Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 27 октября 2019 года
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Сингулярные числа компактных ПДО с символом, негладким по пространственным переменным

А.И.Кароль[1]

Аннотация

Рассматриваются компактные псевдодифференциальные операторы с символами, гладкость которых по переменной x нарушается на фиксированном множестве. Получены условия, когда для s-чисел таких операторов сохраняется вейлевская формула спектральной асимптотики. Результаты применяются к операторам, для которых порядок убывания символа по переменной ξ является негладкой функцией от x.

ключевые слова: псевдодифференциальный оператор, негладкий символ, спектральные асимптотика, оценки сингулярных чисел.

1 Постановка задачи. Основные результаты

Пусть $A : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega)$ — компактный псевдодифференциальный оператор (ПДО),

$$Au(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} a(x,\xi) u(y) dy d\xi, \quad u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d), \tag{1}$$

область $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ограничена и имеет липшицеву границу. Будем считать, что символ a определен для всех $x, \xi \in \mathbb{R}^d$ и $a(x,\xi) \equiv 0$ для всех достаточно больших $|x|$. Через $\{s_k(A)\}$ обозначим невозрастающую последовательность сингулярных чисел (s-чисел) оператора A, занумерованную с учетом кратности, $s_k(A) := \sqrt{\lambda_k(A^*A)}$. $N(t,A)$ — функция распределения s-чисел,

$$N(t,A) := \#\{k \mid s_k(A) > t^{-1}\}.$$

В работе рассматриваются операторы с символами, гладкость которых по переменной x нарушается на фиксированном множестве, а порядок убывания по переменной ξ (локально — порядок оператора) может зависеть от точки x. Оценки и асимптотики спектра для ПДО с негладкими символами были ранее получены лишь для классических операторов с однородными по ξ символами [2, 3]. В этих работах использовался вариационный подход к вычислению спектральных асимптотик. Символ должен был принадлежать нужному классу мультипликаторов ядер интегральных операторов. К операторам, у которых порядок убывания символа по ξ зависит от точки x, эта техника неприменима. Спектральные асимптотики

[1]работа поддержана грантом РФФИ № 18-01-00472

компактных ПДО с гладкими неклассическими символами в $\mathbb{R}^d$ рассматривались в [13, 14].

В [7, 8] рассматривались ПДО с вейлевскими символами, когда функция $a(x,\xi)$ в (1) заменяется на $a\big((x+y)/2,\xi\big)$. В [7] доказана справедливость вейлевской формулы спектральной асимптотики для неклассических ПДО с гладкими символами, в [8] — для операторов с вейлевскими символами, гладкость которых по переменной x зависит от порядка оператора. Интерес к задачам определения спектральной асимптотики таких операторов возник в последнее время в связи с теорией случайных процессов. К этим задачам сводятся проблемы определения асимптотики вероятности малых уклонений в L_2 для гауссовых процессов с дробным переменным показателем Херста [11, 12]. В этих задачах степенной порядок убывания символа при $|\xi|\to\infty$ является гельдеровской функцией переменной x. Главный член спектральной асимптотики в этом случае определяется сколь угодно узкой окрестностью множества тех точек x, где порядок по абсолютной величине минимален. В [8] рассматривались операторы с вейлевскими символами, в настоящей работе — с обычными, левыми, символами. Для операторов (1) удается существенно ослабить по сравнению с [8] требования гладкости символа.

Результаты работы анонсированы в [9].

Приведем необходимые обозначения. Через C обозначаем различные константы, $\mathrm{vol}_k(D)$ — k-мерный объём множества D, $\langle\xi\rangle := (1+|\xi|^2)^{1/2}$. Для неотрицательной функции f обозначаем через μ_f её функцию распределения,

$$\mu_f(s) := \mathrm{vol}_d\{x\in\mathbb{R}^d \mid 0<f(x)<s\}.$$

Опишем нужный класс символов. Символ имеет особенности на множестве $\Gamma\subset\bar\Omega$. Фиксируем функцию $\mathrm{d}(x)$, $x\in\mathbb{R}^d$ — регуляризованное расстояние до Γ: $\mathrm{d}\asymp\mathrm{dist}(x,\Gamma)$, если $\mathrm{dist}(x,\Gamma)<1$ и $\mathrm{d}(x)=2$, если $\mathrm{dist}(x,\Gamma)>2$. Предположим, что $\mathrm{d}(x)\in C^\infty(\mathbb{R}^d\backslash\Gamma)$, и

$$|\partial^\alpha \mathrm{d}(x)|\le C(\alpha)\mathrm{d}^{1-|\alpha|}(x),\quad x\in\mathbb{R}^d\setminus\Gamma, \tag{2}$$

а для некоторого $\varkappa>0$

$$\mu_{\mathrm{d}}(s)\le Cs^{\varkappa},\ 0<s<1. \tag{3}$$

Условия (2),(3) заведомо выполнены, если Γ является липшицевой поверхностью; в этом случае параметр $\varkappa$ является коразмерностью Γ (см.[15]).

Через $\tilde S^{-m}_{\rho,\delta}$, $m>0$, $0\le\delta<\rho\le1$, обозначим класс символов $a(x,\xi)$, таких, что для всех α,β при любом $\varepsilon>0$

$$|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta a(x,\xi)|\le C(\alpha,\beta,\varepsilon)\langle\xi\rangle^{-m-|\beta|\rho+|\alpha|\delta+\varepsilon}\mathrm{d}^{-|\alpha|}(x),\quad x\in\mathbb{R}^d\setminus\Gamma,\,\xi\in\mathbb{R}^d. \tag{4}$$

Отметим, что пересечение обычных классов Хермандера $S^{m'}_{\rho',\delta'}$ по всем $m'>-m$, $\rho'<\rho$, $\delta'>\delta$, лежит в $\widetilde S^{-m}_{\rho,\delta}$. Оценки “с ε” позволяют включать в рассмотрение символы, у которых убывание по переменной ξ не строго степенное.

Напомним, что функция $f(t)\in C^1(1,+\infty)$, $f(t)\ne0$, называется медленно меняющейся (ММФ) на бесконечности, если $tf'(t)/f(t)\to0$ при $t\to+\infty$.

Сформулируем основные результаты работы. Пусть

$$\mathrm{vol}_{2d}\{x,\xi\in\Omega\times\mathbb{R}^d|\ |a(x,\xi)|>t^{-1}\}=t^{\frac{d}{m}}V(t,a), \tag{5}$$

где $V(t,a)$ является медленно меняющейся функцией.

Следующее условие на символы класса $\widetilde{S}^{-m}$ будем накладывать лишь при $m \geq d/2$, что соответствует операторам "почти Гильберта-Шмидта". Пусть для какого нибудь $l \in (0,1)$ и любого $\varepsilon > 0$

$$|a(x,\xi) - a(y,\xi)| \leq C(\varepsilon)(1+|\xi|)^{-m+l+\varepsilon}|x-y|^l, \quad x,y,\xi \in \mathbb{R}^d. \tag{6}$$

Теорема 1.1. *Пусть для символа $a \in \widetilde{S}^{-m}_{\rho,\delta}$ выполнены условия (2)-(5). Если $m < d/2$, то дополнительно потребуем, чтобы $\rho = 1$, а если $m \geq d/2$, то должны выполняться неравенства (6). Тогда для некоторого $\nu > 0$ справедлива асимптотическая формула Вейля*

$$N(t,A) = (2\pi)^{-d}\mathrm{vol}_{2d}\{x,\xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mid |a(x,\xi)| > t^{-1}\}(1+O(t^{-\nu})) =$$

$$(2\pi)^{-d}t^{\frac{d}{m}}V(t,a)\big(1+O(t^{-\nu})\big), \quad t \to +\infty, \tag{7}$$

$\nu = \nu(m,d,\delta,\varkappa,l)$.

Для операторов с вейлевскими символами при $m > d/2$ в [8] по сравнению с настоящей работой накладывались гораздо более жесткие условия на гладкость символа вблизи множества Γ.

