mathbf{u}_0$ — решение задачи (11.2).*

1°. *Если $\boldsymbol{\phi}\in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, где $0\leqslant s\leqslant 3$, то при $\tau\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ выполнена оценка*

$$\|f^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{s/3}(1+|\tau|)^{s/3}\mathfrak{C}_1(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

При дополнительном предположении $\mathbf{F}\in L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, где $p\in[1,\infty]$, и при $\tau=\pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, $0<\alpha<s(s+3/p')^{-1}$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon^{s(1-\alpha)/3}\cdot 2^{s/3}\mathfrak{C}_1(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Величина $\mathfrak{C}_1(s)$ определена в теореме 10.8. Здесь $p^{-1}+(p')^{-1}=1$.

2°. *Если $\boldsymbol{\phi}\in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ и $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad \tau\in\mathbb{R}.$$

При дополнительном предположении $\mathbf{F}\in L_1(\mathbb{R}_\pm;L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$ справедливо

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|f^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad 0<\alpha<1.$$

Результаты теоремы 11.4 можно усилить при дополнительных предположениях. Применяя теорему 10.9, получаем следующее утверждение.

Теорема 11.5. *Пусть выполнены условия теоремы 11.4. Пусть оператор $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})$ определён в (7.7). Предположим, что $\widehat{N}_Q(\boldsymbol{\theta})=0$ при всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$.*

1°. *Если $\boldsymbol{\phi}\in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F}\in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R};H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, где $0\leqslant s\leqslant 2$, то при $\tau\in\mathbb{R}$ и $\varepsilon>0$ выполнена оценка*

$$\|f^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{s/2}(1+|\tau|^{1/2})^{s/2}\mathfrak{C}_2(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,s);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

При дополнительном предположении $\mathbf{F}\in L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, где $p\in[1,\infty]$, и при $\tau=\pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, $0<\alpha<2s(s+4/p')^{-1}$ справедлива оценка

$$\|f^\varepsilon\mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ \leqslant \varepsilon^{s(1-\alpha/2)/2}\cdot 2^{s/2}\mathfrak{C}_2(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

Величина $\mathfrak{C}_2(s)$ определена в теореме 10.9. Здесь $p^{-1}+(p')^{-1}=1$.

2°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_1(\mathbb{R}_\pm; L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad 0<\alpha<2.$$

Аналогично, применяя теорему 10.10, получаем следующее утверждение.

Теорема 11.6. *Пусть выполнены условия теоремы* 11.4. *Предположим, что выполнено условие* 8.3 (*или более сильное условие* 8.4).

1°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$, $\mathbf{F} \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}; H^s(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n))$, *где* $0 \leqslant s \leqslant 2$, *то при* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $\varepsilon > 0$ *выполнена оценка*

$$\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot,\tau) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \varepsilon^{s/2}(1+|\tau|^{1/2})^{s/2}\mathfrak{C}_3(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \|\mathbf{F}\|_{L_1((0,\tau);H^s(\mathbb{R}^d))}\right).$$

При дополнительном предположении $\mathbf{F} \in L_p(\mathbb{R}_\pm; H^s(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, *где* $p \in [1,\infty]$, *и при* $\tau = \pm\varepsilon^{-\alpha}$, $0<\varepsilon\leqslant 1$, $0<\alpha<2s(s+4/p')^{-1}$ *справедлива оценка*

$$\begin{aligned}&\|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \\ &\qquad\qquad \leqslant \varepsilon^{s(1-\alpha/2)/2}\cdot 2^{s/2}\mathfrak{C}_3(s)\left(\|\boldsymbol{\phi}\|_{H^s(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{-\alpha/p'}\|\mathbf{F}\|_{L_p(\mathbb{R}_\pm;H^s(\mathbb{R}^d))}\right).\end{aligned}$$

Величина $\mathfrak{C}_3(s)$ *определена в теореме* 10.10. *Здесь* $p^{-1}+(p')^{-1}=1$.

