Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 17.07.2021
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Лемма о нормальной производной и вокруг неё

Д.Е. Апушкинская*, А.И. Назаров**

Аннотация

В настоящем обзоре дано описание истории и современного состояния одного из важнейших разделов качественной теории дифференциальных уравнений в частных производных эллиптического типа, связанного с сильным принципом максимума и принципом граничной точки (леммой о нормальной производной).
Библиография: 360 названий.

Ключевые слова. Сильный принцип максимума, лемма о нормальной производной, лемма Хопфа–Олейник, неравенство Гарнака, принцип максимума Александрова–Бакельмана.

УДК 517.95

Содержание

*Российский университет дружбы народов и Санкт-Петербургский госуниверситет
**ПОМИ РАН и Санкт-Петербургский госуниверситет

1 Введение

Качественная теория уравнений в частных производных интенсивно развивается на протяжении последнего столетия. Среди важнейших инструментов исследования решений эллиптических и параболических уравнений находятся, в частности, лемма о нормальной производной (известная также как лемма Хопфа–Олейник или принцип граничной точки) и сильный принцип максимума. Они играют ключевую роль в доказательствах теорем единственности для краевых задач, используются также при изучении свойств симметрии решений и поведения решений в неограниченных областях (теоремы типа Фрагмена–Линделёфа) и в других приложениях.

Первые результаты в этой области прослеживаются вплоть до работ К.Ф. Гаусса, который в знаменитой статье 1840 года [1, § 21] доказал сильный принцип максимума для гармонических функций (см. также [2], [3]). В современных обозначениях утверждение Гаусса выглядит так:

Пусть u – непостоянная гармоническая функция в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, то есть $\Delta u = 0$ в Ω. Тогда функция u не может достигать во внутренних точках Ω ни максимального, ни минимального значения.

В дальнейшем под сильным принципом максимума для линейного эллиптического оператора $\mathbb{L}$ второго порядка мы будем понимать следующее утверждение:

Сильный принцип максимума. *Пусть u – суперэллиптическая функция в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, то есть*[1] *$\mathbb{L}u \geq 0$ в Ω. Если u достигает наименьшего значения во внутренней точке области, то $u \equiv const$ и $\mathbb{L}u \equiv 0$.*

Напомним также формулировку слабого принципа максимума:

Слабый принцип максимума. *Пусть u – суперэллиптическая функция в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Если u неотрицательна на границе области, то u неотрицательна в Ω.*

Граничной формой сильного принципа максимума является лемма о нормальной производной, впервые сформулированная С. Зарембой в 1910 году [4] для гармонических функций в (трехмерной ограниченной) области, удовлетворяющей условию внутреннего шара[2].

Лемма о нормальной производной. *Пусть u – непостоянная суперэллиптическая функция в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Если u достигает наимень-*

[1] Мы считаем, что старшие коэффициенты оператора $\mathbb{L}$ образуют ***неположительную*** матрицу.

[2] Отметим, что Заремба использовал эту лемму в доказательстве теоремы единственности для смешанной задачи (граница области разделена на две части, на одной из которых задано условие Дирихле, а на другой – условие Неймана). Ныне эта задача называется задачей Зарембы, хотя сам Заремба в [4] указывает, что она была поставлена ему В. Виртингером.

шего значения в граничной точке $x^0 \in \partial\Omega$, то справедливо неравенство

$$\liminf_{\varepsilon\to+0} \frac{u(x^0+\varepsilon\mathbf{n})-u(x^0)}{\varepsilon} > 0, \tag{1.1}$$

где $\mathbf{n}$ – вектор внутренней нормали к границе области в точке x^0.

В частности, если функция u имеет в точке x^0 производную по направлению $\mathbf{n}$, то $\partial_{\mathbf{n}} u(x^0) > 0$.

Важно отметить, что если сильный принцип максимума – свойство оператора $\mathbb{L}$, то выполнение леммы о нормальной производной зависит также от поведения $\partial\Omega$ в окрестности x^0.

К основным предметам обзора вплотную примыкает неравенство Гарнака, которое можно рассматривать как количественную версию сильного принципа максимума. Впервые оно было доказано К.Г.А. Гарнаком[3] в 1887 году [5, § 19] для гармонических функций на плоскости. Классическая формулировка этого неравенства такова:

Неравенство Гарнака. *Пусть $\mathbb{L}$ – эллиптический оператор в области Ω. Если u – неотрицательное решение уравнения $\mathbb{L}u = 0$ в Ω, то в любой ограниченной подобласти Ω' такой, что $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, справедливо неравенство*

$$\sup_{\Omega'} u \le C \inf_{\Omega'} u, \tag{1.2}$$

где C – константа, не зависящая от u.

