Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 21 мая 2020 г.
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

О разрешимости полулинейной задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана и критической правой частью*

Н.С. Устинов†‡

1 Введение

В настоящей работе изучается вопрос существования решений с минимальной энергией в $\mathcal{C}^2$-гладкой ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$ для задачи

$$(-\Delta)^s_{Sp} u + u = |u|^{2^*_s - 2} u, \quad u \in \mathcal{H}^s(\Omega), \tag{1}$$

где $s \in (0,1)$ и $2^*_s := \frac{2n}{n-2s}$. Дробный лапласиан $(-\Delta)^s_{Sp}$ в левой части уравнения — это спектральный лапласиан Неймана (определения дробных лапласианов и функциональных пространств будут даны в §2).

Решение задачи (1) с минимальной энергией (с точностью до домножения на константу) — это минимайзер (если он существует) функционала $\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[u]$:

$$\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[u] := \frac{\langle (-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|u\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}}, \quad \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} := \inf_{u \in \mathcal{D}^s(\Omega)} \mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[u]. \tag{2}$$

В силу неоднородности $\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[u]$ при гомотетиях, в пространстве ($\Omega = \mathbb{R}^n$) или полупространстве ($\Omega = \mathbb{R}^n_+$) инфимум в (2) не достигается, и, таким образом, решений с минимальной энергией у задачи (1) не существует. Однако известно, что имеет место

*Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00630А

†Санкт-Петербургский Государственный Университет, Университетский пр. 28, Санкт-Петербург, 198504, Россия. E-mail: ustinns@yandex.ru.

‡Представлено А.И. Назаровым

дробное неравенство Соболева (см. [15, Теорема 1.2, (22)])

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n} := \min_{u\in\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)} \frac{\langle(-\Delta)^s u, u\rangle}{\|u\|^2_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}} > 0,$$

и минимум достигается (см. [4]) на единственной функции (здесь и далее: *с точностью до гомотетий, домножений на константу и переносов*)

$$\Phi_{s,a}(x) := \left(a^2+|x|^2\right)^{\frac{2s-n}{2}} \quad \text{с} \quad \mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n} = 2^{2s}\pi^s \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+s\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}-s\right)} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\Gamma(n)}\right]^{\frac{2s}{n}}. \tag{3}$$

Более того, в полупространстве $\mathbb{R}^n_+$ имеет место соотношение (см. [9, Теорема 1.2])

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n_+} = \min_{u\in\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n_+)} \frac{\langle(-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle}{\|u\|^2_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n_+)}} \quad \text{с} \quad \mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n_+} = 2^{-\frac{2s}{n}}\mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n}, \tag{4}$$

а минимайзер, как и в $\mathbb{R}^n$, единственен и равен $\Phi_{s,a}(x)$. В частности, $\Phi_{s,a}(x)$ (после домножения на подходящую константу) является решением уравнения

$$(-\Delta)^s_{Sp} u = |u|^{2^*_s-2}u \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n_+$$

с минимальной энергией.

В локальном случае $s=1$ задача (1) имеет вид (здесь $2^* := \frac{2n}{n-2}$)

$$-\Delta u + u = |u|^{2^*-2}u, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x\in\partial\Omega} = 0, \tag{5}$$

а в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^n_+$ рассматривается задача без слабого члена в левой части. В этом случае решение единственно и равно $\Phi_{1,a}(x)$, а точные константы (см. (3) и (4) при $s=1$) известны давно (см. [2, 11]). В [1, 13] было показано, что при $n\geqslant 3$ в $\mathcal{C}^2$-гладкой ограниченной области Ω задача (5) имеет положительное решение с миинимальной энергией. В [14] была изучена задача для уравнения, аналогичного (5), с p-лапласианом в левой части.

В настоящей работе получен следующий результат:

Теорема 1. *Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\geqslant 3$ — $\mathcal{C}^2$-гладкая ограниченная область, и $2s>1$. Тогда задача (1) имеет неотрицательное нетривиальное решение с минимальной энергией.*

Замечание 1. Мы полагаем, что условия Теоремы 1 являются точными, однако этот вопрос остается открытым.

Для других определений дробного лапласиана Неймана (см., напр., [9]) аналогичные задачи не рассматривались. Задача такого типа для спектрального лапласиана Дирихле была рассмотрена в [12].

Статья имеет следующую структуру: в §2 приводятся предварительные сведения о дробных лапласианах и вводится продолжение Стинга–Торреа. В §3 утверждение Теоремы 1 выводится из четырех вспомогательных Лемм. Доказательства этих Лемм приведены в §§4–5.

Введем некоторые обозначения:

- $\mathbb{B}_r(x) \subset \mathbb{R}^n$ — шар радиуса r с центром в точке x. Для краткости, $\mathbb{B}_r := \mathbb{B}_r(0)$.

- $\omega_{n-1} := \frac{n\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}$ — площадь единичной сферы в $\mathbb{R}^n$.

- $\varphi_r(x)$ — гладкая функция-срезка

$$\varphi_r(x) := \begin{cases} 1, & |x| < \frac{r}{2} \\ 0, & |x| > r \end{cases}, \quad |\nabla_x \varphi_r(x)| \leqslant \frac{C}{r}.$$

- Через C мы будем обозначать константы, зависящие только от n и s, значение которых для нас несущественно; в случае зависимости константы от дополнительного параметра мы будем указывать его в скобках.

- Запись $o_\varepsilon(1)$ означает, что величина стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$.

- Полупространство $\mathbb{R}^n_+ := \{x \equiv (x', x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n > 0\}$.

- Для функции $f \in L_1(\Omega)$ функция $\overline{f}$ определяется равенством

$$\overline{f}(x) := f(x) - |\Omega|^{-1} \cdot \int\limits_\Omega f(x)\, dx, \qquad \int\limits_\Omega \overline{f}(x)\, dx = 0. \tag{6}$$

2 Предварительные сведения

Дробный лапласиан $(-\Delta)^s$ в $\mathbb{R}^n$ определяется как

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F} u(\xi)), \quad u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n),$$

где преобразование Фурье $\mathcal{F}$ задается формулой $\mathcal{F}u(\xi) := (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i\langle \xi, x\rangle} u(x) dx$. Его квадратичная форма имеет вид

$$\langle (-\Delta)^s u, u\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\xi|^{2s} |\mathcal{F}u(\xi)|^2 d\xi.$$

Областью определения $\langle (-\Delta)^s u, u\rangle$ является пространство $\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$:

$$\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n) := \left\{ u \in L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n) \ \mid \langle (-\Delta)^s u, u\rangle < \infty \right\}.$$

Ввиду дробного неравенства Соболева пространство $\mathcal{D}^s(\mathbb{R}^n)$ совпадает с замыканием пространства $\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по форме $\langle (-\Delta)^s u, u\rangle$.

