Препринт Санкт-Петербургского математического общества № 2019-03. Выложен 19 декабря 2019 г.
url: http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2019/

q-аналог формулы Троллопа-Деланжа*

А. Р. Минабутдинов†

19 декабря 2019 г.

Аннотация

Обозначим через $s(n)$ количество "1" в двоичном представлении натурального n, а через $S(n) = s(1) + s(2) + \cdots + s(n-1)$ – суммарное количество "1" в двоичном представлении натуральных чисел от 1 до $n-1$. Формула Троллопа-Деланжа – классический результат, выражающий последовательность S через функцию Такаги. В данной работе обобщается классический результат Троллопа на случай замены сумм $s(n)$ их q-взвешенными аналогами.

Ключевые слова: формула Троллопа – Деланжа, функция Такаги-Ландсберга

1 Введение

Формула Троллопа-Деланжа, доказанная Троллопом в 1968 году в работе [24] – классический результат, который позволяет выразить последовательность S через непрерывную, 1-периодическую, нигде недифференцируемую функцию $\tilde{F}_1$ следующим образом:

$$\frac{1}{n}S(n) = \frac{1}{2}\log_2(n) + \frac{1}{2}\tilde{F}_1(\log_2(n)). \tag{1}$$

Функция Такаги (подробнее см. следующий параграф) $\mathcal{T} : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ задается равенством $\mathcal{T}(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \tau(2^n x)$, где $\tau(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z})$ – расстояние от $x \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого числа. Функция $\tilde{F}_1$ может быть представлена через функцию Такаги $\mathcal{T}$ как $\tilde{F}_1(t) = 1 - t - 2^{1-t}\mathcal{T}(2^{-(1-t)}),$ для $0 \le t \le 1$.

В 1975 году Деланж обобщил результат на случай системы счисления с основанием $m \ge 3$ [8]. Позже были рассмотрены еще несколько обобщений. Кроме случая классической суммы $S(n) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} s(j)$, соответствующей первому моменту, были получены его аналоги для экспоненциальных $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \exp(t\, s(j))$, степенных $\sum\limits_{j=0}^{n-1} s^{k-1}(j)$ и биномиальных $\sum\limits_{j=0}^{n-1} \binom{s(j)}{m}$ сумм, см. расботы [16], [11] или [4].

*Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ 17-01-00433.

†Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ), Департамент математики, СПб, Кантемировская ул. 3А, 194100.

Другим направлением обобщения формулы Троллопа-Деланжа является рассмотрение взвешенных цифровых сумм. Пусть $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots)$ – последовательность в $\mathbb{R}$. Для натурального числа n записанного в двоичном представлении $n = \omega_0 + \omega_1 2 + \omega_2 2^2 + \dots$ определим взвешенную сумму цифр формулой $s(n, \gamma)$ равенством $s(n, \gamma) = \gamma_0\omega_0 + \gamma_1\omega_1 + \gamma_2\omega_2 + \dots$. В 2005 году в работе [19] для функции $S(n, \gamma) = \sum\limits_{k=1}^{n-1} s(k, \gamma)$ доказан следующий вариант формулы Троллопа-Деланжа "слабого" типа:

Теорема 1 ([19], теорема 6)**.** *Существует непрерывная* 1*-периодическая функция* $\tilde{G}_\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*, такая, что*

$$S(n, \gamma) = \frac{n}{2} \sum_{i=0}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \gamma_i + n\tilde{G}_\gamma(\log_2(n)) + o(n), \tag{2}$$

тогда и только тогда, когда существует $\lim\limits_{i\to\infty} \gamma_i = \tilde{\gamma}$ *. Более того, остаточный член* $o(n)$ *нулевой тогда и только тогда, когда* $\gamma_i \equiv \tilde{\gamma}$*. Функция* $\tilde{G}_\gamma$ *на интервале* $[0, 1]$ *задается равенством*

$$\tilde{G}_\gamma(x) = -\frac{\tilde{\gamma}}{2} \sum_{i=-1}^{\infty} \frac{\tau(2^{x+i})}{2^{x+i}}.$$

Независимо, в работе [15] был исследован случай весовой последовательности $\delta = ((-1)^n)_{n\ge 0}$, и получено явное выражение для функции $\tilde{G}_\delta$. В работе [20] теорема 1 была обобщена на системы счисления с основанием $m > 2$ и другие моменты.

