

Препринт Санкт-Петербургского математического общества  
Поступил 24.01.2020  
Доступен по адресу <http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2020/20-01.pdf>

**С. М. Блюдзе**

## **Оптимальные многомерные цепные дроби**

Препринт является текстом дипломной работы С. М. Блюдзе, в которой эксплуатируется геометрический подход к одномерным и многомерным цепным дробям. Несмотря на то, что работа была написана более 20 лет назад, я рекомендовал автору ее опубликовать, так как на некоторые содержащиеся в ней результаты имеются ссылки в свежих работах и поэтому она должна быть доступна читателям. Автор добавил краткое английское резюме.

А. А. Лодкин

Январь 2020 г.

# Optimal multidimensional continued fractions

Simon Bliudze\*

This paper in Russian consists of the dissertation submitted by the author in 1998 to fulfil the requirements of the Department of Mathematics and Mechanics of the Saint-Petersburg State University (Russia) for obtaining the *Specialist* degree.<sup>1</sup> The dissertation was prepared under the supervision of Prof. Andrei A. Lodkin.

The main objective of the presented work was to identify candidates for the multidimensional generalisation of the *golden ratio*, based on its interpretation as a continued fraction.

Indeed, all the coefficients of the continued fraction expansion of the golden ratio,  $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ , are equal to 1. This makes it the solution of many optimisation problems. For instance, its approximation by rational fractions is the slowest among reals. Two other examples of such optimisation problems are mentioned in the paper: *phyllotaxis*<sup>2</sup> and the distribution of points of an irrational arithmetic progression on a unit circle<sup>3</sup>.

We consider the integer lattice within the space  $\mathbb{R}^{n+1}$  and its basis  $A = (A_0, \dots, A_n)$ . The *generalised continued-fraction-type expansion* of this basis along a given direction  $l_0 \in \mathbb{R}^{n+1}$  is a sequence of bases  $A(i) = \{A_0(i), \dots, A_n(i)\}$ , with  $i = 0, 1, \dots$ , such that  $A = A(0)$  and, for all  $i$ ,

1.  $l_0$  belongs to the first hyperoctant of  $A(i)$ ,
2. the basis  $A_{i+1}$  is obtained from  $A_i$  by changing one of its vectors as follows:

$$\exists b \in \mathbb{Z}_+^n : \begin{cases} A_n(i+1) = A_0(i) + \sum_{j=1}^n b_j A_j(i), \\ A_j(i+1) = A_{j+1}(i), \text{ for } j \neq n, \end{cases}$$

$$\text{i.e. if } A(i+1) = A(i)B, \text{ where } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_n \end{pmatrix} \text{ is the}$$

---

\*INRIA Lille – Nord Europe, Parc scientifique de la Haute Borne, 40 avenue Halley, 59650 Villeneuve d’Ascq, France; Email: Simon.Bliudze@inria.fr

<sup>1</sup>The Specialist degree in Russia is equivalent to the Master of Sciences degree as defined by the Bologna Process.

<sup>2</sup><https://en.wikipedia.org/wiki/Phyllotaxis>

<sup>3</sup>Among all irrational arithmetic progressions, the points of that whereof the step is equal to the golden ratio, are distributed on a unit circle in the most even manner possible.

*generator* matrix.

Notice that  $b$  and  $B$  in this definition depend on  $i$ . They generalise the continued fraction coefficients. Notice also, that, since both  $A(i)$  and  $A(i + 1)$  are bases, we have  $\det(B) = 1$ .

In order to identify a candidate for the two-dimensional generalisation of the golden ratio, we recall that

1. its continued fraction expansion has the period 1,
2. among all reals, its approximation by rational fractions is the slowest.

Therefore, we consider generalised continued-fraction-type expansions of the standard Euclidean basis that are periodic, i.e. whereof generator matrices do not depend on  $i$ . Among such expansions, we have to identify those with the slowest convergence.

Given a 1-periodic expansion with the  $3 \times 3$  generator matrix  $B$ , its expansion direction  $l_0$  is an eigenvector of  $B$  with the corresponding eigenvalue  $\lambda$ , such that  $|\lambda| > 1$ . Let  $\mu_1$  and  $\mu_2$  be the other two eigenvalues of  $B$ , with  $|\mu_1| \leq |\mu_2|$ . Denoting by  $\rho(X)$  the distance from the point  $X \in \mathbb{R}^{n+1}$  to the straight line passing through the origin and parallel to  $l_0$ , we show that, for all  $k \in \mathbb{N}$  and  $j \in [0, n]$ ,

$$|\mu_1| \leq \frac{\rho(A_j(i+1))}{\rho(A_j(i))} \leq |\mu_2|.$$

We conjecture that the expansion convergence is slowest, when  $|\mu_1| = |\mu_2|$ . When this equality holds, we also conclude that the expansion converges the slowest, when  $|\lambda|$  is the lowest. Additionally, it is known that for the expansion to converge at all,  $\lambda$  must be a Pisot number.<sup>4</sup>

Based on the above constraints, we show that the slowest convergence—hence, also the candidate for the two-dimensional generalisation of the golden ratio—is provided by the expansion of the standard Euclidean basis generated by the matrix  $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  along the direction  $\begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda \end{pmatrix}$ , where  $\lambda = 1.3247\dots$  is the real root of the polynomial  $x^3 - x - 1$  (*the plastic number*).

The paper is structured as follows. Section 1 provides a brief summary of the paper. Section 2 presents the necessary background on continued fractions and their geometrical representations. Section 3 discusses phyllotaxis and the problem of even distribution of arithmetic progression points on a unit circle. Section 4 presents the multidimensional generalisations of continued fractions. Section 5 concludes the paper by using these generalisations to propose a candidate for the two-dimensional generalisation of the golden ratio.

---

<sup>4</sup>[https://en.wikipedia.org/wiki/Pisot-Vijayaraghavan\\_number](https://en.wikipedia.org/wiki/Pisot-Vijayaraghavan_number)

Санкт-Петербургский государственный университет  
Математико-механический факультет

**Дипломная работа**  
**студента кафедры математического анализа**  
**Блюдзе С.М.**

**Оптимальные многомерные**  
**цепные дроби**

Научный руководитель: доцент Лодкин  
Андрей Александрович

Рецензент: канд. физ.-мат. наук  
Сидоров Никита Арсенович

Санкт-Петербург  
1998

## СОДЕРЖАНИЕ:

1. ВВЕДЕНИЕ.....	1
2. ОДНОМЕРНЫЕ ЦЕПНЫЕ ДРОБИ И ИХ ОСНОВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ .....	1
3. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ СВЯЗАННЫЕ С ОДНОМЕРНЫМИ ЦЕПНЫМИ ДРОБЯМИ.....	5
4. МНОГОМЕРНЫЕ АНАЛОГИ ЦЕПНЫХ ДРОБЕЙ.....	7
5. АНАЛОГ ЗОЛОТОГО СЕЧЕНИЯ КАК ПРИМЕР ДВУМЕРНОЙ ЦЕПНОЙ ДРОБИ.....	15

### 1. Введение

Среди разложений в цепные дроби вещественных чисел сильно выделяется золотое сечение – число, все элементы разложения которого в цепную дробь равны 1. По этой же причине это число является ответом во многих задачах оптимизации. Например, оно хуже всего приближается рациональными дробями. Еще два примера таких задач приведены в 3 разделе этой работы.

Целью этой работы было найти многомерную цепную дробь, обобщающую золотое сечение. Для этого в 4 разделе исследуются многомерные разложения типа цепных дробей, а также упоминаются некоторые другие модели, аналогичные геометрическим моделям обыкновенных цепных дробей, описанным в разделе 2.

Рассматривается целочисленная решетка в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$  и ее базис. Разложением типа цепных дробей этого базиса вдоль некоторого направления называется последовательность базисов решетки, на которую наложены определенные условия, касающиеся взаимоположения базисов и прямой, задающей направление разложения, а также правил перехода от одного базиса последовательности к другому.