Спектральный дробный лапласиан Неймана $(-\Delta)^s_{Sp}$ определяется как s-ая степень оператора Лапласа с условием Неймана в области Ω в смысле спектральной теории. Это самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме: при $\Omega = \mathbb{R}^n_+$

$$\langle (-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle := \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\xi|^{2s} |\widehat{\mathcal{F}} u(\xi)|^2\, d\xi \quad \text{с} \quad \widehat{\mathcal{F}} u(\xi) := \frac{2}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) e^{-i\langle \xi', x'\rangle} \cos(x_n \xi_n)\, dx,$$

а в случае ограниченной липшицевой области Ω квадратичная форма равна

$$\langle(-\Delta)^s_{Sp}u,u\rangle := \sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j^s\langle u,\phi_j\rangle^2, \tag{7}$$

где λ_j — собственные числа, а ϕ_j — ортонормированные в $L_2(\Omega)$ собственные функции задачи Неймана для оператора Лапласа (мы считаем, что $\lambda_0 = 0$ для собственной функции $\phi_0 = C$). Областью определения квадратичной формы $\langle(-\Delta)^s_{Sp}u,u\rangle$ является пространство $\mathcal{D}^s(\Omega)$:

$$\mathcal{D}^s(\Omega) := \left\{u\in L_{2^*_s}(\Omega)\ \middle|\ \langle(-\Delta)^s_{Sp}u,u\rangle<\infty\right\}.$$

В ограниченной области Ω это пространство совпадает со стандартным пространством Соболева–Слободецкого $\mathcal{H}^s(\Omega)$ (см. [16] и [17, §2.3.3]). Норму в этом пространстве определим равенством

$$\|u\|^2_{\mathcal{H}^s(\Omega)} = \langle(-\Delta)^s_{Sp}u,u\rangle + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Введенная норма эквивалентна стандартной норме в $\mathcal{H}^s(\Omega)$ (доказательство этого факта практически дословно повторяет доказательство [7, Лемма 1]).

В [10] было показано, что спектральный лапласиан Неймана может быть получен посредством продолжения Стинга–Торреа (далее, **СТ-продолжение**; для краткости будем обозначать $X\equiv(x,t)$): решение w_{sp} задачи

$$-div(t^{1-2s}\nabla_X w(x,t)) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\times\mathbb{R}_+; \quad w|_{t=0}=u; \quad \left.\frac{\partial w}{\partial\vec{n}}\right|_{x\in\partial\Omega}=0$$

с конечной энергией

$$\mathcal{E}_{s,\Omega}[w] := \int_0^{\infty}\int_{\Omega} t^{1-2s}|\nabla_X w(x,t)|^2\,dxdt \tag{8}$$

существует, единственно, и для достаточно гладких u

$$(-\Delta)^s_{Sp}u(x) = -C_s\cdot\lim_{t\to0_+}t^{1-2s}\partial_t w_{sp}(x,t) \quad \text{с} \quad C_s := \tfrac{4^s\Gamma(1+s)}{2s\cdot\Gamma(1-s)}. \tag{9}$$

Кроме того, w_{sp} можно получить как минимайзер функционала (8) по пространству

$$\mathfrak{W}_s(\Omega\times\mathbb{R}_+) := \{w(X)\mid\mathcal{E}_{s,\Omega}[w]<\infty,\, w|_{t=0}=u\},$$

и несложно показать, что квадратичная форма (7) выражается через (8):

$$\langle(-\Delta)^s_{Sp}u,u\rangle = C_s\mathcal{E}_{s,\Omega}[w_{sp}]. \tag{10}$$

Отдельно отметим, что соответствующий результат для оператора $(-\Delta)^s$ в $\mathbb{R}^n$ был получен в [3], а функция w_{sp} в этом случае называется продолжением Каффарелли–Сильвестра (**КС-продолжение**).

Мы будем называть любую функцию $w\in\mathfrak{W}_s(\Omega\times\mathbb{R}_+)$ **допустимым** продолжением функции $u(x)$. Для допустимого продолжения очевидно неравенство $\mathcal{E}_{s,\Omega}[w]\geqslant\mathcal{E}_{s,\Omega}[w_{sp}]$.

Покажем, что решения с минимальной энергией в задаче (1) можно считать неотрицательными. Действительно, замена $u\to|u|$ уменьшает значение функционала $\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[u]$:

Предложение 1. *Пусть $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ при $s \in (0,1)$. Тогда $|u| \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, и выполнено неравенство*

$$\langle (-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle \geqslant \langle (-\Delta)^s_{Sp} |u|, |u|\rangle.$$

Кроме того, если $u(x)$ меняет знак в Ω, то неравенство строгое.

Доказательство. Дословно повторяет доказательство [8, Теорема 3]. □

3 Доказательство Теоремы 1

Схема доказательства похожа на [12, Теорема 2], однако вложение здесь критическое и требует модификации предельного случая принципа Лионса [6]. Рассмотрим минимизирующую последовательность $u_k(x)$ для функционала (2): согласно Предложению 1 можно считать, что $u_k(x) \geqslant 0$ и $\|u_k\|_{L_{2^*_s}(\Omega)} = 1$. По функциям u_k построим CT-продолжения $w_k\,(X)$ и определим функции $U_k(x)$ формулой

$$U_k(x) := C_s \int\limits_0^\infty t^{1-2s} |\nabla_X w_k(X)|^2\, dt. \tag{11}$$

Поскольку последовательность $\{u_k\}$ ограничена в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, функции w_k ограничены по норме, порождаемой квадратичной формой $\mathcal{E}_{s,\Omega}[w] + \|u\|^2_{L_2(\Omega)}$, а функции U_k и $|u_k|^{2^*_s}$ ограничены в $L_1(\Omega)$. Не умаляя общности, можно считать, что:

- $u_k \rightharpoonup u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$; отсюда следует, что $u_k \to u$ в $L_2(\Omega)$;
- $\nabla_X w_k \rightharpoonup \nabla_X w$ в $L_2(\Omega\times\mathbb{R}_+, t^{1-2s})$ (это соотношение определяет w с точностью до константы);
- $|u_k|^{2^*_s} \rightharpoonup \mu$ и $U_k \rightharpoonup \mathcal{M}$ в пространстве мер на $\overline{\Omega}$.

Из построения u_k и U_k следует, что выполнена цепочка равенств:

$$\int\limits_\Omega 1 d\mathcal{M} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} = \lim_{k\to\infty} \left[\|U_k\|_{L_1(\Omega)} + \|u_k\|^2_{L_2(\Omega)}\right] = \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \lim_{k\to\infty} \|u_k\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)} = \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \Big(\int\limits_\Omega 1 d\mu\Big)^{\frac{2}{2^*_s}}. \tag{12}$$

Следующие утверждения доказаны в §4:

Лемма 1. *Произвольную константу в определении w можно выбрать так, что функция w является CT-продолжением функции u.*

Лемма 2. *Для мер μ и $\mathcal{M}$ справедливы соотношения:*

$$\mu = |u|^{2^*_s} + \sum_{j\in J} \alpha_j \boldsymbol{\delta}_{x_j}; \quad \alpha_j \geqslant 0; \tag{13}$$

$$\mathcal{M} \geqslant U + \sum_{j\in J} \beta_j \boldsymbol{\delta}_{x_j}; \quad \beta_j \geqslant \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \alpha_j^{\frac{2}{2^*_s}}, \tag{14}$$

где $j \in J$ — не более чем счетный набор индексов, $\boldsymbol{\delta}_{x_j}$ — дельта–функции в точках $x_j \in \overline{\Omega}$, а функция U получается из w по формуле (11).