В формуле (1) можно рассматривать ПДО A на функциях u из $C_0^\infty(\Omega)$. Соответствующий оператор, действующий в $L_2(\Omega)$, обозначим через A_Ω. Пусть в условиях теоремы 1 условие (5) заменяется на условие поведения объема больших значений символа $\mathrm{Re}\, a(x,\xi)$:

$$\mathrm{vol}_{2d}\{x,\xi \in \Omega \times \mathbb{R}^d \mid \mathrm{Re}\, a(x,\xi) > t^{-1}\} = t^{\frac{d}{m}}V_R(t,a),$$

где V_R — некоторая медленно меняющаяся функция. Для собственных чисел оператора $\mathrm{Re}A_\Omega := (A_\Omega + A_\Omega^*)/2$ справедлива

Теорема 1.2. *Для функции распределения положительных собственных чисел оператора $\mathrm{Re}A_\Omega$ справедливо равенство*

$$N_+(t,\mathrm{Re}A_\Omega) := \#\{k \mid \lambda_k(\mathrm{Re}A_\Omega) > t^{-1}\} = (2\pi)^{-d}t^{\frac{d}{m}}V_R(t,a)\big(1+O(t^{-\nu})\big), \quad t \to \infty, \tag{8}$$

где $\nu = \nu(m,d,\delta,\varkappa,l) > 0$.

Опишем схему доказательства теорем 1.1 и 1.2. Представим оператор A как сумму регулярной и сингулярной частей, $A = A_0 + A_1$. Оператор A_0 является ПДО с гладким символом, к исследованию его спектра применим метод приближенного спектрального проектора. Для спектра регулярной части A_0 докажем асимптотическую формулу (7), здесь доказательство следует работе [7], где получена спектральная асимптотика компактных ПДО переменного порядка с гладкими символами. Далее, следуя работе [8], для спектра сингулярной части A_1 доказываются оценки, которые позволяют с помощью асимптотической теории возмущений сохранить асимптотику (7) для суммы $A_0 + A_1$.

Спектральная асимптотика регулярной части в работе получена для символов из класса $a \in \widetilde{S}^{-m}_{\rho,\delta}$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$. Условие $\rho = 1$ возникает лишь при доказательстве оценок спектра сингулярной части, когда $m < d/2$ (см.§ 4, теорема 4.1).

В теории случайных процессов возникает потребность в определении асимптотики s-чисел операторов с символом

$$a(x,\xi) = (p(x,\xi))^{-(m+h(x))}, \quad m > d/2, \quad h \geq 0, \tag{9}$$

где символ $p \in S^1_{\rho,\delta}$ эллиптичен. Функция h в этих задачах принадлежит классу Гёльдера. Как указано выше, главный член спектральной асимптотики в этом случае определяется сколь угодно узкой окрестностью множества нулей функции h.

Пусть $D := \{x \in \bar{\Omega} \mid h(x) = 0\}$, $\mathrm{d}(x)$ — регуляризованное расстояние от точки x до D. Будем считать, что вне D для функции $\mathrm{d}(x)$ выполнены оценки (2). Пусть для некоторого $\nu_0 > 0$

$$\mathrm{vol}_d\{\xi \in \mathbb{R}^d \mid |p(x,\xi)| < t\} = v(x)t^d(1 + O(t^{-\nu_0})), \quad t \to \infty.$$

Теорема 1.3. *Пусть $m > d/2$ и $h \in C^l(\bar{\Omega})$ для какого-то $l \in (0,1)$. Предположим, что $h = h_0 + h_1$, где $h_0 \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus D)$, причем $|\partial^\alpha h_0(x)| \leq C(\alpha)h_0(x)\mathrm{d}^{-|\alpha|}(x)$, $x \in \mathbb{R}^d \setminus D$, а остаток $h_1 = O((h_0)^{1+\tau})$ при $h_0 \to 0$. Пусть для некоторой медленно меняющейся функции φ при $s \to +0$*

$$\int_{0<h(x)<s} v(x)dx = s^\sigma \varphi(s^{-1}), \quad \sigma > 0, \tag{10}$$

и при любом $\varepsilon > 0$ справедлива оценка

$$\mu_h(s) \leq C(\varepsilon)s^{\sigma-\varepsilon}, \quad 0 < s < 1. \tag{11}$$

Если $\mathrm{vol}_d\, D > 0$, то при $\tau > (1-\sigma)/2$ для функции распределения s-чисел оператора A с символом (9) справедлива асимптотика

$$N(t,A) = (2\pi)^{-d} \int\limits_\Omega t^{\frac{d}{m+h(x)}} v(x)dx + O\big(t^{d/m}\log^{-r}(t)\big), \qquad t \to \infty, \tag{12}$$

для любого $r \in \big(0, \frac{2\tau+\sigma-1}{2(d+m)}\big)$.

Если $\mathrm{vol}_d\, D = 0$, то при $\tau > \sigma(m/d - 1/2) + 1/2$

$$N(t,A) = (2\pi)^{-d} \int\limits_\Omega t^{\frac{d}{m+h(x)}} v(x)dx \,\big(1 + O(\log^{-\nu}(t))\big), \quad t \to \infty, . \tag{13}$$

где $\nu = \nu(m,d,\sigma,\tau,\varkappa) > 0$.

Формула (13) является, конечно, реализацией формулы Вейля (5), (7) для оператора с символом (9). Вычисляя интегралы в (12),(13) по методу Лапласа получаем:

Следствие. *Если $\mathrm{vol}_d\, D > 0$, то*

$$N(t,A) = (2\pi)^{-d}t^{\frac{d}{m}}\big(\alpha + \beta(\log t)^{-\sigma}\,\varphi(\log t)(1+o(1))\big) + O(t^{d/m}\log^{-r} t) \quad t \to \infty, \tag{14}$$

$$\alpha = \int\limits_D v(x)dx, \quad \beta = (m^2/d)^\sigma \Gamma(\sigma+1), \quad \Gamma - \Gamma\text{-функция Эйлера.}$$

Если $\mathrm{vol}_d\, D = 0$, то

$$N(t,A) = (2\pi)^{-d}\beta\, t^{\frac{d}{m}}(\log t)^{-\sigma}\,\varphi(\log t)(1+o(1))). \tag{15}$$

Отметим, что если $r \leq \sigma$, то в формуле (14) сохраняется лишь степенная асимптотика с логарифмической оценкой остатка.

Схема доказательства теоремы 1.3 повторяет в основном доказательство теорем 1.1, 1.2. Если в разложении функции h слагаемое $h_1 \equiv 0$, то, поскольку символ $p \in S^1_{\rho,\delta}$ эллиптичен, символ (9) попадает в класс $\widetilde{S}^{-m}_{\rho,\delta}$. Для такого оператора утверждение теоремы 3 со степенной оценкой остатка следует из теоремы 1. Тем самым в ПДО с символом (9) выделяется старшая часть. Остаток — оператор A_{h_1} с символом $p(x,\xi)^{-(m+h_0(x))}(p(x,\xi)^{-h_1(x)} - 1)$, для его s-чисел доказывается оценка $N(t, A_{h_1}) \leq Ct^{d/m} \log^{-q} t$ с некоторым $q > \sigma$. Такие оценки через степени и логарифмы спектрального параметра получаются модификацией известных оценок s-чисел интегрального оператора через нормы ядра в соответствующих соболевских пространствах [4, 5].

Опишем структуру работы. В § 2 приведены вспомогательные сведения об используемых пространствах Соболева и оценках s-чисел интегральных операторов, в § 3 выделяется регулярная часть ПДО и приводятся результаты об асимптотике её s-чисел. В § 4 доказаны оценки s-чисел оставшейся сингулярной части, что дает доказательство теорем 1.1 и 1.2. В § 5 рассматривается оператор переменного порядка с символом (9) и доказывается теорема 1.3.

2 Вспомогательные утверждения

2.1 s-числа компактных операторов

Следующий результат об оценках s-чисел композиции операторов приведен в [6, теорема 2.2a].

Предложение 2.1. *Пусть $T_1 : H_1 \to H_2$, $T_2 : H_2 \to H_3$ — компактные операторы такие, что некоторых p_1, $p_2 > 0$ и медленно меняющихся функций Φ_1, Φ_2*

$$\limsup_{k\to\infty} s_k(T_1)k^{1/p_1}\Phi_1(k) \leq M_1,$$
$$\limsup_{k\to\infty} s_k(T_2)k^{1/p_2}\Phi_2(k) \leq M_2.$$

Тогда для композиции $T_2T_1 : H_1 \to H_3$

$$\limsup_{k\to\infty} s_k(T_2T_1)k^{1/p}\Phi_1(k)\Phi_2(k) \leq \frac{p_1^{1/p_1} p_2^{1/p_2}}{(p_1+p_2)^{1/p}} M_1M_2, \quad 1/p = 1/p_1 + 1/p_2.$$

Нам потребуются следующие результаты об оценках остатка в асимптотической теории возмущений.

