Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 2020.08.17
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint

MSC 58J50; 58J53; 35P25

Можно услышать форму почти любого барабана!

С.А. Титаренко

1. Определить форму области по ее спектру лапласиана – эта давняя задача матфизики часто именуется задачей о барабане или задачей Каца («Можно ли услышать форму барабана?», М. Кац, 1966). Например, круглый и прямоугольный «барабаны» однозначно определяются своим спектром. Однако на рубеже 90-х годов были найдены первые примеры неизометричных областей с одинаковым спектром (обзор подходов к их построению до 1995 г. см. в [1], до 2010 г. – в [2]). Дальнейшее наращивание разнообразных примеров лишь подчеркивало необходимость создания единого общего метода.

Такой **метод изоспектрии** предложен в данной работе и дает решение задачи Каца: почти все области **однозначно восстанавливаются по своему спектру** ($\Rightarrow$*6*), т.е. для них изоспектральность равносильна изометричности. Исключения – как известные, так и еще не открытые неизометричные барабаны с одинаковым спектром – лежат в узком классе областей, именуемых нами **клеточными** ($\Rightarrow$*4*).

Предваряя изложение метода, отметим его главные особенности: 1) обычно по заданной геометрии строятся функциональные пространства, мы же, напротив, по свойствам подпространств функций строим лежащие «под ними» подобласти; 2) такие подобласти, вообще говоря, оказываются несвязными с конечным числом компонент связности; 3) отображение изоспектрии «не видит» множеств меры нуль, непосредственно сопоставляя друг другу подобласти с непустой внутренностью.

2. Изоспектрия

2.1. Для области Ω ее спектр $Spec(\Omega) = \{0 < \Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \ldots\}$ образован собственными значениями Λ_n для лапласиана: $-\Delta U_n = \Lambda_n U_n$, $U_n\mid_{\partial\Omega} = 0, n = 1, 2, \ldots$. Среди областей $\widetilde{\Omega}$ с таким же спектром могут быть и неизометричные. **Что же общего между изоспектральными областями?**

Пусть $H(\Omega)$ – соболевское пространство функций со стандартным скалярным произведением $(f, g)_{H(\Omega)} = (f, g)_{L_2(\Omega)} + \int\limits_{\Omega}(\nabla f, \nabla g)d\Omega$ и нулевым следом на границе. Задача о собственных значениях лапласиана после домножения на пробную функцию $f \in H(\Omega)$ и интегрирования по частям переписывается ([3]) как соболевское тождество:

$$(U_n, f)_{H(\Omega)} = (1 + \Lambda_n)(U_n, f)_{L_2(\Omega)},\ U_n \in H(\Omega), \forall f \in H(\Omega). \tag{1}$$

Ортонормированные собственные функции $\{U_n\}_{n=1}^{\infty}$ образуют базис в $L_2(\Omega)$ и, как следует из (1), после нормировки $\{U_n/\sqrt{1+\Lambda_n}\}_{n=1}^{\infty}$ дают ортонормированный базис в $H(\Omega)$. Любая функция $f \in H(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ разлагается в ряды Фурье в обоих пространствах, причем в силу (1) ее лебеговы коэффициенты $f_{Ln} = (U_n, f)_{L_2(\Omega)}$ пропорциональны соболевским $f_{Hn} = (U_n/\sqrt{1+\Lambda_n}, f)_{H(\Omega)} = \sqrt{1+\Lambda_n} f_{Ln}$. Пусть унитарный оператор $T : L_2(\Omega) \to L_2(\widetilde{\Omega})$ переводит друг в друга собственные функции $\widetilde{U}_n = TU_n$, действуя по правилу совпадения лебеговых коэффициентов $\widetilde{f}_{Ln} = f_{Ln}$, $\widetilde{f} = Tf$, $\forall n$. В силу пропорциональности с соболевскими коэффициентами этот оператор также переводит $H(\Omega)$ в $H(\widetilde{\Omega})$ с сохранением равенства $\widetilde{f}_{Hn} = f_{Hn}$ тогда и только тогда, когда $\sqrt{1+\widetilde{\Lambda}_n} = \sqrt{1+\Lambda_n}$ для всех n, т.е. $Spec(\widetilde{\Omega}) = Spec(\Omega)$. Таким образом, **изоспектральность областей эквивалентна двойной изометрии функциональных пространств над ними**:

$$Spec(\Omega) = Spec(\widetilde{\Omega}) \iff TH(\Omega) = H(\widetilde{\Omega}) \iff TL_2(\Omega) = L_2(\widetilde{\Omega}). \qquad (2)$$

Оператор T, осуществляющий эту двойную функциональную изометрию, т.е. сохраняющий и лебегово, и соболевское скалярное произведение, кратко назовем **оператором изоспектрии**. Очевидно, что T^{-1} также является оператором изоспектрии.

2.2. Если не оговорено иное, Ω и подобласти $\omega \subset \Omega$ считаются далее каноническими открытыми [4], т.е. совпадающими с внутренностью своего замыкания: $\omega = int\overline{\omega}$. Это, в частности, позволяет исключить выколотые точки, разрезы и др. «дефекты» открытых множеств. Охватывающая область Ω считается связной, а ее подобласти ω, вообще говоря, могут быть несвязными. Функции на этих подобластях продолжаются нулем за их носители, образуя подпространства $L_2(\omega) \subset L_2(\Omega)$ и $H(\omega) \subset H(\Omega)$. Они для несвязных ω являются ортогональными суммами подпространств над компонентами связности, сохраняя для спектра $Spec(\omega) = \{0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \ldots\}$ и собственных функций $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ справедливость соболевского тождества вида (1).

2.3. Так как функции $Tf \in L_2(\widetilde{\Omega})$ строятся по равенству коэффициентов Фурье, требуется обобщить стандартное понятие носителя, пользуясь двойной унитарностью оператора изоспектрии T. **Аннулятором** $\widetilde{\alpha}$ для подпространства $TL_2(\omega)$ будем называть объединение всех кругов $\widetilde{\epsilon} \subset \widetilde{\Omega}$, функциональные пространства над которыми ортогональны этому подпространству: $(\widetilde{g}, Tf) = 0,\ \forall \widetilde{g} \in L_2(\widetilde{\epsilon}), \forall f \in L_2(\omega)$. Теперь определим **носитель** подпространства: $suppTL_2(\omega) = \overline{\widetilde{\Omega} \backslash \widetilde{\alpha}}$. Носитель есть каноническое замкнутое множество, совпадающее с замыканием своей внутренности [4], так как аннулятор по своему построению является каноническим открытым множеством. Аналогичное определение справедливо для любого подпространства из $L_2(\omega)$, в частности, $suppTf$ определяется как носитель образа одномерного подпространства $\{f\} \subset L_2(\omega)$, порожденного функцией f: $suppTf = suppT\{f\}$. Собственные функции $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$ есть базис в $L_2(\omega)$, поэтому $\{Tu_k\}_{k=1}^{\infty}$ – это базис подпространства $TL_2(\omega)$. Тогда условие ортогональности для аннулятора $\widetilde{\alpha}$ подпространства $TL_2(\omega)$ можно упростить: $(\widetilde{g}, Tu_k) = 0,\ \forall \widetilde{g} \in L_2(\epsilon),\ \forall k$.