Замечание 1.1. *Из соображений компактности ясно, что достаточно доказать (1.2) для случая, когда Ω и Ω' – концентрические шары. При этом для приложений важно, чтобы константа C не зависела от радиусов шаров (а только от их отношения) или в крайнем случае оставалась ограниченной при стремлении радиусов к нулю при фиксированном их отношении.*

Также количественной версией сильного принципа максимума можно считать некоторые априорные оценки решений, в частности, принцип максимума Александрова–Бакельмана. А априорная оценка градиента

[3] У математика Карла Густава Акселя Гарнака был брат-близнец Карл Густав Адольф фон Гарнак, историк и теолог, президент-основатель Общества кайзера Вильгельма по развитию науки (ныне Общество научных исследований имени Макса Планка). Его имя носит высшая награда Общества Макса Планка.

решения на границе области, как стало ясно сравнительно недавно, является утверждением, двойственным к лемме о нормальной производной.

Затронутая тема практически необозрима, поэтому в настоящей работе мы сосредоточились на эллиптическом случае[4]. Основная часть статьи разделена на три главы. В главе 2 обсуждаются свойства ***классических*** и ***сильных*** (суб/супер)решений уравнений ***недивергентного*** вида, в главе 3 – свойства ***слабых*** (суб/супер)решений уравнений ***дивергентного*** вида. Наконец, глава 4 – “винегрет” из различных обобщений и приложений. Здесь мы не претендуем на полноту изложения, а выбор тем отражает личные интересы авторов.

Различные аспекты обсуждаемой темы отражены в монографиях и обзорах [7]–[16]. В своей работе мы использовали информацию из этих источников, а также из наших статей [17], [18], но постарались по возможности глубже осветить историю упомянутых вопросов.

Мы глубоко признательны Нине Николаевне Уральцевой, нашему Учителю, которая ввела нас в эту тематику. Мы благодарны А.И. Ибрагимову, М. Квашницкому, В.Г. Мазья, Р. Мусине, М.В. Сафонову, Б. Сиракову, М.Д. Сурначеву, Н.Д. Филонову, Т.Н. Шилкину за консультации и обсуждения. Отдельное спасибо Г.В. Розенблюму и Н.С. Устинову за помощь в подборе материала.

Работа поддержана грантом РФФИ “Экспансия” 20-11-50059.

The reported study was funded by RFBR, project number 20-11-50059.

Основные обозначения

$x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n)$ – точки в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

$|x|$, $|x'|$ – евклидовы нормы в соответствующих пространствах.

$\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ – ***замкнутая*** полуось.

Ω – область (связное открытое множество) в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial\Omega$; если не оговорено противное (как в § 4.2), то Ω считается ограниченной; $\overline{\Omega}$ обозначает замыкание Ω, $|\Omega|$ – лебегову меру Ω, а $\mathrm{diam}(\Omega)$ – диаметр Ω.
$\mathrm{d}(x) = \mathrm{dist}\,(x, \partial\Omega)$ – расстояние от точки x до $\partial\Omega$.

[4]Кроме того, мы ограничиваемся скалярными уравнениями. Укажем в связи с этим на недавний обзор [6], посвященный принципу максимума для эллиптических ***систем***.

$B_r^n(x^0) = \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x - x^0| < r\}$ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром x^0 и радиусом r; $B_r^n = B_r^n(0)$; если размерность ясна из контекста, пишем просто $B_r(x^0)$ и B_r.
$Q_{r,h} = B_r^{n-1} \times (0, h)$.

Индексы i и j принимают значения от 1 до n. D_i обозначает оператор дифференцирования по переменной x_i. Применяется правило суммирования по повторяющимся индексам.

Для функции f положим $f_\pm = \max\{\pm f, 0\}$ и

$$\fint_\Omega f\,dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega f\,dx.$$

Различные положительные константы обозначаются буквами C и N (с индексами или без). Запись $C(\dots)$ означает, что C зависит только от параметров, указанных в скобках.

Классы функций и областей

$\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ – пространство функций, определенных на $\overline{\Omega}$ и имеющих непрерывные производные до порядка k ($k \geq 0$) включительно. Для краткости вместо $\mathcal{C}^0$ мы обычно пишем $\mathcal{C}$.

$L_p(\Omega)$, $W_p^k(\Omega)$ и $\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$ – стандартные пространства Лебега и Соболева (см., например, [19, § 4.2.1]); $\|\cdot\|_{p,\Omega}$ – норма в $L_p(\Omega)$. Далее, $f \in L_{p,\mathrm{loc}}(\Omega)$, если $f \in L_p(\Omega')$ для любой подобласти Ω' такой, что $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Аналогично определим $f \in W_{p,\mathrm{loc}}^k(\Omega)$.

$L_{p,q}(\Omega)$ – пространства Лоренца (см., например, [19, § 1.18.6]).

Будем говорить, что $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ – функция класса $\mathcal{D}$, если

- σ непрерывна, возрастает и $\sigma(0) = 0$;
- $\sigma(\tau)/\tau$ убывает и суммируема.