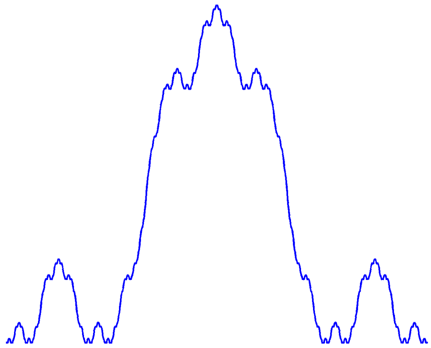
Отметим, что в теореме 1, если последовательность весов γ, такова, что предел $\lim\limits_{i\to\infty} \gamma_i \equiv \tilde{\gamma} = 0$, то $\tilde{G}_\gamma \equiv 0$, главный член разности $S(n, \gamma) - \frac{n}{2} \sum\limits_{i=0}^{\lfloor \log_2(n) \rfloor} \gamma_i$ соответствует лишь остаточному члену $o(n)$ в формуле (2). Кроме того, в случае $\tilde{\gamma} = \infty$, функция $\tilde{G}_\gamma$ вообще не определена.

В данной работе рассматривается специальный случай, когда последовательность весов $\gamma_n = q^{n+1}, n \ge 0$, для некоторого вещественного q. Сумму $\sum\limits_{i\ge 0} \omega_i q^{i+1}$, для краткости, мы будем обозначать через $s_q(n)$ (вместо $s(k, (q^{i+1})_i)$), а соответствующую частичную сумму $\sum_{k=0}^{n-1} s_q(k)$ – через $S_q(n)$. На основе функциональных уравнений, которым удовлетворяет последовательность $\left(s_q(n)\right)_n$, мы в параграфе 2 (см. выражение (7)) показываем, что при $|q| > \frac{1}{2}$ (и только при таких q) справедлив вариант сильной (т.е. без остаточного члена) обобщенной формулы Троллопа-Деланжа. В найденном выражении используются периодические функции, являющиеся обобщением известной функции Такаги.

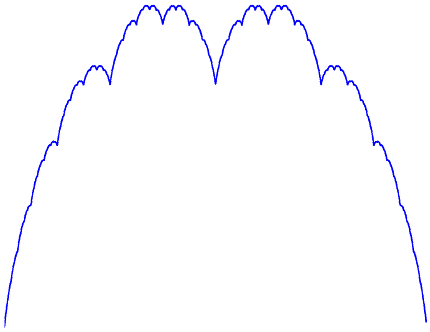
1.1 Функции Такаги-Ландсберга

Пусть a – вещественный параметр, такой, что $|a| < 1$. Функция Такаги-Ландсберга $\mathcal{T}_a : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ задается равенством

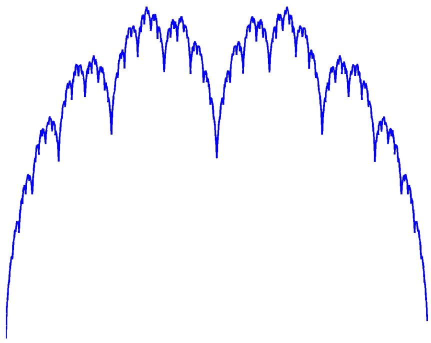
$$\mathcal{T}_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \tau(2^n x), \tag{3}$$



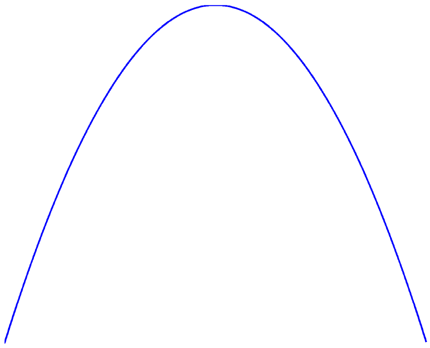
(a) $a = -1/2$ (кривая Такаги с чередующимися знаками)



(b) $a = 1/2$ (кривая Такаги-Бланманже)



(c) $a = 2/3$



(d) $a = 1/4$ (парабола)

Рис. 1: Кривые Такаги-Ландсберга, соответствующие различным значениям параметра a.

