

Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 26.05.2021
Доступен на сайте <http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/>

О доступной локальной асимптотической эффективности некоторых критериев согласия

А.И. Назаров*

А.В. Чирина**

*Памяти Якова Юрьевича Никитина,
Друга и Учителя*

1 Постановка задачи

Пусть X_j – независимые наблюдения с.в. X с непрерывной ф.р. F . Рассмотрим задачу проверки гипотезы о том, что $F = F_0$ (здесь F_0 – известная ф.р.) против альтернативы $F \neq F_0$. Одним из классических способов построения непараметрических статистик для проверки гипотезы согласия является использование различных функционалов $\mathcal{J}[\xi_n]$ от (преобразованного) эмпирического процесса

$$\xi_n(s) = \sqrt{n} \left(n^{-1} \sum_{j=1}^n \mathbf{1}\{F_0(X_j) \leq s\} - s \right). \quad (1)$$

Для сравнения эффективности различных статистик используются различные количественные характеристики. Мы рассмотрим асимптотическую эффективность

*ПОМИ РАН и Санкт-Петербургский госуниверситет. Работа частично поддержана совместным грантом РФФИ–DFG 20-51-12004.

**Санкт-Петербургский государственный электротехнический университет “ЛЭТИ”.

по Бахадуру, мерой которой является так называемый *точный бахадуровский наклон* (см., напр., [6, §1.2]) – неслучайная положительная функция параметра θ , описывающего альтернативу. Поскольку его вычисление – весьма трудная задача, с учетом практической важности случая близких альтернатив часто ограничиваются изучением *локального* точного наклона, т.е. асимптотикой точного наклона при $F \rightarrow F_0$. При весьма общих предположениях эта асимптотика имеет вид $b\theta^2$ при $\theta \rightarrow 0$, коэффициент b называется *бахадуровским локальным индексом* соответствующей последовательности статистик. Для широкого класса статистик алгоритм вычисления локального индекса был дан в главе II монографии Я.Ю. Никитина [6].

Поскольку (см., напр., [6, Теорема 1.2.3]) для любой последовательности статистик точный бахадуровский наклон не превосходит удвоенной информации Кульбака–Лейблера, особый интерес представляют статистики, *локально асимптотически оптимальные по Бахадуру* (ЛАО), для которых отношение этих величин стремится к 1 при $F \rightarrow F_0$. Другими словами, ЛАО статистики обладают максимально возможным бахадуровским локальным индексом для данного семейства альтернатив.

Для некоторых конкретных семейств альтернатив (сдвига, масштаба и др.) вопрос о том, является ли последовательность статистик ЛАО, определяется нулевой гипотезой. Проблема определения распределений F_0 , для которых данная последовательность статистик является ЛАО, подробно обсуждается в [6, §§6.2-6.3]. Однако для некоторых статистик множество таких распределений оказывается пустым. Поясним это.

При некоторых условиях регулярности на семейство ф.р. F_θ в [6, §6.1] показано, что указанные функции распределения F_0 являются решениями дифференциального уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \theta} F_\theta(x) \Big|_{\theta=0} = \mathbf{u}(F_0(x)), \quad (2)$$

где $\mathbf{u}$ – одна из *ведущих функций* для соответствующей последовательности статистик. Это означает, что функция $\mathbf{u}$ доставляет максимум функционалу $\mathcal{J}[u]$ на единичном шаре в пространстве Соболева $\overset{\circ}{W}_2^1(0,1)$ (ср. [6, §2.6] и [4]).

Однако для семейства с параметром сдвига $F_\theta(x) = F(x + \theta)$ уравнение (2) переписывается так:

$$F'_0(x) = \mathbf{u}(F_0(x)),$$

откуда следует, что функция $\mathbf{u}$ должна быть положительной на интервале $(0,1)$. Это требование справедливо также для некоторых других семейств, например, для семейства с параметром масштаба, если носитель ф.р. сосредоточен на положительной полуоси.

Для многих последовательностей статистик (в том числе для классических статистик Колмогорова, Ватсона–Дарлинга, Крамера–фон Мизеса, Андерсона–Дарлинга и др.) множество ведущих функций содержит функцию, положительную на $(0, 1)$, см. [6, §6.2]. Однако для некоторых более сложных статистик это не так. Приведем два примера.

1. В работе Н. Хенце и Я.Ю. Никитина [2] были введены интегрированные аналоги статистики Ватсона

$$\begin{aligned}\tilde{U}_n^2 &= \int_0^1 \left(A_n(s) - \int_0^1 A_n(t) dt \right)^2 ds \\ \bar{U}_n^2 &= \int_0^1 \left(A_n(s) - sA_n(1) \right)^2 ds,\end{aligned}$$

где

$$A_n(s) = \int_0^s \xi_n(t) dt$$

(процесс $\xi_n(t)$ определен в (1)).