В последнем параграфе 4 раздела вводится специальный класс периодических разложений, генерируемых матрицей. Базисы такого разложения получаются из предыдущих умножением слева на матрицу, называемую генератором. Такое описание позволяет строить разложения с заданной периодической структурой, являющейся естественным обобщением набора элементов цепной дроби. В 5 разделе в результате такого построения получается разложение, которое претендует на роль аналога золотого сечения.

В первом параграфе 4 раздела приведен еще один претендент на эту роль, подробное описание которого можно найти в работе Е.И. Коркиной [2].

### 2. Одномерные цепные дроби и их основные геометрические модели

#### Основные понятия

Каждое иррациональное число единственным образом раскладывается в бесконечную цепную дробь вида

$$(2.1) \quad \alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \dots}} = [a_0; a_1, a_2, \dots],$$

где  $a_i$  – целые положительные (за исключением  $a_0$ , которое может быть и неположительным) числа, называемые *элементами* цепной дроби. Каждому рациональному числу соответствуют две конечные цепные дроби:

<sup>1</sup> Подробнее об обычных цепных дробях можно прочесть, например, в книге «Цепные дроби» А.Я. Хинчина [2]

$[a_0; a_1, a_2, \dots, a_n] = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, 1]$ , однако, обычно условливаются считать, что последний элемент не может быть равен 1.

Задавшись бесконечной цепной дробью  $[a_0; a_1, a_2, \dots]$ , можно рассмотреть так называемые *подходящие дроби*

$$(2.2) \quad \frac{p_n}{q_n} = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_n],$$

где  $p_n$  и  $q_n$  выбраны так, чтобы эта дробь была несократима. Для них выполняются следующие рекуррентные соотношения:

$$(2.3) \quad p_{n+1} = a_{n+1}p_n + p_{n-1} \quad q_{n+1} = a_{n+1}q_n + q_{n-1},$$

а также соотношение

$$(2.4) \quad q_n p_{n-1} - p_n q_{n-1} = (-1)^n.$$

$n$ -ым *остатком* цепной дроби называют число

$$(2.5) \quad r_n = [a_n; a_{n+1}, a_{n+2}, \dots], \text{ такое что } \alpha = [a_0; a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, r_n]$$

Верно соотношение:

$$(2.6) \quad \alpha = \frac{p_{n-1}r_n + p_{n-2}}{q_{n-1}r_n + q_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$

Последовательность подходящих дробей сходится к числу, соответствующему данной цепной дроби. Подходящие дроби четного порядка образуют возрастающую, подходящие дроби нечетного порядка – убывающую последовательность, при этом любая подходящая дробь нечетного порядка больше любой подходящей дроби четного порядка.

Подходящие дроби доставляют наилучшие приближения к значению соответствующей цепной дроби в следующем смысле.

Определение 2.1. Рациональная дробь  $a/b$  ( $b > 0$ ) называется *наилучшим приближением второго рода* числа  $\alpha$ , если

$$(2.7) \quad \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}, 0 < d \leq b \Rightarrow |d\alpha - c| > |b\alpha - a|.$$

Теорема 2.1. Всякое наилучшее приближение второго рода есть подходящая дробь.

Верна, также, и обратная теорема:

Теорема 2.2. Всякая подходящая дробь есть наилучшее приближение второго рода. Единственное (тривиальное) исключение представляет

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{2}, \quad \frac{p_0}{q_0} = \frac{a_0}{1}.$$

Кроме того, рассматривают, также, промежуточные дроби, задаваемые равенством

$$(2.8) \quad \frac{p_{n,i}}{q_{n,i}} = \frac{ip_{n-1} + p_{n-2}}{iq_{n-1} + q_{n-2}},$$

которые также доставляют наилучшие приближения, но в несколько ином смысле.

Определение 2.2. Рациональная дробь  $a/b$  ( $b > 0$ ) называется *наилучшим приближением первого рода* числа  $\alpha$ , если

$$(2.9) \quad \frac{c}{d} \neq \frac{a}{b}, 0 < d \leq b \Rightarrow \left| \alpha - \frac{c}{d} \right| > \left| \alpha - \frac{a}{b} \right|.$$

Теорема 2.3. Всякое наилучшее приближение первого рода есть одна из подходящих или промежуточных дробей соответствующей цепной дроби.

Скорость аппроксимации числа подходящими дробями его цепной дроби напрямую связана с элементами этой цепной дроби. А именно, число тем быстрее аппроксимируется, чем больше элементы его цепной дроби. Отсюда видно, что хуже всего приближается золотое сечение, все элементы цепной дроби которого равны 1. ( $a_0$  может быть и меньше, но поскольку оно определяет лишь целочисленный сдвиг вдоль прямой, то не играет здесь никакой роли. Этим оправдывается то, что часто словосочетание «золотое сечение» используют применительно к числу, соответствующему дроби  $[0;1,1,1,\dots]$ .)

Из всех цепных дробей выделяется класс *периодических* – тех, у которых элементы с некоторого места начинают повторяться:

$$\exists i_0, m : \forall k \geq i_0 (a_{k+m} = a_k)$$

**Теорема 2.4. (Лагранж)** Разложение в цепную дробь числа  $\alpha$  периодически тогда и только тогда, когда  $\alpha$  является квадратичной иррациональностью.

### Геометрические модели цепных дробей

Нам будут интересны три геометрические модели цепных дробей: луч в первом квадранте, парус в стакане и просто парус. Теперь подробнее о каждой из них в отдельности.

1. Луч в первом квадранте. Это основная модель, из которой, в случае одномерных цепных дробей, все остальные получаются при помощи несложных преобразований.

Рассмотрим луч в первом квадранте с вершиной в начале координат и тангенсом угла наклона равным  $\alpha$  (рис. 1).

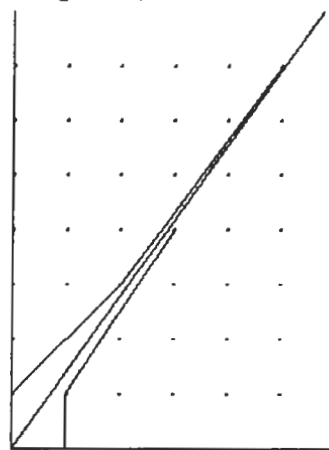


Рис. 1 Геометрическое представление дроби  $[1;2,1,1,\dots]$

Тогда границы выпуклых оболочек точек целочисленной решетки, расположенных выше или ниже луча, образуют две ломаные, лежащие соответственно выше и ниже луча. Целочисленные длины<sup>2</sup> звеньев будут равны элементам цепной дроби, причем, длины отрезков нижней ломаной – последовательным элементам с четными номерами, а верхней – с нечетными. Вершины ломаной представляют собой подходящие дроби, а точки на звеньях – промежуточные. Каждое звено кратно вектору с концом в некоторой вершине противоположной ломаной, что эквивалентно соотношениям (2.3). Таким образом, если рассматривать последовательные пары вершин ломаной, лежащие

<sup>2</sup> Подробное описание целочисленных характеристик геометрических моделей цепных дробей можно найти в работе Е.И. Коркиной [2]

по разные стороны от луча, то они будут базисами решетки  $Z^2$ , причем следующий базис получается из предыдущего прибавлением к одному из векторов другого, умноженного на соответствующий элемент цепной дроби.

2. Парус. Эта модель подробно рассматривается в работах Е.И. Коркиной [2] и Лашо [7], поэтому мы не будем ее детально обсуждать. Рассмотрим произвольный угол на плоскости, образованный двумя лучами с вершиной в начале координат. *Парусом* называется граница выпуклой оболочки целых точек, содержащихся в нем (исключая начало координат). Если в предыдущей модели взять луч в четвертом квадранте, ортогональный исходному, а затем рассмотреть образованный ими угол, то полученный парус будет состоять из ломаной, лежащей ниже луча в первой модели, и ломаной, лежащей выше луча, но повернутой на  $90^\circ$ .