Замечание 1.2. *Отметим, что предположение об убывании $\sigma(\tau)/\tau$ не является ограничительным. Действительно, для возрастающей функции $\sigma : [0,1] \to \mathbb{R}_+$, удовлетворяющей условию $\sigma(0) = 0$ и имеющей суммируемую $\sigma(\tau)/\tau$, определим*

$$\widetilde{\sigma}(t) = t \sup_{\tau \in [t,1]} \frac{\sigma(\tau)}{\tau}, \qquad t \in (0,1).$$

Очевидно, что $\widetilde{\sigma}(t)/t$ убывает на $[0,1]$ и $\sigma(t) \le \widetilde{\sigma}(t)$ на $(0,1]$ (последнее неравенство позволяет поставить во всех оценках $\widetilde{\sigma}$ вместо σ). Далее, множество точек, в которых $\sigma(t) < \widetilde{\sigma}(t)$, представляет собой не более чем счетное объединение интервалов (t_{1j}, t_{2j}). На каждом из этих интервалов $\widetilde{\sigma}$ возрастает и потому возрастает на $[0,1]$.

Рассмотрим теперь интеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\widetilde{\sigma}(\tau)}{\tau}\,d\tau = \int\limits_{\{\widetilde{\sigma}=\sigma\}} \frac{\sigma(\tau)}{\tau}\,d\tau + \sum_j \int\limits_{t_{1j}}^{t_{2j}} \frac{\widetilde{\sigma}(\tau)}{\tau}\,d\tau.$$

Но на интервале (t_{1j}, t_{2j})

$$\frac{\widetilde{\sigma}(t)}{t} \equiv \frac{\sigma(t_{1j})}{t_{1j}} = \frac{\sigma(t_{2j})}{t_{2j}},$$

откуда, учитывая монотонность σ, получаем

$$\int\limits_0^1 \frac{\widetilde{\sigma}(\tau)}{\tau}\,d\tau = \int\limits_{\{\widetilde{\sigma}=\sigma\}} \frac{\sigma(\tau)}{\tau}\,d\tau + \sum_j \big(\sigma(t_{2j}) - \sigma(t_{1j})\big) < \infty,$$

и, таким образом, $\widetilde{\sigma} \in \mathcal{D}$.

Замечание 1.3. *Также не умаляя общности, можно считать функцию σ непрерывно дифференцируемой на $(0;1]$. Действительно, для любой $\sigma \in \mathcal{D}$ определим*

$$\hat{\sigma}(r) := 2\int\limits_{r/2}^{r} \frac{\sigma(\tau)}{\tau}\,d\tau = 2\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\sigma(r\tau)}{\tau}\,d\tau, \qquad r \in (0;1]. \tag{1.3}$$

Из второго равенства в (1.3) в силу монотонности функций σ и $\dfrac{\sigma(\tau)}{\tau}$ заключаем, что $\hat{\sigma}$ также возрастает, а $\dfrac{\hat{\sigma}(r)}{r}$ убывает на $(0;1]$. Далее, из первого равенства в (1.3) очевидно, что $\hat{\sigma} \in \mathcal{C}^1(0;1]$, и выполнены неравенства

$$\sigma(r) \le \hat{\sigma}(r) \le 2\sigma(r/2), \qquad r \in (0;1]. \tag{1.4}$$

Второе неравенство в (1.4) влечет $\hat{\sigma} \in \mathcal{D}$. Наконец, первое из неравенств в (1.4) позволяет поставить во всех оценках $\hat{\sigma}$ вместо σ.

Будем говорить, что функция $\zeta : \Omega \to \mathbb{R}$ удовлетворяет:

- условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0,1]$, если

$$|\zeta(x) - \zeta(y)| \le C|x-y|^{\alpha} \quad \text{для всех} \quad x, y \in \Omega;$$

- условию Дини, если

$$|\zeta(x) - \zeta(y)| \le \sigma(|x-y|) \quad \text{для всех} \quad x, y \in \Omega,$$

  и $\sigma \in \mathcal{D}$.

Далее, $\mathcal{C}^{k,\alpha}(\Omega)$ и $\mathcal{C}^{k,\mathcal{D}}(\Omega)$ при $k \ge 0$ – пространства функций, у которых производные порядка k удовлетворяют условию Гельдера с показателем $\alpha \in (0,1]$ (соответственно, условию Дини). Функции из $\mathcal{C}^{0,1}(\Omega)$ называются липшицевыми.

Говорят, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ принадлежит **классу** $\mathcal{C}^k$, $k \ge 0$, если существует $r > 0$ такое, что для каждой точки $x^0 \in \partial\Omega$ множество $B_r(x^0) \cap \partial\Omega$ в подходящей декартовой системе координат есть график некоторой функции $x_n = f(x')$, где $f \in \mathcal{C}^k(G)$ (здесь G – какая-то область в $\mathbb{R}^{n-1}$)[5]. Аналогично определяются области классов $\mathcal{C}^{k,\alpha}$ и $\mathcal{C}^{k,\mathcal{D}}$.

Области класса $\mathcal{C}^{0,1}$ называют строго липшицевыми.

Напомним, что **условие внутреннего шара** состоит в том, что каждой точки границы $\partial\Omega$ можно коснуться шаром фиксированного радиуса, полностью лежащим в Ω.