В [2] показано, что статистика $\tilde{U}_n^2$ локально асимптотически оптимальна при альтернативе сдвига для распределения гиперболического косинуса (с плотностью $(\pi \operatorname{ch}(x))^{-1}$). В то же время для статистики $\bar{U}_n^2$ максимизирующая функция в соответствующей экстремальной задаче

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_1[u] &:= \int_0^1 \left(\int_0^x u(t) dt - x \int_0^1 u(t) dt \right)^2 dx \rightarrow \max; \\ \mathcal{I}[u] &:= \int_0^1 (u'(x))^2 dx \leq 1; \quad u(0) = u(1) = 0\end{aligned}\tag{3}$$

знакопеременна, и потому эта статистика при альтернативе сдвига не является локально асимптотически оптимальной ни для какого распределения.

2. В диссертации О.А. Подкорытовой [7] среди других рассматривались статистики $S_{p,n} = \|\nu_n\|_{L_p(0,1)}^2$, основанные на преобразовании Деовельса эмпирического процесса [1]

$$\nu_n(s) = \xi_n(s) + \int_0^s \frac{\xi_n(r)}{1-r} dr - s \int_0^1 \frac{\xi_n(r)}{1-r} dr.$$

В [7, §4.4] показано, что в соответствующей экстремальной задаче (при $p = \infty$ интеграл в $\mathcal{J}_{2,p}[u]$ следует заменить на максимум, см. (14))

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_{2,p}[u] &:= \left[\int_0^1 \left| u(x) + \int_0^x \frac{u(t)}{1-t} dt - x \int_0^1 \frac{u(t)}{1-t} dt \right|^p dx \right]^{\frac{2}{p}} \rightarrow \max; \\ \mathcal{I}[u] &= \int_0^1 (u'(x))^2 dx \leq 1; \quad u(0) = u(1) = 0\end{aligned}\tag{4}$$

максимизирующая функция знакопеременна¹, и эти статистики при альтернативе сдвига также не являются локально асимптотически оптимальными ни для какого распределения.

В подобной ситуации естественно поставить вопрос: какова максимальная *доступная* локальная асимптотическая эффективность таких статистик (например, при альтернативе сдвига)?

Для ответа на этот вопрос следует решить модифицированную задачу о максимуме соответствующего функционала (в приведенных примерах это функционалы $\mathcal{J}_1$ и $\mathcal{J}_{2,p}$ соответственно) на множестве *неотрицательных* функций из единичного шара в $\dot{W}_2^1(0, 1)$.

Замечание. С точки зрения вариационного исчисления такая постановка (*задача с односторонним ограничением*) корректна. Однако максимизирующая функция заведомо обращается в нуль во внутренних точках промежутка $[0, 1]$ и потому соответствует распределению с разрывной ф.р., что невозможно по условию задачи. Тем не менее, эта максимизирующая функция может быть аппроксимирована функциями, *положительными на $(0, 1)$* . Поэтому, хотя полученная локальная асимптотическая эффективность по-прежнему не достигается, для любого $\varepsilon > 0$ существуют распределения, для которых она достигается с точностью до ε .

В настоящей работе мы вычислим доступную локальную асимптотическую эффективность при альтернативе сдвига для статистик $\bar{U}_n^2$ и $S_{\infty,n}$. Соответствующая задача для $S_{p,n}$ при произвольном p , по-видимому, сколь-нибудь явно решена быть не может. Надежда на получение ответа есть лишь в случаях $p = 1$ и $p = 2$.

¹Поскольку результаты главы 4 [7] труднодоступны, в Приложении 1 мы приводим упрощенное доказательство этого факта.

2 Статистика $\bar{U}_n^2$

Мы ищем максимум в экстремальной задаче (3) при дополнительном условии $u \geq 0$.

Пересечение единичного шара в пространстве Соболева $\mathring{W}_2^1(0, 1)$ с конусом $u \geq 0$ слабо замкнуто в $\mathring{W}_2^1(0, 1)$. Поэтому слабо непрерывный на $\mathring{W}_2^1(0, 1)$ функционал $\mathcal{J}_1$ достигает на этом множестве наибольшего значения. Более того, ввиду однородности функционалов $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}_1$ можно заменить ограничение $\mathcal{I}[u] \leq 1$ на $\mathcal{I}[u] = 1$.

Также ввиду однородности функционалов $\mathcal{I}$ и $\mathcal{J}_1$ можно рассмотреть равносильную задачу

$$\mathcal{P}_1[u] := \frac{\mathcal{J}_1[u]}{\mathcal{I}[u]} \rightarrow \max; \quad u \geq 0; \quad u \not\equiv 0; \quad u(0) = u(1) = 0.$$

Необходимое условие максимума

$$d\mathcal{P}_1[u]\eta = \frac{\mathcal{P}_1[u]}{\mathcal{I}[u]} \cdot (\mathcal{P}_1[u]^{-1} \cdot d\mathcal{J}_1[u]\eta - d\mathcal{I}[u]\eta) \leq 0 \quad (5)$$

для всех приращений $\eta \in \mathring{W}_2^1(0, 1)$ таких, что $u + \eta \geq 0$. Обозначим λ^{-1} значение функционала $\mathcal{P}_1[u]$ на максимизирующей функции.