2.4. Используя носитель образа подпространства $L_2(\omega)$, определим **T-образ** подобласти $\omega \subset \Omega :\ \mathbf{T}\omega := int\ suppTL_2(\omega)$. Отображение $\mathbf{T}$, сопоставляющее каждой ω открытое множество $\mathbf{T}\omega$, будем называть **изоспектрией**. (Аналогично по T^{-1} строится обратная изоспектрия). Пример: из $TL_2(\Omega) = L_2(\widetilde{\Omega})$ следует $\mathbf{T}^{-1}\widetilde{\Omega} = \Omega, \mathbf{T}\Omega = \widetilde{\Omega}$. Очевидна монотонность отображения $\mathbf{T} : \omega_1 \subset \omega_2 \Longrightarrow \mathbf{T}\omega_1 \subset \mathbf{T}\omega_2$ и справедливо включение: $TL_2(\omega) \subseteq L_2(\mathbf{T}\omega); TH(\omega) \subseteq H(\mathbf{T}\omega)$. Здесь равенство соответствует распространению условия изоспектральности (2) на подобласти $\omega \subseteq \Omega :$

$$Spec(\omega) = Spec(\mathbf{T}\omega) \Leftrightarrow TH(\omega) = H(\mathbf{T}\omega) \Leftrightarrow TL_2(\omega) = L_2(\mathbf{T}\omega) \Leftrightarrow \omega = \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\omega). \qquad (3)$$

Отсюда для изоспектральных ω_i и $\mathbf{T}\omega_i$ немедленно вытекает изоспектральность пересечения и дополнения:

$$Spec(\omega_1 \cap \omega_2) = Spec(\mathbf{T}\omega_1 \cap \mathbf{T}\omega_2); Spec(\Omega \backslash \overline{\omega_i}) = Spec(\widetilde{\Omega} \backslash \overline{\mathbf{T}\omega_i}). \qquad (4)$$

Одному отображению $\mathbf{T}$ может соответствовать несколько операторов изоспектрии, например, любой T и $(-1)T$ дают одну и ту же изоспектрию $\mathbf{T}$, так как носители функций при домножении на (-1) не изменяются. Изменение глобального базиса $\{\widetilde{U}_n\}_{n=1}^{\infty}$ (умножение простых $\widetilde{U}_n$ на (-1) и ортогональные преобразования в кратных собственных подпространствах) при сохранении коэффициентов Фурье генерирует бесконечное семейство операторов $\{T\}$, дающих семейство отображений изоспектрии $\{\mathbf{T}\}$. С точки зрения изоспектральности (3) подобластей $\omega \subset \Omega; \omega \neq \Omega$ и их $\mathbf{T}$-образов возможны всего три типа изоспектрий:

1. **«нигде неизоспектрия»**: (3) нарушается для всех подобластей. Путем изменения базиса нигде неизоспектрия приводится ($\Rightarrow$*5*) к случаю 2 или к случаю 3.

2. **«частичная изоспектрия»**: (3) нарушается для некоторых, но не для всех подобластей. Из частичной изоспектрии следует ($\Rightarrow$*4*), что охватывающие области Ω и $\widetilde{\Omega}$ являются **клеточными**.

3. **«везде изоспектрия»**: (3) верно для всех подобластей.

2.5. Пример. Пусть $\widetilde{\Omega}$ – копия Ω при изометрии $\widetilde{x} = \mathbf{t}x$ и оператор T генерируется переносом $\widetilde{U_n}(\widetilde{x}) = U_n(x),\ n = 1, 2, \ldots$. Это верно для любых функций, поэтому все ω и $\mathbf{T}\omega = \mathbf{t}\omega$ изометричны, а, значит, изоспектральны, и везде изоспектрия $\mathbf{T}$ составляет необходимое условие изометрии областей Ω и $\widetilde{\Omega}$.

Докажем его достаточность. Любой круг $\overline{\omega} \subset \Omega$ имеет по условию изоспектральный $\mathbf{T}$-образ $\mathbf{T}\omega \subset \widetilde{\Omega}$, который является кругом такого же радиуса. Пусть β – это концентрический с ω круг впятеро меньшего радиуса. Из произвольной точки $x \in \beta$ как из центра построим непрерывное семейство концентрических вложенных кругов $\{\omega_b\}$ с радиусами $bR, 0 < b \leq 1, \overline{\beta} \subset \overline{\omega_1} \subset \overline{\omega}$, где $R =$ удвоенный радиус круга β. Из (4) следует вложенность изоспектрального семейства таких же кругов-образов $\{\mathbf{T}\beta\}$, концентричных относительно их общего центра $\widetilde{x} \in \mathbf{T}\beta$. Тогда $\mathbf{t}x = \widetilde{x}$ есть взаимнооднозначное непрерывное отображение точек $\mathbf{t} : \beta \leftrightarrow \mathbf{T}\beta$, ибо разные точки отделяются кругами достаточно малого радиуса. Для произвольной точки $y \in \beta$ расстояние $r(x, y) = bR$ равно радиусу окружности $\partial\omega_b$. Находя $\mathbf{T}$-образ кольца $\omega_{b+c} \setminus \overline{\omega_{b-c}}$ при $c \to 0$, получаем $\mathbf{t}y \in \partial\mathbf{T}\omega_b$, т.е. $r(\mathbf{t}x, \mathbf{t}y) = r(x, y)$, и поэтому $\mathbf{t}$ есть изометрия кругов β и $\mathbf{T}\beta$.