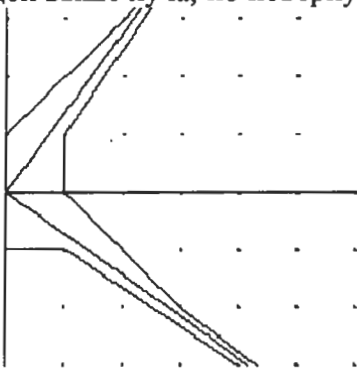


Рис. 2 Парус

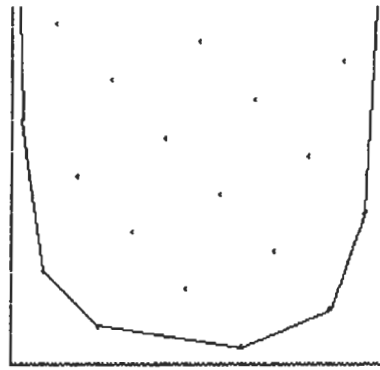


Рис. 3 Парус в стакане, соответствующий золотому сечению  $[0;1,1,\dots]$

3. Парус в стакане. Рассмотрим полосу  $\{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, y \geq 0\}$  и, в ней, арифметическую прогрессию  $(na \bmod 1, h)$ , где  $h > 0$  – произвольное положительное число, после чего возьмем выпуклую оболочку точек этой прогрессии (рис. 3). Ее граница называется *парусом в стакане*.

Эта модель получается из первой чуть более хитрыми преобразованиями: сначала к первой модели необходимо применить линейное преобразование

$$(2.10) \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ h & 1 - \frac{h}{\alpha} \end{pmatrix},$$

которое переведет ось  $OX$  в прямую, на которой лежат все точки арифметической прогрессии, а исходный луч – в ось  $OY$ , после чего ограничиться указанной полосой. Проследив за преобразованиями координатных осей, можно заметить, что координаты  $(x, y)$ , соответствовавшие знаменателю и числителю потенциальной подходящей дроби, перешли в номер точки арифметической прогрессии и номер витка так называемой генетической спирали, образованной этой прогрессией.<sup>3</sup>

<sup>3</sup> *Генетическая спираль* – это спираль, являющаяся проекцией на цилиндр луча с вершиной в начале координат, проходящего через первую точку арифметической прогрессии (а значит и через все остальные). При рассмотрении развертки цилиндра, любая спираль представляется счетным набором параллельных отрезков, которые называются ее *витками*.



### 3. Некоторые вопросы связанные с одномерными цепными дробями

#### Филлотаксис

Если рассмотреть последнюю модель, как развертку цилиндра, то окажется, что все точки арифметической прогрессии лежат на одной спирали. Это приводит нас к филлотаксису – области ботаники, изучающей явления регулярного расположения частей растений, такие, например, как расположение семян у подсолнуха, или спиралей ананаса. Ближайшее к нашей модели ботаническое наблюдение таково: если рассмотреть образование веток на дереве, то оказывается, что они расположены почти как точки арифметической прогрессии на цилиндре, причем угол между проекциями двух соседних ветвей чаще всего бывает равен приблизительно  $137.5^\circ$ , что соответствует шагу  $\alpha$  равному золотому сечению. Возникает вопрос, чем это объясняется? Иными словами, требуется понять, в чем заключается оптимальность золотого сечения применительно к данной модели.

Если при переходе от модели с лучом к стакану опустить ограничение на полосу, то получится решетка в плоскости. Соединив любые две ее точки  $X$  и  $Y$  (за счет параллельного переноса всегда можно одну из них взять равной  $O$ ), мы зададим направление и семейство из  $|x - y|$  параллельных и равноудаленных прямых, проходящих через точки решетки. Пара таких семейств, содержащих  $m$  и  $n$  прямых соответственно, обозначается  $(m, n)$ . Пара  $(m, n)$  называется *противонаправленной*, если направления, задающие два семейства прямых, лежат по разные стороны от вертикальной оси. Она называется *видимой*, если точка пересечения любых двух прямых из разных семейств является точкой решетки.

Р. Жан [6] доказал, что пара  $(m, n)$  видима и противонаправленна тогда и только тогда, когда

$$(3.1) \quad \exists! 0 < v < n, 0 < u < m : |mu - nv| = 1.$$

Отсюда и из (2.4) следует, что пара  $(q_n, q_{n-1})$  будет видима и противонаправленна при любом  $n$ . Легко видеть, что это верно и для пары  $(q_n, q_{n+1,i})$  при любом  $n$ , и любом  $0 \leq i \leq a_{n+1}$ . Теперь заметим, что это номера точек прогрессии, лежащих на парусе, поэтому они отличаются от всех остальных тем, что, при определенном выборе  $h$  оказываются ближайшими к  $O$  (не следует забывать, что на самом деле мы рассматриваем только полосу, поэтому точка  $(1, 0)$  совпадает с точкой  $(0, 0)$ ). А это значит, что соответствующие два семейства прямых разбивают плоскость на клетки с минимальной стороной (выбрав другой базис решетки, мы получим другое разбиение), то есть это разбиение наиболее равномерное при данном шаге прогрессии, именно оно «бросается в глаза», когда мы смотрим на решетку (см. рис. 3 или 4). Однако это будет разбиение плоскости на параллелограммы, которые, впрочем, могут быть прямоугольниками. При изменении  $h$ , меняется и пара ближайших к  $O$  векторов, а значит и разбиение. Зададимся вопросом, при каком значении  $\alpha$  элементы этого разбиения чаще всего будут прямоугольниками? В эти слова мы вкладываем следующий смысл: пусть  $h$  убывает от бесконечности до  $0$ , тогда возникает счетная убывающая последовательность значений  $h$ , при которых направления, задаваемые двумя ближайшими к нулю точками, разбивают плоскость на прямоугольники.

Вопрос: при каком значении  $\alpha$  достигается (если вообще достигается)

$$\max_{0 < \alpha < 1} \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{h_{i+1}}{h_i} ?$$

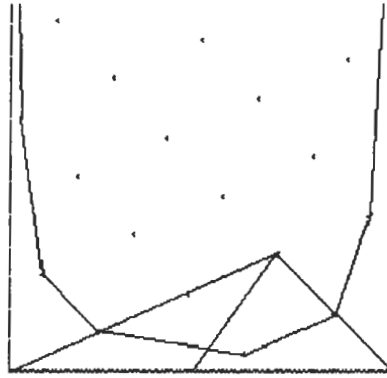


Рис. 4 Лучи  $q_n$  и  $q_{n+1,i}$

Отыщем значение  $h$ , при котором направления  $q_{n-1}$  и  $q_{n,i}$  ортогональны. Поскольку пара  $(q_n, q_{n+1,i})$  видима и противонаправлена, один из этих лучей имеет вершину в точке  $(0, 0)$ , а другой – в точке  $(1, 0)$ , поэтому они пересекаются до того как выйдут за пределы полосы, причем точка пересечения принадлежит решетке (рис. 4). В такой ситуации легко найти координаты этой точки. Сначала надо взять номер точки и номер витка спирали, соответствующие той точке из  $q_n$  и  $q_{n+1,i}$ , которая лежит на луче, выходящем из 0, и умножить на номер второй точки. Прделав это, получим:

$$(3.2) \quad \begin{cases} A = [(q_{n-1} + iq_n)q_n, (p_{n-1} + ip_n)q_n], \text{ при четных } n \\ A = [(q_{n-1} + iq_n)q_n, (q_{n-1} + iq_n)p_n], \text{ при нечетных } n \end{cases}$$

где  $A$  – точка пересечения, а в квадратных скобках сначала идет номер точки, а затем номер витка спирали. Теперь из (3.2), зная  $h$  и  $\alpha$ , мы можем найти декартовы координаты  $A$ . После чего предположим, что эти два направления ортогональны, тогда точка  $A$  лежит на окружности, диаметром которой является основание стакана, а это значит, что расстояние от  $A$  до точки  $(0.5, 0)$  равно 0.5. Откуда получаем квадратичное выражение для  $h$  через  $\alpha$ ,  $q_n$ ,  $q_{n+1,i}$ ,  $p_n$  и  $p_{n+1,i}$ . Преобразовав его, получаем

$$(3.3) \quad h = \sqrt{\left( \frac{p_{n-1} + ip_n}{q_{n-1} + iq_n} - a \right) \left( a - \frac{p_n}{q_n} \right)}, i = 0, \dots, a_{n+1}.$$