Подсчитаем дифференциал:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} d(\lambda \mathcal{J}_1 - \mathcal{I})[u]\eta &= - \int_0^1 u'(x) \eta'(x) dx \\ &+ \lambda \int_0^1 \left(\int_0^x u(t) dt - x \int_0^1 u(t) dt \right) \left(\int_0^x \eta(t) dt - x \int_0^1 \eta(t) dt \right) dx \\ &= \langle u'', \eta \rangle + \lambda \int_0^1 f_1(x) \eta(x) dx, \end{aligned}$$

где u'' понимается в смысле обобщенных функций, и

$$f_1(x) = \int_x^1 (U(t) - tU(1)) dt - \int_0^1 (tU(t) - t^2U(1)) dt;$$

здесь и далее в этом параграфе

$$U(x) = \int_0^x u(t) dt.$$

Для любой неотрицательной функции $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(0, 1)$ имеем $u + \eta \geq 0$ и, следовательно, $d\mathcal{P}_1[u]\eta \leq 0$, что дает $u'' + \lambda f_1 \leq 0$ в смысле обобщенных функций. Поэтому u'' есть мера (заряд), причем ее сингулярная часть неположительна.

Множество, на котором $u > 0$, представляет собой не более чем счетное объединение интервалов. На каждом из этих интервалов I для любой $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(I)$ при достаточно малых α любого знака имеем $u + \alpha\eta \geq 0$, и потому $d\mathcal{P}_1[u](\alpha\eta) \leq 0$ влечет

$$\langle u'', \eta \rangle + \lambda \int_0^1 f_1(x)\eta(x) dx = 0 \quad \implies \quad -u'' = \lambda f_1 \quad \text{на} \quad I.$$

Таким образом, носитель сингулярной компоненты меры u'' содержится в множестве, на котором $u = 0$.

Покажем, что на самом деле сингулярной компоненты у u'' нет. Действительно, u' как функция ограниченной вариации имеет в каждой точке левое и правое предельные значения. При этом, поскольку нуль – минимальное значение u на отрезке $[0, 1]$, в каждой точке множества $\{u = 0\} \cap (0, 1)$ имеем $u'(x-) \leq 0$ и $u'(x+) \geq 0$, откуда

$$\int_{\{u=0\} \cap (0,1)} du'' \geq 0.$$

Таким образом, сингулярная компонента u'' может быть только положительной, что невозможно.

Итак, u'' регулярна и, следовательно, u' непрерывна на $[0, 1]$. Таким образом, на краях каждого интервала I , кроме условия $u = 0$, имеем также $u' = 0$ (за исключением, возможно, точек 0 и 1).

Покажем, что число интервалов I на самом деле конечно. Дифференцируя уравнение $-u'' = \lambda f_1$, мы получаем

$$u'''(x) = \lambda \left(\int_0^x u(t) dt - x \int_0^1 u(t) dt \right). \quad (6)$$

Повторное дифференцирование дает

$$u^{IV}(x) = \lambda \left(u(x) - \int_0^1 u(t) dt \right). \quad (7)$$

Из сказанного выше следует, что на замыкании каждого интервала I , не примыкающего к точкам 0 и 1, функция u' обращается в нуль не менее трех раз. По теореме Ролля u'' имеет не менее двух корней, а u''' – не менее одного.

Далее, при фиксированном λ из (7) следует, что u^{IV} равномерно ограничена на всех интервалах I . Отсюда получаем оценки на I

$$|u'''(x)| \leq c|I|; \quad |u''(x)| \leq c|I|^2; \quad |u'(x)| \leq c|I|^3; \quad |u(x)| \leq c|I|^4,$$

где c не зависит от длины интервала.

Если длина интервала I достаточно мала, то из (7) следует, что u^{IV} отрицательна на I . Но это означает, что u'' имеет ровно два корня и выпукла вверх на I , что противоречит неравенству $u > 0$. Таким образом, длины интервалов I ограничены снизу положительным числом, и их количество конечно.

Поскольку f_1 непрерывна на $[0, 1]$, можно считать, что u'' непрерывно продолжена на замыкание объединения всех интервалов I , на котором теперь выполнено уравнение $-u'' = \lambda f_1$. Дополнение этого замыкания состоит из конечного числа интервалов, на которых $u'' = 0$, и таким образом u'' кусочно непрерывна на $[0, 1]$. Отметим, что указанное дополнение непусто, поскольку в ином случае функция u максимизировала бы функционал $\mathcal{P}_1[u]$ без ограничения $u \geq 0$, что невозможно ввиду результата [2].

Рассмотрим теперь изолированный сегмент $[x_0, x_1]$, на котором выполнено уравнение, и сдвинем его на достаточно малое число h , оставив остальные сегменты на месте, так, чтобы этот сегмент по-прежнему оставался изолированным и не вышел за пределы отрезка $[0, 1]$. Для полученной функции u_h очевидно имеем $\mathcal{I}[u_h] = \mathcal{I}[u]$, и

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1[u_h] = & \left(\int_0^{x_0} + \int_{x_1}^1 \right) (U(x) - xU(1))^2 dx + \int_{x_0}^{x_0+h} (U(x_0) - xU(1))^2 dx \\ & + \int_{x_0+h}^{x_1+h} (U(x-h) - xU(1))^2 dx - \int_{x_1}^{x_1+h} (U(x_1) - xU(1))^2 dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Сделав в предпоследнем интеграле в (8) замену $y = x - h$, легко видеть, что $\mathcal{J}_1[u_h]$ – квадратный трехчлен от h , причем

$$\frac{d^2}{dh^2} \mathcal{J}_1[u_h] = 2U(1)(U(x_1) - U(x_0)) > 0.$$

Таким образом, сдвигая сегмент $[x_0, x_1]$ либо вправо, либо влево вплотную к краю или к соседнему сегменту, мы заведомо увеличиваем функционал $\mathcal{J}_1[u]$, а потому и $\mathcal{P}_1[u]$.