Аналогично, обозначим $\mathfrak{T}(\phi, h)$ (здесь $h > 0$, $\phi : [0, +\infty) \mapsto [0, +\infty)$ – выпуклая функция, $\phi(0) = 0$) область (тело)

$$\mathfrak{T}(\phi, h) = \big\{ x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, \phi(|x'|) < x_n < h \big\}.$$

Если каждой точки $x^0 \in \partial\Omega$ можно коснуться конгруэнтным $\mathfrak{T}(\phi, h)$ телом с вершиной в точке x^0, полностью лежащим в Ω, причем ϕ, h не зависят от x^0, то говорят, что Ω удовлетворяет условию

- **внутреннего $\mathcal{C}^{1,\alpha}$-параболоида**, $\alpha \in (0,1]$, если $\phi(s) = Cs^{1+\alpha}$ (при $\alpha = 1$ это условие совпадает с условием внутреннего шара);

- **внутреннего $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$-параболоида**, если $\phi'(0+) = 0$, и ϕ' удовлетворяет условию Дини;

[5] При этом множество $U \cap \Omega$ лежит с одной стороны от графика.

- **внутреннего конуса**, если $\phi(s) = Cs$.

Аналогично определяются условия **внешнего шара**, **внешнего параболоида** и **внешнего конуса**.

Легко видеть, что область класса $\mathcal{C}^{1,1}$ удовлетворяет условиям внутреннего и внешнего шара (более того, эти условия совместно равносильны $\mathcal{C}^{1,1}$-гладкости области, см., например, [20, Лемма 2]). Аналогично, области класса $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ – это в точности области, удовлетворяющие условиям внутреннего и внешнего $\mathcal{C}^{1,\alpha}$-параболоида; области класса $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$ – области, удовлетворяющие условиям внутреннего и внешнего $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$-параболоида[6]; строго липшицевы области удовлетворяют условиям внутреннего и внешнего конуса[7].

2 Операторы недивергентного вида

В этой главе рассматриваются операторы следующей структуры:

$$\mathcal{L} \equiv -a^{ij}(x)D_iD_j + b^i(x)D_i. \tag{2.1}$$

Введем обозначение $\mathcal{A} = (a^{ij})$, $\mathbf{b} = (b^i)$. В случае $\mathbf{b} \equiv 0$ вместо $\mathcal{L}$ будем писать $\mathcal{L}_0$.

Матрица старших коэффициентов $\mathcal{A}$ симметрична и удовлетворяет **условию эллиптичности с вырождением**

$$a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq 0 \quad \text{для всех} \ \ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.2}$$

или **условию равномерной эллиптичности**

$$\nu|\xi|^2 \leq a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \leq \nu^{-1}|\xi|^2 \quad \text{для всех} \ \ \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.3}$$

(здесь $\nu \in (0,1]$ – константа, именуемая **константой эллиптичности**).

В §§ 2.1–2.2 мы считаем, что условие (2.2) или (2.3) выполнено при всех $x \in \Omega$. Начиная с § 2.3, предполагается, что элементы матрицы $\mathcal{A}$ – измеримые функции, и условие (2.2) или (2.3) выполнено при почти всех $x \in \Omega$.

[6] Без наложения априорного условия “граница области локально есть график функции” эти равносильности были доказаны в [16].

[7] Здесь, вопреки утверждению, сделанному в [16], равносильности уже нет. Контрпримером может служить липшицева, но не строго липшицева область, составленная из двух “кирпичей” (см., например, [21, с.39]).

Замечание 2.1. *Для операторов более общего вида $\mathcal{L} + c(x)$ и сильный принцип максимума, и лемма о нормальной производной в форме, приведенной во введении, очевидно не выполняются (первая собственная функция задачи Дирихле для оператора Лапласа служит контрпримером даже для слабого принципа максимума). В этом случае обычно накладывают условие на знак коэффициента $c(x)$ в окрестности точки минимума. Приведем две пары простых утверждения.*

1. *Предположим, что для оператора $\mathcal{L}$ справедлив сильный принцип максимума.*

   (a) *Пусть $c \geq 0$, $c \not\equiv 0$. Если $\mathcal{L}u + cu \geq 0$ в Ω, то u не может достигать* ***отрицательного*** *минимума в Ω.*

   (б) *Пусть $c \leq 0$, $c \not\equiv 0$. Если $\mathcal{L}u + cu \geq 0$ в Ω, то u не может достигать* ***неотрицательного*** *минимума в Ω, за исключением случая $u \equiv 0$.*

2. *Предположим, что для оператора $\mathcal{L}$ в области Ω справедлива лемма о нормальной производной.*

   (a) *Пусть $\mathcal{L}u + cu \geq 0$ в Ω, $c \geq 0$, $c \not\equiv 0$. Если u достигает* ***отрицательного*** *наименьшего значения в граничной точке $x^0 \in \partial\Omega$, то справедливо неравенство $\partial_{\mathbf{n}} u(x^0) > 0$.*

   (б) *Пусть $\mathcal{L}u + cu \geq 0$ в Ω, $c \leq 0$, $c \not\equiv 0$. Если u достигает* ***неотрицательного*** *наименьшего значения в граничной точке $x^0 \in \partial\Omega$, то справедливо неравенство $\partial_{\mathbf{n}} u(x^0) > 0$, за исключением случая $u \equiv 0$.*

Все четыре утверждения следуют из того, что в некоторой окрестности точки минимума неравенство $\mathcal{L}u + cu \geq 0$ влечет $\mathcal{L}u \geq 0$.