Для изоспектральных кругов ω_b и $\mathbf{T}\omega_b$ оператор изоспектрии T переводит друг в друга их собственные функции. В частности, для первых $u_{1b}(r) = J_0(j_{01}r/(bR))$ (j_{01} – 1-й нуль функции Бесселя J_0) совпадают коэффициенты Фурье при всех n:

$$(U_n\,|_{\beta}, u_{1b})_{L_2(\beta)} = (\widetilde{U_n}\,|_{\mathbf{T}\beta}, Tu_{1b})_{L_2(\mathbf{T}\beta)};\ \widetilde{U_n} = TU_n,\ \forall b, n.$$

Для однокомпонентных областей 1-ая собственная функция не изменяет знак ([3]). Взяв $U_1 > 0$ для Ω, можно считать $TU_1 = \widetilde{U_1} > 0$ для $\widetilde{\Omega}$. (Иначе вместо T возьмем оператор $(-T)$, сохранив неизменной везде изоспектрию $\mathbf{T}$). Так как $u_{1b}(r) > 0$, являются положительными двойные интегралы скалярных произведений при $n = 1$, т.е. 1-е собственные функции изоспектральных кругов $\mathbf{T}\beta$ также положительны: $Tu_{1b}(\widetilde{r}) = +J_0(j_{01}\widetilde{r}/(bR))$. Для этих двойных интегралов применим теорему о среднем в полярных координатах: существуют такие последовательности точек $x_{nb} \in \beta$ и $\widetilde{x}_{nb} \in \mathbf{T}\beta$, что

$$U_n(x_{nb}) \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{bR} J_0(j_{01}r/(bR))rdr = \widetilde{U_n}(\widetilde{x}_{nb}) \int_0^{2\pi} d\widetilde{\phi} \int_0^{bR} J_0(j_{01}\widetilde{r}/(bR))\widetilde{r}d\widetilde{r}.$$

Используя $\int\limits_0^z J_0(s)\,s\,ds = zJ_1(z)$ [5] при $z = j_{01}$ и $J_1(j_{01}) \neq 0$, получаем: $U_n(x_{nb}) = \widetilde{U_n}(\widetilde{x}_{nb})$. При $b \to 0$ вследствие непрерывности собственных функций получим $U_n(x) = \widetilde{U_n}(\mathbf{t}x), \forall n, \forall x \in \beta$. Из тождественного совпадения $U_n\mid_\beta$ и $\widetilde{U_n}\mid_\beta$ при совмещении всех точек $x \in \beta$ и $\mathbf{t}x \in \mathbf{T}\beta$ и из аналитичности собственных функций [3] следует их равенство вплоть до совпавшей охватывающей границы $\partial\Omega = \partial\widetilde{\Omega}$, выделенной нулевым краевым условием для всех n, т.е. справедлива

Теорема изометрии. Везде изоспектрия эквивалентна изометрии для однокомпонентных областей.

3. Т-образ и n-образ

3.1. Для глобальных собственных функций $suppU_n = \overline{\Omega}$. Сужения $U_n\mid_\omega,\ \omega \subset \Omega$ будем кратко именовать «n-следами» и обозначать $U_n(\omega)$. Построим прямую и обратную **расщепленные n-изоспектрии $\mathbf{T}_n$** и $\mathbf{T}_n^{-1}$, определив замыкания соответствующих n-образов:

$$\overline{\mathbf{T}_n\omega} := suppTU_n(\omega); \quad \overline{\mathbf{T}_n^{-1}\widetilde{\omega}} := suppT^{-1}\widetilde{U_n}(\widetilde{\omega}). \tag{1}$$

Очевидно, что $\mathbf{T}_n\Omega = \widetilde{\Omega} = \mathbf{T}\Omega, n = 1, 2, \ldots$ и n-образ не может быть «больше» $\mathbf{T}$-образа: $\mathbf{T}_n\omega \subseteq \mathbf{T}\omega$. Все функции из аннулятора $\widetilde{\alpha}$ (⇒*2.3*) очевидно ортогональны любой $TU_n(\delta), \forall\delta \subset \omega$. Поэтому если n-изоспектрия $\mathbf{T}_n$ монотонна на $\omega : \delta \subset \omega \Longrightarrow \mathbf{T}_n\delta \subset \mathbf{T}_n\omega,\ \forall\delta \subset \omega$, то $\mathbf{T}$-образ совпадает с n-образом: $\overline{\mathbf{T}} = suppTU_n(\omega) = \overline{\mathbf{T}_n\omega}$.

3.2. $U_n(\omega)$ и $\widetilde{U_n}(\widetilde{\omega})$ удовлетворяют над подобластями ω и $\widetilde{\omega}$ уравнению для собственных функций лапласиана $\Delta U_n = -\Lambda_n U_n$ и $\Delta\widetilde{U_n} = -\widetilde{\Lambda}_n\widetilde{U_n}$ соответственно. Учитывая $\Lambda_n = \widetilde{\Lambda}_n$, будем именовать подобласти ω и $\mathbf{T}_n\omega$ «**расщепленно n-изоспектральными**» (кратко «n-изоспектральными»), если n-следы над ними отображаются друг в друга: $TU_n(\omega) = \widetilde{U_n}(\mathbf{T}_n\omega)$. Тогда из $TU_n = \widetilde{U_n}$ следует, что n-следы над дополнениями $\Omega\backslash\overline{\omega}$ и $\widetilde{\Omega}\backslash\overline{\mathbf{T}_n\omega}$ также переводятся оператором изоспектрии T друг в друга, т.е. эти дополнения сами n-изоспектральны. Очевидно, что подобласти с одинаковым спектром являются n-изоспектральными для всех n.

3.3. n-ядром Γ_n для $\mathbf{T}_n\omega$ называется **максимальное** открытое множество, на котором n-след совпадает с сужением образа n-следа: $\widetilde{U_n}(\Gamma_n) = TU_n(\omega)\mid_{\Gamma_n}$.

Лемма об n-ядре. n-ядро расщепленно изоспектрально своему обратному n-образу: $T^{-1}\widetilde{U_n}(\Gamma_n) = U_n(\mathbf{T}_n^{-1}\Gamma_n)$.

▷ Нетривиален только случай $\emptyset \neq \Gamma_n \neq \mathbf{T}_n\omega$. Обозначим $\widetilde{g} = \widetilde{U_n}(\Gamma_n)$; $\widetilde{\phi} = \mathbf{T}_n\omega \setminus \overline{\Gamma_n}$; $\widetilde{f} = TU_n(\omega)\mid_{\widetilde{\phi}} = TU_n(\omega) - \widetilde{g}$. Убедимся, что функции $\widetilde{g}$ и $\widetilde{f}$ принадлежат подпространству $TL_2(\omega)$, т.е. $f = T^{-1}\widetilde{f}$ и $g = T^{-1}\widetilde{g}$ лежат в $L_2(\omega)$ (это не очевидно, ибо носитель подпространства $TL_2(\omega) = \overline{\mathbf{T}\omega}$, вообще говоря, «шире» $\overline{\mathbf{T}_n\omega}$). Так как $L_2(\Omega) = L_2(\omega) \bigoplus L_2(\Omega\backslash\overline{\omega})$ и оператор T сохраняет ортогональность этой суммы, в $TL_2(\Omega) = L_2(\widetilde{\Omega})$ можно записать ортогональное разложение для следа $\widetilde{U_n}(\mathbf{T}_n\omega) = TU_n(\omega) + \widetilde{d}$, где $\widetilde{d}$ принадлежит $TL_2(\Omega \setminus \overline{\omega})$ и в силу определения n-ядра не совпадает с $\widetilde{U_n}$ ни в одном круге внутри своего носителя $supp\widetilde{d} = supp\widetilde{f} = \overline{\widetilde{\phi}}$. Тогда $\widetilde{U_n}(\widetilde{\phi}) = \widetilde{f} + \widetilde{d}$ есть ортогональное разложение n-следа над $\widetilde{\phi}$ и функция $\widetilde{f}$ – проекция на $TL_2(\omega)$, что и требовалось проверить.