Лемма 2.1. *Пусть A, $B : H_1 \to H_2$ — компактные операторы. Справедливы следующие утверждения:*

1. Если для функций распределения s-чисел справедливы равенства $N(t, A) = t^pV(t)$, где V — ММФ, и для некоторого $q < p$ $N(t, B) = O(t^q)$ при $t \to \infty$, то для функции распределения s-чисел суммы операторов верно равенство

$$N(t, A+B) = t^p V^*(t), \quad \text{где} \quad V^*(t) = V(t) + O(t^{-r}), \quad r < (p-q)/(q+1).$$

2. Если $N(t,A) = t^p \log^{-a} t\, V(\log t)$, где V — ММФ, и для некоторого $b > a$ $N(t,B) = O(t^p \log^{-b} t)$ при $t \to \infty$, то

$$N(t, A+B) = t^p \log^{-a} t\, V^*(\log t), \quad где \quad V^*(s) = V(s) + O(s^{-r}), \quad r < (b-a)/(p+1).$$

3. Если $N(t,A) = t^p(\alpha + \beta \log^{-a} t\, V(\log t))$, $a > 0$, V — ММФ, и для некоторого $b > a$ $N(t,B) = O(t^p \log^{-b} t)$ при $t \to \infty$, то

$$N(t, A+B) = t^p(\alpha + \beta \log^{-a} t\, V(\log t) + O(\log^{-r} t)), где \quad r < b/(p+1).$$

Доказательство. Утверждение п.1 об оценках в степенной шкале имеется в [8, лемма 2.2]. Утверждения пп. 2 и 3 доказываются одинаково. Докажем утверждение п.2.

Для функций распределения спектра известно неравенство

$$N(t, A+B) \le N(t_1, A) + N(t_2, B),\ 1/t = 1/t_1 + 1/t_2$$

[5, §9.3, теорема 9]. Взяв $t_2 = t \log^r t$, получим, что $N(t_2, B) = O(t^p \log^{-b+pr} t)$, а $N(t_1, A) = t^p \log^{-a} t\, V(t)(1 + O(\log^{-r} t))$. Таким образом,

$$N(t, A+B) \le t^p \log^{-a} t\, V(t)(1 + O(\log^{-r} t)) + Ct^p \log^{-b+pr} t.$$

Для $r < (b-a)/(p+1)$ отсюда следует, что $V^*(t) \le V(t) + O(t^{-r})$. Неравенство $V^*(t) \ge V(t) + O(t^{-r})$, эквивалентное оценке

$$N(t, A+B) \ge N(t, A) - Ct^p \log^{-b+pr} t,$$

получается точно так же из равенства $A = (A+B) + (-B)$. $\square$

Замечание. Результаты пп. 1 и 2 леммы справедливы и для функции распределения собственных чисел. Именно, если $H_1 = H_2$, $A = A^*$, $B = B^*$ и для функции распределения положительных собственных чисел оператора A справедливо $N_+(t, A) = t^p V_+(t)$, а для s-чисел оператора B выполнена оценка $N(t, B) = O(t^q)$ при $t \to \infty$, то $N_+(t, A+B) = t^p\, V_+^*(t)$, где $V_+^*(t) = V_+(t) + O(t^{-r})$, $r < (p-q)/(q+1)$.

Отметим, что если в п.3 $b/(p+1) \le a$, то для функции распределения суммы операторов сохраняется лишь степенная асимптотика с логарифмической оценкой остатка.

2.2 Сведения по теории интерполяции

Приведем нужные факты из теории интерполяции. Пусть $\mathcal{H}_1 \hookrightarrow \mathcal{H}_0$ — сепарабельные гильбертовы пространства с нормами $\|\ \|_1$, $\|\ \|_0$ соответственно; $\mathcal{H}_1$ плотно и непрерывно вложено в $\mathcal{H}_0$. Будем говорить, что $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_0$ являются *допустимой парой.* Обозначим через $\mathcal{J}$ самосопряженный положительный оператор в $\mathcal{H}_0$ с областью определения $\mathcal{H}_1$ такой, что для всех u из $\mathcal{H}_1$ $\|\mathcal{J}u\|_0 = \|u\|_1$. Для параметров $\theta \in (0,1)$ и $q \in \mathbb{R}$ определим пространство $\mathcal{H}_{\theta,q}$ — область определения оператора $\mathcal{J}^\theta \log^q(1+\mathcal{J})$ с нормой графика. Следующее предложение (см.[1, гл.5.4.2]) означает, что функция $\mathbb{R}_+ \ni t \to t^\theta \log^q(1+t)$ является *интерполяционной функцией*:

Предложение 2.2. *Пусть $\mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}_1$ и $\mathcal{V}_0$, $\mathcal{V}_1$ — допустимые пары, и непрерывный оператор $T : \mathcal{H}_1 \to \mathcal{V}_1$ продолжается до непрерывного оператора из $\mathcal{H}_0$ в $\mathcal{V}_0$. Тогда оператор T непрерывно действует из $\mathcal{H}_{\theta,q}$ в $\mathcal{V}_{\theta,q}$, для соответствующих норм справедливо неравенство $\|T\|_{\mathcal{H}_{\theta,q}\to\mathcal{V}_{\theta,q}} \le C_{\theta,q} \max\{\|T\|_{\mathcal{H}_0\to\mathcal{V}_0},\, \|T\|_{\mathcal{H}_1\to\mathcal{V}_1}\}$.*

2.3 Пространства Соболева

Через $H^{l,q}(\mathbb{R}^d)$, $l>0$, $-\infty<q<\infty$, обозначим пространство Соболева функций с конечной нормой

$$\|u\|^2_{H^{l,q}(\mathbb{R}^d)} := \int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{2l}(1+\log^2\langle\xi\rangle)^q|\hat{u}(\xi)|^2 d\xi. \tag{16}$$

Для $q=0$ получаем обычное пространство Соболева в $\mathbb{R}^d$, для этого случая сохраняем стандартное обозначение H^l. Пространства $H^{l,q}(\mathbb{R}^d)$ являются частным случаем пространств $B_{p,k}$ [10, гл.10.1] для $p=2$ и весовой функции $k(\xi)=\langle\xi\rangle^l(1+\log\langle\xi\rangle)^q$.

Очевидно, что пространства $H^m(\mathbb{R}^d)$ и $L_2(\mathbb{R}^d)$, $m>0$, являются допустимой парой в смысле п.2.2. При этом $\mathcal{J}=(1-\Delta)^{m/2}$ и для $l=m\theta$ имеем $H^{l,q}(\mathbb{R}^d)=\mathcal{H}_{\theta,q}$, соответствующие нормы эквивалентны.

Для области $X\in\mathbb{R}^d$ определим пространство $H^{l,q}(X)$ как пространство сужений функций из $H^{l,q}(\mathbb{R}^d)$ на X;

$$\|u\|_{H^{l,q}(X)} := \inf\{\|\widetilde{u}\|_{H^{l,q}(\mathbb{R}^d)} \mid \widetilde{u}\in H^{l,q}(\mathbb{R}^d), \widetilde{u}(x)=u(x), x\in X\}. \tag{17}$$

Если область X допускает непрерывный оператор продолжения $H^m(X)\to H^m(\mathbb{R}^d)$, $m>l$, (например, имеет липшицеву границу), то, конечно, пространства $H^{l,q}(X)$ являются интерполяционными в паре $H^m(X)$, $L_2(X)$; норма (17) эквивалентна соответствующей интерполяционной норме для $l=m\theta$.

Для $l\in(0,1)$ удобно характеризовать принадлежность пространству $H^{l,q}(X)$ в терминах разностных отношений. В случае $q=0$ утверждение следующей леммы хорошо известно.

Лемма 2.2. *Пусть $l\in(0,1)$, а область X имеет липшицеву границу (или $X=\mathbb{R}^d$). Для $u\in L_2(X)$ принадлежность пространству $H^{l,q}(X)$ эквивалентна конечности интеграла*

$$I_\alpha(u,X) := \int\limits_{\substack{X\times X,\\ |x-y|<\alpha}} \frac{|u(x)-u(y)|^2}{|x-y|^{d+2l}}\big|\log|x-y|\big|^{2q}dxdy, \quad 0<\alpha<1. \tag{18}$$

Таким образом, $I_\alpha(u,X)$ дает старшую часть эквивалентной нормы пространства $H^{l,q}(X)$. Для разных параметров α полученные нормы эквивалентны друг другу.