2.1 Классический период: от Гаусса и Неймана до Хопфа и Олейник

Напомним, что сильный принцип максимума для гармонических функций в трехмерной области был получен К.Ф. Гауссом [1] на основе полученной им теоремы о среднем[8]. Поскольку эта теорема для гармониче-

[8] Обширный обзор теорем о среднем для различных классов функций содержится в [22], см. также [23].

ских функций справедлива в любом $\mathbb{R}^n$, доказательство Гаусса очевидно справедливо в любой размерности и, более того, легко распространяется на супергармонические функции.

Доказательство сильного принципа максимума для равномерно эллиптических операторов более общего вида $\mathcal{L} + c(x)$ с $\mathcal{C}^2$-гладкими коэффициентами (в форме, указанной в п. 1(a) Замечания 2.1) было дано:

- в 1892 году при $c(x) > 0$ в двумерном случае [24];
- в 1894 году при $c(x) > 0$ в многомерном случае [25];
- в 1905 году при $c(x) \geq 0$ в двумерном случае [26] (см. также [27]).

Важнейший шаг был сделан в 1927 году Э. Хопфом [28][9] (см. также [30]). Хотя в этой работе справедливость сильного принципа максимума установлена для равномерно эллиптических операторов вида (2.1) с непрерывными коэффициентами, фактически доказательство Хопфа без изменений проходит для операторов с ***ограниченными*** коэффициентами.

Еще одно существенное наблюдение сделано в [28] для операторов вида $\mathcal{L} + c(x)$. Кроме очевидного утверждения п. 1(a) Замечания 2.1, Хопф показал, что если $\mathcal{L}u + cu \geq 0$ в Ω, то без каких-либо условий на знак коэффициента $c(x)$ функция u не может достигать ***нулевого*** минимума в Ω, за исключением случая $u \equiv 0$[10].

Как упоминалось во введении, лемма о нормальной производной была впервые установлена С. Зарембой [4] для гармонических функций при условии внутреннего шара на границу трехмерной области. Доказательство Зарембы, кроме слабого принципа максимума, использует лишь функцию Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре, поэтому оно справедливо в любой размерности, а также проходит для супергармонических функций.

Следует отметить, что для оператора Лапласа существует альтернативная (равносильная) формулировка леммы о нормальной производной:

---

[9] Аналогичная идея содержится в [29], но сильный принцип максимума в этой работе не установлен.

[10] В 1954 году А.Д. Александров [31] дал другое, геометрическое доказательство этого утверждения.

Пусть $\mathcal{G}$ – функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω. Если $x \in \Omega$, $x^0 \in \partial\Omega$, то справедливо неравенство $\partial_{\mathbf{n}}\mathcal{G}(x, x^0\ ) > \ 0$.

Это утверждение было доказано К. Нейманом [32] еще в 1888 году в двумерной $\mathcal{C}^2$-гладкой выпуклой области. Далее оно обобщалось:

- в 1901 году для двумерной области класса $\mathcal{C}^2$, строго звездной относительно точки [33];
- в 1909 году для двумерной области класса $\mathcal{C}^2$ общего вида [34];
- в 1912 году для двумерной области класса $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$ [35];
- в 1918 году для трехмерной области класса $\mathcal{C}^{1,1}$ [36] (см. также [37])[11].

Для оператора $-\Delta + b^i(x)D_i + c(x)$ при $c(x) \geq 0$ в двумерной области класса $\mathcal{C}^{2,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, это утверждение было установлено в 1924 году [38]. В дальнейшем, однако, почти все известные нам результаты формулировались в виде обычной леммы о нормальной производной[12].

В 1931 году было впервые отмечено [39] (для оператора $-\Delta + c(x)$ при $c(x) \geq 0$ в двумерной области класса $\mathcal{C}^2$), что лемма о нормальной производной на самом деле верна для производной по любому строго внутреннему направлению $\boldsymbol{\ell}$ (то есть по направлению, образующему с внутренней нормалью острый угол).

В 1932 году Ж. Жиро [40, Ch. V] доказал лемму о нормальной производной[13] для равномерно эллиптических операторов $\mathcal{L} + c(x)$, $c(x) \geq 0$, с коэффициентами класса $\mathcal{C}^{0,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$, в n-мерной области класса $\mathcal{C}^{1,1}$. В работе [41] этот результат был распространен на случай, когда младшие

[11] В [36] и [37] автор декларирует утверждение для области класса $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$. Однако доказательство опирается на следующий факт: для любой точки $x^0 \in \partial\Omega$ можно выбрать точку $x \in \Omega$ так, что x^0 будет ближайшей к x точкой границы. Этот факт неверен для областей класса $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ при $\alpha < 1$.