где, как и выше, $\tau(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z})$ – расстояние от $x \in \mathbb{R}$ до ближайшего целого числа. Несложно видеть, что ряд (3) сходится равномерно[1], и, следовательно, определяет непрерывную функцию $\mathcal{T}_a$ при значениях $|a| < 1$. Семейство функций $\{\mathcal{T}_a\}_a$ может рассматриваться как прямое обобщение известной функции Такаги $\mathcal{T}$, введенной Т. Такаги [23], которая получается, если a положить равным $1/2$. При $|a| \geq \frac{1}{2}$ функции $\mathcal{T}_a$ являются 1-периодическими и нигде недифференцируемыми, однако при $|a| < \frac{1}{2}$ дифференцируемы почти всюду[2], см. [4], а также [17] и [18]. Функции $\mathcal{T}_a$ рассматривались в ряде работ, см. [3, 6, 22].

Из уравнения (3) следует, что функция $\mathcal{T}_a$ на интервале $[0, 1]$ удовлетворяет следующим функциональным уравнениям де Рама:

$$\begin{cases} \mathcal{T}_a(x/2) = a\mathcal{T}_a(x) + x/2, \\ \mathcal{T}_a(\frac{x+1}{2}) = a\mathcal{T}_a(x) + \frac{1-x}{2}. \end{cases} \tag{4}$$

[1]В ряде работ, см. например [12], рассматривались даже более общие суммы вида $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n \tau(2^n x)$ где $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |c_n| < \infty$; класс таких функций называется классом Такаги.

[2]В частности, $\mathcal{T}_{1/4}(x) = x(1-x)$.

Также верно и обратное. Используя теорему Банаха о неподвижной точке, в работе [5] было показано (см. также [10] и [11]), что всякая система функциональных уравнений

$$\begin{cases} f(x/2) = a_0 f(x) + g_0(x), \\ f(\frac{x+1}{2}) = a_1 f(x) + g_1(x), \end{cases} \tag{5}$$

при условии, что $\max\{|a_0|, |a_1|\} < 1$ и выполнено условие согласованности[3]

$$a_0 \frac{g_1(1)}{1-a_1} + g_0(1) = a_1 \frac{g_0(0)}{1-a_0} + g_1(0), \tag{6}$$

единственным образом определяет непрерывную функцию на интервале $[0,1]$.

2 Результат

Обозначим через $s_q(n), q \in \mathbb{R}$, q-взвешенную сумму цифр в двоичном представлении натурального числа $n = \sum\limits_{i\geq 0} \omega_i 2^{-i}$, равную $\sum\limits_{i\geq 0} \omega_i q^{i+1}$, а через $S_q(n)$ обозначим $\sum\limits_{j=1}^{n-1} s_q(j)$. Таким образом при $q = 1$ мы имеем $S_1(n) = S(n)$, и справедлива классическая формула Троллопа-Деланжа (1). Наш результат состоит в ее обобщении на случай q-взвешенных сумм.

Теорема 2. *Пусть $|q| > 1/2$ и $q \neq 1$. Положим $a = 1/(2q)$. Для всякого $n \in \mathbb{N}$ справедлива следующая обобщенная формула Троллопа-Деланжа:*

$$\frac{1}{n} S_q(n) = \frac{q}{2} \left(\frac{1 - q^{\log_2(n)}}{1-q} + q^{\log_2(n)} \hat{F}_q(\log_2(n)) \right), \tag{7}$$

где 1-периодическая функция $\hat{F}_q$ задается равенством

$$\hat{F}_q(u) = \frac{1-q^{1-u}}{1-q} - q^{-u} 2^{1-u} \mathcal{T}_a(2^{-(1-u)}), \quad u \in [0,1].$$

Замечание 1. Условие $|q| > 1/2$ теоремы 2 не может быть опущено.

Замечание 2. Как упомянуто выше, частный случай формулы (7) при $q = -1$ был получен Круппелем в 2008 году, см. теорему 5.1 в работе [15]. В ней график функции $\mathcal{T}_{-1/2}$ был назван кривой Такаги с чередующимися знаками ("alternating signs Takagi curve").

Для доказательства выражения (7) можно использовать несколько подходов. Наш подход основывается на работе Гиргенсона [11]. Идея состоит в том, чтобы сначала найти функциональные уравнения, которым удовлетворяет последовательность $S_q(n)$, на основе которых установить функцию $\hat{F}_q$. Преимуществом этого подхода является то, что нет необходимости предварительно знать функции, которые возникают в ответе.