Доказательство. Разбиение единицы и локальные координаты стандартным образом сводят доказательство к случаям, когда область X — это все пространство $\mathbb{R}^d$ или полупространство $\mathbb{R}^d_+$. Рассмотрим сначала случай $X=\mathbb{R}^d$.

Записав конечную разность через преобразование Фурье, получим равенство

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}|u(x+z)-u(x)|^2dx = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}|e^{iz\xi}-1|^2|\hat{u}(\xi)|^2d\xi.$$

Таким образом,

$$I_\alpha(u,\mathbb{R}^d) = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\Phi(\xi)|\hat{u}(\xi)|^2d\xi, \quad \Phi(\xi) := \int\limits_{|z|<\alpha}\frac{|e^{iz\xi}-1|^2}{|z|^{d+2l}}\log^{2q}|z|dz.$$

Функция Φ зависит лишь от $|\xi|$, после замены $z \to |\xi|^{-1}z$ имеем

$$\Phi(\xi) = |\xi|^{2l} \log^{2q}|\xi| \int\limits_{|z|<\alpha|\xi|} \frac{|e^{iz\xi_0}-1|^2}{|z|^{d+2l}} \left| \frac{\log|\xi| - \log|z|}{\log|\xi|} \right|^{2q} dz. \tag{19}$$

По теореме Лебега получаем

$$\Phi(\xi) = c_0|\xi|^{2l}\big|\log|\xi|\big|^{2q}(1+o(1)),\ |\xi|\to\infty, \quad c_0 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \frac{|e^{iz\xi_0}-1|^2}{|z|^{d+2l}}dz, \quad |\xi_0| = 1.$$

Подынтегральное выражение в (19) не превосходит

$$C(\alpha)\frac{|e^{iz\xi_0}-1|^2}{|z|^{d+2l}}(1+\big|\log|z|\big|)^{2|q|},$$

что дает суммируемую мажоранту для предельного перехода при $|\xi|\to\infty$. Таким образом, $\Phi(\xi) \asymp \langle\xi\rangle^{2l}(1+\log^2\langle\xi\rangle)^q$, и утверждение леммы для $X=\mathbb{R}^d$ доказано.

Пусть теперь $X = \mathbb{R}^d_+$. Обозначим через u_e четное продолжение функции u через границу полупространства. Несложные выкладки приводят к неравенству $I_\alpha(u_e,\mathbb{R}^d) \le 4I_\alpha(u,\mathbb{R}^d_+)$, что вместе с утверждением леммы для $X=\mathbb{R}^d$ дает оценку

$$\|u\|^2_{H^{l,q}(\mathbb{R}^d_+)} \le c\big(I_\alpha(u,\mathbb{R}^d_+) + \|u\|^2_{L_2(\mathbb{R}^d_+)}\big).$$

Обратная оценка следует из очевидного неравенства $I_\alpha(u,\mathbb{R}^d_+) \le I_\alpha(\widetilde{u},\mathbb{R}^d)$, где $\widetilde{u}\in H^{l,q}(\mathbb{R}^d)$ — произвольное продолжение функции u на $\mathbb{R}^d$. $\square$

Определим пространство $\widetilde{H}^{l,q}(Q_s)$ периодических функций в кубе $Q_s := (0,2\pi s)^d$. Функция

$$u(x) = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} c_{\mathbf{n}} e^{i\mathbf{n}x/s}$$

принадлежит этому пространству, если

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^{l,q}(Q_S)} := \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d}(1+|\mathbf{n}|^2)^l \log^{2q}(2+|\mathbf{n}|)|c_{\mathbf{n}}|^2 < \infty.$$

Пространство $\widetilde{H}^{l,q}(Q_s)$ — интерполяционное в паре $\widetilde{H}^{l_0}(Q_s)$ и $L_2(Q_s)$, $l_0 > l > 0$. Если для областей $X_\pm$ с липшицевой границей справедливы включения $X_- \subset Q_s \subset X_+$, то, конечно, справедливы вложения $H^{l,q}(X_-) \hookrightarrow \widetilde{H}^{l,q}(Q_s) \hookrightarrow H^{l,q}(X_+)$.

Следующее утверждение является распространением на пространства $H^{l,q}$ известного результата об оценках s-чисел оператора вложения соболевских пространств [5, §11.8]. Пусть X — ограниченная область в $\mathbb{R}^d$ с липшицевой границей, J — оператор вложения $H^{l,q}(X) \hookrightarrow L_2(X)$.

Лемма 2.3. *1. Для s- чисел оператора J справедлива оценка*

$$s_k(J) \le C(X)k^{-\frac{l}{d}}\log^{-q}k.$$

2. Пусть

$$(\mathcal{T}u)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} T(x,y)u(y)dy$$

— *интегральный оператор, действующий из* $L_2(\mathbb{R}^d)$ *в* $L_2(X)$, *функция* $x \to T(x,y)$ *для почти всех* $y \in \mathbb{R}^d$ *принадлежит пространству* $H^{l,q}(X)$ *и*

$$M^2 := \int\limits_{\mathbb{R}^d} \|T(\cdot,y)\|^2_{H^{l,q}(X)} dy < \infty. \tag{20}$$

Тогда для s*-чисел оператора* $\mathcal{T}$ *справедлива оценка*

$$s_k(\mathcal{T}) \le C_X M k^{-(\frac{1}{2}+\frac{l}{d})} \log^{-q} k. \tag{21}$$

Замечание. Оценка s-чисел

$$\limsup_{k\to\infty} k^p \log^q k\, s_k \le C, \quad p > 0,$$

эквивалентна оценке функции распределения

$$\limsup_{t\to\infty} N(t)^p t^{-1} \log^q t \le p^q C.$$

Доказательство. Фиксируем куб Q_s, содержащий область X, и обозначим через $\widetilde{J}$ оператор вложения $\widetilde{H}^{l,q}(Q_s) \hookrightarrow L_2(Q_s)$. Для s-чисел справедливо неравенство $s_k(J) \le C s_k(\widetilde{J})$, C — норма оператора продолжения $H^{l,q}(X) \to \widetilde{H}^{l,q}(Q_s)$. Таким образом, утверждение пункта 1 достаточно доказать для s-чисел оператора $\widetilde{J}$.

Разложение функции u в ряд Фурье по системе экспонент в Q_s можно записать в виде

$$u = \sum_{\mathbf{n}\in\mathbb{Z}^d} (1+|\mathbf{n}|^2)^{-l/2} \log^{-q}(2+|\mathbf{n}|)(u,\phi_{\mathbf{n}})_{\widetilde{H}^{l,q}(Q_s)} \psi_{\mathbf{n}},$$

здесь

$$\psi_{\mathbf{n}}(x) := (2\pi s)^{-d/2} \exp(i\mathbf{n}x/s), \quad \phi_{\mathbf{n}}(x) := (2\pi s)^{-d/2}(1+|\mathbf{n}|^2)^{-l/2} \log^{-q}(2+|\mathbf{n}|) \exp(i\mathbf{n}x/s)$$

— ортонормированные базисы в пространствах $L_2(Q_s)$ и $\widetilde{H}^{l,q}(Q_s)$ соответственно. Это разложение является рядом Шмидта оператора $\widetilde{J}$, а набор коэффициентов $(1+|\mathbf{n}|^2)^{-l/2} \log^{-q}(2+|\mathbf{n}|)$ — множеством его s-чисел. После упорядочивания этого набора получаем утверждение п. 1 леммы.

Условие п. 2 леммы означает (см.[5, §11.8]), что оператор $\mathcal{T}$ является оператором Гильберта-Шмидта, действующим из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $H^{l,q}(X)$ с нормой, не превосходящей M. Для его s-чисел, как оператора в этих пространствах, имеется оценка $\limsup s_k k^{1/2} \le \sqrt{2} M$. Таким образом,

$$\mathcal{T} : L_2(\mathbb{R}^d) \xrightarrow{\mathcal{T}} H^{l,q}(X) \xrightarrow{J} L_2(X),$$

и утверждение п. 2 следует из оценок п. 1 леммы и предложения 2.1. $\square$

3 Асимптотика спектра регулярной части

Определим регулярную часть оператора (1), символ которого удовлетворяет условию (4). Зафиксируем срезки θ, $\theta_1 \in C^\infty(\mathbb{R})$,

$$\theta(s) = 0,\ s < 1, \quad \text{и} \quad \theta(s) = 1,\ s > 2; \quad \theta_1(s) := 1 - \theta(s). \tag{22}$$

Построим функцию $\theta\left(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\right)$, $\delta \geq \delta' > 0$. Из оценок (2) следует, что $\theta\left(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\right) \in S^0_{1,\delta'}$, а из неравенств (4) — что

$$a_0(x,\xi) := a(x,\xi)\theta\big(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\big) \in S^{-m+\varepsilon}_{\rho,\delta_0} \tag{23}$$

для любого $\varepsilon > 0$, $\delta_0 := \delta + \delta'$. Параметр $\delta' > 0$ выберем настолько малым, чтобы выполнялось неравенство $\delta_0 < \rho$.