Неравенство (14), равенство (10) и Лемма 1 показывают, что выполнено соотношение

$$\int\limits_{\Omega} 1 d\mathcal{M} \geqslant \|U\|_{L_1(\Omega)} + \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \sum_{j\in J} \alpha_j^{\frac{2}{2^*_s}} = \langle (-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle + \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \sum_{j\in J} \alpha_j^{\frac{2}{2^*_s}}$$

откуда, с учетом (2), получаем оценку на левую часть (12)

$$\int\limits_{\Omega} 1 d\mathcal{M} + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} \geqslant \langle (-\Delta)^s_{Sp} u, u\rangle + \|u\|^2_{L_2(\Omega)} + \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \sum_{j\in J} \alpha_j^{\frac{2}{2^*_s}} \geqslant \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \Big(\|u\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)} + \sum_{j\in J} \alpha_j^{\frac{2}{2^*_s}} \Big). \tag{15}$$

Отсюда, преобразуя правую часть (12) с учетом (13), получаем

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \Big(\|u\|^{2^*_s}_{L_{2^*_s}(\Omega)} + \sum_{j\in J} \alpha_j \Big)^{\frac{2}{2^*_s}} \geqslant \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \Big(\|u\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)} + \sum_{j\in J} \alpha_j^{\frac{2}{2^*_s}} \Big). \tag{16}$$

Эта оценка может быть выполнена только в том случае, если в ее правой части есть ровно одно ненулевое слагаемое, а сама оценка обращается в равенство. Таким образом, у нас есть два варианта:

1 (*Компактность*). Все α_j равны нулю: будучи частью (16), оценка (15) также вырождается в равенство и $\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[u] = \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega}$, поэтому u минимизирует функционал $\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[u]$ и, после домножения на подходящую константу, является решением задачи (1) с минимальной энергией.

2 (*Концентрация*). Есть ровно одно ненулевое слагаемое α_j : можно считать, что $\alpha_0 = 1$ и $u \equiv 0$.

Доказательства следующих утверждений содержатся в §§4–5:

Лемма 3. *В случае концентрации выполнено неравенство*

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \geqslant \min\Big(\mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n_+}, \mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n} \Big). \tag{17}$$

Замечание 2. Правая часть (17) равна $\mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n_+}$, как показывает (4).

Лемма 4. *Пусть $n \geqslant 3$ и $2s > 1$. Тогда существует функция $\mathcal{V} \in \mathcal{H}^s(\Omega)$, такая что*

$$\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[\mathcal{V}] < \mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n_+}.$$

Из Леммы 4 следует невозможность неравенства (17), что исключает возможность концентрации и доказывает Теорему.

4 Доказательство Лемм 1-3

Доказательство Леммы 1. Напомним, что функция w определялась сходимостью $\nabla_X w_k \rightharpoonup \nabla_X w$ в $L_2(\Omega \times \mathbb{R}_+, t^{1-2s})$, где w_k являются CT-продолжениями функций u_k. Для самих функций u_k выполнено $u_k \rightharpoonup u$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, и, следовательно, $u_k \to u$ в $L_2(\Omega)$.

Для функции $u \in \mathcal{H}^s(\Omega)$ обозначим ее CT-продолжение через $\widetilde{w}$. Это продолжение может быть разложено в ряд Фурье по собственным функциям задачи Неймана для оператора Лапласа (см. [10, (3.1)-(3.8)]):

$$\widetilde{w}(X) = \sum_{i=0}^{\infty} d_i(t)\phi_i(x), \quad \text{с} \quad d_i(t) = \langle u, \phi_i\rangle \cdot \mathcal{Q}_s(\lambda_i^{1/2}t), \quad \mathcal{Q}_s(\tau) := \tau^s \frac{2^{1-s}}{\Gamma(s)} \mathcal{K}_s(\tau), \tag{18}$$

где $\mathcal{K}_s(\tau)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. Для функций $\mathcal{K}_s$ выполнены следующие асимптотики (см., напр., [10, (3.7)]):

$$\mathcal{K}_s(\tau) \sim \Gamma(s)2^{s-1}\tau^{-s} \quad \text{при } \tau \to 0; \quad \mathcal{K}_s(\tau) \sim \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\tau}\left(1 + O(\tau^{-1})\right) \quad \text{при } \tau \to \infty,$$

откуда следует оценка

$$\mathcal{Q}_s(\tau) \leqslant C \cdot \min(1, \tau^{-1}). \tag{19}$$

Поэтому при любом $i \geqslant 1$ выполнено

$$\|\mathcal{Q}_s(\lambda_i^{1/2}t)\|^2_{L_2(\mathbb{R}_+)} \leqslant \int_0^1 \mathcal{Q}_s^2(\lambda_i^{1/2}t)\, dt + C\int_1^{\infty} \lambda_i^{-1}t^{-2}\, dt \leqslant C(\lambda_1).$$

Пусть $\delta < 1$. Покажем, что $w_k \to \widetilde{w}$ в $L_2\left(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}]\right)$: из представления (18) имеем

$$\|\widetilde{w} - w_k\|^2_{L_2(\Omega\times[\delta,\delta^{-1}])} = \sum_{i=0}^{\infty}\langle u - u_k, \phi_i\rangle^2 \cdot \|\mathcal{Q}_s(\lambda_i^{1/2}t)\|^2_{L_2[\delta,\delta^{-1}]} \leqslant C(\delta, \lambda_1) \cdot \|u - u_k\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

С другой стороны, пользуясь разложением (6), запишем w_k как сумму ортогональных в $L_2\left(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}]\right)$ слагаемых:

$$w_k = \overline{w}_k + c_k, \quad \overline{w}_k := w_k - (\delta^{-1} - \delta)|\Omega|^{-1} \cdot \int_{\delta}^{\delta^{-1}}\int_{\Omega} w_k\, dX.$$

Поскольку $\nabla_X w_k \rightharpoonup \nabla_X w$ в $L_2\left(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}]\right)$, получаем $\overline{w}_k \rightharpoonup \overline{w}$ в $W_2^1\left(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}]\right)$. Отсюда следует сходимость $\overline{w}_k \to \overline{w}$ в $L_2\left(\Omega \times [\delta, \delta^{-1}]\right)$, что влечет $w = \widetilde{w} + C$. $\square$

Доказательство Леммы 2. Основано на предельном случае принципа Лионса [6] и проводится аналогично [18, Теорема 1.4.2]. Разберем два случая: $u \equiv 0$ и $u \not\equiv 0$.