[3]Данное условие означает, что уравнения согласованы в точке $x = 1/2$.

Доказательство. Для $k \in \mathbb{N}$ положим $p = 2^{k-1}$. Заметим, что

$$s_q(2j) = q\, s_q(j), \tag{8}$$

$$s_q(2j+1) = q\, s_q(j) + q, \tag{9}$$

$$s_q(j+p) = s_q(j) + q^k, \quad j = 0, 1, \ldots, p-1, \tag{10}$$

$$s_q(j+p) = s_q(j) - q^k(1-q), \quad j = p, p+1, \ldots, 2p-1. \tag{11}$$

Через $[x]$ будем обозначать целую часть числа x, а через $\{x\}$ – его дробную часть. Положим $k_n = [\log_2(n)]$, а $u_n = \{\log_2(n)\}$. Следуя подходу из работы [11], обозначим через $p_n = p(n) = 2^{k_n}$ наибольшую степень, в которую нужно возвести число 2, чтобы получить число не превосходящее n, а через r_n обозначим $q^{\log_2(p_n)} \equiv q^{k_n}$.

Легко видеть, что

$$p(2n) = 2p(n), \tag{12}$$

$$p(n + p(n)) = 2p(n), \tag{13}$$

$$p(n + 2p(n)) = 2p(n). \tag{14}$$

Можно проверить, что для произвольного $n \in \mathbb{N}$ выполняются соотношения

$$S_q(n + 2p_n) = S_q(n) + S_q(2p_n) + nq^{k_n+2}, \tag{15}$$

$$S_q(n + p_n) = S_q(n) + (2q-1)S_q(p_n) - (n - p_n)q^{k_n+1}(1-q) + qp_n, \tag{16}$$

$$S_q(2n) = 2qS_q(n) + nq. \tag{17}$$

Последнее из этих соотношений влечет, что в точках вида $p = 2^k$ значение функции S_q равно

$$S_q(p) = q\frac{1-q^k}{1-q}2^{k-1} = q\frac{1-q^k}{1-q}\frac{p}{2}. \tag{18}$$

Зададим функцию $G_q : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ равенством

$$G_q(n) = \frac{1}{p(n)r_n}\Big(S_q(n) - \frac{n}{p(n)}S_q(p_n)\Big). \tag{19}$$

Функция $G_q(n)$ удовлетворяет следующим соотношениям:

$$G_q(2n) = G_q(n), \tag{20}$$

$$G_q(n + p_n) = \frac{1}{2q}G_q(n) + \frac{p_n - n}{4p_n}\big(3 - 2q\big), \tag{21}$$

$$G_q(n + 2p_n) = \frac{1}{2q}G_q(n) + \frac{n}{4p_n}\big(2q - 1\big). \tag{22}$$

Соотношение (20) следует напрямую из (17). Выведем соотношение (21). Для краткости здесь будем писать p вместо $p(n)$ и r вместо r_n.

$$\begin{aligned}
G_q(n+p) &= \frac{1}{2qpr}\Big(S_q(n+p) - \frac{n+p}{p(n+p)}S_q(p(n+p))\Big) = \\
&= \frac{1}{2qpr}\Big(S_q(n) + (2q-1)S_q(p) - (n-p)q^{k+1}(1-q) + pq - \frac{n+p}{2p}\big(2qS_q(p) + pq\big)\Big) \\
&= \frac{1}{2q}G_q(n) + \frac{1}{2qpr}\left(\frac{p-n}{2}q + (1-q)\left(\Big(\frac{n}{p} - 1\Big)S_q(p) + (n-p)q^{k+1}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{2q}G_q(n) + (3-2q)\frac{p-n}{4p}.
\end{aligned}$$

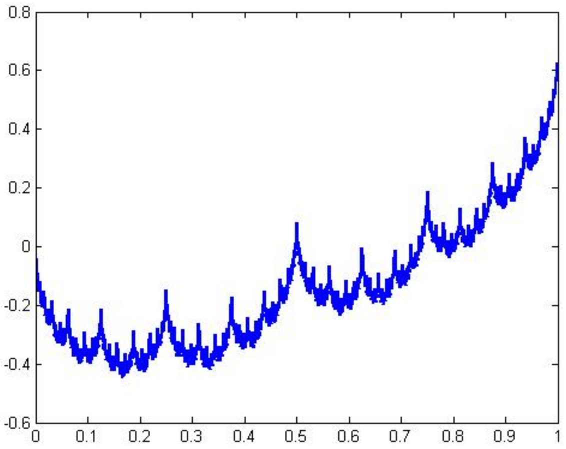


Рис. 2: График функции $F_{2/3}$.