2°. *Если* $\boldsymbol{\phi} \in L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ *и* $\mathbf{F} \in L_1(\mathbb{R}_\pm; L_2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n))$, *то*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|f^\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon(\cdot, \pm\varepsilon^{-\alpha}) - f_0\mathbf{u}_0(\cdot,\pm\varepsilon^{-\alpha})\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} = 0, \qquad 0<\alpha<2.$$

Полученные общие результаты можно применить к конкретным уравнениям математической физики (см. [Su4, разделы 15, 16]). Так, для уравнения Шрёдингера с вещественной матрицей $g(\mathbf{x})$ (см. [Su4, п. 15.1]) справедлива теорема 11.2. Для магнитного уравнения Шрёдингера с малым потенциалом (см. [Su4, п. 15.4]) и для двумерного волнового уравнения Паули (см. [Su4, п. 16.3]) выполнена теорема 11.4. Эти результаты являются точными как в отношении гладкости начальных данных, так и в отношении зависимости оценок от времени.

Список литературы

[APi] Allaire G., Piatnitski A., *Homogenization of the Schrödinger equation and effective mass theorems*, Comm. Math. Phys. **258** (2005), 1–22.

[BaPa] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[BeLP] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analisys for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. **5**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[BSu1] Birman M. Sh., Suslina T. A., *Threshold effects near the lower edge of the spectrum for periodic differential operators of mathematical physics*, in Systems, Approximation, Singular Integral Operators, and Related Topics, A. A. Borichev and N. K. Nikolski, eds., Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 71–107.

[BSu2] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 1–108.

[BSu3] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации резольвенты факторизованного самосопряжённого семейства с учётом корректора*, Алгебра и анализ, **17**:5 (2005), 69–90.

[BSu4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ, **17**:6 (2005), 1–104.

[BSu5] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ, **20**:6 (2008), 30–107.

[COrVa] Conca C., Orive R., Vanninathan M., *Bloch approximation in homogenization and applications*, SIAM J. Math. Anal., **33**:5 (2002), 1166–1198.

[VSu1] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Пороговые аппроксимации факторизованного самосопряжённого операторного семейства с учётом первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ, **23**:2 (2011), 102–146.

[VSu2] Василевская Е. С., Суслина Т. А., *Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учёте первого и второго корректоров*, Алгебра и анализ, **24**:2 (2012), 1–103.

[D] Дородный М. А., *Усреднение уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами при включении членов младшего порядка*, Алгебра и анализ, принято к печати.

[DSu] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral Approach to Homogenization of Hyperbolic Equations With Periodic Coefficients*, J. Differ. Equ., **264**:12 (2018), 7463–7522.

[Zh] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН, **406**:5 (2006), 597–601.

[ZhKO] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[ZhPas1] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys., **12**:4 (2005), 515–524.

[ZhPas2] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys., **13**:2 (2006), 224–237.

[ZhPas3] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН, **71**:3(429) (2016), 27–122.

[K] Като Т., *Теория возмущений линейных операторов*, Мир, М., 1972.

[M1] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients*, preprint (2017), arXiv:1705.02531 [math.AP].

[M2] Мешкова Ю. М., *Об усреднении периодических гиперболических систем*, Матем. заметки, принято к печати.

[M3] Meshkova Yu. M., *On homogenization of periodic hyperbolic systems in $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Variations on the theme of the Trotter-Kato theorem*, preprint (2019), arXiv:1904.02781 [math.AP].

[Se] Севостьянова Е. В., *Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами*, Матем. сб., **115(157)**:2(6) (1981), 204–222.

[Su1] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 86–90.

[Su2] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. **220**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233.

[Su3] Суслина Т. А., *Усреднение уравнений типа Шрёдингера*, Функц. анализ и его прил., **50**:3 (2016), 90–96.

[Su4] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. and Appl., **446**:2 (2017), 1466–1523.