1. Пусть $u \equiv 0$. Воспользуемся представлением (6): пусть $u_k := \overline{u}_k + c_k$. Поскольку $u_k \to u \equiv 0$ сильно в $L_2(\Omega)$, из равенства

$$\|u_k\|^2_{L_2(\Omega)} = \|\overline{u}_k\|^2_{L_2(\Omega)} + c_k^2 \cdot |\Omega|$$

имеем $\overline{u}_k \to 0$ в $L_2(\Omega)$ и $c_k \to 0$. Более того, для $\eta \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ и любого $\epsilon > 0$ выполнено

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k\eta\|^{2_s^*}_{L_{2_s^*}(\Omega)} \leqslant \lim_{k\to\infty}\left[(1+\epsilon)\cdot\|\overline{u}_k\eta\|^{2_s^*}_{L_{2_s^*}(\Omega)} + C(\epsilon)c_k^{2_s^*}\|\eta\|^{2_s^*}_{L_{2_s^*}(\Omega)}\right] = (1+\epsilon)\cdot\lim_{k\to\infty}\|\overline{u}_k\eta\|^{2_s^*}_{L_{2_s^*}(\Omega)}. \tag{20}$$

Из (7) следует, что $\langle(-\Delta)^s_{Sp}\overline{u}_k, \overline{u}_k\rangle = \langle(-\Delta)^s_{Sp}u_k, u_k\rangle$, поэтому из (20) при $\eta\equiv 1$ получаем

$$\lim_{k\to\infty}\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[\overline{u}_k] \leqslant \lim_{k\to\infty}\frac{\langle(-\Delta)^s_{Sp}u_k, u_k\rangle + \|u_k\|^2_{L_2(\Omega)}}{(1+\epsilon)^{-\frac{2}{2^*_s}}\cdot\|u_k\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}} = (1+\epsilon)^{\frac{2}{2^*_s}}\cdot\lim_{k\to\infty}\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[u_k] = (1+\epsilon)^{\frac{2}{2^*_s}}\cdot\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega}.$$

Поскольку ϵ произвольно, получаем, что последовательность $\{\overline{u}_k\}$ является минимизирующей. Более того, из обратного к (20) неравенства

$$\lim_{k\to\infty}\|\overline{u}_k\eta\|^{2^*_s}_{L_{2^*_s}(\Omega)} \leqslant \lim_{k\to\infty}\Big[(1+\epsilon)\cdot\|u_k\eta\|^{2^*_s}_{L_{2^*_s}(\Omega)} + C(\epsilon)c_k^{2^*_s}\|\eta\|^{2^*_s}_{L_{2^*_s}(\Omega)}\Big] = (1+\epsilon)\cdot\lim_{k\to\infty}\|u_k\eta\|^{2^*_s}_{L_{2^*_s}(\Omega)},$$

следует $|\overline{u}_k|^{2^*_s}\rightharpoonup\mu$. CT-продолжения функций $\overline{u}_k$ имеют вид $\overline{w}_k := w_k - c_k$, и поэтому функции U_k из формулы (11) не меняются при замене u_k на $\overline{u}_k$.

Из того факта, что $\overline{w}_k\eta$ — допустимое продолжение $\overline{u}_k\eta$, имеем

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega}\cdot\|\overline{u}_k\eta\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)} \leqslant \langle(-\Delta)^s_{Sp}\overline{u}_k\eta, \overline{u}_k\eta\rangle + \|\overline{u}_k\eta\|^2_{L_2(\Omega)} \leqslant C_s\mathcal{E}_{s,\Omega}[\overline{w}_k\eta] + \|\overline{u}_k\eta\|^2_{L_2(\Omega)}.$$

Из сходимости $\overline{u}_k\to 0$ в $L_2(\Omega)$ получаем

$$\begin{aligned}\frac{\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega}}{C_s}\Big(\int\limits_\Omega \eta^{2^*_s}(x)\,d\mu\Big)^{\frac{2}{2^*_s}} &\leqslant \lim_{k\to\infty}\mathcal{E}_{s,\Omega}[\overline{w}_k\eta]\\ &= \lim_{k\to\infty}\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega\Big[t^{1-2s}|\nabla_X\overline{w}_k|^2\eta^2 + 2t^{1-2s}\langle\nabla_x\overline{w}_k, \nabla_x\eta\rangle\overline{w}_k\eta + t^{1-2s}|\nabla_x\eta|^2\overline{w}_k^2\Big]\,dX.\end{aligned} \tag{21}$$

Предел первого слагаемого в (21) равен

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega t^{1-2s}|\nabla_X\overline{w}_k|^2\eta^2\,dX = C_s^{-1}\cdot\int\limits_\Omega\eta^2(x)\,d\mathcal{M}.$$

Покажем, что предел третьего слагаемого в (21) равен нулю. Воспользуемся представлением (18) для $\overline{w}_k$ (здесь суммирование ведется по $i\geqslant 1$)

$$\overline{w}_k(X) = \sum_{i=1}^\infty d_{ik}(t)\phi_i(x) \quad \text{с} \quad d_{ik}(t) = \langle\overline{u}_k, \phi_i\rangle\cdot\mathcal{Q}_s(\lambda_i^{1/2}t).$$

Из оценки (19) и того факта, что $\lambda_i\to\infty$, имеем

$$\int\limits_\Omega\overline{w}_k^2(X)|\nabla_x\eta|^2\,dx \leqslant C(\lambda_1)\cdot\sum_{i=1}^\infty\langle\overline{u}_k, \phi_i\rangle^2\cdot\min(1, t^{-2})$$

откуда получаем требуемое равенство

$$\lim_{k\to\infty}\int\limits_0^\infty\int\limits_\Omega t^{1-2s}|\nabla_x\eta|^2\overline{w}_k^2\,dX \leqslant C\Big(\int\limits_0^1 t^{1-2s}dt + \int\limits_1^\infty t^{-1-2s}dt\Big)\cdot\lim_{k\to\infty}\int\limits_\Omega\overline{u}_k^2\,dx = 0.$$

Второе слагаемое в (21) оценивается через первое и третье по неравенству Коши-Буняковского-Шварца, поэтому неравенство (21) принимает вид

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \Big(\int\limits_{\Omega} \eta^{2^*_s}(x)\, d\mu \Big)^{\frac{2}{2^*_s}} \leqslant \lim_{k\to\infty} \mathcal{E}_{s,\Omega}[\overline{w}_k \eta] = \int\limits_{\Omega} \eta^2(x)\, d\mathcal{M}. \tag{22}$$

Дальнейшие рассуждения совпадают с локальным случаем; для удобства читателя приведем их полностью: аппроксимацией на любом борелевском множестве $E \subset \Omega$ получаем неравенство

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \mu(E)^{\frac{2}{2^*_s}} \leqslant \mathcal{M}(E). \tag{23}$$

Ввиду конечности меры $\mathcal{M}$ множество ее атомов $A := \{x \in \Omega \mid \mathcal{M}(\{x\}) > 0\}$ не более чем счетно. Обозначим множество индексов через J, тогда $A = \{x_j\}_{j\in J}$, $\beta_j := \mathcal{M}(\{x_j\})$, и выполнено неравенство $\mathcal{M} \geqslant \sum\limits_{j\in J} \beta_j \boldsymbol{\delta}_{\boldsymbol{x_j}}$. Поскольку из (23) следует абсолютная непрерывность μ относительно $\mathcal{M}$, имеем

$$\mu(E) = \int\limits_E f(x)\, d\mathcal{M}, \quad \text{где} \quad f(x) := \lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(\mathbb{B}_r(x)\right)}{\mathcal{M}\left(\mathbb{B}_r(x)\right)} \quad \text{для } \mathcal{M}\text{-п.в. } x \in \Omega.$$

Также в силу (23) получаем

$$\lim_{r\to 0} \frac{\mu\left(\mathbb{B}_r(x)\right)}{\mathcal{M}\left(\mathbb{B}_r(x)\right)} \leqslant \lim_{r\to 0} \frac{\mathcal{M}^{\frac{2s}{n-2s}}\left(\mathbb{B}_r(x)\right)}{\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega}} = 0 \quad \mathcal{M}\text{-п.в. на } \Omega \setminus A.$$

Для окончания доказательства обозначим $\alpha_j := \beta_j f(x_j)$, неравенства между α_j и β_j следуют из (23).