Аналогично выводится соотношение (22):

$$G_q(n+2p) = \frac{1}{2qpr}\Big(S_q(n+2p) - \frac{n+2p}{2p}S_q(p(n+p))\Big) = \frac{1}{2qpr}\Big(S_q(n) - \frac{n}{p}S_q(p) - \frac{n}{2}q + q^{k+2}\Big)$$
$$= \frac{1}{2q}G_q(n) + \frac{n}{2qpr}\left((1-q)\frac{S_q(p)}{p} - \frac{q}{2} + q^{k+2}\right) = \frac{1}{2q}G_q(n) + (2q-1)\frac{n}{4p}.$$

Обозначим через $x_n = x(n) = 2^{u_n} - 1 = \frac{n-p_n}{p_n} \in [0,1]$. Справедлива следующая лемма, доказанная Гиргенсоном в работе [11]:

Лемма 1. *Пусть задана функция $G : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Для $n \in \mathbb{N}$ положим $x = \frac{n-p_n}{p_n} \in [0,1)$ и определим функцию F равенством*

$$F(x) = F\left(\frac{n-p_n}{p_n}\right) := G(n).$$

Функция F корректно определена в двоично-рациональных точках из интервала $[0,1)$ тогда и только тогда, когда $G(2n) = G(n)$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Также имеют место тождества

$$\frac{x(n)}{2} = \frac{n-p_n}{2p_n} = x(n+p_n), \tag{23}$$
$$\frac{x(n)+1}{2} = \frac{n}{2p_n} = x(n+2p_n). \tag{24}$$

По лемме 1 функция F_q, заданная равенством $F_q(x_n) = G_q(n)$, является корректно определенной в двоично-рациональных точках из $[0,1)$. Тождества (21)–(22) при $x = x_n$ можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} F_q(x/2) = aF_q(x) + (2q-3)\frac{x}{4}, \\ F_q(\frac{x+1}{2}) = aF_q(x) + (2q-1)\frac{x+1}{4}. \end{cases} \tag{25}$$

Из системы (25) находим, что

$$F_q(x) = qx - \frac{1}{2}\mathcal{T}_a(x) \equiv q\Big(\frac{1+x}{2} - \mathcal{T}_a\big(\frac{x+1}{2}\big)\Big), x \in [0,1]. \tag{26}$$

Используя тождество $S_q(n) = r_n p_n G_q(n) + \frac{n}{p_n} S_q(p_n)$, приходим к выражению

$$\frac{1}{n} S_q(n) = q^{k_n} \frac{F_q(x_n)}{x_n+1} + \frac{q}{2}\frac{1-q^{k_n}}{1-q}, \tag{27}$$

где, напомним, $k = k_n = [\log_2(n)]$. Положим $x = 2^u - 1$ и, следовательно, $\frac{1}{x+1} = 2^{-u}$, $q^k = q^{\log_2(n)} q^{-u}$. Мы можем записать $\frac{F_q(x)}{x+1} = q\Big(\frac{1}{2} - 2^{-u}\mathcal{T}_a(2^{u-1})\Big)$ и представить выражение (27) как

$$\frac{1}{n} S_q(n) = \frac{q}{2}\frac{1-q^k}{1-q} + q^{k+1}\big(\frac{1}{2} - 2^{-u}\mathcal{T}_a(2^{u-1})\big) = \frac{q}{2}\Big(\frac{1-q^k}{1-q} + q^k\big(1 - 2^{1-u}\mathcal{T}_a(2^{u-1})\big)\Big),$$

что приводит к искомой формуле:

$$\frac{1}{n} S_q(n) = \frac{q}{2}\Big(\frac{1-q^{\log_2(n)}}{1-q} + q^{\log_2(n)}\big(\frac{1-q^{1-u}}{1-q} - 2^{1-u}q^{-u}\mathcal{T}_a(2^{u-1})\big)\Big). \tag{28}$$

□

3 Формула Троллопа-Деланжа и предельная кривая последовательности $s_q(n)$.