[12] Вероятно, это связано с тем, что для операторов с переменными старшими коэффициентами доказательство альтернативной формулировки заметно сложнее, а в общем случае измеримых старших коэффициентов функция Грина не определена.

[13] Вместо нормали $\mathbf{n}$ Жиро использует конормаль $\mathbf{n}^{\mathcal{L}}$ с координатами $\mathbf{n}_i^{\mathcal{L}} = a^{ij}\mathbf{n}_j$, что дает равносильное утверждение. Существенно, что он рассматривает также случай $u(x^0) = 0$ без условия на знак $c(x)$; ср. п. 2(a) Замечания 2.1.

коэффициенты могут иметь особенности на множестве $\mathfrak{M}$ – объединении конечного числа $\mathcal{C}^{1,\alpha}$-гладких многообразий коразмерности 1, причем

$$|b^i(x)|, |c(x)| \le C \cdot \operatorname{dist}^{\gamma-1}(x, \mathfrak{M}), \qquad \gamma \in (0,1).$$

В 1937 году впервые было существенно ослаблено условие на границу области: в работе [42] была доказана лемма о нормальной производной для оператора Лапласа в (трехмерной) области, удовлетворяющей условию внутреннего $\mathcal{C}^{1,\alpha}$-параболоида[14].

Наконец, ключевой шаг был сделан Э. Хопфом [44] и О.А. Олейник [45], которые одновременно и независимо доказали лемму о нормальной производной для равномерно эллиптических операторов с непрерывными коэффициентами при условии внутреннего шара на границу области. Доказательства в [45] и [44] основаны на одной и той же идее и, как и в [28], без изменений проходят для операторов с ограниченными коэффициентами[15].

Приведем теперь полное доказательство классических результатов [28] и [44]–[45].

Теорема 2.1. A. *Пусть $\mathcal{L}$ – оператор вида (2.1), функции a^{ij}, b^i и c ограничены в Ω, выполнено условие (2.3), $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, и $\mathcal{L}u + cu \ge 0$ в Ω. Тогда*

- *A1. функция u не может достигать в Ω нулевого минимума, за исключением случая $u \equiv 0$.*
- *A2. Если $c \ge 0$, то u не может достигать в Ω отрицательного минимума, за исключением случая $u \equiv const$ и $c \equiv 0$.*
- *A3. Если $c \le 0$, то u не может достигать в Ω положительного минимума, за исключением случая $u \equiv const$ и $c \equiv 0$.*

[14] В некоторых источниках (например, [43] и [16]) можно увидеть утверждение, что подобное условие на область было рассмотрено еще Жиро. Действительно, часть теорем в [40] и [41] доказываются для областей класса $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, но в лемме о нормальной производной требуется $\alpha = 1$.

[15] Хопф рассматривает операторы вида (2.1), Олейник – операторы $\mathcal{L} + c(x)$ при условии $c(x) \ge 0$, $u(x^0) \le 0$. Кроме того, в [45] вместо нормали берется произвольное направление, имеющее с $\mathbf{n}$ острый угол.

Б. *Пусть вдобавок область Ω удовлетворяет условию внутреннего шара, функция $u \not\equiv const$ непрерывна в $\overline{\Omega}$. Обозначим x^0 точку $\partial\Omega$, в которой u достигает наименьшего значения. Тогда неравенство (1.1) справедливо при выполнении любого из следующих условий:*

Б1. *Если $u(x^0) = 0$* [16]*;*

Б2. *Если $u(x^0) < 0$ и $c \geq 0$;*

Б3. *Если $u(x^0) > 0$ и $c \leq 0$.*

При этом в (1.1) можно заменить нормаль $\mathbf{n}$ на любое строго внутреннее направление $\boldsymbol{\ell}$.

Доказательство. 1. Рассмотрим сначала случай $c \equiv 0$. Прежде всего, установим для оператора $\mathcal{L}$ слабый принцип максимума в области π достаточно малого диаметра d.

Предположим, напротив, что $\mathcal{L}u \geq 0$ в π и $u|_{\partial\pi} \geq 0$, но $u(x^0) = -A < 0$ для некоторого $x^0 \in \pi$. Рассмотрим функцию

$$u^\varepsilon(x) = u(x) - \varepsilon|x - x^0|^2.$$

Очевидно, при всех достаточно малых ε имеем

$$u^\varepsilon|_{\partial\pi} \geq -\varepsilon d^2 > -A = u^\varepsilon(x^0).$$

Поэтому u^ε достигает наименьшего значения в некоторой точке $x^1 \in \pi$. В точке минимума $Du^\varepsilon(x^1) = 0$, и матрица $D^2u^\varepsilon(x^1)$ неотрицательно определена, и потому $\mathcal{L}u^\varepsilon(x^1) \leq 0$.