Итак, остается три варианта:

1. $-u'' = \lambda f_1$ на $[0, x_0]$ и $u = 0$ на $[x_0, 1]$;
2. $-u'' = \lambda f_1$ на $[x_1, 1]$ и $u = 0$ на $[0, x_1]$;
3. $-u'' = \lambda f_1$ на $[0, x_0]$ и на $[x_1, 1]$, и $u = 0$ на $[x_0, x_1]$.

Легко видеть, что замена $u(x)$ на $u(1-x)$ не меняет значения функционала $\mathcal{P}_1[u]$. Поэтому варианты 1 и 2 эквивалентны.

В варианте 1 из (6) видно, что $u'''(0) = 0$. Таким образом, на отрезке $[0, x_0]$ уравнение (7) дополняется четырьмя краевыми условиями:

$$u(0) = u(x_0) = 0; \quad u'''(0) = 0; \quad u'(x_0) = 0. \quad (9)$$

В варианте 3 на отрезке $[0, x_0]$ по-прежнему выполнено уравнение (7) с краевыми условиями (9), а на отрезке $[x_1, 1]$ – то же уравнение с “перевернутыми” краевыми условиями

$$u(1) = u(x_1) = 0; \quad u'''(1) = 0; \quad u'(x_1) = 0.$$

Из симметрии получаем, что $x_1 = 1 - x_0$, и $u(x) \equiv u(1-x)$, откуда $U(x) + U(1-x) \equiv U(1)$. Теперь прямой подсчет показывает, что для функции $v(x) = u(x/2)$, $x \in [0, 1]$, справедливы соотношения

$$\mathcal{I}[v] = \frac{1}{4} \mathcal{I}[u]; \quad \mathcal{J}_1[v] = 4\mathcal{J}_1[u],$$

и потому функция u не дает максимума функционалу $\mathcal{P}_1$. Таким образом, осталось рассмотреть первый вариант.

Общее решение уравнения (7) при положительных λ

$$u(x) = c_1 \operatorname{ch}(kx) + c_2 \operatorname{sh}(kx) + c_3 \cos(kx) + c_4 \sin(kx) + c_5, \quad k^4 = \lambda. \quad (10)$$

При фиксированных k и x_0 граничные условия (9) дают четыре однородных уравнения на константы $c_1, \dots, c_5$. Еще одно уравнение получаем, подставляя (10) непосредственно в (7):

$$\int_0^{x_0} u(t) dt \equiv \int_0^1 u(t) dt = c_5.$$

Условием существования нетривиального решения является равенство нулю определителя соответствующей (5×5) -матрицы. Это дает

$$\sin\left(\frac{kx_0}{2}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{kx_0}{2}\right) \cdot \left[\operatorname{th}\left(\frac{kx_0}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{kx_0}{2}\right) + k(1 - x_0) \right] = 0. \quad (11)$$

Решение $u(x)$ при этом определено с точностью до мультипликативной постоянной.

Заметим теперь, что решение уравнения (7) с граничным условием $u'''(0) = 0$ автоматически удовлетворяет уравнению (6). Для выполнения же исходного уравнения $-u'' = \lambda f_1$ необходимо и достаточно, чтобы это уравнение выполнялось в какой-нибудь точке промежутка $[0, x_0]$. Например, равенство в точке x_0 имеет вид

$$-u''(x_0) = k^4 \left[\left(\frac{1}{3} - x_0 + \frac{x_0^2}{2} \right) \int_0^{x_0} u(t) dt + \int_0^{x_0} \frac{t^2}{2} u(t) dt \right],$$

или, после подстановки,

$$\begin{aligned} & (6 - 3k^2 x_0^2) \operatorname{tg}\left(\frac{kx_0}{2}\right) - (6 + 3k^2 x_0^2) \operatorname{th}\left(\frac{kx_0}{2}\right) \\ & + k^3 (2 - 6x_0 + 3x_0^2 + x_0^3) - 6k(1 - x_0) \operatorname{tg}\left(\frac{kx_0}{2}\right) \operatorname{th}\left(\frac{kx_0}{2}\right) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Нам нужно найти решение системы (11)-(12) с наименьшим k . Для этого заметим, что при фиксированном $x_0 < 1$ выражение в квадратных скобках в (11) является монотонной функцией k на каждом интервале возрастания тангенса. В частности, наименьший корень уравнения (11) удовлетворяет неравенству $\pi < kx_0 < 2\pi$. Обозначив $z = kx_0$, можно выразить k через z :

$$k = z - \operatorname{th}\left(\frac{z}{2}\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right).$$

Из $x_0 < 1$ выводим $k > z$, т.е. $\operatorname{th}\left(\frac{z}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) < 0$, что позволяет уточнить интервал для z : $\pi < z < z_0$, где $z_0 \approx 4.7300407$ – корень уравнения $\operatorname{th}\left(\frac{z}{2}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) = 0$ на интервале $(\pi, 2\pi)$.