2. Теперь рассмотрим общий случай. Положим $\widehat{u_k} := u_k - u$, тогда [18, Теорема 1.4.1] показывает, что $|\widehat{u_k}|^{2^*_s}$ слабо сходятся к мере $\mu - |u|^{2^*_s}$ на $\overline{\Omega}$. Представление для μ получается применением п.1 для функций $\widehat{u_k}$.

Получим неравенство для меры $\mathcal{M}$. По функциям $\widehat{u_k}$ строим СТ-продолжения $\widehat{w_k}$ и функции $\widehat{U_k}(x)$ из формулы (11). Из Леммы 1 следует, что $\widehat{w_k} = w_k - w$ (продолжение разности равно разности продолжений), поэтому для любой $\eta(x) \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ имеем

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} \frac{U_k - \widehat{U_k}}{C_s} \cdot \eta(x)\, dx &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\infty} t^{1-2s} \left(|\nabla_X w_k|^2 - |\nabla_X (w_k - w)|^2 \right) \eta(x)\, dX \\ &= \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} \int\limits_0^{\infty} t^{1-2s} \left(2\langle \nabla_X w_k, \nabla_X w \rangle - |\nabla_X w|^2 \right) \eta(x)\, dX \stackrel{*}{=} \int\limits_{\Omega} \frac{U}{C_s} \cdot \eta(x)\, dx,\end{aligned}$$

(равенство (*) следует из $\nabla_X w_k \rightharpoonup \nabla_X w$). Используя п.1, получаем требуемое

$$\mathcal{M} = \lim_{k\to\infty} U_k = U + \lim_{k\to\infty} \widehat{U_k} \geqslant U + \sum_{j\in J} \beta_j \boldsymbol{\delta}_{x_j}. \qquad \square$$

Доказательство Леммы 3. Напомним, что $\{u_k\}$ — минимизирующая последовательность для функционала (2), $|u_k|^{2^*_s} \rightharpoonup \boldsymbol{\delta}_{x_0}$ в пространстве мер на $\overline{\Omega}$, а $\mathcal{M} = \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \cdot \boldsymbol{\delta}_{x_0}$. В частности, это означает, что $u_k \rightharpoonup 0$ в $\mathcal{H}^s(\Omega)$, и мы находимся в условиях доказательства п.1 Леммы 2. Поэтому $\{\overline{u}_k\}$ также является минимизирующей последовательностью для функционала (2). Также, далее будем считать $x_0 = 0$.

Покажем, что и последовательность $\{\overline{u}_k\varphi_\epsilon\}$ минимизирующая. Действительно, $\|\overline{u}_k\varphi_\epsilon\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)} \to 1$, а для числителя функционала (2) из (22) при $\eta = \varphi_\epsilon$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} \langle (-\Delta)^s_{Sp}\overline{u}_k\varphi_\epsilon, \overline{u}_k\varphi_\epsilon\rangle \leqslant C_s \cdot \lim_{k\to\infty} \mathcal{E}_{s,\Omega}[\overline{w}_k\varphi_\epsilon] = \int\limits_\Omega \varphi_\epsilon^2(x)\, d\mathcal{M} = \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega}.$$

Поскольку $\overline{u}_k \to 0$ в $L_2(\Omega)$, получаем $\lim\limits_{k\to\infty} \mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[\overline{u}_k\varphi_\epsilon] \leqslant \mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega}$, и поэтому

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} = \lim_{k\to\infty} \mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[\overline{u}_k\varphi_\epsilon] = \lim_{k\to\infty} \frac{\langle (-\Delta)^s_{Sp}\overline{u}_k\varphi_\epsilon, \overline{u}_k\varphi_\epsilon\rangle}{\|\overline{u}_k\varphi_\epsilon\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{C_s\mathcal{E}_{s,\Omega}\left[\overline{w}_k\varphi_\epsilon\right]}{\|\overline{u}_k\varphi_\epsilon\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}}.$$

Разберем два случая: $0 \in \Omega$ и $0 \in \partial\Omega$.

1. Пусть $0 \in \Omega$. Продолжим функцию $\overline{u}_k\varphi_\epsilon$ нулем и обозначим ее КС-продолжение в $\mathbb{R}^n$ через $\dot{w}_k$. Поскольку $\overline{w}_k\varphi_\epsilon$ является допустимым продолжением $\overline{u}_k\varphi_\epsilon$ в $\mathbb{R}^n$, имеем

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} = \lim_{k\to\infty} \frac{C_s\mathcal{E}_{s,\Omega}\left[\overline{w}_k\varphi_\epsilon\right]}{\|\overline{u}_k\varphi_\epsilon\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{C_s\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}\left[\overline{w}_k\varphi_\epsilon\right]}{\|\overline{u}_k\varphi_\epsilon\|^2_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}} \geqslant \lim_{k\to\infty} \frac{C_s\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}\left[\dot{w}_k\right]}{\|\overline{u}_k\varphi_\epsilon\|^2_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}} \geqslant \mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n}.$$

2. Пусть $0 \in \partial\Omega$. При малых ϵ множество $\partial\Omega \cap B_\epsilon$ представляет собой график функции. Не умаляя общности, пусть $x_n = F(x')$, где $F \in \mathcal{C}^2$, $F(0) = 0$ и $\nabla_{x'}F(0) = 0$. Определим замену переменной $\Theta^{-1}(x) := (x', x_n - F(x'))$: она распрямляет границу и имеет единичный якобиан. Обратная замена имеет вид $\Theta(x) = (x', x_n + F(x'))$, и выполнено соотношение

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} = \lim_{k\to\infty} \frac{C_s\mathcal{E}_{s,\Omega}\left[\overline{w}_k\varphi_\epsilon\right]}{\|\overline{u}_k\varphi_\epsilon\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}} = \lim_{k\to\infty} \frac{C_s \cdot \int\limits_0^\infty \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} t^{1-2s}|\nabla_X\left[\overline{w}_k\varphi_\epsilon\right](\Theta(x),t)|^2\, dX \cdot (1 + o_\epsilon(1))}{\Big(\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left[\overline{u}_k\varphi_\epsilon\right]^{2^*_s}(\Theta(x))\, dx\Big)^{\frac{2}{2^*_s}}}$$

($o_\epsilon(1)$ в числителе возникает из оценки производных $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ при замене переменных в градиенте). Ввиду того, что функция $\overline{w}_k(\Theta(x),t) \cdot \varphi_\epsilon(\Theta(x))$ является допустимым продолжением функции $\overline{u}_k(\Theta(x)) \cdot \varphi_\epsilon(\Theta(x))$, выполнено неравенство

$$\mathcal{S}^{Sp}_{s,\Omega} \geqslant \mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n_+} \cdot (1 + o_\epsilon(1)).$$