Назовем оператор A_0 с символом $a_0(x,\xi)$ регулярной частью оператора A, оператор $A_1 := A - A_0$ — сингулярной частью.

Оператор $A_\Omega : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ таким же образом представим как сумму регулярной и сингулярной частей, $A_{0,\Omega} + A_{1,\Omega}$.

Асимптотические свойства спектра регулярной части по существу получены в работе [8], где рассматривались операторы с вейлевскими символами. Обозначим через W ПДО с вейлевским символом $w(x,\xi)$,

$$(Wu)(x) := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi} w\big((x+y)/2,\xi\big)u(y)dyd\xi, \quad u \in C_0^\infty(\Omega). \tag{24}$$

Напомним, что самосопряженность W эквивалентна вещественности его вейлевского символа.

Предложение 3.1 [8, теоремы 4.1 и 4.2]) *Пусть для объема больших значений вещественного символа* $b \in \widetilde{S}^{-m}_{\rho,\delta}$ *справедливо равенство*

$$\mathrm{vol}_{2d}\{x,\xi \in \Omega\times\mathbb{R}^d |\ b(x,\xi) > t^{-1}\} = t^{\frac{d}{m}} V(t,b),$$

где $V(t,b)$ *является медленно меняющейся функцией, а вейлевский символ* w *представлен в виде*

$$w(x,\xi) = b(x,\xi)\theta\big(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\big) + b_1(x,\xi),\ b_1 \in S^{-m_1}_{\rho,\delta_0},\ m_1 > m.$$

Тогда для функции распределения положительных собственных чисел оператора W *в* $L_2(\Omega)$ *справедлива формула*

$$N_+(t,W) = (2\pi)^{-d}\mathrm{vol}_{2d}\{x,\xi \in \Omega\times\mathbb{R}^d | b(x,\xi) > t^{-1}\} + O(t^{\frac{d}{m}-\nu_0}) =$$
$$(2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} V(t,b) + O(t^{\frac{d}{m}-\nu_0}),\ t \to \infty, \tag{25}$$

$\nu_0 = \nu_0(m,d,\rho,\delta_0,\delta',\varkappa) > 0$, $\varkappa$ *— параметр из условия (3).*

Тем самым, срезка θ и младшие члены символа сказываются лишь ухудшением оценки остатка асимптотики.

Из этого предложения сразу вытекает утверждение об асимптотике $N(t,A_0)$ и $N_+(t,\operatorname{Re} A_{0,\Omega})$.

Следствие 3.1. *В условиях теорем 1.1 и 1.2 соответственно,*

$$N(t, A_0) = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} V(t, a)(1 + O(t^{-\nu_0})), \quad t \to \infty, \tag{26}$$

$$N_+(t, \operatorname{Re} A_{0,\Omega}) = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} V_+(t, \operatorname{Re} a)(1 + O(t^{-\nu_0})), \quad t \to \infty, \tag{27}$$

$\nu_0 = \nu_0(m, d, \rho, \delta_0, \delta', \varkappa) > 0$.

Доказательство. Очевидно, $N(t, A_0) = N_+(t^2, A_0^* A_0) = N_+(t^2, A_0 A_0^*)$, а оператор $A_0 A_0^* : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$ является ПДО с амплитудой $a_0(x,\xi)\overline{a_0(y,\xi)}$:

$$(A_0 A_0^* u)(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d \times \Omega} e^{i(x-y)\xi} a_0(x,\xi)\overline{a_0(y,\xi)} u(y) dy d\xi.$$

Этот оператор можно записать в виде (24) с помощью вейлевского символа

$$w(x,\xi) = |a_0(x,\xi)|^2 \theta\big(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\big)^2 + b_1(x,\xi), \quad b_1 \in S^{-m_1}_{\rho,\delta_0}, \quad 2m < m_1 < 2m + \rho - \delta_0.$$

Таким образом, формула (26) следует из равенства (25).

Точно также исчисление ПДО позволяет представить оператор $\operatorname{Re} A_\Omega$ как оператор с вейлевским символом $w_R(x,\xi) = \operatorname{Re} a(x,\xi)\theta\big(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\big) + b_1(x,\xi)$, $b_1 \in S^{-m_1}_{\rho,\delta_0}$, $m < m_1 < m + \rho - \delta_0$. Это дает формулу (27).

4 Оценки спектра сингулярной части

Рассмотрим теперь оператор $A_1 := A - A_0$. Для применения леммы 2.1 получим оценки функции $N(t, A_1)$. Оператор A_1 является интегральным оператором, действующим из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\Omega)$, с ядром $T(x,y) = K(x, x-y)$,

$$K(x,z) := (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{iz\xi} a(x,\xi)\theta_1(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}) d\xi, \tag{28}$$

где срезка θ_1 введена в (22). Функция $K(x,z)$ определена для всех $x, z \in \mathbb{R}^d$, $K(x,z) = 0$ при достаточно больших $|x|$, когда $\mathrm{d}(x) \geq 2$.

Доказательства в случаях $m < d/2$ и $m \geq d/2$ различны.

Теорема 4.1. *Пусть символ $a \in \widetilde{S}^{-m}_{1,\delta}$, $m < d/2$. Тогда для достаточно больших t справедлива оценка*

$$N(t, A_1) \leq C(p) t^p, \quad p > \max\{2, (d - \varkappa\delta')/m\}. \tag{29}$$

Доказательство. Для операторов с вейлевскими символами такое же утверждение получено в ([8, теорема 5.1]). Доказательство для операторов с левыми символами мало меняется.

Для параметра $\sigma > 0$ определим ядра

$$T_\sigma(x,y) = \begin{cases} T(x,y), & |x-y| < \sigma, \\ 0, & |x-y| > \sigma. \end{cases}, \quad T^\sigma(x,y) = T(x,y) - T_\sigma(x,y).$$

$\mathcal{T}^\sigma$, $\mathcal{T}_\sigma$ — соответствующие операторы, действующие из $L_2(\mathbb{R}^d)$ в $L_2(\Omega)$.

Для функции $K(x,z)$ справедливы оценки ([8, лемма 5.1])

$$|K(x,z)| \le \begin{cases} \frac{C(l)}{|z|^l}, \quad l > d-m, \\ \\ \frac{C(l,\varepsilon)}{|z|^l \mathrm{d}(x)^{(d-m-l+\varepsilon)/\delta'}}, \quad 0 < l \le d-m, \, \forall \varepsilon > 0. \end{cases} \tag{30}$$

Тест Шура и неравенства (30) при $l = m+\varepsilon$ дают оценку нормы оператора $\mathcal{T}_\sigma$:

$$\|\mathcal{T}_\sigma\| \le C(\varepsilon)\sigma^{m-\varepsilon}. \tag{31}$$

Оценим теперь с помощью неравенств (30) норму Гильберта-Шмидта оператора $\mathcal{T}^\sigma$. Для $d/2 < l < d-m$ (такой выбор возможен ввиду условия $m < d/2$) имеем

$$\|\mathcal{T}^\sigma\|_2^2 = \int\limits_{\Omega\times\mathbb{R}^d} |T^\sigma(x,y)|^2 dxdy \le \int\limits_{\Omega} \int\limits_{|z|>\sigma} |K(x,z)|^2 dzdx \le$$

$$C + \int\limits_{\mathrm{d}(x)<2,\,|z|>\sigma} \frac{c_\varepsilon}{|z|^{2l}\left(\mathrm{d}(x)\right)^{2(d-m-l+\varepsilon)/\delta'}} dxdz \le C(\varepsilon)\sigma^{d-2l}\int\limits_0^2 t^{-2(d-m-l+\varepsilon)/\delta'} d\mu_{\mathrm{d}}(t) \overset{*}{\le} C\sigma^{d-2l}.$$