Подставляя выражение для k в (12), получим после упрощения

$$g(z) := \operatorname{th}^3\left(\frac{z}{2}\right) + 3 \operatorname{th}\left(\frac{z}{2}\right) + \operatorname{tg}^3\left(\frac{z}{2}\right) - 3 \operatorname{tg}\left(\frac{z}{2}\right) = 0. \quad (13)$$

Поскольку $\lim_{z \rightarrow \pi+0} g(z) = -\infty$, $g(z_0) = 6 \operatorname{th}\left(\frac{z_0}{2}\right) > 0$, и

$$g'(z) = \frac{3}{2} \left[\operatorname{tg}^4\left(\frac{z}{2}\right) - \operatorname{th}^4\left(\frac{z}{2}\right) \right] > 0 \quad \text{на } (\pi, z_0),$$

уравнение (13) имеет на интервале (π, z_0) ровно один корень. Приближенное вычисление дает $\hat{z} \approx 4.00273$, $\hat{k} \approx 5.21579$ и $\hat{x}_0 \approx 0.767426$.

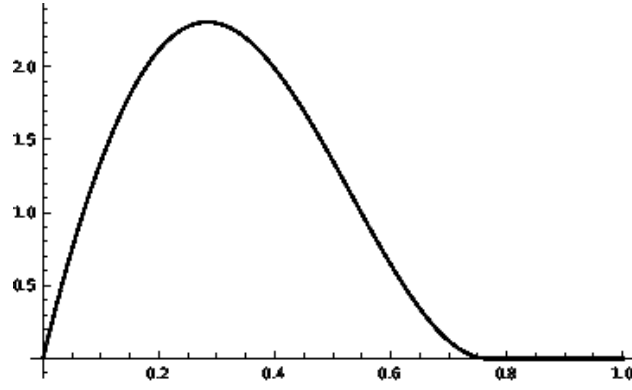


Рис. 1: График максимизирующей функции в задаче (3)

Несложно проверить, что соответствующее решение $u(x)$ положительно на интервале $(0, \hat{x}_0)$. Отсюда видно, что $f_1(\hat{x}_0) = -\lambda^{-1}u''(\hat{x}_0) < 0$. Поскольку на интервале $(\hat{x}_0, 1)$ имеем $f_1'(x) = U(1)(x - 1) < 0$, на этом интервале выполнено неравенство $\lambda f_1(x) < 0 = -u''(x)$. Таким образом, функция u удовлетворяет необходимому условию максимума (см. рис. 1). Поскольку $\lambda = \hat{k}^4$ принимает наименьшее возможное значение, функция u дает максимум функционалу $\mathcal{P}_1$ при заданных ограничениях, и максимальное значение равно $\hat{k}^{-4} \approx 0.0013512$.

Оптимальный локальный индекс для $\bar{U}_n^2$, вычисленный в [2], равен $z_0^{-4} \approx 0.0019977$. Таким образом, доступная локальная асимптотическая эффективность статистики $\bar{U}_n^2$ при альтернативе сдвига составляет более 67% от оптимальной.

3 Статистика $S_{\infty,n}$

Мы ищем максимум в экстремальной задаче

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{2,\infty}[u] &:= \max_{[0,1]} \left(u(x) + \int_0^x \frac{u(t)}{1-t} dt - x \int_0^1 \frac{u(t)}{1-t} dt \right)^2 \rightarrow \max; \\ \mathcal{I}[u] &= \int_0^1 (u'(x))^2 dx \leq 1; \quad u \geq 0; \quad u(0) = u(1) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Аналогично предыдущему параграфу, заключаем, что функционал $\mathcal{J}_{2,\infty}$ достигает наибольшего значения на множестве в $\mathring{W}_2^1(0,1)$, задаваемом ограничениями $\mathcal{I}[u] \leq 1$ и $u \geq 0$.

Будем действовать в два этапа. Сначала найдем максимум вспомогательного функционала

$$\tilde{\mathcal{J}}_{2,\infty}[u] = \left(u(x_*) + \int_0^{x_*} \frac{u(t)}{1-t} dt - x_* \int_0^1 \frac{u(t)}{1-t} dt \right)^2,$$

где $x_* \in (0,1)$ – фиксированная точка. Далее произведем максимизацию полученного результата по $x_* \in (0,1)$.

Итак, пусть $x_* \in (0,1)$ задана. Аналогично (5), необходимое условие максимума имеет вид

$$\lambda d\tilde{\mathcal{J}}_{2,\infty}[u]\eta - d\mathcal{I}[u]\eta \leq 0$$

для всех приращений $\eta \in \mathring{W}_2^1(0,1)$ таких, что $u + \eta \geq 0$. Здесь и далее λ^{-1} – значение функционала $\mathcal{P}_2[u] \equiv \tilde{\mathcal{J}}_{2,\infty}[u]/\mathcal{I}[u]$ на максимизирующей функции.