Поскольку ϵ может быть выбрано сколь угодно малым, Лемма 3 доказана. $\square$

5 Доказательство Леммы 4

Предварительно получим оценки на КС-продолжение $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ функции $\Phi_{s,a}(x)$. Оно является решением задачи

$$-div(t^{1-2s}\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(X)) = 0 \quad \text{в} \quad \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+; \quad \mathcal{W}_{s,a}\big|_{t=0} = \Phi_{s,a}(x), \tag{24}$$

а также единственным минимайзером функционала $\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}$ в пространстве $\mathfrak{W}_s\left(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}_+\right)$. Отсюда следует, что продолжение $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ является невозрастающей функцией от $|x|$: симметризация Шварца по x не увеличивает $\mathcal{E}_{s,\mathbb{R}^n}$ (см. [5, Теорема 2.31] для симметризации Штейнера; симметризация Шварца может быть получена как предел симметризаций Штейнера), а ее результат является допустимым продолжением $\Phi_{s,a}(x)$. Также отметим, что, в силу симметрии, продолжение $\mathcal{W}_{s,a}(X)$, ограниченное на $\mathbb{R}^n_+\times\mathbb{R}_+$, является СТ-продолжением $\Phi_{s,a}(x)$ в $\mathbb{R}^n_+$.

Лемма 5. *Для функций $\Phi_{s,a}(x)$ и $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ выполнены равенства*

$$\Phi_{s,a}(ax)=a^{2s-n}\cdot\Phi_{s,1}(x)\quad \text{и}\quad \mathcal{W}_{s,a}(aX)=a^{2s-n}\cdot\mathcal{W}_{s,1}(X),\tag{25}$$

а также оценки (при $|x|>1$ и $|X|>1$ соответственно)

$$\Phi_{s,1}(x)\leqslant C|x|^{2s-n}\quad \text{и}\quad \mathcal{W}_{s,1}(X)\leqslant C|X|^{2s-n}.\tag{26}$$

Более того, для градиента $\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(X)$ выполнено равенство

$$\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(aX)=a^{2s-n-1}\cdot\nabla_X\mathcal{W}_{s,1}(X),\tag{27}$$

а при $|X|>1$ и $2s>1$ имеет место оценка

$$|\nabla_X\mathcal{W}_{s,1}(X)|\leqslant C|X|^{2s-n-1}.\tag{28}$$

Доказательство. Равенство (25) и оценка (26) для функции $\Phi_{s,a}$ очевидны из ее определения. Для доказательства оценок на продолжение $\mathcal{W}_{s,a}$ выпишем его в явном виде: в [3] было показано, что КС-продолжение функции u может быть получено по формуле

$$w(X)=\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_s(x-\xi,t)\cdot(-\Delta)^s u(\xi)\,d\xi\quad \text{с}\quad G_s(X):=\frac{C}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n-2s}{2}}}.$$

Поскольку функция $\Phi_{s,a}(x)$ удовлетворяет уравнению

$$(-\Delta)^s\Phi_{s,a}(x)=\frac{\mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n}}{\|\Phi_{s,a}\|^{2^*_s-2}_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}}\cdot\Phi_{s,a}^{2^*_s-1}(x)\quad \text{в}\quad \mathbb{R}^n,\tag{29}$$

получаем

$$\mathcal{W}_{s,a}(X)=\frac{\mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n}}{\|\Phi_{s,a}\|^{2^*_s-2}_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}G_s(x-\xi,t)\cdot\Phi_{s,a}^{2^*_s-1}(\xi)\,d\xi.\tag{30}$$

Градиент $\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(X)$ получается из (30) дифференцированием:

$$\nabla_X\mathcal{W}_{s,a}(X)=\frac{\mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n}}{\|\Phi_{s,a}\|^{2^*_s-2}_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}\nabla_X G_s(x-\xi,t)\cdot\Phi_{s,a}^{2^*_s-1}(\xi)\,d\xi.$$

Равенства (25) и (27) для функции $\mathcal{W}_{s,a}(X)$ следуют из $\|\Phi_{s,a}\|^{2^*_s-2}_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}=a^{-2s}\cdot\|\Phi_{s,1}\|^{2^*_s-2}_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}$. Для примера получим равенство (25):

$$\mathcal{W}_{s,a}(aX)=\frac{\mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n}\cdot a^{2s}}{\|\Phi_{s,1}\|^{2^*_s-2}_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n)}}\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^n}\frac{C\cdot a^{-(n+2s)}\Phi_{s,1}^{2^*_s-1}(\xi)\cdot a^n}{(|x-\xi|^2+t^2)^{\frac{n-2s}{2}}\,a^{n-2s}}\,d\xi=a^{2s-n}\cdot\mathcal{W}_{s,1}(X).$$

Остается получить оценки для $\mathcal{W}_{s,1}(X)$ и $\nabla_X \mathcal{W}_{s,1}(X)$. Они доказываются идентично; получим, например, оценку (28) для $\nabla_X \mathcal{W}_{s,1}(X)$. Поскольку для $|\nabla_X G_s(X)|$ выполнено очевидное неравенство

$$|\nabla_X G_s(X)| \leqslant \frac{C}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}},$$

имеем

$$|\nabla_X \mathcal{W}_{s,1}(X)| \leqslant \Bigg(\int\limits_{|\xi|\leqslant \frac{|X|}{2}} + \int\limits_{|\xi|>\frac{|X|}{2}} \Bigg) \frac{C d\xi}{(|x-\xi|^2+t^2)^{\frac{n-2s+1}{2}} (1+|\xi|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} =: A_1 + A_2.$$

Оценка для A_1 следует из цепочки неравенств $\sqrt{|x-\xi|^2+t^2} \geqslant |X| - |\xi| \geqslant \frac{|X|}{2}$:

$$A_1 \leqslant \frac{C}{|X|^{n-2s+1}} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{(1+|\xi|^2)^{\frac{n+2s}{2}}} = \frac{C}{|X|^{n-2s+1}}.$$

Оценка для A_2 следует из неравенств $3|\xi| \geqslant |x| + |\xi| \geqslant |x-\xi|$ и $2s > 1$:

$$A_2 \leqslant \frac{C}{|X|^{n-2s+1}} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{n-2s+1} (1+|x-\xi|^2)^{2s-\frac{1}{2}}} = \frac{C}{|X|^{n-2s+1}}. \qquad \square$$

Доказательство Леммы 4. На границе $\mathcal{C}^2$-гладкой области Ω всегда найдется такая точка $\widetilde{x}$, что:

- Область Ω выпукла в малой окрестности $B_\varepsilon(\widetilde{x})$
- Средняя кривизна границы $\partial\Omega$ в точке $\widetilde{x}$ (обозначим ее H_0) положительна
- Вся область Ω находится по одну сторону от касательной плоскости к $\partial\Omega$

(например, в качестве $\widetilde{x}$ подходит точка касания сферы наименьшего радиуса, описанной вокруг Ω, и самой Ω). Не умаляя общности можно считать, что $\widetilde{x} = 0$, а ось x_n направлена вдоль внутренней нормали к $\partial\Omega$, и, таким образом, $\Omega \subset \mathbb{R}^n_+$. В таких координатах оказывается, что в качестве искомой функции $\mathcal{V}$ можно взять функцию $\Phi_{s,a}(x)$ с малым параметром a.