Неравенство $(*)$ справедливо в силу условия (3), если $l > d-m-\varkappa\delta'/2$. Пользуясь известными неравенствами для s-чисел, получаем, что

$$s_k(A_1) \le s_k(\mathcal{T}^\sigma) + \|\mathcal{T}_\sigma\| \le \sqrt{2}k^{-1/2}\|\mathcal{T}^\sigma\|_2 + \|\mathcal{T}_\sigma\| \le C_\varepsilon\sigma^{m-\varepsilon}\left(1 + k^{-\frac{1}{2}}\sigma^{\frac{d}{2}-l-m+\varepsilon}\right). \tag{32}$$

Положим

$$l = l(\varepsilon') := \max\{d/2,\, d-m-\varkappa\delta'/2\} + \varepsilon' < d-m, \quad \varepsilon' > 0,$$

и выберем σ так, чтобы выражение в скобках (32) было равно 2. Тогда $s_k(A_1) \le c_l k^{-1/p(\varepsilon')}$, где параметр

$$p(\varepsilon') = 2 + \frac{2l(\varepsilon') - d}{m-\varepsilon}$$

может быть любым большим $\max\{2, (d-\varkappa\delta')/m\}$. Полученная оценка s-чисел эквивалента оценке функции распределения (29). □

Рассмотрим теперь случай $m \ge d/2$.

Теорема 4.2. *Пусть $a(x,\xi) \in \widetilde{S}^{-m}_{\rho,\delta}$, и для какого-то $l \in (0,1)$ выполнено условие (6). Тогда*

$$N(t, A_1) \le C(p)t^p, \quad 1/p < m/d + \delta'\varkappa/2. \tag{33}$$

.

Доказательство. Фиксируем функцию $b(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $b(y) = 1$ для y в окрестности Ω. Представим оператор A_1 в виде суммы: $A_1 = \mathcal{T}_b + \mathcal{T}_{1-b}$,

$$\mathcal{T}_b u(x) = (2\pi)^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{i(x-y)\xi}a(x,\xi)b(y)\theta_1\big(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\big)u(y)dyd\xi, \tag{34}$$

где срезка θ_1 введена в (22). Так как амплитуда $a(x,\xi)(1-b(y))$ обращается в нуль вблизи диагонали $\{x=y\}$, то ядро оператора $\mathcal{T}_{1-b}$ является бесконечно гладкой функцией по y. Интегрированием по частям получаем, что она убывает быстрее любой степени $|y|$ на бесконечности. Отсюда следует, что

$$s_k(\mathcal{T}_{1-b}) \le C(N)k^{-N}, \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

(см.[4, теорема 4.8]). Таким образом, основной вклад в оценку $s_k(A_1)$ вносит оператор $\mathcal{T}_b$,

$$s_k(A_1) \le C s_k(\mathcal{T}_b) + O(k^{-N}), \quad \forall N \in \mathbb{N}. \tag{35}$$

Фиксируем параметр m_1,

$$m_1 := l + (d - \delta'\varkappa)/2 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0,\, m_1 < m. \tag{36}$$

Положим $m_2 := m - m_1$. Запишем оператор $\mathcal{T}_b$ как произведение, $\mathcal{T}_b = RQ$, где $Q : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, и $R : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega)$:

$$(Qu)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\xi} \langle\xi\rangle^{-m_2} b(y)u(y)dy, \tag{37}$$

$$(Rf)(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} r(x,\xi)\theta_1\big(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\big) f(\xi)d\xi, \tag{38}$$

$$r(x,\xi) := a(x,\xi)\langle\xi\rangle^{m_2} \in \widetilde{S}^{-m_1}_{\rho,\delta}.$$

Лемма 4.1. *Для s-чисел оператора R справедливы оценки*

$$s_k(R) \le C(\varepsilon)k^{-(1/2+l/d)+\varepsilon}, \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{39}$$

Доказательство. В силу п.2 леммы 2.3 для доказательства оценки (39) достаточно показать, что сходится интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \|T(\cdot,\xi)\|^2_{H^\ell(\Omega)} d\xi, \quad \forall \ell < l,$$

где $T(x,\xi) = e^{ix\xi} r(x,\xi)\theta_1\big(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\big)$. По лемме 2.2 это равносильно сходимости интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|T(x,\xi) - T(y,\xi)|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} dxdyd\xi, \tag{40}$$

Разобьем интеграл (40) на три части:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|(e^{i(x-y)\xi} - 1) r(x,\xi)\theta_1\big(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\big)|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} dxdyd\xi, \tag{41}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{\Omega} \frac{|(r(x,\xi) - r(y,\xi))\theta_1\big(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}\big)|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} dxdyd\xi, \tag{42}$$

$$\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\Omega}\int_{\Omega} \frac{|r(y,\xi)(\theta_1(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'}) - \theta_1(\mathrm{d}(y)\langle\xi\rangle^{\delta'}))|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} dxdyd\xi. \tag{43}$$

Рассмотрим сначала интеграл (41). Интеграл по переменной y не превосходит $C(\ell,d)|\xi|^{2\ell}$, где

$$C(\ell,d) = \int_{\mathbb{R}^d} |e^{iz\xi_0} - 1|^2 |z|^{-(d+2\ell)} dz, \quad |\xi_0| = 1.$$

Учитывая также оценки функции $r \in \widetilde{S}^{-m_1}_{\rho,\delta}$, получаем, что интеграл (41) не превосходит

$$C(\varepsilon')\int_{\mathbb{R}^d}\int_{\Omega} \langle\xi\rangle^{-2m_1+2\ell+2\varepsilon'}\theta_1^2(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'})dxd\xi \le C(\varepsilon')\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{-2m_1+2\ell+2\varepsilon'}\mu_{\mathrm{d}}(\langle\xi\rangle^{-\delta'})d\xi \le \tag{44}$$

$$\le C(\varepsilon')\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{-2m_1+2\ell+2\varepsilon'-\delta'\varkappa}d\xi, \quad \forall\varepsilon' > 0.$$

Последний интеграл сходится, так как в силу (36) показатель степени $\langle\xi\rangle$ меньше $-d$.

Рассмотрим интеграл (42). Из условия (6) следует, что внутренний интеграл по переменной y в (42) не превосходит $\langle\xi\rangle^{-2m_1+2\ell+2\varepsilon}$, и мы вновь приходим к оценке (44).

Оставшийся интеграл (43) оценивается через

$$C(\varepsilon')\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{-2m_1+2\varepsilon'}\|\theta_1(\mathrm{d}(\cdot)\langle\xi\rangle^{\delta'})\|^2_{H^\ell(\mathbb{R}^d)}d\xi. \tag{45}$$

Оценим норму функции $x \to \theta_1(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'})$ с помощью мультипликативного неравенства

$$\|\theta_1(\mathrm{d}(\cdot)\langle\xi\rangle^{\delta'})\|_{H^\ell(\mathbb{R}^d)} \le C_l\|\nabla_x\theta_1(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'})\|^\ell_{L_2(\mathbb{R}^d)}\|\theta_1(\mathrm{d}(x)\langle\xi\rangle^{\delta'})\|^{1-\ell}_{L_2(\mathbb{R}^d)}.$$

Из (2) следует, что первая норма в правой части оценивается через $C\langle\xi\rangle^{2\delta'-\delta'\varkappa}$, вторая — через $C\langle\xi\rangle^{-\delta'\varkappa}$. Таким образом, интеграл (45) не превосходит интеграла

$$C\int_{\mathbb{R}^d}\langle\xi\rangle^{-2m_1+2\varepsilon'+2\ell\delta'-\delta'\varkappa}d\xi,$$

который сходится ввиду (36). Лемма доказана. □

Закончим доказательство теоремы 4.2. Для s-чисел оператора Q известна оценка

$$s_k(Q) \le C(b)k^{-m_2/d},$$

(см.[2, 4]). Таким образом, в силу (35) и предложения 2.1 для s-чисел оператора A_1 справедлива оценка

$$s_k(A_1) \le Cs_k(\mathcal{T}_b) + O(k^{-n}) \le C(\varepsilon)k^{-(1/2+l/d+m_2/d)+\varepsilon} = C(\varepsilon)k^{-(m/d+\delta'\varkappa/2)+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon.$$

Это неравенство эквивалентно оценке функции распределения s-чисел (33). $\square$

Доказательство теорем 1.1 и 1.2 сразу следует из результатов параграфов 3,4. Для регулярной части A_0 ($A_{0,\Omega}$) оператора A (A_Ω) справедливость асимптотических формул (7),(8) является результатом следствия 3.1; оценки s-чисел сингулярной части, полученные в теоремах 4.1 и 4.2 позволяют с помощью леммы 2.1 сохранить асимптотики (с ухудшением остатка) для оператора A (A_Ω).