Но условие $\mathcal{L}u \geq 0$ влечет

$$\mathcal{L}u^\varepsilon \geq 2\varepsilon\big(a^{ij}\delta_{ij} - b^i(x_i - x_i^0)\big) \geq 2\varepsilon(n\nu - d\sup|\mathbf{b}(x)|) > 0 \quad \text{в} \quad \pi,$$

если $d < d_0 := \frac{n\nu}{\sup|\mathbf{b}(x)|}$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

2. Теперь докажем для $\mathcal{L}$ сильный принцип максимума. Предположим, напротив, что $\mathcal{L}u \geq 0$ в Ω и $u \not\equiv const$, но множество

$$M = \{x \in \Omega \,\big|\, u(x) = \inf_\Omega u\} \tag{2.4}$$

[16] Это утверждение без условия на знак $c(x)$, по-видимому, впервые было выделено в [46], см. также [47].

не пусто. Дополнение $\Omega \setminus M$ открыто, и потому найдется лежащий в нем шар, граница которого содержит точку из M. Поместим начало координат в центр этого шара и обозначим за r радиус шара, за x^0 точку из $\partial B_r \cap M$ и за π кольцо $B_r \setminus \overline{B}_{\frac{r}{2}}$. Не умаляя общности, можно считать, что $r < \frac{d_0}{2}$.

Рассмотрим в области π **барьерную функцию**[17]

$$v_s(x) = |x|^{-s} - r^{-s}. \tag{2.5}$$

Оценим $\mathcal{L}v_s$ с учетом условия эллиптичности (2.3):

$$D_i v_s(x) = -s x_i |x|^{-s-2}; \qquad D_i D_j v_s(x) = s(s+2) x_i x_j |x|^{-s-4} - s\delta_{ij}|x|^{-s-2};$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}v_s(x) &= |x|^{-s-2} \cdot \Big(-s(s+2)a^{ij}\frac{x_i}{|x|}\frac{x_j}{|x|} + sa^{ij}\delta_{ij} - sb^i x_i \Big) \\ &\le s|x|^{-s-2} \cdot \big(-(s+2)\nu + n\nu^{-1} + r\sup_{\Omega}|\mathbf{b}(x)| \big).\end{aligned}$$

Выберем s настолько большим, чтобы выражение в последней скобке было отрицательным. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ функция $w^\varepsilon = u - \inf\limits_{\Omega} u - \varepsilon v_s$ удовлетворяет неравенству $\mathcal{L}w^\varepsilon \ge 0$ в π.

Далее, $\partial\pi = \partial B_r \cup \partial B_{\frac{r}{2}}$. Очевидно, $w^\varepsilon|_{\partial B_r} \ge 0$. Так как $B_r \subset \Omega \setminus M$ по построению, на $\partial B_{\frac{r}{2}}$ функция $u - \inf\limits_{\Omega} u$ отделена от нуля, и для достаточно малого $\varepsilon > 0$ имеем $w^\varepsilon|_{\partial B_{\frac{r}{2}}} \ge 0$. Следовательно, к w^ε в π применим слабый принцип максимума, и $w^\varepsilon \ge 0$ в π.

Но $w^\varepsilon(x^0) = 0$, и потому для любого вектора $\boldsymbol{\ell}$, направленного внутрь π, имеем $\partial_{\boldsymbol{\ell}} w^\varepsilon(x^0) \ge 0$, то есть

$$\partial_{\boldsymbol{\ell}} u(x^0) \ge \varepsilon \partial_{\boldsymbol{\ell}} v_s(x^0) > 0,$$

что невозможно, поскольку в точке минимума $Du(x^0) = 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение.

3. Докажем теперь для $\mathcal{L}$ лемму о нормальной производной. По условию можно выбрать шар радиусом r, касающийся $\partial\Omega$ в точке x^0. Поместим начало координат в центр этого шара. Согласно сильному принципу максимума, $u > u(x^0)$ в B_r. Далее дословное повторение части 2 доказательства дает неравенство (1.1), в котором $\mathbf{n}$ можно заменить на $\boldsymbol{\ell}$.

[17] Хопф и Олейник использовали другие барьерные функции. По-видимому, функция (2.5) была впервые введена для этой цели в [48], см. также [49] и [50, гл. 1].

4. Наконец, откажемся от условия $c \equiv 0$. Утверждения *А2, А3, Б2* и *Б3* немедленно следуют из Замечания 2.1.