Пусть $(a_n)_{n\geq 0}$ – вещественная последовательность. Доопределим частичные суммы $S(n) = \sum\limits_{j=0}^{n-1} a_j$ в вещественных точках с помощью линейной интерполяции и рассмотрим последовательность непрерывных функций $\varphi_n : [0,1] \to [-1,1]$, задаваемых равенством $\varphi_n(t) = \frac{S(t\cdot n) - t\cdot S(n)}{R_n}$, где нормирующий коэффициент R_n канонически выбирается равным[4] $\max\limits_{t\in[0,1]} |S(t\cdot n) - t\cdot S(n)|$, если данный максимум не обращается в ноль, в противном случае R_n считаем равным единице. Отметим, что в силу нормировки функции φ_n принимают нулевые значения на концах интервала $[0,1]$.

Если для некоторой последовательности натуральных чисел (l_n) последовательность функций φ_{l_n} сходится к (непрерывной) функции φ в sup-метрике на $[0,1]$, то график функции φ называется *предельной кривой последовательности* a_n, последовательность l_n называется *стабилизирующей последовательностью*, а последовательность R_n – *нормирующей последовательностью*. Данное определение было предложено авторами [14] для описания флуктуаций эргодических сумм некоторых функций в рамках исследования динамических систем, в частности, адического автоморфизма Паскаля. Также данное определение рассматривалось в работах автора [2], [1], см. также ссылки в этих работах. Идея определения состоит в рассмотрении предела нормированной по осям OX и OY разности частичной суммы и линейной функции.

Возьмем в качестве изначальной последовательности a_n последовательность $s_q(n)$. Непосредственно из формулы Троллопа-Деланжа можно доказать следующее предложение, доказанное также другим способом в работе [1].

[4]Достаточно выбирать нормировку пропорциональной данному максимому.

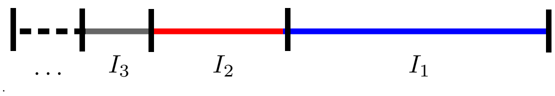


Рис. 3: Разбиение интервала $I = [1, l)$.

Предложение 1. *Пусть вещественный параметр $|q| > 1/2$ и $a = 1/(2q)$. Выберем произвольное $N \in \mathbb{N}$ и зафиксируем $l = 2^N$, а $R = (2q)^{N-1}$. Тогда в любой двоично-рациональной точке вида $t_j = \frac{j}{2^{N-1}}$, где $j = 0, 1, 2, \ldots, 2^{N-1}$, выполнено равенство*

$$\varphi_l(t_j) = -q\mathcal{T}_a(t_j). \tag{29}$$

Доказательство. Пусть $l_m = l/2^m$. Разобьем интервал $I = [1, l)$ на N непересекающихся подинтервалов $(I_m)_{m=1}^N$, $I_m = [l_m, l_{m-1})$, таким образом $I = \cup_m I_m$, см. рисунок 3. Чтобы доказать соотношение (29) на всем I мы поочередно перебираем каждый из интервалов $I_m, m = 1, 2, \ldots, N$ и демонстрируем справедливость соотношения (29). Ниже мы проверим выражение (29) сначала на I_1, а затем на произвольном $I_m, m \geq 1$.

На интервале I_1 (т.е. при $\frac{l}{2} \leq n < l$) величины $p = p_n$, $r = r_n$ и $x = x_n$, определенные в доказательстве теоремы 1, могут быть также заданы более простыми соотношениями: $p = l/2 = 2^{N-1}$, $r = q^{N-1}$ и $\frac{x+1}{2} = \frac{n}{l}$. Определим функцию $\tilde{G}_q(n)$ на I равенством $\tilde{G}_q(n) = \frac{1}{rp}\Big(S_q(n) - \frac{n}{2p}S_q(2p)\Big) \equiv \varphi_l(\frac{n}{l})$. Используя соотношения (15)-(16), (18) и (26) перепишем выражение для $\tilde{G}_q(n), n \in I_1$, следующим образом:

$$\tilde{G}_q(n) = \frac{1}{pr}\Big(S_q(n) - \frac{nq}{2p}(2S_q(p)+p)\Big) = \frac{1}{pr}\Big(S_q(n) - \frac{n}{p}S_q(p) + (1-q)\frac{n}{p}S_q(p) - q\frac{n}{2}\Big) = G_q(n) -$$

$$-\frac{nq}{2pr} + (1-q)\frac{n}{p}\frac{S_q(p)}{pr} = G_q(n) - \frac{nq}{2pr} + \frac{nq(1-q^{N-1})}{2pr} = G_q(n) - \frac{qn}{2p} = F_q(x) - q\frac{x+1}{2} = -q\mathcal{T}_a\Big(\frac{n}{l}\Big).$$