Если пересечение $suppg \cap suppf$ имеет пустую внутренность, то в силу $U_n(\omega) = g + f$ обе эти функции могут равняться только n-следам на своих носителях и лемма доказана. Если внутренность пересечения не пуста, в ней найдется круг ϵ, на котором $(g,f)_{L_2(\epsilon)} > 0$ (иначе эти ортогональные функции равнялись бы нулю на своем носителе). Построим функцию $g_\epsilon = g+f(\epsilon)$, равную g вне ϵ и совпадающую с n-следом $U_n(\epsilon) = g(\epsilon)+f(\epsilon)$ на ϵ.

По определению ядра Γ_n след на нем $\widetilde{U_n}(\Gamma_n) = Tg$ обеспечивает минимум $\left\|\widetilde{U_n}(\mathbf{T}_n\omega) - Tg\right\|^2 = \left\|\widetilde{U_n}(\phi)\right\|^2 = min\left\|\widetilde{U_n}(\mathbf{T}_n\omega) - h\right\|^2, \forall h \in L_2(\Gamma_n) \subset L_2(\mathbf{T}_n\omega)$. Этот минимум, вследствие унитарности оператора изоспектрии и принадлежности $g \in L_2(\omega)$, равен $\|U_n(\omega) - g\|^2 + \left\|T^{-1}\widetilde{d}\right\|^2$, так как носитель функции $T^{-1}\widetilde{d}$ не пересекается с ω. Первое слагаемое в силу $f = U_n(\omega) - g$ равно $\|f\|^2$, однако для построенной функции g_ϵ значение $\|U_n(\omega) - g_\epsilon\|^2 = \|f - f(\epsilon)\|^2$ оказывается еще меньше ровно на величину $\|f(\epsilon)\|^2 = \|Tf(\epsilon)\|^2$. Но это невозможно: из $0 < (g, f(\epsilon)) = (Tg, Tf(\epsilon)) = (\widetilde{U_n}(\Gamma_n), Tf(\epsilon))$ следует, что $supp(Tb(\epsilon))$ пересекается с n-ядром Γ_n. Функция $Tf(\epsilon)$, вследствие совпадения сужений Tg и $\widetilde{U_n}$ на эту пересекающуюся часть ядра, вычитается из нуля и, значит, дает «паразитный» вклад, лишь увеличивающий квадрат нормы разности. Полученное противоречие означает, что пересечение $suppg \cap suppf$ имеет пустую внутренность.$\triangleleft$

3.4. Из предыдущей леммы следует формула n-изоспектральности:

$$\widetilde{U_n}(\mathbf{T}_n\omega) = U_n(\mathbf{T}_n^{-1}(\mathbf{T}_n\omega)). \tag{2}$$

$\triangleright$ Случай $\mathbf{T}_n\omega = \widetilde{\Omega}$ тривиален, ибо $\mathbf{T}_n^{-1}\widetilde{\Omega} = \Omega$. Для $\mathbf{T}_n\omega \neq \widetilde{\Omega}$ заметим, что n-образ дополнения $\mathbf{T}_n(\Omega \setminus \overline{\omega})$ имеет n-ядро $\widetilde{\Omega} \setminus \overline{\mathbf{T}_n\omega}$. Учитывая, что n-следы над этим ядром и его обратным n-образом переводятся друг в друга согласно лемме п.3.3, в силу $TU_n = \widetilde{U_n}$ получаем, что переходят друг в друга n-следы над подобластью $\mathbf{T}_n\omega$ и ее обратным n-образом $\mathbf{T}_n^{-1}(\mathbf{T}_n\omega)$.$\triangleleft$

Формула (2) означает, что следы собственных функций складываются только из образов следов соответствующих собственных функций, что не удивительно, ибо собственные функции глобальных областей аналитичны внутри них.

3.5. Ядром $\Gamma(\mathbf{T}\omega)$ будем называть **максимальное** открытое множество, для которого $L_2(\Gamma) \subset TL_2(\omega)$.

Лемма о ядре. $Spec(\Gamma) = Spec(\mathbf{T}^{-1}\Gamma)$.

$\triangleright$ Нетривиальным является только случай $\emptyset \neq \Gamma \neq \mathbf{T}\omega$. Для произвольного номера n найдем обратный n-образ $\overline{\gamma_n} = suppT^{-1}\widetilde{U_n}(\Gamma)$. Для любой подобласти $\epsilon \subset \gamma_n$ выразим сужение $T^{-1}\widetilde{U_n}(\Gamma) \mid_\epsilon = u + v$ (здесь $u \in T^{-1}L_2(\Gamma)$; v принадлежит ортогональному дополнению этого подпространства до всего $L_2(\omega)$). Это сужение доставляет минимум квадрату нормы его разности с $T^{-1}\widetilde{U_n}(\Gamma)$, поэтому функция Tv, носитель которой лежит снаружи ядра Γ вследствие ее ортогональности всему $L_2(\Gamma)$, равна нулю. Тогда для любой подобласти $\epsilon \subset \gamma_n$ носитель образа сужения равен $suppTu$ и лежит в замыкании ядра Γ, т.е. $\mathbf{T}\gamma_n = \Gamma$. Теперь для произвольного номера n имеем $\mathbf{T}^{-1}\Gamma = \gamma_n$, что в силу (2.3) эквивалентно доказываемой изоспектральности. $\triangleleft$

3.6. Для локального $\mathbf{T}\omega \neq \widetilde{\Omega}$ ядро $\mathbf{T}$-образа дополнения $\Omega \setminus \overline{\omega}$ равно $\Gamma = \widetilde{\Omega} \setminus \overline{\mathbf{T}\omega}$. Пространство L_2 над ним в силу предыдущей леммы о ядре отображается изоспектрией T^{-1} в L_2 над его обратным образом $\mathbf{T}^{-1}\Gamma$. Тогда из $T^{-1}L_2(\widetilde{\Omega}) = L_2(\Omega)$ следует $T^{-1}L_2(\mathbf{T}\omega) = L_2(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\omega))$, откуда в силу (2.3) вытекает формула изоспектральности:

$$Spec(\mathbf{T}\omega) = Spec(\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\omega)). \tag{3}$$

Из пп. 3.3 и 3.4 следует, что локальный $\mathbf{T}$-образ $\mathbf{T}\omega \neq \widetilde{\Omega}$ совпадает со всеми n-образами: $\mathbf{T}\omega = TU_n(\omega), n = 1, 2, \dots$.