Прямой подсчет дает

$$\frac{1}{2} d(\lambda\tilde{\mathcal{J}}_{2,\infty} - \mathcal{I})[u]\eta = \langle u'' + \lambda f_2, \eta \rangle,$$

где u'' понимается в смысле обобщенных функций, а f_2 – мера (заряд)

$$f_2(x) = (v(x_*) - x_* v(1)) \left[\delta(x - x_*) + \frac{1}{1-x} (\chi_{[0,x_*]}(x) - x_*) \right];$$

здесь и далее

$$v(x) = u(x) + \int_0^x \frac{u(t)}{1-t} dt \tag{15}$$

– преобразование Хмаладзе функции u (см. [3]).

Как и в предыдущей задаче, отсюда получаем, что $u'' + \lambda f_2 \leq 0$ в смысле обобщенных функций. Поэтому u'' есть мера (заряд), и ее сингулярная часть неположительна. Далее, на каждом интервале I положительности u имеем $-u'' = \lambda f_2$.

Обозначим $\mathcal{C} = \lambda(v(x_*) - x_*v(1)) > 0$. Тогда дословным повторением рассуждения из предыдущей задачи выводим, что $u'' + \mathcal{C}\delta(\cdot - x_*)$ – регулярная функция, u' непрерывна на $[0, 1] \setminus \{x_*\}$, и на краях каждого интервала I , кроме условия $u = 0$, выполнено условие $u' = 0$ (за исключением, возможно, точек 0 и 1).

Заметим теперь, что на интервале I , содержащем точку x_* , имеем

$$u''(x) = \begin{cases} -\frac{\mathcal{C}(1-x_*)}{1-x} < 0, & x < x_*; \\ \frac{\mathcal{C}x_*}{1-x} > 0, & x > x_*. \end{cases} \quad (16)$$

Поэтому на левом конце этого интервала условие $u' = 0$ выполняться не может. Следовательно, этот интервал начинается от нуля. Тогда на любом другом интервале положительности u мы имели бы $u'' > 0$, что невозможно. Таким образом, остается один вариант:

$$-u'' = \lambda f_2 \text{ на } [0, x_0] \text{ и } u = 0 \text{ на } [x_0, 1].$$

При этом $x_* < x_0 < 1$, поскольку в ином случае функция u максимизировала бы функционал $\mathcal{P}_2[u]$ без ограничения $u \geq 0$, что невозможно ввиду результата [7, §4.4].

Общее решение уравнения (16) на $[0, x_0]$ имеет вид

$$u(x) = \begin{cases} \mathcal{C}(1-x_*)(1-x) \ln \frac{1}{1-x} + c_1x + c_2, & 0 < x < x_*; \\ -\mathcal{C}x_*(1-x) \ln \frac{1}{1-x} + c_3x + c_4, & x_* < x < x_0. \end{cases}$$

Это решение должно удовлетворять граничным условиям

$$u(0) = u(x_0) = u'(x_0) = 0$$

и условиям сопряжения в точке x_*

$$u(x_* - 0) = u(x_* + 0); \quad u'(x_* - 0) = u'(x_* + 0) + \mathcal{C}.$$

(первое из них обеспечивает непрерывность u , второе контролирует коэффициент при $\delta(x - x_*)$).

Это дает 5 однородных уравнений на $\mathcal{C}$ и c_1 – c_4 . Равенство нулю соответствующего определителя дает

$$x_0 + \ln(1 - x_0) = \ln(1 - x_*)/x_*. \quad (17)$$

При этом c_1 – c_4 явно выражаются через $\mathcal{C}$, и таким образом решение $u(x)$ определено с точностью до мультипликативной постоянной.

Переходя ко второму этапу, мы максимизируем по x_* функцию

$$\lambda^{-1} = \mathcal{C}^{-1} \left(u(x_*) + \int_0^{x_*} \frac{u(t)}{1-t} dt - x_* \int_0^{x_0} \frac{u(t)}{1-t} dt \right),$$

где x_0 определяется по x_* из уравнения (17), а u – полученное на первом этапе решение. После некоторых упрощений это приводит к задаче

$$x_* - 2x_*^2 + x_*^2 x_0^2 \rightarrow \max$$

при условии (17).

В Приложении 2 показано, что эта задача имеет единственную критическую точку – глобальный максимум. Приближенное вычисление дает $\hat{x}_* \approx 0.4310514$, $\hat{x}_0 \approx 0.88889$. Очевидно, что соответствующее решение $u(x)$ положительно на интервале $(0, x_0)$. Далее, на интервале $(\hat{x}_0, 1)$ выполнено неравенство $\lambda f_2(x) < 0 = -u''(x)$. Таким образом, функция u дает максимум функционалу $\mathcal{P}_2$ при заданных ограничениях (см. рис. 2), и максимальное значение равно $\hat{x}_* - 2\hat{x}_*^2 + \hat{x}_*^2 \hat{x}_0^2 \approx 0.20625$.