Рассмотрим теперь отношение двух последовательных значений  $h$  (обозначим их условно  $h_j$  и  $h_{j+1}$ , и пусть они соответствуют промежуточным дробям с номерами  $(n+1, i+1)$  и  $(n+1, i)$ ) и оценим его снизу:

$$\begin{aligned} 1 > \frac{h_{j+1}}{h_j} &= \sqrt{\frac{\left| a - \frac{p_{n-1} + ip_n}{q_{n-1} + iq_n} \right|}{\left| a - \frac{p_{n-1} + (i+1)p_n}{q_{n-1} + (i+1)q_n} \right|}} > \sqrt{\frac{q_n(q_{n-1} + (i+1)q_n)}{(q_{n-1} + iq_n)(q_{n-1} + (i+1)q_n)}} = \\ &= \sqrt{\frac{q_n}{q_{n-1} + iq_n}} = \sqrt{\frac{1}{\left( \frac{q_{n-1}}{q_n} + i \right) q_n}} > \frac{1}{\sqrt{q_n(i+1)}}, i = 0, \dots, a_{n+1}. \end{aligned}$$

Отсюда видно, что, при заданных  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , это отношение тем ближе к единице, чем меньше  $a_{n+1}$ , а значит оптимальным и здесь является золотое сечение, поскольку у него все элементы равны 1. Итак, мы только что доказали следующую теорему.

**Теорема 3.1.**  $\max_{0 < \alpha < 1} \inf_{i \in \mathbb{N}} \frac{h_{i+1}}{h_i}$  достигается при  $\alpha$  равном золотому сечению  $([0; 1, 1, 1, \dots])$ .

### Иррациональный сдвиг на окружности

Рассмотрим снова модель стакана, обрежем его на некоторой высоте, а то, что осталось, спроектируем на основание. Получим начальный отрезок из  $N$  точек арифметической прогрессии на окружности. Эти точки делят окружность на дуги. Спрашивается сколько типов дуг (в смысле длин) будет на окружности при данном  $N$ , и каким должен быть шаг прогрессии (сдвиг окружности), чтобы это разбиение было наиболее равномерным.

**Теорема 3.2.** (о трех длинах, или гипотеза Штейнгауза). При любом  $\alpha$  и любом  $N$  первые  $N$  точек арифметической прогрессии с шагом  $\alpha$  на окружности делят ее на дуги не менее чем двух и не более чем трех различных длин.

Ван Равенштейн [8] упорядочил эти точки на окружности в том порядке, в котором они встречаются при обходе окружности против часовой стрелки. Обозначив получившуюся последовательность  $(u_1(N), u_2(N), \dots, u_N(N))$ , где  $u_1(N) = 0$ , а  $u_2(N)$  и  $u_N(N)$  – точки, ближайšie к нулю, он доказал следующие теоремы.

**Теорема 3.3.** Независимо от значения  $\alpha$ ,  $N$  первых точек арифметической прогрессии делят окружность на дуги двух различных длин тогда и только тогда, когда  $N = u_2(N) + u_N(N)$ .

**Теорема 3.4.** Пусть  $q_k$  и  $q_{k,j}$  – знаменатели подходящих и промежуточных дробей разложения  $\alpha$  в цепную дробь. Тогда

$$(3.4) \quad u_2 = \begin{cases} q_{n-1}, & n-1:2 \\ q_{n,i-1}, & n:2 \end{cases} \quad u_N = \begin{cases} q_{n,i-1}, & n-1:2 \\ q_{n-1}, & n:2 \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} q_{n,i-1} < N \leq q_{n,i} \\ 2 \leq i \leq a_n \end{cases} (n \geq 2)$$

$$(3.5) \quad u_2 = \begin{cases} q_{n-1}, & n-1:2 \\ q_{n-2}, & n:2 \end{cases} \quad u_N = \begin{cases} q_{n-2}, & n-1:2 \\ q_{n-1}, & n:2 \end{cases}, \text{ где } q_{n-1} < N \leq q_{n,1} (n \geq 2)$$

$$(3.6) \quad u_j = j - 1, j = 1, 2, \dots, N, \text{ при } N \leq q_1.$$

Отсюда, с использованием соотношения (2.6), легко выводится, что наиболее равномерно, при всех  $N$ , окружность разбивают точки прогрессии с шагом равным золотому сечению  $([0; 1, 1, 1, \dots])$ .

## 4. Многомерные аналоги цепных дробей

Каждая из рассмотренных выше геометрических моделей цепных дробей легко обобщается в многомерном пространстве. Пусть  $n \geq 1$ . Будем рассматривать модели в пространстве  $\mathbb{R}^{n+1}$ .

### Паруса.

**Определение 4.1.** Рассмотрим  $(n+1)$ -мерный симплицальный конус в  $\mathbb{R}^{n+1}$ . *Парусом* называется граница выпуклой оболочки точек целочисленной решетки, содержащихся в этом конусе.

Е.И. Коркина [2]<sup>4</sup> доказала следующую теорему, обобщающую теорему Лагранжа:

**Теорема 4.1.** Пусть  $GL_n(\mathbb{Z})$ -оператор  $A$  имеет неприводимый характеристический многочлен  $\chi$ , все корни которого действительны. Такой оператор  $A$  имеет действительный собственный базис. Пусть  $K$  - конус, натянутый на такой базис. Тогда на границе оболочки  $\mathcal{V}(K)$  действует свободная абелева группа с  $n-1$  образующей. Фактор оболочки  $\mathcal{V}(K)$  по действию этой группы является  $(n-1)$ -мерным тором.

В статье Коркиной рассматриваются паруса, обладающие простой комбинаторной структурой. В частности, там доказывается, что парус, отвечающий оператору

$$A = \alpha^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ где } \alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

имеет самую простую возможную комбинаторную структуру:

*Целочисленным  $k$ -мерным объемом* целочисленного  $k$ -мерного многогранника, лежащего в  $n$ -мерном пространстве, называется коэффициент кратности между его евклидовым объемом и евклидовым объемом минимального симплекса, лежащего в том же  $k$ -мерном подпространстве.

*Целочисленным расстоянием* от целочисленной гиперплоскости (содержащей  $(n-1)$ -мерную целочисленную решетку) до целой точки называется коэффициент кратности между соответствующим евклидовым расстоянием и евклидовым расстоянием от гиперплоскости до ближайшей к ней целой точки.

**Теорема 4.2.** У оператора  $A$  имеется 3 разных иррациональных действительных положительных собственных числа. Все 8 конусов, натянутые на собственные векторы оператора  $A$ ,  $GL_3(\mathbb{Z})$ -изоморфны между собой. Изоморфизмы осуществляются операторами  $\pm E, \pm \alpha, \pm(A - E), \pm \alpha(A - E)$ . Группа операторов, оставляющих решетку и каждый из конусов на месте, порождена операторами  $A$  и  $B = (A - E)^2/A$ . Фундаментальная область границы выпуклой оболочки в каждом из конусов состоит из двух треугольников  $\Delta_1 = (e, Ae, Be)$  и  $\Delta_2 = (Ae, Be, ABe)$ , где  $e$  - произвольная вершина выпуклой оболочки. Одной из вершин одной из оболочек является точка  $(1, 0, 0)$ . Каждый из треугольников  $\Delta_1$  и  $\Delta_2$  имеет целочисленную площадь 1. Плоскость первого треугольника лежит на целочисленном расстоянии 1 от  $O$ , плоскость второго - на расстоянии 2.