4. Клеточная (частичная) изоспектрия

4.1. Связная область на плоскости называется **клеточной**, если она построена из одной связной подобласти (**клетки**) путем ее зеркальных отражений относительно отрезков (**ребер**), имеющихся на границе клетки. Например, квадрат, разбитый на квадратные четверти, является четырехклеточной областью, полученной тремя отражениями клетки-четверти относительно двух смежных ребер. Диагонали квадрата дают его другое клеточное представление, разбивая квадрат на 4 равнобедренных прямоугольных треугольника.

4.2. Теорема клеточности. Из существования частичной изоспектрии для однокомпонентных областей следует их клеточность.

$\triangleright$ **Шаг 1.** Для частичной изоспектрии $\mathbf{T}$ в силу ее определения ($\Rightarrow$*2.4*) существует подобласть с отличным от $\widetilde{\Omega}$ неизоспектральным $\mathbf{T}$-образом. «Выбрасывая» из него непустое ядро вместе с его изоспектральным обратным ядром, получаем подобласть $\delta \subset \Omega$, заведомо не содержащую подобластей с изоспектральным $\mathbf{T}$-образом. Выберем подходящий круг $\omega \subset \delta$, на котором монотонное по определению отображение $\mathbf{T}$ является строго монотонным: $\mathbf{T}\beta = \mathbf{T}\omega \Longrightarrow \beta = \omega$. Такой круг ω найдется – иначе существовала бы подобласть $\epsilon \subset \delta$ такая, что $\mathbf{T}\beta = \mathbf{T}\epsilon, \forall\beta \subset \epsilon$, и для изоспектральных согласно (3.3) $\mathbf{T}\epsilon$ и $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\epsilon)$ сужение отображения $\mathbf{T}$ оказалось бы нигде неизоспектрией ($\Rightarrow$*2.4*), что невозможно вследствие заданной по условию теоремы частичной изоспектральности $\mathbf{T}$.

Шаг 2. Введем максимальную связную **фундаментальную область** $\Phi_1 \subset \Omega$ как сумму всех содержащих ω связных подобластей, на которых изоспектрия $\mathbf{T}$ строго монотонна. Эта Φ_1, каждая подобласть которой имеет локальный $\mathbf{T}$-образ, есть также минимальная связная глобализуемая область: $\mathbf{T}\Phi_1 = \widetilde{\Omega}$. Продолжая эти операции для $\Omega\backslash\overline{\Phi_1}$ и т.д., за конечное число шагов m построим m-компонентную несвязную (неканоническую!) область $\Omega' = \bigcup\limits_{i=1}^{m} \Phi_i,\ \overline{\Omega'} = \overline{\Omega}$. Все функции продолжаются нулем за их носители, поэтому $L_2(\Omega) = L_2(\Omega') = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} L_2(\Phi_i)$, но $H(\Omega) \neq H(\Omega') = \bigoplus\limits_{i=1}^{m} H(\Phi_i)$ (здесь нет соболевских функций с ненулевыми следами на границах между соседними Φ_i). Пусть L_{ik} – это $L_2(\Omega)$ без одномерного подпространства, порожденного k-й собственной функцией $\{u_{ik}\}$ фундаментальной области Φ_i. В $\Omega\backslash\overline{\Phi_i}$ нет подобластей δ, таких что $Spec(\delta) = Spec(\mathbf{T}\delta)$, и, согласно (2.3), нет $\widetilde{\omega} \subset \widetilde{\Omega}, L_2(\widetilde{\omega}) \subset L_2(TL_{ik})$. Поэтому добавление $\{u_{ik}\}$ достраивает целое пространство $T(L_{ik} \bigoplus \{u_{ik}\}) = TL_2(\Omega) = L_2(\widetilde{\Omega})$ сразу для всех $\widetilde{\omega} \subset \widetilde{\Omega}$, т.е. $suppTu_{ik} = \overline{\widetilde{\Omega}}, \forall i, k$. Аналогично строится несвязная область $\widetilde{\Omega}'$ – разбиение $\widetilde{\Omega}$ на $\widetilde{m}$ фундаментальных областей $\widetilde{\Phi}_j, suppT^{-1}\widetilde{u}_{jk} = \overline{\Omega}, j = 1, \dots, \widetilde{m}; \forall k$.

Шаг 3. Каждая Φ_i является минимальной однокомпонентной областью $\mathbf{T}\Phi_i = \widetilde{\Omega}$, поэтому $H(\widetilde{\Omega}') \subseteq TH(\Omega')$. Комбинация с аналогичным включением для T^{-1} дает $TH(\Omega') = H(\widetilde{\Omega}')$. Это вместе с $TL_2(\Omega) = L_2(\widetilde{\Omega})$ означает согласно (2.3), что T есть оператор изоспектрии несвязных областей Ω' и $\widetilde{\Omega}'$ и Tu_{ik} – собственные функции $\widetilde{m}$-компонентной $\widetilde{\Omega}'$ с собственными значениями $\widetilde{\lambda}_{ik} = \lambda_{ik}$. Из $suppTu_{ik} = \overline{\widetilde{\Omega}}$ следует, что сужение $(Tu_{ik})\,|_{\widetilde{\Phi}_j}$ пропорционально собственной функции $\widetilde{u}_{jk}$ области $\widetilde{\Phi}_j$ с ненулевой константой t_{ij} и $\widetilde{\lambda}_{jk} = \lambda_{ik}$. Аналогичные рассуждения для T^{-1} дают попарную изоспектральность всех Φ_i и $\widetilde{\Phi}_j$. Сужение $T_{ij}(f) = (Tf) \mid_{\widetilde{\Phi}_j} /t_{ij}, f \in L_2(\Phi_i)$ порождает для этих фундаментальных областей отображение изоспектрии $\mathbf{T}_{ij}$. Множитель $1/t_{ij}$ не изменяет носителей функций и из $\mathbf{T}_{ij}\omega = \widetilde{\Phi}_j$ следует $\omega = \Phi_i$. Это означает, что отображение $\mathbf{T}_{ij}$ строго монотонно, т.е. является везде изоспектрией, и тогда согласно теореме изометрии ($\Rightarrow$ *2.5*) фундаментальные области Φ_i и $\widetilde{\Phi}_j$ оказываются изометричными для всех i и j. Из равенства площадей Ω и $\widetilde{\Omega}$ следует $m = \widetilde{m}$, так что эти области являются m-клеточными с одинаковой клеткой. $\triangleleft$