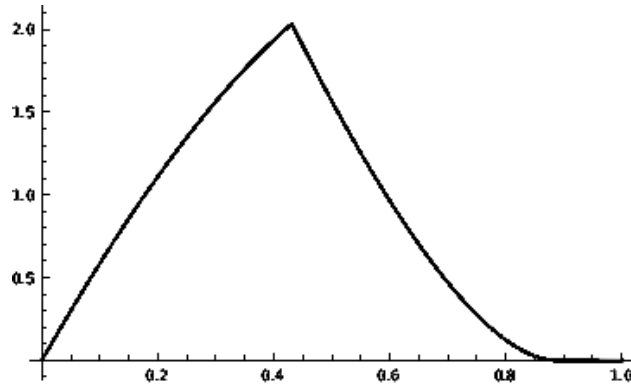


Рис. 2: График максимизирующей функции в задаче (14)

Оптимальный локальный индекс для $S_{\infty,n}$, вычисленный в [7], равен 0.25. Таким образом, доступная локальная асимптотическая эффективность статистики $S_{\infty,n}$ при альтернативе сдвига составляет более 82% от оптимальной.

Приложения

1. Покажем, что в задаче (4) максимизирующая функция знакопеременна. Хорошо известно, что преобразование Хмаладзе (15) изометрично отображает $\overset{\circ}{W}_2^1(0,1)$ на пространство

$$W_{2,0}^1(0,1) = \{v \in W_2^1(0,1) \mid v(0) = 0\}.$$

Действительно, интегрирование по частям с учетом граничных условий дает

$$\int_0^1 (v')^2(x) dx = \int_0^1 \left[(u')^2(x) + \frac{2u'(x)u(x)}{1-x} + \frac{u^2(x)}{(1-x)^2} \right] dx = \int_0^1 (u')^2(x) dx,$$

и задачу (4) можно записать в терминах функции v :

$$\int_0^1 (v'(x))^2 dx \leq 1; \quad v(0) = 0; \quad \left[\int_0^1 |v(x) - xv(1)|^p dx \right]^{\frac{2}{p}} \rightarrow \max.$$

Обозначим $w(x) = v(x) - xv(1)$. Тогда задача (4) переписывается так:

$$\int_0^1 (w'(x) + a)^2 dx \leq 1; \quad w(0) = w(1) = 0; \quad \left[\int_0^1 |w(x)|^p dx \right]^{\frac{2}{p}} \rightarrow \max,$$

где $a = v(1)$. В силу граничных условий

$$\int_0^1 (w'(x) + a)^2 dx = \int_0^1 ((w'(x))^2 + a^2) dx,$$

Поэтому для максимизирующей функции $a = 0$, и $v = w$.

Полученная экстремальная задача для $v = w$ хорошо известна (см., напр., [6, §2.6]; более подробно история вопроса изложена в недавнем обзоре [5]). Максимум в ней достигается на функции (выражаемой в квадратурах), четной относительно точки $x = \frac{1}{2}$ и выпуклой вверх на интервале $(0,1)$.

Применим теперь обратное преобразование Хмаладзе

$$u(x) = (1-x) \int_0^x \frac{v'(t)}{1-t} dt. \tag{18}$$

Не умаляя общности, будем считать $v > 0$. Тогда $v'(t) > 0$ при $t < \frac{1}{2}$, и $u > 0$ в окрестности нуля. Но поскольку $v'(t) < 0$ при $t > \frac{1}{2}$, и интеграл в (18) расходится (логарифмически) при $x \rightarrow 1$, получим $u(x) < 0$ в окрестности точки $x = 1$, и утверждение доказано.

2. Мы ищем максимум функции

$$F(x, y) := x - 2x^2 + x^2y^2, \quad x, y \in [0, 1],$$

при условии

$$G(x, y) := y + \ln(1 - y) - \frac{\ln(1 - x)}{x} = 0. \quad (19)$$

Легко видеть, что при всех $x \in [0, 1)$ уравнение (19) имеет единственное решение $y = \tilde{y}(x) \in [0, 1]$. Более того, $\tilde{y}(x)$ – возрастающая функция, $\tilde{y}(x) > 0.84$ и $\lim_{x \rightarrow 1} \tilde{y}(x) = 1$.

По теореме Эйлера необходимое условие экстремума имеет вид

$$\nabla F(x, y) \parallel \nabla G(x, y),$$

что сводится к уравнению

$$D(x, y) := \frac{1}{1 - y} - \frac{4x}{1 - y} + \frac{2x}{1 - x} + \frac{2xy^2}{1 - y} + 2 \ln(1 - x) = 0. \quad (20)$$

Лемма. Система уравнений (19)–(20) имеет в области $(0, 1) \times (0, 1)$ единственное решение (см. рис. 3).

Доказательство. Легко видеть, что $\partial_{yy}^2 D(x, y) > 0$. Далее,

$$D(0, y) > 0; \quad D(0.5, y) < 0; \quad \lim_{x \rightarrow 1} D(x, y) = +\infty.$$

Поэтому при любом $y \in (0, 1)$ уравнение (20) имеет ровно два решения. Обозначим их $\hat{x}_1(y) \in (0, 0.5)$ и $\hat{x}_2(y) \in (0.5, 1)$. Несложно видеть, что $\lim_{y \rightarrow 1} \hat{x}_2(y) = 1$.