## Многомерные стаканы

**Определение 4.2.** Рассмотрим полуцилиндр в  $\mathbb{R}^{n+1}$ , в основании которого лежит  $n$ -мерный единичный куб  $\{(x_0, \dots, x_n) \mid x_n = 0, 0 \leq x_i \leq 1, i \neq n\}$ , а образующей является луч  $\overline{Ox_{n+1}}$ . Далее рассмотрим арифметическую прогрессию  $n\alpha \bmod 1$ , где  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1}, h)$ ,  $0 \leq \alpha_i \leq 1$  при  $i = 0, \dots, n-1$ ,  $h \geq 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . *Парусом в  $(n+1)$ -мерном стакане* называется граница выпуклой оболочки точек этой прогрессии. Сам полуцилиндр называется *стаканом*.

С этой моделью связана задача, обобщающая теорему о наиболее равномерном распределении начального отрезка арифметической прогрессии на окружности. Если спроецировать стакан на его основание, то получится

<sup>4</sup> Схожую теорию строит также Ж. Лашо [7].

арифметическая прогрессия на  $n$ -мерном торе. Рассмотрим первые  $N$  точек прогрессии и максимальные непересекающиеся шары равных радиусов с центрами в этих точках. Возникает вопрос: каким должен быть шаг прогрессии, чтобы радиус этих шаров убывал медленнее всего с ростом  $N$ ? Любая точка, являющаяся ближайшей к нулю среди точек конечного начального отрезка этой прогрессии оказывается проекцией точки паруса. Таким образом, достаточное знание структуры паруса позволило бы ответить на этот вопрос.

### Многомерные алгоритмы типа цепных дробей

Будем считать, что в  $R^{n+1}$  задано скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , которое в свою очередь индуцирует длину  $|\cdot|$  и расстояние от точки до множества  $d(\cdot, \cdot)$ . Пусть  $\Omega = Z^{n+1}$  - целочисленная решетка<sup>5</sup>. Обозначим через  $A = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$  ее базис. Пусть  $l$  - иррациональная прямая, проходящая через начало координат,  $l_0$  - некоторый фиксированный ненулевой вектор на ней,  $l^*$  - гиперплоскость, ортогональная  $l_0$  в смысле  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и проходящая через начало координат.

Определение 4.3. Если  $A = \{A_0, A_1, \dots, A_n\}$  - базис  $\Omega$ , то числа  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , задаваемые равенством

$$(4.1) \quad l_0 = \sum_{j=0}^n a_j A_j,$$

называются его *кофакторами*.

Выбор  $l_0$  влияет на кофакторы, но не на их отношение.

$$(4.2) \quad \{A\}^+ = \left\{ \sum_{j=0}^n x_j A_j \mid x_j \geq 0, j = 0, \dots, n \right\}$$

обозначает *положительный октант*  $A$ .

Определение 4.4. Конечная или бесконечная последовательность  $A(i) = \{A_0(i), A_1(i), \dots, A_n(i)\}$  базисов  $\Omega$  называется  *$n$ -мерным разложением типа цепной дроби* (короче - *разложением*) своего первого элемента  $A(0)$ , если для всякого  $i$

$$(4.3) \quad l_0 \in \{A(i)\}^+$$

$$(4.4) \quad \exists b = b(i) \in N, s = s(i), t = t(i) : \begin{cases} A_t(i+1) = A_t(i) + bA_s(i) \\ A_j(i+1) = A_j(i), i \neq t \end{cases}$$

При такой замене базиса решетки вектор кофакторов, очевидно, меняется следующим образом:

$$(4.5) \quad \begin{cases} a_s(i+1) = a_s(i) - ba_t(i) \\ a_j(i+1) = a_j(i), i \neq s \end{cases}$$

Определение 4.5. Любой алгоритм, определяющий разложение вдоль заданной прямой базиса  $\Omega$  с неотрицательными кофакторами, называется  *$n$ -мерным алгоритмом типа цепной дроби* (в дальнейшем - просто *алгоритмом*).

Фактически алгоритм определяет процедуру выбора  $s(i)$ ,  $t(i)$  и  $b(i)$ . В случае  $n = 1$  выбирать можно лишь из различных значений  $b(i)$ , что не меняет характера получаемого разложения. Это означает, что верна следующая теорема.

<sup>5</sup> Вообще говоря, здесь в качестве решетки можно рассматривать любую дискретную аддитивную подгруппу ранга  $n+1$  в  $R^{n+1}$ , однако мы ограничимся рассмотрением целочисленной решетки, что не меняет сути дела.

Теорема 4.3. Единственным одномерным алгоритмом типа цепной дроби является разложение в обычную цепную дробь.

Определим теперь *нормализованную функцию высоты*  $h$  в  $R^{n+1}$  как линейную функцию, задаваемую условиями  $h(l_0)=|l_0|$  и  $h(X)=0$  для всех  $X \in l^*$ . Тогда  $|h(X)|=d(X, l^*)$  для  $X \in R^{n+1}$ .

Определение 4.6. Разложение  $A(i)$ ,  $i=0,1,2,\dots$  вдоль прямой  $l$  называется *сильно (слабо) сходящимся*, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое целое  $i_0$ , что

$$(4.6) \quad \max_{0 \leq k \leq n} d(A_k(i_0), l) < \varepsilon \quad \left( \max_{0 \leq k \leq n} \frac{d(A_k(i_0), l)}{|h(A_k(i_0))|} < \varepsilon \right)$$

Определение 4.7. Алгоритм называется *сильно (слабо) сходящимся*, если он доставляет сильно (слабо) сходящееся разложение для любого базиса решетки  $A$  и любой прямой  $l$ , удовлетворяющих его начальным условиям.

Пусть  $X \in \Omega$  - точка решетки. Обозначим через  $\rho(X) = d(X, l)$  *радиус-функцию*, измеряющую расстояние до прямой  $l$ . Поскольку у нас есть произвол в начальном выборе скалярного произведения, мы можем вполне свободно выбирать радиус функцию, лишь бы она была инвариантна относительно сдвига вдоль  $l$  и оказывалась нормой при ограничении на  $l^*$ .

Определение 4.8. Точка  $X \neq 0$  решетки  $\Omega$  называется *наилучшим приближением*  $\Omega$  к  $l$  (относительно  $\rho$  и  $h$ ), если не существует точки решетки  $P \neq 0$ , такой что

$$(4.7) \quad \begin{cases} \rho(P) \leq \rho(B), |h(P)| < |h(B)| \\ \text{или} \\ \rho(P) < \rho(B), |h(P)| = |h(B)| \end{cases}$$

Это понятие обобщает наилучшие приближения второго рода в случае одномерных цепных дробей, когда в роли  $h$  и  $\rho$  можно рассматривать  $h(p, q) = q$  и  $\rho(p, q) = |qa - p|$ .

Принято рассматривать алгоритмы, периодичные в следующем смысле:

Определение 4.9. Разложение базиса решетки вдоль прямой  $l$  называется *периодическим*, если существуют такие целые  $k_0 \geq 0, m > 0, \lambda \in R$  и перестановочная матрица  $P$ , что

$$(4.8) \quad a(k+m) = \lambda Pa(k) \quad \forall k \geq k_0.$$

Как легко видеть из (4.5),

$$(4.9) \quad a(k+m) = Ja(k),$$

где  $J$  - произведение матриц определенного вида. Объединяя эти два равенства, получаем

$$(4.10) \quad \lambda^{-1}a(k) = J^{-1}Pa(k),$$

то есть  $a(k)$  является собственным вектором матрицы  $J^{-1}P$ . Характеристический полином этой матрицы называется *характеристическим полиномом разложения*.

Теорема 4.4. (аналог теоремы Лагранжа) Пусть разложение  $A(0)$  вдоль прямой  $l$  периодично. Тогда число  $\lambda$  из определения периодичности является алгебраическим числом степени не больше  $n+1$  и нормы  $\pm 1$ .

Доказательство этой теоремы можно найти в книге Брентьяса [5].