Перейдем к интервалу I_m, определенному неравенствами $l_m \leq n < l_{m-1}$, где $m = 1, 2, \ldots, N$. Положим $N_m = N - m$, $r_m = q^{m-1}$, $t = t_n = \frac{n}{l}$. Из соотношений (17) и (4) легко получить, что

$$S_q(l) = (2q)^m S_q(l_m) + 2^{m-1} l_m q(1 + q + \cdots + q^{m-1}) \tag{30}$$

и

$$\mathcal{T}_a(t) = (2q)^m \mathcal{T}_a\Big(\frac{t}{2^m}\Big) - tq(1 + q + \cdots + q^{m-1}). \tag{31}$$

Тогда на интервале I_m выполнено тождество $\tilde{G}_q(n) \equiv \frac{1}{(2q)^{N-1}}\Big(S_q(n) - \frac{n}{l}S_q(l)\Big) = \frac{1}{(2q)^{N-1}}\Big(S_q(n) \pm \frac{n}{l_m}S_q(l_m) - \frac{n}{2^m l_m}S_q(l)\Big) = \frac{1}{(2q)^{N-1}}\Bigg((2q)^{N-m}G_q(n) + \frac{n}{l_m}S_q(l_{m-1}) - \frac{n}{2^m l_m}\Big((2q)^m S_q(l_m) + 2^{m-1}l_m(q + \cdots + q^m)\Big)\Bigg) = \frac{1}{(2q)^{m-1}}G_q(n) + \frac{n}{l_m}\frac{1}{(2q)^{N-1}}\Big((1-q^m)S_q\big(l_m\big) - \frac{2^{m-1}l_m}{2^m}(q + \cdots + q^m)\Big)$. Пользуясь тем, что $S_q(l_m) = q\frac{1-q^{N-m}}{1-q}\frac{l_m}{2}$, мы можем продолжить цепочку равенств и записать, что $\tilde{G}_q(n) = \frac{1}{(2q)^{m-1}}G_q(n) - \frac{q^{N-m}}{(2q)^{N-1}}\frac{n}{l_m}\frac{l_m}{2}(q + \cdots + q^m)$.

Воспользуемся соотношением (26), которое может быть теперь записано как $G_q(n) = F(x_n) = F(2^{m-1}t) = q\big(2^{m-1}t - \mathcal{T}_a(2^{m-1}t)\big)$, где $\frac{n}{l_{m-1}} = 2^{m-1}t$. Тогда получим

$\tilde{G}_q(n) = -\frac{1}{(2q)^{m-1}} F(x_n) - \frac{n}{l}\frac{1}{q^{m-1}}(q+\cdots+q^m) = \frac{q}{(2q)^{m-1}}\Big(2^{m-1}t - \mathcal{T}_a(2^{m-1}t) - 2^{m-1}t(1+q+\cdots+q^{m-1})\Big)$. Последнее может быть перезаписано, используя выражение (31), следующим образом: $\tilde{G}_q(n)\frac{q}{(2q)^{m-1}}\Big(2^{m-1}t-(2q)^{m-1}\mathcal{T}_a(t)+2^{m-1}t(q+\cdots+q^{m-1})-2^{m-1}t(1+q+\cdots+q^{m-1}))\Big) = -q\mathcal{T}_a(t) = -q\mathcal{T}_a\big(\frac{n}{l}\big)$.