5. Нигде неизоспектральность

5.1. Пример. Пусть $\widetilde{\Omega} = \Omega$ и тождественная изометрия $\widetilde{x} = x$ порождает тривиальную везде изоспектрию: $\mathbf{T}\alpha = \alpha = \mathbf{T}_n\alpha, \forall\alpha \subset \Omega$ при всех n. Выпишем ряд Фурье для образа 1-следа (аргумент у глобальных функций опускается): $TU_1(\alpha) = a_1\widetilde{U_1} + a_2\widetilde{U_2} + \ldots = a_1U_1 + a_2U_2 + \ldots = U_1(\alpha)$, причем $a_1 = (U_1(\alpha), U_1) = \|U_1(\alpha)\|^2 > 0$. Построим новый оператор изоспектрии T', заменив U_1 на $(-U_1)$, и выразим новый образ 1-следа через прежний след:

$$T'U_1(\alpha) = a_1(-U_1) + a_2U_2 + \ldots = U_1(\alpha) - 2a_1U_1. \qquad (1)$$

$suppU_1 = \overline{\Omega}$, поэтому $suppT'U_1(\alpha)$ также совпадает с $\overline{\Omega} = \overline{\widetilde{\Omega}}$, т.е. 1-образ $\mathbf{T}'_1\alpha = \widetilde{\Omega}$ для всех α, кроме подобластей, где $a_1 = 1/2$. Тогда тем более $\mathbf{T}'\alpha = \widetilde{\Omega}, \forall\alpha \subset \Omega$ и это новое отображение является нигде неизоспектрией ($\Rightarrow$*2.4*). При этом подпространство, ортогональное U_1, остается неизменным.

5.2. Теорема приведения. Нигде неизоспектрия приводится либо к везде, либо к частичной изоспектрии.

$\triangleright$ **Шаг 1 – Локализованные функции.** Отображение $\mathbf{T}$ есть нигде неизоспектрия, поэтому $\mathbf{T}$-образ любой подобласти из Ω равен $\widetilde{\Omega}$ ($\Rightarrow$*3.8*). Локальные функции $f \in L_2(\widetilde{\Omega}), suppf \neq \overline{\widetilde{\Omega}}$, имеющие локальные обратные образы: $suppT^{-1}f \neq \overline{\Omega}$, будем называть **локализованными**. Множество локализованных функций $S \subset L_2(\widetilde{\Omega})$ непусто – иначе рассмотрим для произвольной подобласти $\delta \neq \Omega$ подпространство сужений $Q = TL_2(\delta) \mid_{\widetilde{\delta}}$ на произвольную подобласть $\widetilde{\delta} \neq \widetilde{\Omega}$. Очевидно, что $Q \neq 0$ - иначе носители всех функций из $TL_2(\delta)$ лежали бы вне $\widetilde{\delta}$, что противоречит равенству $\mathbf{T}\delta = \widetilde{\Omega}$ для нигде неизоспектрии $\mathbf{T}$.

1). $Q = L_2(\widetilde{\delta})$: любая функция из $L_2(\widetilde{\delta})$ совпадает со следом $f \mid_{\widetilde{\delta}}$ некоторой функции $f \in TL_2(\delta)$, но f не принадлежит $L_2(\widetilde{\delta})$. Однако этого не может быть для всех $\widetilde{\delta} \subset \widetilde{\Omega}$: тогда $L_2(\widetilde{\Omega})$ целиком оказалось бы в $TL_2(\delta)$. Поэтому найдется такая подобласть $\widetilde{\delta}$, где

2). $Q \neq L_2(\widetilde{\delta})$: для Q построим ортогональное дополнение $P \neq 0$ до всего $L_2(\widetilde{\delta})$. В силу ортогональности любой функции $f \in P$ всему подпространству $TL_2(\delta)$ и унитарности оператора изоспектрии, функция $T^{-1}f$ ортогональна пространству $L_2(\delta)$. Поэтому ее носитель оказывается снаружи $\delta \subset \Omega$, т.е. все функции из P являются локализованными и множество S таких функций заведомо не пусто.

Шаг 2 – Согласованное подпространство. Добавляя в S произведения локализованных функций на ненулевые коэффициенты (носители при этом не изменяются!) и их всевозможные суммы, мы получаем подпространство S, которое будем именовать **согласованным**. В нем оказываются и функции с носителем $\overline{\widetilde{\Omega}}$, представимые в виде суммы локализованных функций. Базисом подпространства S являются собственные функции $\widetilde{U_j} = TU_j$ такие, что для U_j существуют окрестности $\delta \subset \Omega$ с локализуемым j-образом: $\mathbf{T}_j\delta \neq \widetilde{\Omega}$. Действительно, в силу теоремы отрицания ($\Rightarrow$*3.4*) и (3.1) переходят друг в друга как j-следы $\widetilde{U_j}(\mathbf{T}_j\delta) = TU_j(\omega)$, где $\omega = \mathbf{T}_j^{-1}(\mathbf{T}_j\delta)$, так и j-следы над дополнениями ω и $\mathbf{T}_j\delta$. Поэтому сумма этих локализованных функций $\widetilde{U_j}(\mathbf{T}_j\delta) + \widetilde{U_j}(\widetilde{\Omega} \setminus \mathbf{T}_j\delta) = \widetilde{U_j} \in S$ является **согласованной** собственной функцией. Фиксируем одну из таких согласованных пар $\widetilde{U_n} = TU_n$ вместе с существующей для нее подобластью ω, n-изоспектральной ($\Rightarrow$*3.2*) своему n-образу $\mathbf{T}_n\omega$.

Шаг 3 – Дефект. Локализация для U_n n-образов всех окрестностей $\delta \subset \Omega$ или равенство $S = L_2(\widetilde{\Omega})$ означали бы существование подобласти δ с локальным $\mathbf{T}$-образом: $\mathbf{T}\delta \neq \widetilde{\Omega}$, что невозможно для нигде неизоспектрии $\mathbf{T}$. Поэтому для S существует в $L_2(\widetilde{\Omega})$ ортогональное дополнение – подпространство $D \neq 0$ («**дефект**»). Собственные функции $\widetilde{U_k} \in D$ ортогональны согласованному пространству S и, следовательно, отсутствуют в разложении локализованных функций в ряды по $Amp(\widetilde{\Omega})$. Но вследствие $(U_k(\delta), U_k) = \|U_k(\delta)\|^2 > 0, \forall\delta \subset \Omega$, рассогласованная $\widetilde{U_k} = TU_k$ участвует в разложении образа любого k-следа $TU_k(\delta)$, который поэтому не является локализованным: $\mathbf{T}_k\delta = \widetilde{\Omega}, \forall\delta \subset \Omega$. Это свойство является характеристическим для рассогласованных $\widetilde{U_k} \in D$ (см. пример 4.1, где одномерный дефект порожден первой собственной функцией).