Старейшим и наиболее интенсивно изучаемым алгоритмом является алгоритм Якоби-Перрона (ЖПА), который описывается следующим равенством:

$$(4.11) \hat{a}(i+1) = (\hat{a}_1(i) - \hat{b}_1 \hat{a}_0(i), \dots, \hat{a}_n(i) - \hat{b}_n \hat{a}_0(i), \hat{a}_0(i))$$

Такая форма записи, конечно же, не согласована с (4.5), но легко из нее получается группировкой  $n$  последовательных шагов и циклической перестановкой индексов.

Теорема 4.5. (Перрон) Алгоритм Якоби–Перрона слабо сходится для любой размерности.

Теорема 4.6. (Перрон) Периодическое разложение по алгоритму Якоби–Перрона сильно сходится тогда и только тогда, когда его характеристический полином неприводим и один из его корней является числом Пизо<sup>6</sup>.

Часто, говоря о периодичности разложения по алгоритму Якоби–Перрона, подразумевают существование таких целых  $m$  и  $k_0$ , что

$$(4.12) \hat{a}(k+m) = \lambda \hat{a}(k) \quad \forall k \geq k_0,$$

в обозначениях, введенных в (4.11). В таком случае минимальные возможные  $k_0$  и  $m$  называются *длинами препериода и периода* соответственно. Верна следующая теорема:

Теорема 4.7. (Перрон) Пусть  $\xi$  - наибольший вещественный корень многочлена  $x^{n+1} - d_n x^n - d_{n-1} x^{n-1} - \dots - d_1 x - 1$ , а все остальные корни меньше  $\xi$  по абсолютной величине. Тогда вектор  $a(0) = (a_0(0), \dots, a_n(0))$ , где

$$(4.13) a_k(0) = \xi^{-k} (1 + d_1 \xi + \dots + d_k \xi^k), \quad k = 0, \dots, n$$

обладает чисто периодическим разложением Якоби–Перрона с длиной периода 1.

По теореме 4.6, это разложение сходится сильно тогда и только тогда, когда  $\xi$  является числом Пизо.

### Генерируемые периодические разложения

В этом параграфе мы введем аппарат, позволяющий строить луч по заданной последовательности «элементов» разложения, обобщающих элементы цепной дроби, принадлежащей к некоторому классу. После чего удастся найти минимальную в некотором роде конфигурацию, обобщающую золотое сечение, все элементы цепной дроби которого равны 1.

Алгоритм Якоби–Перрона, в его наиболее естественной записи (4.11), не доставляет разложения в смысле определения 4.4. Поэтому естественно обобщить это определение следующим образом:

Определение 4.10. Последовательность  $A(i) = \{A_0(i), \dots, A_n(i)\}$  базисов решетки  $\Omega$  называется *обобщенным разложением* своего первого элемента  $A(0)$  вдоль прямой  $l$ , если, с точностью до перенумерации векторов каждого базиса в отдельности, выполняется следующее

$$(4.14) l \in \{A(i)\}^+ \quad \forall i \geq 0,$$

$$(4.15) \forall i \geq 0 \exists b_j = b_j(i) \in Z_+ : \begin{cases} A_n(i+1) = A_0(i) + \sum_{j=1}^n b_j A_j(i) \\ A_j(i+1) = A_{j+1}(i) \quad \forall j \neq n \end{cases}$$

Если переписать условие (4.15) в матричной форме, то получится следующее равенство:

<sup>6</sup> Числом Пизо называется вещественное алгебраическое число, все (вещественные и комплексные) сопряженные которого меньше единицы по абсолютной величине.

$$(4.16) A(i+1) = A(i)B, \text{ где } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_n \end{pmatrix}.$$

Матрицу  $B$  называют *сопровождающей матрицей* для полинома  $x^{n+1} - b_n x^n - b_{n-1} x^{n-1} - \dots - b_1 x - 1$  (см. [1]).

Другими словами, переход от базиса обобщенного разложения к следующему осуществляется за счет добавления к одному из его векторов целочисленной линейной комбинации остальных. Очевидно, что алгоритм (4.11) доставляет обобщенные разложения, даже не прибегая к перенумерации векторов.

Поскольку перенумерация векторов не будет влиять на геометрические свойства, о которых пойдет речь, мы будем пренебрегать ею в дальнейших рассуждениях. Однако стоит заметить, что если вектора не перенумеровывать, то обобщенное разложение можно рассматривать как последовательность векторов, из которой выбираются последовательные  $n$ -ки подряд идущих. При рассуждениях мы этим пользоваться не будем, однако это свойство чрезвычайно облегчает вычисления, хотя и ограничивает круг возможных разложений.

**Замечание.** Следует также отметить, что полином из теоремы 4.7 с точностью до знака является характеристическим полиномом матрицы из (4.16). **Доказательство.** Проверим это утверждение, непосредственно вычислив определитель следующей матрицы:

$$D(b_1, \dots, b_n) = \begin{vmatrix} -x & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -x & \dots & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -x & b_{n-1} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & b_n \end{vmatrix}$$

Раскладывая его по последней строке, получим

$$D(b_1, \dots, b_n) = b_n (-x)^n - D(b_1, \dots, b_{n-1}) = (-1)^n b_n x^n - (-1)^{n-1} b_{n-1} x^{n-1} + \\ + D(b_1, \dots, b_{n-2}) = \dots = (-1)^n (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + 1)$$

Теперь осталось заметить, что искомым характеристический полином равен

$$D(b_1, \dots, b_{n-1}, b_n - x) = (-1)^n (-x^{n+1} + b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + 1) \blacksquare$$

Алгоритм Якоби–Перрона приводится к такому виду группировкой нескольких подряд идущих шагов. Это происходит за счет того, что, следуя алгоритму, мы последовательно прибавляем к некоторому фиксированному вектору все остальные, после чего переходим к следующему вектору. Однако с другой стороны, мы можем представить в таком виде любой алгоритм – для этого достаточно взять все коэффициенты  $b_j$ , кроме одного, равными 0. Эта точка зрения и обосновывает слово «обобщенное».



В теореме 4.7 периодичность алгоритма является следствием некоторых условий. Подойдем теперь к этому вопросу с другой стороны. Будем опять рассматривать базис решетки, а не вектор его кофакторов.

Определение 4.11. Пусть  $A(i) = \{A_0(i), \dots, A_n(i)\}$ ,  $i=0,1,2,\dots$  – некоторая последовательность базисов решетки,  $M \in SL(n, \mathbb{Z})$  – целочисленная матрица с определителем, равным 1 по абсолютной величине. Пусть, кроме того, существует такое натуральное  $m$ , что

$$(4.17) \quad A(i+m) = MA(i) \quad \forall i \geq 0.$$

Здесь мы рассматриваем  $A(i)$  как матрицу, состоящую из столбцов  $A_k(i)$ . В такой ситуации будем называть матрицу  $M$  *генератором* последовательности  $A(i)$ , а набор  $A(0), \dots, A(m-1)$  – ее *фундаментальным отрезком*. Про саму последовательность будем говорить, что она *генерируется* матрицей  $M$ .

Лемма 4.1. Пусть  $l$  – собственное направление матрицы  $M$ , являющейся генератором последовательности  $A(i) = \{A_0(i), \dots, A_n(i)\}$ ,  $i = 0, 1, 2, \dots$  базисов решетки. Пусть  $\lambda > 1$  – соответствующее вещественное собственное число. Пусть  $l$  принадлежит положительному октанту каждого базиса из фундаментального отрезка этой последовательности, то есть

$$(4.18) \quad l \in \{A(i)\}^+ \quad \forall i = 0, 1, \dots, m-1,$$

где  $m$  – длина периода. Тогда  $l$  принадлежит положительным октантам всех базисов из этой последовательности. Если, к тому же, этот фундаментальный отрезок удовлетворяет условию (4.15), то последовательность  $A(i)$  есть обобщенное разложение базиса  $A(0)$  вдоль прямой  $l$ .