5 Оператор переменного порядка

Докажем теперь теорему 1.3 для оператора A с символом (9). Выделение главной части h_0 разложения функции h, $h = h_0 + h_1$, в окрестности Γ ($\Gamma := \partial D$, $D := \{x \in \bar{\Omega} \mid h(x) = 0\}$) задает главную часть оператора A — оператор A_{h_0} с символом

$$(p(x,\xi))^{-(m+h_0(x))} \in \widetilde{S}^{-m}_{\rho,\delta}.$$

По теореме 1.1 для функции распределения s-чисел этого оператора справедлива вейлевская асимптотическая формула (7), где объем больших значений символа вычисляется явно:

$$N(t, A_{h_0}) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\Omega} t^{\frac{d}{m+h_0(x)}} v(x)dx \left(1 + O(t^{-\nu})\right), \quad t \to \infty,\ \nu > 0. \tag{46}$$

Используя (10), получаем асимптотику интеграла Лапласа в (46):

$$N(t, A_{h_0}) = (2\pi)^{-d} t^{\frac{d}{m}} (\alpha + \beta(\log t)^{-\sigma} \varphi(\log t)(1 + o(1))); \tag{47}$$

$$\alpha = \int\limits_{D} v(x)dx, \quad \beta = (m^2/d)^{\sigma} \Gamma(\sigma + 1).$$

Оператор $A_{h_1} = A - A_{h_0}$ является ПДО с символом

$$g(x,\xi) := p(x,\xi)^{-(m+h_0(x))} \left(p(x,\xi)^{-h_1(x)} - 1\right). \tag{48}$$

Получим оценки s-чисел оператора A_{h_1}.

Теорема 5.1. *В условиях теоремы 1.3 для s-чисел оператора A_{h_1} верна оценка*

$$s_k(A_{h_1}) \le C_q k^{-m/d} (\log k)^{-q}, \quad q < \tau + (\sigma - 1)/2. \tag{49}$$

Доказательство теоремы 5.1 проходит по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.2. Фиксируем функцию $b \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $b(y) = 1$ в окрестности Ω, и умножим символ (48) на функции $b(y)$ и $1 - b(y)$. Получаем, что $A_{h_1} = \mathcal{S}_b + \mathcal{S}_{1-b}$, и $\mathcal{S}_b = GQ'$, где $Q' : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$, и $G : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\Omega)$:

$$(Q'u)(\xi) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\xi} \langle \xi \rangle^{-m'} b(y) u(y) dy, \tag{50}$$

$$Gf(x) = (2\pi)^{-d} \int\limits_{\mathbb{R}^d} e^{ix\xi} g(x,\xi) \langle \xi \rangle^{m'} f(\xi) d\xi. \tag{51}$$

Фиксируем параметр ℓ, $0<\ell<\min\{l, m-d/2\}$, и положим в формулах (50),(51)

$$m' = m-\ell-d/2, \quad m'>0. \tag{52}$$

У оператора $\mathcal{S}_{1-b}$ s-числа , как и s-числа оператора $\mathcal{T}_{1-b}$ в доказательстве теоремы 4.2, убывают сверхстепенным образом и не влияют на порядок убывания s-чисел оператора A_{h_1}. Для s-чисел оператора Q', как и для оператора Q в доказательстве теоремы 4.2, справедливо неравенство

$$s_k(Q') \le C(b)k^{-m'/d},$$

так что утверждение теоремы вытекает с помощью предложения 2.1 из следующей леммы.

Лемма 5.2. *Для s-чисел оператора G верны неравенства*

$$s_k(G) \le Ck^{-(1/2+\ell/d)}(\log k)^{-q}, \quad q<\tau+(\sigma-1)/2. \tag{53}$$

Доказательство леммы 5.2. В силу лемм 2.2 и 2.3 достаточно проверить конечность нормы ядра оператора G в соответствующих пространствах Соболева:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \|T(\cdot,\xi)\|^2_{H^{\ell,q}(\Omega)} d\xi \le C \int\limits_{\mathbb{R}^d\times\Omega\times\Omega, |x-y|<1/2} \frac{|T(x,\xi)-T(y,\xi)|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} \big|\log|x-y|\big|^{2q} dxdyd\xi < \infty,$$
$$T(x,\xi) = e^{ix\xi} g(x,\xi)\langle\xi\rangle^{m'}. \tag{54}$$

Сходимость интеграла (54) вытекает из сходимости двух интегралов:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\Omega\times\Omega, |x-y|<1/2} \frac{|(e^{ix\xi}-e^{iy\xi})g(x,\xi)\langle\xi\rangle^{m'}|^2}{|x-y|^{d+2\ell}} \big|\log|x-y|\big|^{2q} dxdyd\xi < \infty, \tag{55}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\Omega\times\Omega, |x-y|<1/2} \frac{|g(x,\xi)-g(y,\xi)|^2\langle\xi\rangle^{2m'}}{|x-y|^{d+2\ell}} \big|\log|x-y|\big|^{2q} dxdyd\xi < \infty, \tag{56}$$

Рассмотрим вначале интеграл (55). Как показано при доказательстве леммы 2.2, внутренний интеграл по переменной y равен $C(\ell,q)\langle\xi\rangle^{2\ell}\log^{2q}\langle\xi\rangle(1+o(1))$ при $|\xi|\to\infty$. Подставив явное выражение (48) для символа g, приходим к оценке интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\Omega} \big|p(x,\xi)^{-(m+h_0(x))}\left(p(x,\xi)^{-h_1(x)}-1\right)\big|^2 \langle\xi\rangle^{2\ell+2m'} \log^{2q}\langle\xi\rangle dxd\xi. \tag{57}$$

Уменьшая параметр τ в оценке $h_1 = O(h_0^{1+\tau})$ при $h_0\to 0$, можем считать, что $h_1(x)\ge 0$. Фиксируем $\varepsilon>0$ и разделим здесь область интегрирования на две части,

$$\mathcal{O}_1 := \{x,\xi \mid h_0^{1+\varepsilon}(x)\log\langle\xi\rangle < 1\}, \quad \mathcal{O}_2 := \{x,\xi \mid h_0^{1+\varepsilon}(x)\log\langle\xi\rangle \ge 1\}. \tag{58}$$

На части $\mathcal{O}_1$ имеем $|p(x,\xi)^{-h_1(x)}-1| \le h_1(x)\log|p(x,\xi)| \le Ch_0^{1+\tau}(x)\log\langle\xi\rangle$, поскольку $|p(x,\xi)| \le C\langle\xi\rangle$ (напомним, что $p\in S^1_{\rho,\delta}$). Используя эти неравенства, получаем с учетом (52), что интеграл (57) по $\mathcal{O}_1$ не превосходит

$$C\int\limits_{\mathcal{O}_1} \langle\xi\rangle^{2\ell+2m'-2m-2h_0(x)} \log^{2+2q}\langle\xi\rangle h_0^{2+2\tau}(x) dxd\xi \le C\int\limits_{\mathbb{R}^d} \langle\xi\rangle^{-d}\log^{2+2q}\langle\xi\rangle I(\xi)d\xi, \tag{59}$$

$$I(\xi) := \int\limits_{h_0^{1+\varepsilon}(x)<1/\log\langle\xi\rangle} h_0^{2+2\tau}(x)dx.$$

Интеграл $I(\xi)$ выражается через функцию распределения h_0, и оценивается с использованием (11):

$$I(\xi) = \int\limits_0^{\log^{-1/(1+\varepsilon)}\langle\xi\rangle} s^{2+2\tau} d\mu_{h_0}(s) \le C_{\varepsilon'} \int\limits_0^{\log^{-1/(1+\varepsilon)}\langle\xi\rangle} s^{2+2\tau} s^{\sigma-\varepsilon'-1} ds \le C_{\varepsilon'} (\log\langle\xi\rangle)^{-\frac{2+2\tau+\sigma-\varepsilon'}{1+\varepsilon}}.$$

Если $q < \tau + (\sigma-1)/2$, то при достаточно малых $\varepsilon, \varepsilon' > 0$

$$I(\xi) \le C \log^{-(2+2q)-r}\langle\xi\rangle$$

для какого-то $r > 1$, и интеграл (59) по $\mathcal{O}_1$ конечен.