□

Определим последовательность l_n как 2^n. Так как в силу предложения 1 (непрерывная) функция φ_{l_n} совпадает во всех диадических точках вида $t_j = \frac{j}{2^{n-1}}, j \in \{0,1,2,\ldots,2^{n-1}\}$, интервала $[0,1]$ с непрерывной функцией $-q\mathcal{T}_a$, то же верно и для равномерного предела $\lim\limits_n \varphi_{l_n}$. Следовательно функция $-q\mathcal{T}_a, a = 1/(2q)$, является предельной функцией последовательности $s_q(n)$ при стабилизирующей и нормирующей последовательностях заданных равенствами $l_n = 2^n, R_n = (2q)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

4 Открытые вопросы

В работе найденная обобщенная (сильная) формула Троллопа-Деланжа, описывающая поведение последовательности $\frac{1}{n}S_q(n), q \neq 1$, которую можно рассматривать как "первый момент" для последовательности $s_q(n)$. Естественным является вопрос о существовании подобных выражений для старших моментов $\sum\limits_{j=0}^{n-1} s_q^k(j), k \geq 2$, экспоненциальных $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\exp(t\, s_q(j))$ и биномиальных $\sum\limits_{j=0}^{n-1}\binom{s_q(j)}{m}$ сумм.

Список литературы

[1] А. Р. Минабутдинов, *Предельные кривые для диадического одометра*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 437 (2019), С. 74–86

[2] А. Р. Минабутдинов, *Предельные кривые для полиномиальных адических систем*, Зап. научн. сем. ПОМИ, 448 (2016), 177–200.

[3] P. Allaart, *An inequality for sums of binary digits, with application to Takagi functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 381:2 (2011), 689–694.

[4] P. Allaart, K. Kawamura, *The Takagi function: a survey.* Real Anal. Exch., 37:1 (2012), 1–54.

[5] M. Barnsley, *Fractal functions and interpolation*, Constr. Approx. 2 (1986), 303–329.

[6] Z. Boros, *An inequality for the Takagi function*, Mathematical Inequalities and Applications 11:4 (2008), 757–765.

[7] J. Coquet, *Power sums of digital sums*, J. Number Theory 22 (1986), 161–176.

[8] H. Delange, *Sur la fonction sommatoire de la fonction "somme des chiffres"* , Enseign. Math. 21:2 (1975), 31–47.

[9] P. Flajolet, P. Grabner, P. Kirschenhofer, H. Prodinger, R.F. Tichy, *Mellin transforms and asymptotics: digital sums*, Theoret. Comput. Sci. 123 (1994), 291–314.

[10] R. Girgensohn, *Nowhere differentiable solutions of a system of functional equations*, Aequationes mathematicae, 47:1 (1994), 89–99.

[11] R. Girgensohn, *Digital Sums and Functional Equations*, Integers, 12:1, (2012), 141–160.

[12] M. Hata and M. Yamaguti, *The Takagi function and its generalization*, Japan J. Appl. Math., 1(1984), 183–199.

[13] R. Hofer, G. Larcher and F. Pillichshammery *Average growth-behavior and distribution properties of generalized weighted digit-block-counting functions*, Monatshefte für Mathematik, 154:3, (2008), 199–230.

[14] É. Janvresse, T. de la Rue and Y. Velenik, *Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation*, Stoch. Dyn., 5:1 (2005), 1–25.

[15] M. Krüppel, *Takagi's continuous nowhere differentiable function and binary digital sums*, Rostock. Math. Kolloq., 63 (2008), 37–54.

[16] M. Krüppel, *De Rham's singular function, its partial derivatives with respect to the parameter and binary digital sums*, Rostocker Math. Kolloq., 64 (2009), 57–74.

[17] J.C. Lagarias, *The Takagi function and its properties*, in: Functions in Number Theory and Their Probabilistic Aspects, 153–189, (2012).

[18] G. Landsberg, On the differentiability of continuous functions (Uber die Differentiierbarkeit stetiger Funktionen). Jahresber. Deutschen Math. Verein. 17 (1908), 46–51

[19] G. Larcher and F. Pillichshammer, *Moments of the Weighted Sum-of-Digits Function*, Quaestiones Mathematicae, 28:3 (2005), 321-336.

[20] R. Hofer , G. Larcher, F. Pillichshammer, *Average growth-behavior and distribution properties of generalized weighted digit-block-counting functions*, F. Monatsh Math, 154:3 (2008) 154–199.

[21] G. de Rham, *Sur quelques courbes définies par des équations fonctionnelles*, Rend. Sem. Mat., 16 (1956), 101–113.

[22] J. Tabor, J. Tabor, *Takagi functions and approximate midconvexity*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 356:2 (2009), 729–737.

[23] T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative*, Proc. Phys.-Math. Soc., 1 (1903), 176–177.

[24] E. Trollope, *An explicit expression for binary digital sums*, Math. Mag. 41 (1968), 21–25.