Доказательство. Пусть  $l_0$  – фиксированный вектор на собственном направлении  $l$ . Тогда

$$\lambda l_0 = Ml_0 = MA(i)a(i) = A(i+m)a(i) \Leftrightarrow l_0 = A(i+m)\lambda^{-1}a(i),$$

то есть  $a(i+m) = \lambda^{-1}a(i)$ . Поскольку  $l_0 \in \{A(i)\}^+$ , все компоненты  $a(i)$  неотрицательны, а значит, неотрицательны и компоненты  $a(i+m)$ , то есть  $l_0 \in \{A(i+m)\}^+$ . Таким образом,  $l_0$  действительно принадлежит положительным октантам всех базисов нашей последовательности.

Пусть теперь  $A(i+1) = A(i)B$ , где  $B$  – матрица из (4.16). Тогда  $A(i+m+1) = MA(i+1) = MA(i)B = A(i+m)B$ . Это значит, что вся последовательность  $A(i)$  удовлетворяет, также, и условию (4.15), что и доказывает лемму. ■

Лемма 4.2. Пусть  $A(i) = \{A_0(i), \dots, A_n(i)\}$ ,  $i = 0, 1, \dots, m$  – набор базисов решетки, удовлетворяющий (4.15), пусть  $A(m) = MA(0)$ , и пусть у  $M$  есть вещественное собственное число  $\lambda > 1$  такое, что все остальные собственные числа  $M$  меньше  $\lambda$  по абсолютной величине. Тогда последовательность, генерируемая  $M$ , является обобщенным разложением  $A(0)$  вдоль соответствующего собственного направления  $l$ .

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор  $v \in \{A(m)\}^+$ . Тогда

$$v = A(m)a(m) = A(m-1)B(m-1)a(m) \Rightarrow a(m-1) = B(m-1)a(m).$$

Все компоненты  $a(m)$  неотрицательны, равно как и все компоненты  $B(m-1)$ . Отсюда видим, что и все компоненты  $a(m-1)$  неотрицательны, то есть  $v \in \{A(m-1)\}^+$ . Продолжая это рассуждение, получаем, что  $v$  принадлежит положительным октантам всех базисов из нашего набора, а значит, как следует из доказательства леммы 4.1, и всей последовательности, генерируемой из этого набора матрицей  $M$ . Отсюда также видно, что положительные октанты этой последовательности образуют убывающую последовательность.

Теперь мы представим  $v$  в виде  $u+w$ , где  $u \in l$ ,  $w$  лежит в прямой сумме остальных собственных подпространств  $M$ . Затем воспользуемся свободой выбора скалярного произведения, и выберем его так, чтобы все собственные подпространства  $M$  были в нем взаимно ортогональны, и на каждом из них индуцировалась евклидова метрика (такое скалярное произведение легко описать конструктивно). Через  $v_n$ ,  $u_n$  и  $w_n$  будем обозначать итерации соответствующих векторов под действием  $M$ . Тогда

$$(4.19) \quad \frac{\rho(v_{n+1})}{h(v_{n+1})} \Big/ \frac{\rho(v_n)}{h(v_n)} = \frac{h(v_n)}{h(v_{n+1})} \cdot \frac{\rho(v_{n+1})}{\rho(v_n)} = \frac{|u_n|}{|u_{n+1}|} \cdot \frac{|w_{n+1}|}{|w_n|} \leq \frac{|\mu|}{\lambda} < 1,$$

где  $\mu$  - собственное число наибольшее среди оставшихся по абсолютной величине. Отсюда следует, что угол между  $v_n$  и  $l$  стремится к нулю, но если бы направление  $l$  не принадлежало положительному октанту какого-либо базиса из последовательности, то этот угол был бы ограничен снизу. Таким образом,  $l$  принадлежит положительным октантам всех базисов последовательности, что доказывает лемму. ■

Доказанная лемма предоставляет аппарат, о котором шла речь в начале параграфа. А именно, пусть у нас задана периодическая последовательность наборов  $(b_j)$ , тогда мы можем, отправляясь, например, от трех евклидовых ортов и умножая их справа на соответствующие матрицы  $B$ , описанные в (4.16), построить набор базисов, который послужит фундаментальным отрезком для будущего разложения. Теперь рассмотрим матрицу  $M$ , переводящую  $A(0)$  в  $A(m)$  - такая всегда существует, поскольку оба эти набора являются базисами решетки, - и, если у нее есть собственное число, превосходящее все остальные по абсолютной величине, то, по лемме 4.2, последовательность, генерируемая этой матрицей из построенного фундаментального отрезка, будет искомым обобщенным разложением.

Из этой леммы немедленно вытекает теорема 4.7. Для этого следует взять в качестве базиса  $A(0)$  орты в евклидовой метрике, а в качестве матрицы  $M$  - матрицу вида (4.16), где заменить  $b_i$  на  $d_i$ . Как уже было замечено, характеристическим полиномом этой матрицы будет полином из теоремы 4.7, и поэтому условие, наложенное на его корень, даст нам условие на собственное число из леммы. Из следующего равенства видно, что вектор  $a(0)$  из теоремы 4.7 будет собственным вектором  $M$ , соответствующим этому собственному числу:

$$\begin{aligned} a_k(0) + d_{k+1}a_n(0) &= x^{-k}(1 + d_1x + \dots + d_kx^k) + xd_{k+1} = \\ &= x^{-k}(1 + d_1x + \dots + d_kx^k + d_{k+1}x^{k+1}) = xa_{k+1}(0) \end{aligned}$$

Кроме того, из доказательства леммы также следует, что полученное разложение будет слабо сходиться.

**Теорема 4.8.** Обобщенное разложение, генерируемое матрицей  $M$ , сходится сильно тогда и только тогда, когда у  $M$  есть вещественное собственное число  $\lambda$ , являющееся числом Пизо.

**Доказательство.** Рассмотрим снова скалярное произведение, о котором говорилось в доказательстве предыдущей леммы. Тогда можно оценить расстояние до  $l$  векторов последовательности  $A(i_0+km)$  ( $0 \leq i_0 < m$ ):

$$\begin{aligned} \rho(A_j(i_0 + km)) &= \rho(A_j^*(i_0 + km)) \leq \rho(A_j^*(i_0 + (k-1)m))|\mu| \leq \dots \leq \\ &\leq \rho(A_j^*(i_0))|\mu|^k, \end{aligned}$$

где  $A_j^*$  - компонента вектора  $A_j$ , лежащая в прямой сумме собственных подпространств, соответствующих остальным собственным числам, а  $\mu$  - собственное число, наибольшее среди оставшихся по абсолютной величине. Если  $\lambda$  - число Пизо, то  $|\mu| < 1$ , то есть расстояние до  $l$  векторов последовательности  $A(i_0+km)$  стремится к нулю, причем равномерно, что и доказывает сильную сходимость.

Пусть наше разложение сильно сходится. Тогда из него можно выбрать последовательность базисов, максимальное расстояние до  $l$  векторов которого будет стремиться к нулю. Из нее можно выбрать подпоследовательность, в которой номера базисов будут сравнимы по модулю  $m$ , то есть это будет последовательность вида  $A(i_0+km)$ ,  $k = 0, 1, 2, \dots$ . Пусть теперь  $\lambda$  не является числом Пизо. Тогда у  $M$  есть собственное число  $\mu$ , такое что  $|\mu| > 1$ . Разложим теперь вектора базиса  $A(i_0)$  на собственные компоненты. Поскольку  $A(i_0)$  - базис, найдется вектор  $A_j(i_0)$ , в разложении которого компонента, соответствующая собственному числу  $\mu$ , будет присутствовать с ненулевым коэффициентом. Обозначим этот компонент  $A_j^\mu(i_0)$ . Тогда

$$\max_{0 \leq t \leq n} \rho(A_t(i_0 + km)) \geq \rho(A_j(i_0 + km)) \geq |A_j^\mu(i_0 + km)| = |\mu|^k |A_j^\mu(i_0)| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty,$$

что противоречит выбору  $A(i_0+km)$ . Это противоречие завершает доказательство теоремы. ■

## 5. Аналог золотого сечения как пример двумерной цепной дроби

Посмотрим теперь, как быстро сходится генерируемое обобщенное разложение. Как и прежде, рассмотрим скалярное произведение, в котором собственные подпространства генератора  $M$  ортогональны, и на каждом из них индуцируется евклидова метрика. Произвольный вектор  $X$  можно представить в виде  $X^* + X^l$ , где  $X^l \in l$ , а  $X^*$  лежит в прямой сумме остальных собственных подпространств. Тогда

$$(5.1) \quad \frac{\rho(A_j(k+m))}{\rho(A_j(k))} = \frac{|A_j^*(k+m)|}{|A_j^*(k)|} = \frac{|MA_j^*(k)|}{|A_j^*(k)|} \Rightarrow |\mu_1| \leq \frac{\rho(A_j(k+m))}{\rho(A_j(k))} \leq |\mu_2|,$$

где  $\mu_1$  и  $\mu_2$  - наименьшее и наибольшее по абсолютной величине собственные числа  $M$ , кроме  $\lambda$ . При  $n = 2$ , возможна ситуация, когда эти оценки совпадают, и наступает равенство.