$\widetilde{U_n}$, фиксированная на шаге 2, является согласованной и $\mathbf{T}_n\omega \neq \widetilde{\Omega}$, но $\mathbf{T}\omega = \widetilde{\Omega}$ в силу исходной нигде неизоспектральности $\mathbf{T}$. Причина – существование подобластей $\alpha \subset \omega$, для которых $\overline{\mathbf{T}_n\alpha} = suppTU_n(\alpha) = \overline{\widetilde{\Omega}}$ ($\Rightarrow$*3.5*), т.е. функции $TU_n(\alpha)$ не являются локализованными из-за присутствия в их разложениях рассогласованных собственных функций. Наша цель – так «исправить» эти рассогласованные $\widetilde{U_k} \in D$, чтобы для новой изоспектрии образы n-следов $TU_n(\alpha)$ оказались локализованными, а согласованные n-следы не изменились.

Шаг 4 - Обозначения. n-следы над $\omega, \alpha \subset \omega$ и $\beta = int(\omega \setminus \overline{\alpha})$ обозначим $\mathbf{w} = U_n(\omega), \mathbf{a} = U_n(\alpha), \mathbf{b} = U_n(\beta)$ и выпишем разложения:

$$\mathbf{w} = \sum w_j U_j = \mathbf{a} + \mathbf{b} = (\mathbf{a}_s + \mathbf{d}) + (\mathbf{b}_s - \mathbf{d}); \tag{2}$$

$$\mathbf{a}_s = \sum a_j U_j + \mathbf{r}; \mathbf{b}_s = \sum b_j U_j - \mathbf{r};\ \mathbf{d} = \sum d_k U_k \tag{3}$$

(для образов этих функций коэффициенты разложений по $Amp(\widetilde{\Omega})$ совпадают с коэффициентами в (2) и (3) по определению оператора изоспектрии T ($\Rightarrow$*2.2*)).

Здесь $\mathbf{a}_s$ и $\mathbf{b}_s$ разлагаются только по прообразам согласованных собственных функций U_j и $w_j = a_j + b_j$. Функции $\mathbf{r}$ и $\mathbf{d}$ обозначают вклад соответственно прообразов согласованных и рассогласованных собственных функций, которые ортогональны следу $U_n(\omega)$ и сокращаются в разложении (2) для $\mathbf{w}$, но возникают в разложениях для внутренних следов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$.

Шаг 5 – Локально простые функции. Если в (3) в разложении дефекта $\mathbf{d}$ присутствует линейная комбинация нескольких рассогласованных $U_{k_1}, \ldots, U_{k_i}, i > 1$, из одного I-кратного собственного подпространства, $I \geq i$, продолжаем данный шаг, иначе $\Rightarrow$**Шаг 6**. Приведем эту комбинацию кратных функций к «**локально простому**» виду, выполнив ортогональное преобразование базиса и координат в таком i-мерном подпространстве в $Amp(\Omega)$ и $Amp(\widetilde{\Omega})$. Ортогональную матрицу преобразования подберем так, чтобы вектор коэффициентов $\mathbf{c} = (d_{k_1}, d_{k_2}, \ldots, d_{k_i})$

преобразовался в $(\|\mathbf{c}\|, 0, \ldots, 0)$. Тогда новой собственной функцией с номером k_1 станет нормированная комбинация $(d_{k_1}U_{k_1} + \ldots + d_{k_i}U_{k_i})/\|\mathbf{c}\|$ (аналогично в $L_2(\widetilde{\Omega})$). Сохраняя прежние обозначения и повторяя **Шаг 5** по индукции, в итоге получим, что в разложении «дефекта» $\mathbf{d}$ и $T\mathbf{d}$ для всех кратных подпространств присутствует только по одной собственной функции.

Шаг 6 – Исправление дефекта. Сужение $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ в (2) на ω равно $U_n(\omega)$, а сужение на дополнение $\Omega \setminus \overline{\omega} = \gamma$ дает тройку равенств: $0 = \mathbf{w}\mid_\gamma = \mathbf{a}\mid_\gamma = \mathbf{b}\mid_\gamma$. Обозначив $\mathbf{a}_s\mid_\gamma = s, \mathbf{b}_s\mid_\gamma = -\mathbf{s}, \mathbf{d}\mid_\gamma = -d = -\mathbf{d}'$, перепишем для наглядности эту тройку равенств: $0 = (s-d)+(-\mathbf{s}+\mathbf{d}'); 0 = (s-d); 0 = (-\mathbf{s}+\mathbf{d}')$. Здесь четыре функции (пара для $\mathbf{b}\mid_\gamma$ выделена жирным шрифтом) совпадают на дополнении γ по абсолютной величине, но попарно отличаются множителем (-1), являясь одинаковыми сужениями функций, относящихся к разным n-следам. Учитывая, что $TU_n(\omega) = T\mathbf{w}\mid_\omega = \widetilde{U_n}(\mathbf{T}_n\omega)$, рассмотрим действие T на сужение $\mathbf{w}\mid_\gamma$. Тройка равенств сохраняется: $0 = (Ts - Td) + (-T\mathbf{s} + T\mathbf{d}'); 0 = (Ts - Td); 0 = (-T\mathbf{s} + T\mathbf{d}')$, так как при любом базисе $Amp(\widetilde{\Omega})$ линейный оператор T переводит одинаковые функции в одинаковые. Однако равенства $Ts = Td$ для $T\mathbf{a}$ и $T\mathbf{s} = T\mathbf{d}'$ для $T\mathbf{b}$ означают, что сужения $T\mathbf{a}$ и $T\mathbf{b}$ на дополнение $\widetilde{\Omega} \setminus \overline{\mathbf{T}_n\omega} = \widetilde{\gamma}$ равны нулю, что противоречит $suppT\mathbf{a} = \overline{\mathbf{T}_n\alpha} = suppT\mathbf{b} = \overline{\mathbf{T}_n\beta} = \overline{\widetilde{\Omega}}$. Существует **единственный** вариант сохранения тройки равенств – совпадающие дефекты относятся к разным n-следам: $0 = (Ts + T\mathbf{d}') + (-T\mathbf{s} - Td); 0 = (Ts - Td); 0 = (-T\mathbf{s} + T\mathbf{d}')$. Здесь сохраняется $Ts = Td$, но дефект Td относится не к $T\mathbf{a}$, а к $T\mathbf{b}$, и наоборот, $T\mathbf{d}'$ соответствует $T\mathbf{a}$, т.е. функции $T\mathbf{a}$ и $T\mathbf{b}$ «обмениваются» своими дефектами. Устраним этот эффект, воспользовавшись **единственной** оставшейся «степенью свободы» рассогласованных собственных функций $\widetilde{U_k}$ – умножение на (-1) (см. **Шаг 5**). После изменения знаков всех $\widetilde{U_k}$ с ненулевыми коэффициентами из итогового разложения дефекта $T\mathbf{d}$ повторный «обмен» дефектами восстанавливает исходную картину: сужения $T\mathbf{a}\mid_{\widetilde{\gamma}}$ и $T\mathbf{b}\mid_{\widetilde{\gamma}}$ равны нулю и n-образы $int(suppT\mathbf{a}) = \mathbf{T}_n\alpha$ и $int(suppT\mathbf{b}) = \mathbf{T}_n\beta$ оказываются в $\mathbf{T}_n\omega$. Тогда новые собственные функции становятся согласованными, т.е. переносятся из дефекта D в согласованное пространство S. Сохраним прежние обозначения для новых собственных функций и новой изоспектрии. Если подпространство дефекта не пусто, т.е. в ω существуют подобласти α с нелокализованным n-образом, то продолжаем индукцию $\Rightarrow$ **Шаг 4**, иначе $\Rightarrow$ **Шаг 7**.