Из уравнения (24) интегрированием по частям (с учетом (29) и (4)) получаем:

$$0 = C_s \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega div\left(t^{1-2s} \nabla_X \mathcal{W}_{s,a}\right) \mathcal{W}_{s,a}\, dX = -C_s \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega t^{1-2s} |\nabla_X \mathcal{W}_{s,a}|^2\, dX$$

$$+ \frac{\mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n_+}}{\|\Phi_{s,a}\|^{2^*_s-2}_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n_+)}} \cdot \int\limits_\Omega \Phi^{2^*_s}_{s,a}\, dx + C_s \int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial\Omega} t^{1-2s} \langle \nabla_x \mathcal{W}_{s,a}, \vec{n} \rangle \cdot \mathcal{W}_{s,a}\, dX,$$

откуда, поскольку $\mathcal{W}_{s,a}$ — допустимое продолжение $\Phi_{s,a}$ в Ω, имеем

$$\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[\Phi_{s,a}] = \frac{\langle(-\Delta)^s_{Sp}\Phi_{s,a}, \Phi_{s,a}\rangle + \|\Phi_{s,a}\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|\Phi_{s,a}\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}} \leqslant \frac{C_s \int\limits_0^\infty \int\limits_\Omega t^{1-2s}|\nabla_X \mathcal{W}_{s,a}|^2\, dX + \|\Phi_{s,a}\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|\Phi_{s,a}\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}}$$

$$= \mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n_+} \cdot \left(\frac{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2^*_s}(\Omega)}}{\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n_+)}}\right)^{2^*_s-2} + \frac{C_s \int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial\Omega} t^{1-2s}\langle\nabla_x \mathcal{W}_{s,a},\, \vec{n}\rangle \cdot \mathcal{W}_{s,a}\, dX}{\|\Phi_{s,a}\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}} + \frac{\|\Phi_{s,a}\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|\Phi_{s,a}\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}}. \quad (31)$$

При интегрировании радиальных функций в окрестности нуля для формы объема выполнено представление (см., например, [14, §2.6])

$$dx = \frac{1}{2}\left(\omega_{n-1}r^{n-1} - H_0 \cdot \omega_{n-2}r^n + o(r^n)\right) dr.$$

Оценим каждый член в (31) по отдельности.

1. Для оценки первого члена получим асимптотику $\|\Phi_{s,a}\|^{2^*_s}_{L_{2^*_s}(\Omega)}$ при малых a :

$$\|\Phi_{s,a}\|^{2^*_s}_{L_{2^*_s}(\Omega)} = \int\limits_\Omega (a^2+|x|^2)^{-n}\, dx = \Big(\int\limits_{\Omega\cap B_\varepsilon} + \int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon}\Big)(a^2+|x|^2)^{-n}\, dx = \int\limits_{\Omega\cap B_\varepsilon}(a^2+|x|^2)^{-n}\, dx$$

$$+ C(\varepsilon) = \int\limits_0^\varepsilon \frac{\omega_{n-1}r^{n-1}}{2(a^2+r^2)^n}\, dr - \int\limits_0^\varepsilon \frac{H_0\cdot\omega_{n-2}r^n + o(r^n)}{2(a^2+r^2)^n}\, dr + C(\varepsilon) =: B_1 - B_2 + C(\varepsilon).$$

Главный член B_1 оценивается как

$$B_1 = a^{-n}\,\frac{\omega_{n-1}}{2}\left(\mathcal{B}\left(\tfrac{n}{2},\tfrac{n}{2}\right) - \int\limits_{\frac{\varepsilon}{a}}^\infty \frac{r^{n-1}dr}{(1+r^2)^n}\right) = a^{-n}\,\frac{\omega_{n-1}}{2}\,\mathcal{B}\left(\tfrac{n}{2},\tfrac{n}{2}\right) - C(\varepsilon).$$

Оценка B_2 получается следующим образом:

$$B_2 = a^{1-n}(1+o_\varepsilon(1))\,\frac{H_0\omega_{n-2}}{2}\left(\mathcal{B}\left(\tfrac{n+1}{2},\tfrac{n-1}{2}\right) - \int\limits_{\frac{\varepsilon}{a}}^\infty \frac{r^n dr}{(1+r^2)^n}\right)$$

$$= a^{1-n}\,\frac{\omega_{n-1}}{2}\,\mathcal{B}\left(\tfrac{n}{2},\tfrac{n}{2}\right)\cdot C_1(1+o_\varepsilon(1)) - C(\varepsilon), \quad \text{где} \quad C_1 = \frac{H_0\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Объединяя оценки для B_1 и B_2 , мы получаем оценку нормы $\|\Phi_{s,a}\|_{L_{2^*_s}(\Omega)}$:

$$\|\Phi_{s,a}\|^{2^*_s}_{L_{2^*_s}(\Omega)} = a^{-n}\,\frac{\omega_{n-1}}{2}\,\mathcal{B}\left(\tfrac{n}{2},\tfrac{n}{2}\right)\cdot[1 - C_1 a(1+o_\varepsilon(1))] + C(\varepsilon), \quad (32)$$

а из нее оценку первого члена в (31)

$$\frac{\|\Phi_{s,a}\|^{2^*_s-2}_{L_{2^*_s}(\Omega)}}{\|\Phi_{s,a}\|^{2^*_s-2}_{L_{2^*_s}(\mathbb{R}^n_+)}} = \left(\frac{a^{-n}\,\frac{\omega_{n-1}}{2}\,\mathcal{B}\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)\cdot[1 - C_1 a(1+o_\varepsilon(1))] + C(\varepsilon)}{a^{-n}\,\frac{\omega_{n-1}}{2}\,\mathcal{B}\left(\frac{n}{2},\frac{n}{2}\right)}\right)^{\frac{2s}{n}}$$

$$= 1 - C_2 a\cdot[1 + o_\varepsilon(1) + C(\varepsilon)o_a(1)] \quad \text{с константой } C_2 = \tfrac{2s}{n}\cdot C_1 > 0. \quad (33)$$

2. Оценка последнего члена в (31) зависит от n и s. Выполнено равенство

$$\|\Phi_{s,a}\|^2_{L_2(\Omega)} = \Big(\int\limits_{\Omega\cap B_\varepsilon} + \int\limits_{\Omega\setminus B_\varepsilon} \Big)(a^2+|x|^2)^{2s-n}\,dx = \int\limits_{\Omega\cap B_\varepsilon} (a^2+|x|^2)^{2s-n}\,dx + C(\varepsilon).$$

Поскольку $\Omega \cap B_\varepsilon$ содержится в $\mathbb{R}^n_+ \cap B_\varepsilon$, первый интеграл оценивается сверху

$$\int\limits_{B_\varepsilon\cap\mathbb{R}^n_+} (a^2+|x|^2)^{2s-n}\,dx = \frac{\omega_{n-1}}{2}\int\limits_0^\varepsilon \frac{r^{n-1}}{(a^2+r^2)^{n-2s}}\,dr \leqslant C(\varepsilon)\cdot \begin{cases} a^{4s-n} & \text{при } n>4s,\\ |\ln(a)| & \text{при } n=4s,\\ 1 & \text{при } n<4s,\end{cases}$$