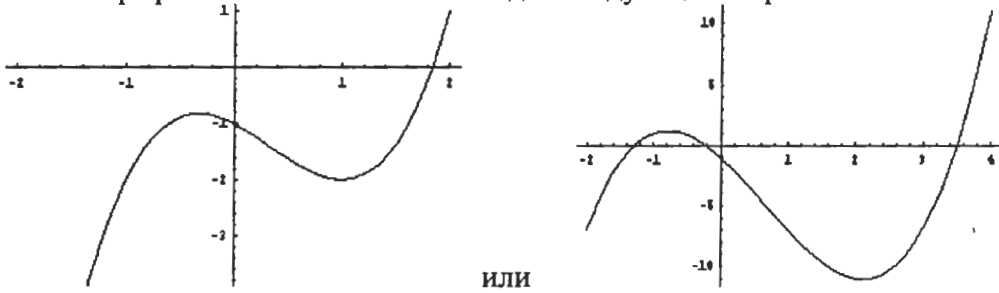
Попытаемся теперь найти аналог золотого сечения при  $n = 2$ . В нашем распоряжении есть несколько критериев, задающих золотое сечение в случае одномерных цепных дробей. Вот два из них:

1. разложение золотого сечения в цепную дробь имеет период длины 1, и все элементы этого разложения равны единице;
2. золотое сечение медленнее всего приближается своими подходящими дробями.

Будем искать периодическое разложение с длиной периода 1, сходящееся медленнее всех сильно сходящихся разложений. Для этого рассмотрим разложения, генерируемые матрицей  $M$   $3 \times 3$  вида (4.16) из базиса решетки, состоящего из евклидовых ортов (вообще говоря, можно в качестве  $A(0)$  рассматривать любой базис решетки, но в данном случае это ничего принципиальным образом не изменит, поскольку замена базиса здесь просто линейным образом преобразует всю картину).

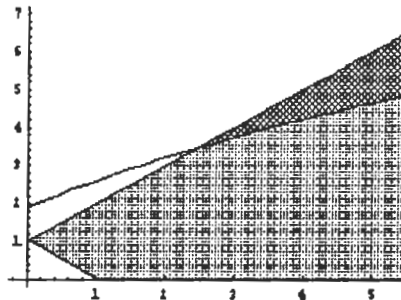
Из (5.1) видно, что, если  $|\mu_1| = |\mu_2|$ , то разложение тем медленнее сходится, чем меньше  $\lambda$ . К сожалению, на данный момент трудно сказать, верно ли это при  $|\mu_1| \neq |\mu_2|$ , однако эта гипотеза выглядит довольно естественно, и если это так, то медленнее всего будет сходиться все-таки разложение, задаваемое матрицей, у которой  $|\mu_1| = |\mu_2|$ .

Для сильной сходимости этого разложения необходимо, чтобы наибольшее по абсолютной величине вещественное собственное число матрицы  $M$  являлось числом Пизо. Таким образом, нам необходимо найти условия на  $b_1$  и  $b_2$ , которые гарантируют нам, что один из корней полинома  $x^3 - b_2x^2 - b_1x - 1$  будет числом Пизо. График этого полинома выглядит следующим образом:



Ключевым здесь является то, что, во-первых, у этого полинома всегда есть вещественный корень  $\lambda > 1$ , во-вторых, график всегда проходит через точку  $(0, -1)$  и, в-третьих, если он пересекает отрицательное направление, то одна из точек пересечения имеет абсциссу больше  $-1$ . Первое утверждение следует из вида полинома, а последние два – из того, что определитель матрицы  $M$  равен 1.

Таким образом, для того, чтобы убедиться, что  $\lambda$  – число Пизо, необходимо проверить, что график не пересекает ось  $Ox$  левее точки  $-1$ . Подставим в наш полином  $x = -1$ . Получаем условие:  $-1$  является корнем тогда и только тогда, когда  $b_1 = b_2 + 2$ . Из соображений выпуклости легко увидеть, что  $\lambda$  будет числом Пизо при  $b_1 \leq b_2 + 1$  ( $b_1$  и  $b_2$  целые неотрицательные). Кроме того,  $b_1$  и  $b_2$  не могут одновременно равняться нулю. Итак, мы выяснили, что для того, чтобы матрица вида (4.16) имела собственное число Пизо,  $b_1$  и  $b_2$  должны попадать в область  $\{(b_1, b_2) \neq 0 \mid b_1, b_2 \geq 0, b_1 \leq b_2 + 1\}$  (на рисунке горизонтальная ось соответствует  $b_2$ , а вертикальная –  $b_1$ ). Если  $(b_1, b_2)$  лежит в верхней части области, то у соответствующего полинома 3 различных вещественных корня, если в нижней – два корня будут сопряженными комплексными.



Абсцисса точки пересечения графика нашего полинома с прямой  $\{y = -1\}$  меньше  $\lambda$  и равна

$$\frac{b_2 + \sqrt{b_2^2 + 4b_1}}{2},$$

поэтому  $\lambda$  растет с ростом  $b_1$  или  $b_2$ . Таким образом, нам необходимо минимизировать  $b_1$  и  $b_2$ . Есть два кандидата на минимальность:  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ . Непосредственное вычисление показывает, что при  $b_1 = 1, b_2 = 0$

$$\lambda = \frac{1}{3} \left( \frac{27 - 3\sqrt{69}}{2} \right)^{1/3} + \frac{1}{3} \left( \frac{27 + 3\sqrt{69}}{2} \right)^{1/3} \approx 1.32472,$$

а при  $b_1 = 0, b_2 = 1$

$$\lambda = \frac{1}{3} \left( 1 + \left( \frac{29 - 3\sqrt{93}}{2} \right)^{1/3} + \left( \frac{29 + 3\sqrt{93}}{2} \right)^{1/3} \right) \approx 1.46557,$$

то есть минимум нам доставляет пара  $b_1 = 1, b_2 = 0$ . Итак, аналогом золотого сечения является разложение, генерируемое из базиса

$$A(0) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \text{ матрицей } M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ вдоль направления } \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda^2 \\ \lambda \end{pmatrix},$$

где  $\lambda$  - вещественный корень уравнения  $x^3 = x + 1$ .

#### ЛИТЕРАТУРА:

- [1] Ф.Р. Гантмахер, *Теория матриц*, М. 1967: Наука
- [2] Коркина Е.И., Двумерные цепные дроби. Самые простые примеры., *Труды МИАН* 219 (1995), 143-166
- [3] Хинчин А.Я., *Цепные дроби* - 3-е изд., М. 1961: Физ.-Мат. Лит-ра.
- [4] Шмидт В.М., *Диофантовы приближения*, М. 1983: МИР
- [5] Brentjes A.J., *Multi-Dimensional Continued Fraction Algorithms*, Amsterdam 1981: Mathematisch Centrum
- [6] Jean, R. V., Number-theoretic properties of two-dimensional lattices., *J. Number Theory* 29, no.2, 206-223 (1988)
- [7] Lachaud G., Sails and Klein Polyhedra, Pretirage n°96-23, *Contemp. Math.*
- [8] van Ravenstein T., Optimal Spacing of Points on a Circle