Шаг 7. Построенная новая изоспектрия $\mathbf{T}$ со всеми согласованными собственными функциями обеспечивает для подобласти ω монотонность $\mathbf{T}_n\alpha \subset \mathbf{T}_n\omega \neq \widetilde{\Omega}$ для всех $\alpha \subset \omega$. Отсюда следует локальность $\mathbf{T}$-образа $\mathbf{T}_n\omega = \mathbf{T}\omega \neq \widetilde{\Omega}$. Тогда по формуле изоспектральности (3.3) этот образ изоспектрален подобласти $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\omega)$ и поэтому новая изоспектрия $\mathbf{T}$ не является нигде неизоспектрией. $\triangleleft$

6. Метод изоспектрии: применение для задачи о барабане

Если области Ω и $\widetilde{\Omega}$ изоспектральны, любое отображение изоспектрии из семейства $\{\mathbf{T}\}$ сводится согласно теореме приведения ($\Rightarrow$ *5.2*) к некоторой частичной либо везде изоспектрии. Если хотя бы одна из областей Ω и $\widetilde{\Omega}$ **не клеточна**, частичной изоспектрии быть не может согласно теореме клеточности ($\Rightarrow$ *4.2*) и тогда эти области **изометричны** вследствие теоремы изометрии ($\Rightarrow$ *2.5*).

Эта же теорема в случае неизометричности Ω и $\widetilde{\Omega}$ заведомо исключает везде изоспектрии из семейства отображений $\{\mathbf{T}\}$. Тогда любая нигде неизоспектрия приводится к частичной ($\Rightarrow$*4.2*) и **обе неизометричные области** построены из m **одинаковых клеток** Φ с помощью неизоморфных цепочек из $(m-1)$ отражений относительно k их ребер. Неизометричность исключает одноклеточный случай $m=1$. Для $m=2$ единственное ребро является осью симметрии и неизометричность невозможна, что соответствует работе [6] о спектральной жесткости осесимметричных областей. Для $m=3$ клетка Φ имеет два ребра и возможны только две пары отражений, дающие лишь изометричные области. Поэтому количество клеток $m \geq 4$ и количество ребер $k \geq 3$.

Взяв в клетке Φ в изоспектральных неизометричных Ω и $\widetilde{\Omega}$ произвольную подобласть $\overline{\omega} \subset \Phi$, вследствие изометричности клеток получаем, что $\mathbf{T}\omega \subset \widetilde{\Omega}$ – это несвязная подобласть из m изометричных ω компонент связности. Изоспектральной ей является m-компонентная (неизометричная!) подобласть $\mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}\omega) \supset \omega$ ($\Rightarrow$ *3.3*), содержащая ω и ее $(m-1)$ копий – по одному экземпляру в каждой клетке. Аналогичным образом, используя изоспектральность дополнений и пересечений (1.4), можно построить для фиксированных Ω и $\widetilde{\Omega}$ континуум новых примеров изоспектральных неизометричных областей.

Частичная изоспектральность, из которой вытекает клеточность, является необходимым, но не достаточным условием неизометричности. Достаточность для неклеточности, т.е. изометрии, обеспечивает, в частности, гладкость границы, ибо угловые точки на концах ребер клетки при отражениях обязательно «выходят на границу». Рассматривая цепочки отражений клетки, являющейся выпуклым многоугольником (наилучший случай), с помощью элементарных рассуждений в рамках геометрии на плоскости убеждаемся в невыпуклости изспектральных неизометричных областей. Выпуклость сохраняется только для правильных фигур с осями симметрии (равнобедренный и равносторонний треугольник, прямоугольник и т.д.), которые являются спектрально жесткими.

Благодарности

Автор с глубокой благодарностью вспоминает своего первого наставника, проф. Мельникова Ю.А. (Middle Tennessee State University), который приобщил автора к проблематике обратных задач в матфизике. Многие годы эта работа проводилась под руководством проф. Ивочкиной Н.М. (СПбГАСУ). Ее постоянное внимание к этой проблематике, плодотворные обсуждения и глубокие замечания неоценимы для автора с момента его первого обзора [1] до настоящего времени. На завершающем этапе благотворное влияние оказал на эту работу проф. Кузнецов Н.Г. Он, в частности, объявил об этих результатах в [7] после доклада автора на семинаре им. Смирнова в ПОМИ РАН (http://www.pdmi.ras.ru/ matfizik/ seminar2012-2013.htm). Особой вехой стали обсуждения с д.ф.-м.н Белишевым М.И. (ПОМИ РАН) и знакомство с его статьей [8].

Литература

[1] С. А. Титаренко. Теорема Сунады и последние продвижения в обратной задаче спектральной геометрии, Алгебра и анализ, 8, вып.3 (1996), 14–38

[2] Giraud O., Thas K., Hearing shapes of drums – mathematical and physical aspects of isospectrality, Reviews of Modern Physics, 82 (2010), 2213–2255.

[3] Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. М.: Наука,1983.

[4] Александров П.С. Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Наука,1977.

[5] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. М.: Наука,1979.

[6] Zelditch S. Inverse spectral problem for analytic domains, II: Z2-symmetric domains. Annals of Mathematics, 170 (2009), 205–269.

[7] Kuznetsov N. On Delusive Nodal Sets of Free Oscillations, EMS Newsletter, No. 96 (2015), pp. 34–40.

[8] Белишев М.И. К задаче Каца о восстановлении формы области по спектру задачи Дирихле. Записки Научных Семинаров ЛОМИ, 173 (1988), 30-41.