(заметим, что эта оценка точна по порядку), и, с учетом (32), имеем

$$\frac{\|\Phi_{s,a}\|^2_{L_2(\Omega)}}{\|\Phi_{s,a}\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}} = \frac{\|\Phi_{s,a}\|^2_{L_2(\Omega)}}{Ca^{2s-n}\cdot[1-Ca(1+o_\varepsilon(1))]} \leqslant C(\varepsilon)\cdot \begin{cases} a^{2s} & \text{при } n>4s,\\ a^{n-2s}|\ln(a)| & \text{при } n=4s,\\ a^{n-2s} & \text{при } n<4s.\end{cases} \qquad (34)$$

3. Для оценки среднего члена в (31) разобьем его числитель на две части:

$$\Big(\int\limits_{\partial\Omega\cap B_\varepsilon} + \int\limits_{\partial\Omega\setminus B_\varepsilon} \Big)\int\limits_0^\infty t^{1-2s}\langle\nabla_x\mathcal{W}_{s,a},\,\vec{n}\rangle\cdot\mathcal{W}_{s,a}\,dX =: E_1+E_2.$$

Поскольку функция $\mathcal{W}_{s,a}$ радиальна по x и убывает с ростом радиуса, а $\Omega\cap B_\varepsilon$ выпукла, получаем, что нормальная производная $\langle\nabla_x\mathcal{W}_{s,a},\,\vec{n}\rangle$ отрицательна при $x\in\partial\Omega\cap B_\varepsilon$. Отсюда следует $E_1\leqslant 0$.

Замечание 3. Более тонкие вычисления показывают, что $E_1 \asymp a^{1+2s-n}$, что после деления на $\|\Phi_{s,a}\|^2_{L_{2^*_s}(\Omega)}$ даст вклад порядка a в (31). Отрицательный член такого порядка у нас уже есть, поэтому уточнение оценки $E_1\leqslant 0$ избыточно.

Для получения оценки на E_2 воспользуемся оценками (26) и (28):

$$\begin{aligned} E_2 &= \int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial\Omega\setminus B_\varepsilon} t^{1-2s}\langle\nabla_x\mathcal{W}_{s,a},\,\vec{n}\rangle\cdot\mathcal{W}_{s,a}\,dS_xdt \leqslant \int\limits_0^\infty \int\limits_{\partial\Omega\setminus B_\varepsilon} t^{1-2s}|\nabla_x\mathcal{W}_{s,a}|\cdot|\mathcal{W}_{s,a}|\,dS_xdt \\ &\leqslant Ca^{1-2s+n-1+1-2n+4s-1}\int\limits_{a^{-1}(\partial\Omega\setminus B_\varepsilon)}\int\limits_0^\infty \frac{t^{1-2s}}{(|x|^2+t^2)^{\frac{n-2s+1}{2}}(|x|^2+t^2)^{\frac{n-2s}{2}}}\,dtdS_x \\ &= Ca^{2s-n}\int\limits_{a^{-1}(\partial\Omega\setminus B_\varepsilon)} |x|^{-2n+2s+1}\,dS_x = C\int\limits_{\partial\Omega\setminus B_\varepsilon}|x|^{-2n+2s+1}\,dS_x \leqslant C(\varepsilon). \qquad (35)\end{aligned}$$

Из оценок (33), (34) и (35) следует оценка

$$\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[\Phi_{s,a}] \leqslant \mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n_+}\cdot\big(1-C_2a\,[1+o_\varepsilon(1)+C(\varepsilon)o_a(1)]\,\big)+C(\varepsilon)a^{n-2s}+C(\varepsilon)a^{2s}(1+o_a(1)).$$

Поскольку $n\geqslant 3$ и $2s>1$, имеем $\min(2s,n-2s)>1$, что при достаточно малых ε и a обеспечивает неравенство $\mathcal{I}^{Sp}_{s,\Omega}[\Phi_{s,a}] < \mathcal{S}^{Sp}_{s,\mathbb{R}^n_+}$, и Лемма 4 доказана! $\square$

Благодарности Автор выражает глубокую признательность А. И. Назарову за ценные обсуждения и критику при решении задачи. Автор также благодарит участников семинара по вариационному исчислению (ПОМИ РАН) и рецензента за полезные замечания, позволившие улучшить текст работы.

Список литературы

[1] Adimurthi and Mancini G., *The Neumann problem for elliptic equations with critical nonlinearity*, Nonlin. Anal. Sc. Norm. Super. di Pisa Quaderni (1991), 9–25.

[2] Aubin T., *Problemes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geom., **11** (1976), no. 4, 573–598.

[3] Caffarelli L. and Silvestre L., *An extension problem related to the fractional Laplacian*, Comm. Part. Diff. Eqs., **32** (2007), no. 7-9, 1245–1260.

[4] Cotsiolis A. and Tavoularis N. K., *Best constants for Sobolev inequalities for higher order fractional derivatives*, J. Math. Anal. Appl., **295** (2004), no. 1, 225–236.

[5] B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Springer, **1150** (2006).

[6] Lions P. L., *The concentration-compactness principle in the Calculus of Variations. The limit case*, Rev. Mat. Iberoam. **1** (1985), 45–121, 145–201.

[7] Musina R. and Nazarov A. I., *On fractional Laplacians*, Comm. Part. Diff. Eqs., **39** (2014), no. 9, 1780–1790.

[8] Musina R. and Nazarov A. I., *On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian*, Nonlin. Analysis – TMA, **121** (2015), 123–129.

[9] Musina R. and Nazarov A. I., *Sobolev inequalities for fractional Neumann Laplacians on half spaces*, Adv. Calc. Var. (2018), DOI: https://doi.org/10.1515/acv-2018-0020.

[10] Stinga P. R. and Torrea J. L., *Extension problem and Harnack's inequality for some fractional operators*, Comm. Part. Diff. Eqs., **35** (2010), no. 11, 2092–2122.

[11] Talenti G., *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. di Mat. Pura ed Appl., **110** (1976), no. 1, 353–372.

[12] Ustinov N., *The effect of curvature in fractional Hardy–Sobolev inequality involving the Spectral Dirichlet Laplacian*, arXiv preprint arXiv:1906.07519; to appear in Transactions of the AMS.

[13] Wang X. J., *Neumann problems of semilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, J. Diff. Eq., **93** (1991), no. 2, 283–310.

[14] Демьянов А. В., Назаров А. И., *О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем*, Алгебра и анализ, **17** (2005), no. 5, 105–140.

[15] Ильин В. П., *Некоторые интегральные неравенства и их применения в теории дифференцируемых функций многих переменных*, Мат. сб., **54** (1961), no. 96, 331–380.

[16] Слободецкий Л. Н., *Обобщенные пространства С.Л. Соболева и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных*, Ученые записки Ленинградского гос. педагогического института им. А.И. Герцена, **197** (1958), 54–112.

[17] Трибель Х., *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, М., Мир, 1980.

[18] Эванс Л. К., *Методы слабой сходимости для нелинейных уравнений с частными производными*, Новосибирск, Тамара Рожковская, 2006.