Покажем, что кривые $y = \tilde{y}(x)$ и $x = \hat{x}_2(y)$ не имеют пересечений внутри квадрата. Действительно, рассмотрим прямую $x = 2y - 1$. Имеем

$$D(2y - 1, y) = 4 - 2y - 4y^2 + 2 \ln(2 - 2y) < 0 \quad \text{при} \quad 0.7 < y < 1,$$

и потому $\hat{x}_2(y) > 2y - 1$ при $0.7 < y < 1$. В то же время

$$G(2y - 1, y) = y + \ln(2 - 2y)/(1 - 2y) + \ln(1 - y) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < y < 1,$$

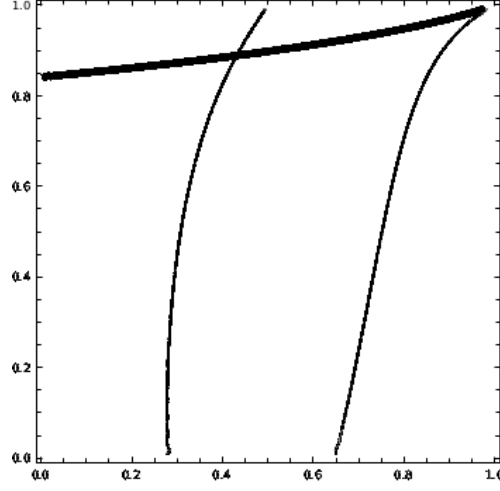


Рис. 3: Решения уравнений (19) (жирная линия) и (20) (тонкая линия)

поэтому $2\tilde{y}(x) - 1 > x$, и утверждение доказано.

Рассмотрим теперь ветку $x = \hat{x}_1(y)$. Она имеет хотя бы одно пересечение с кривой $y = \tilde{y}(x)$. Поскольку $D(0.4, y) > 0$ при $y \in (0.84, 1)$, имеем $\hat{x}_1(y) \in (0.4, 0.5)$ при $y \in (0.84, 1)$. Далее, $G(0.5, y) < 0$ при $y \in (0.9, 1)$, и потому $\tilde{y}(x) \in (0.84, 0.9)$ при $x < 0.5$. Наконец, $D(0.45, y) < 0$ при $y \in (0.84, 0.9)$, поэтому $\hat{x}_1(y) \in (0.4, 0.45)$ при $y \in (0.84, 0.9)$. Итак, мы показали, что точка пересечения кривых $y = \tilde{y}(x)$ и $x = \hat{x}_1(y)$ не может лежать вне прямоугольника $\Delta = (0.4, 0.45) \times (0.84, 0.9)$.

Дифференцируя неявную функцию $\tilde{y}(x)$, получаем

$$\tilde{y}'(x) = \frac{(1-y)(x + (1-x)\ln(1-x))}{(1-x)x^2y} \Big|_{y=\tilde{y}(x)}. \quad (21)$$

Обозначим $G_1(x, y)$ функцию, стоящую в правой части (21). Несложно убедиться, что $G_1(x, y)$ в прямоугольнике Δ убывает по y и возрастает по x . Поэтому в пределах прямоугольника Δ имеем

$$\tilde{y}'(x) < G_1(0.45, 0.84) < 0.2.$$

Аналогично, дифференцируя неявную функцию $\hat{x}_1(y)$, получаем

$$\hat{x}'_1(y) = \frac{(1-x)^2(1-4x+4xy-2xy^2)}{2(1-y)(2-5x+2x^2+xy-(1-x)^2y^2)} \Big|_{x=\hat{x}_1(y)}. \quad (22)$$

Обозначим $D_1(x, y)$ функцию, стоящую в правой части (22). Несложно убедиться, что $D_1(x, y)$ в прямоугольнике Δ убывает по x и возрастает по y . Поэтому в пределах прямоугольника Δ имеем

$$\hat{x}'_1(y) < D_1(0.4, 0.9) < 0.9.$$

Из полученных неравенств следует, что точка пересечения единственная. Лемма доказана. $\square$

Поскольку $F(0, y) \equiv 0$ и $F(1, 1) = 0$, найденное решение системы (19)–(20) является точкой максимума.

Список литературы

- [1] P. Deheuvels, *Invariance of Wiener processes and of Brownian bridges by integral transforms and applications*, Stochastic Processes and their Applications, **13** (1982), N3, 311–318.
- [2] N. Henze and Ya.Yu. Nikitin, *Watson-Type Goodness-of-Fit Tests Based on the Integrated Empirical Process*, Mathematical Methods of Statistics, January 2002.
- [3] Э.В. Хмаладзе, *Мартингалный подход в теории непараметрических критериев согласия*, Теория вероятн. и ее примен., **26** (1981), N2, 246–265.
- [4] G. Kallianpur, H. Oodaira, Freidlin–Wentzell type estimates for abstract Wiener spaces. Sankhyā: The Indian Journal of Statistics, Series A, **40** (1978), N2, 116–137.
- [5] A.I. Nazarov, A.P. Shcheglova, *Steklov-type 1D inequalities (a survey)*, Preprint available at <https://arxiv.org/abs/2101.10752>. 13p.
- [6] Я.Ю. Никитин, *Асимптотическая эффективность непараметрических критериев*, М., Физматлит, 1995.
- [7] О.А. Подкорытова, *Бахадуровская эффективность непараметрических критериев согласия, основанных на преобразованных эмпирических процессах*, Дисс. ...к.ф.м.н., СПбГУ, СПб, 1994.