Рассмотрим теперь интеграл (57) по оставшейся части $\mathcal{O}_2$. На этом множестве подынтегральное выражение не превосходит $C\langle\xi\rangle^{-(d+2h_0(x))}\log^{2q}\langle\xi\rangle$. Таким образом, достаточно проверить конечность интеграла

$$\int\limits_{\mathcal{O}_2} \langle\xi\rangle^{-(d+2h_0(x))} \log^{2q}\langle\xi\rangle dx d\xi. \tag{60}$$

Выразим интеграл по переменной x через функцию распределения h_0 и сделаем замену $s\log\langle\xi\rangle = w$:

$$\int\limits_{h_0^{1+\varepsilon}(x)>1/\log\langle\xi\rangle} \langle\xi\rangle^{-2h_0(x)} dx = \int\limits_{s^{1+\varepsilon}>1/\log\langle\xi\rangle} e^{-2s\log\langle\xi\rangle} d\mu_{h_0}(s)$$

$$\le C(\varepsilon') \int\limits_{s^{1+\varepsilon}>1/\log\langle\xi\rangle} e^{-2s\log\langle\xi\rangle} s^{\sigma-\varepsilon'-1} ds \le C(\varepsilon') \log^{\sigma-\varepsilon'}\langle\xi\rangle \int\limits_{w>(\log\langle\xi\rangle)^{\varepsilon/(1+\varepsilon)}} e^{-2w} w^{\sigma-\varepsilon'-1} dw.$$

Последний интеграл есть $(O(\log\langle\xi\rangle)^{-\infty})$, и интеграл (60) конечен для любого q. Таким ообразом. интеграл (55) сходится.

Рассмотрим теперь интеграл (56). Положим

$$b(x,\xi,h) := (p(x,\xi))^{-(m+h)}.$$

В интеграле (56) имеем $g(x,\xi) = b(x,\xi,h(x)) - b(x,\xi,h_0(x))$, и

$$|g(x,\xi) - g(y,\xi)| \le |b(x,\xi,h(x)) - b(y,\xi,h(y))| + |b(x,\xi,h_0(x)) - b(y,\xi,h_0(y))|.$$

Докажем сходимость интеграла с функцией $h(x)$ (сходимость другого интеграла проверяется так же):

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\Omega\times\Omega, |x-y|<1/2} \frac{|b(x,\xi,h(x)) - b(y,\xi,h(y))|^2 \langle\xi\rangle^{2m'}}{|x-y|^{d+2\ell}} \big|\log|x-y|\big|^{2q} dx dy d\xi < \infty. \tag{61}$$

Прибавляя и вычитая в числителе дроби функцию $b(x,\xi,h(y))$, приходим к проверке конечности двух интегралов

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\Omega\times\Omega,|x-y|<1/2} \frac{|b(x,\xi,h(x))-b(x,\xi,h(y))|^2\langle\xi\rangle^{2m'}}{|x-y|^{d+2\ell}}\big|\log|x-y|\big|^{2q}dxdyd\xi<\infty. \tag{62}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\Omega\times\Omega,|x-y|<1/2} \frac{|b(x,\xi,h(y))-b(y,\xi,h(y))|^2\langle\xi\rangle^{2m'}}{|x-y|^{d+2\ell}}\big|\log|x-y|\big|^{2q}dxdyd\xi<\infty. \tag{63}$$

Рассмотрим сначала интеграл (62). Оценим числитель дроби в подынтегральном выражении:

$$(b(x,\xi,h(y))-b(y,\xi,h(y)))\langle\xi\rangle^{m'}=p(x,\xi)^{-m}\langle\xi\rangle^{m'}\Big(e^{-h(x)\log p(x,\xi)}-e^{-h(y)\log p(x,\xi)}\Big). \tag{64}$$

Можно считать, что $|p(x,\xi)|>1$, так что $\operatorname{Re}\log p(x,\xi)>0$. Выражение в больших скобках оценивается с помощью неравенства $|e^{-z_1}-e^{-z_2}|\le|z_1-z_2|$, где $\operatorname{Re} z_1,\ z_2>0$. Учитывая соотношение показателей (52), выражение (64) по модулю не превосходит

$$C\langle\xi\rangle^{-(d+\ell)}|h(x)-h(y)|\log|p(x,\xi)|\le C(\varepsilon)\langle\xi\rangle^{-(d+\ell)+\varepsilon}|x-y|^l,\quad \forall\varepsilon>0.$$

При $\varepsilon<\ell$ получаем конечность интеграла (62) .

Остается доказать сходимость интеграла (63). Поскольку символ $p(x,\xi)\in S^1_{\rho,\delta}$ эллиптичен, символ $b(x,\xi,h)\in S^{-(m+h)}_{\rho,\delta}$ и $|\nabla_x b(x,\xi,h)|\le C\langle\xi\rangle^{-(m+h)+\delta}$. Известное мультипликативное неравенство для гельдеровских норм дает оценку

$$|b(x,\xi,h)-b(y,\xi,h)|\le C\max_x|\nabla_x b(x,\xi,h)|^l\max_x|b(x,\xi,h)|^{1-l}|x-y|^l\le C\langle\xi\rangle^{-(m+h)+\delta l}|x-y|^l.$$

Таким образом, интеграл (63) не превосходит

$$C\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\Omega\times\Omega,|x-y|<1/2}\frac{\big|\log|x-y|\big|^{2q}}{\langle\xi\rangle^{d+2(1-\delta)\ell}|x-y|^{d-2(l-\ell)}}dxdyd\xi<\infty.$$

Лемма 5.2 и, тем самым, теорема 5.1 доказана. $\square$

Закончим доказательство теоремы 1.3. В соответствии с замечанием к лемме 2.3 оценка (49) эквивалентна оценке функции распределения $N(t,A_{h_1})=O\big(t^{d/m}(\log t)^{-qd/m}\big)$. Утверждение теоремы 1.3 следует из этой оценки и формул (46),(47) с помощью леммы 2.1. $\square$

Список литературы

[1] *Берг Й., Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства. Введение// М., "Мир 1980, 264с.

[2] *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами // Вестник ЛГУ, сер. матем., 1977, № 13, с.13-21.

[3] *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов с анизотропно-однородными символами II // Вестник ЛГУ, сер. матем., 1979, № 13, с.5-10.

[4] *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Оценки сингулярных чисел интегральных операторов. // Успехи матем. наук, 1977, т.32, № 1, с.17-84.

[5] *Бирман М.Ш., Соломяк М.З.* Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве // СПб., Лань, 2010, 464 с.

[6] *Вайдль Т.* Общие операторные идеалы слабого типа // Алгебра и анализ, 1992, т.4, вып.3, с.117-144.

[7] *Кароль А.И.* Асимптотика спектра псевдодифференциальных операторов переменного порядка // Проблемы математического анализа вып. 78, 2015г., С. 111-122.

[8] *Кароль А.И.* Асимптотика спектра компактных пдо с символом, негладким по пространственным переменным// Проблемы матем. анализа, вып. 89, 2017, с.21-39.

[9] *Кароль А.И.* Асимптотика сингулярных чисел компактных ПДО с символом, негладким по пространственным переменным//Функц. анализ и его прил., 2019.

[10] *Хермандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными, том 2// М.: "Мир 1986, 456с.

[11] *Benassi, A., Jaffard, S., Roux D.* Gaussian processes and pseudodifferential elliptic operators// Revista Math. Iberoamer., 1997, v.13, 1, 19–81.

[12] *Coeurjolly, J. F.* . Identification of multifractional Brownian motion// Bernoulli, 11(6), 987-1008, (2005)

[13] *Dauge M., Robert D.* Formule de Weyl pour une classe d'operateurs pseudodifferentiels d'ordre negatif sur $L_2(R^n)$// Note C.R. Acad. Sc. Paris 302 Serie I, (5), 175-178 (1986)

[14] *Dauge M., Robert D.* Wey1's formula for a class of pseudo-differential operators with negative order in $L_2(R^n)$// Lecture Notes in Math., v.1256, 1987, p.91-122.

[15] *Lieberman G.* Regularized distance and its applications.// Pacific J. Math., 1985,v.117, №2, 329-352.