Для доказательства *А1* и *Б1* представим функцию u в виде произведения $u = \psi v$, где $\psi > 0$ и $v \geq 0$ в $\overline{\Omega}$. Прямым вычислением получаем

$$0 \leq \frac{\mathcal{L}u + cu}{\psi} = \widetilde{\mathcal{L}}v := -a^{ij}D_iD_jv + \widetilde{b}^iD_iv + \widetilde{c}v, \tag{2.6}$$

где

$$\widetilde{b}^i = b^i - \frac{2a^{ij}D_j\psi}{\psi}, \qquad \widetilde{c} = \frac{\mathcal{L}\psi + c\psi}{\psi}.$$

Теперь положим $\psi(x) = \exp(\lambda x_1)$. Тогда

$$\mathcal{L}\psi + c\psi = \psi(-a^{11}\lambda^2 + b^1\lambda + c) \leq \psi(-\nu\lambda^2 + \sup_{\Omega} b^1(x)\lambda + \sup_{\Omega} c(x)).$$

Выберем λ настолько большим, чтобы выражение в последней скобке было отрицательным. Тогда для оператора $\widetilde{\mathcal{L}}$, определенного в (2.6), справедливы пп. 1(б) и 2(б) Замечания 2.1. В частности, v не может обращаться в нуль внутри области, что дает *А1*. Поскольку $u(x^0) = 0$ влечет $Du(x^0) = \psi(x^0)Dv(x^0)$, из п. 2(б) для функции v следует *Б1* для u. $\square$

2.2 Расширение классических результатов. Уточнение условий на границу области

После появления базовых результатов [44]–[45] усилиями многих авторов тематика развивалась по нескольким направлениям:

1. расширение класса дифференциальных операторов, то есть ослабление требований на старшие и младшие коэффициенты;

2. расширение класса областей, то есть снижение требований на границу области (для леммы о нормальной производной);

3. уточнение пределов применимости соответствующих утверждений, достигаемое построением различных контрпримеров.

Описание результатов начнем с работы К. Пуччи [51]–[52], в которой лемма о нормальной производной установлена в области $\Omega = B_r$ для более широкого класса операторов, чем в [44]–[45]. Именно, допускается вырождение условия эллиптичности на касательных к $\partial\Omega$ направлениях, а младшие коэффициенты удовлетворяют условиям

$$|b^i(x)| \le \frac{\sigma(\mathrm{d}(x))}{\mathrm{d}(x)}, \qquad 0 \le c(x) \le \frac{\sigma(\mathrm{d}(x))}{\mathrm{d}^2(x)}, \qquad \sigma \in \mathcal{D}. \tag{2.7}$$

Основой доказательства Пуччи служит барьерная функция

$$\mathfrak{v}(x) = \int\limits_0^{\mathrm{d}(x)} \int\limits_0^{\tau} \frac{\sigma(t)}{t}\, dt d\tau \ + \ \kappa \mathrm{d}(x)$$

при подходящем выборе константы κ. Эта функция и различные ее вариации используются в дальнейшем во многих работах.

Если условие эллиптичности вырождается еще больше, то сильный принцип максимума в классическом виде не выполняется. А.Д. Александров в серии работ [53]–[57] дал для таких операторов описание структуры множества нулей неотрицательной функции u, удовлетворяющей неравенству $\mathcal{L}u + cu \ge 0$ в Ω[18].

В работах Р. Выборного [63]–[64] лемма о нормальной производной была доказана для оператора $\mathcal{L} + c(x)$ в области класса[19] $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$. При этом на коэффициенты оператора накладывались такие же условия, как в [51][20].

К сожалению, результаты [63]–[64] не получили должной известности.

В работе [66] для уравнения Лапласа в области класса $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$ были получены точные оценки производных функции Грина задачи Дирихле[21]. В частности, была доказана лемма о нормальной производной в форме Неймана (нормальная производная функции Грина на $\partial\Omega$ положительна), а также построен контрпример, показывающий, что условие $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$ на границу области нельзя ослабить до $\mathcal{C}^1$. Именно, если ϕ' не удовлетворяет

[18]Эта проблема обсуждается также в [58, гл. III] и в [59]–[60]; в [61] рассмотрены некоторые операторы с неограниченными коэффициентами; см. также [62].

[19]Точнее, Выборны предполагает, что существует функция $\rho \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$, такая что $\rho(x) = 0$ и $D\rho \ne 0$ на $\partial\Omega$, $\rho > 0$ и $|D^2\rho(x)| \le \frac{\sigma(\rho(x))}{\rho(x)}$ в Ω, где $\sigma \in \mathcal{D}$. Существование (локальное) такой функции для области класса $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$ было доказано в [65].

[20]Выборны доказывает утверждение п. 2(a) Замечания 2.1, в этом случае ограничение на коэффициент $c(x)$ сверху в (2.7) излишне.

[21]При более ограничительных условиях на область некоторые из этих оценок были установлены ранее в [67] и [68].

условию Дини в нуле, то в параболоиде $\mathfrak{T}(\phi, h)$ выполнено соотношение $\partial_{\mathbf{n}}\mathcal{G}(x,0)=0$.

Одновременно с [66] была опубликована заметка [69]. В ней были выведены тонкие асимптотики гармонических функций в окрестности негладких точек границы. В качестве следствия было показано, что если гармоническая в параболоиде $\mathfrak{T}(\phi, h)$ функция u достигает наименьшего значения в его вершине $x^0=0$, то необходимым и достаточным условием положительности $\partial_{\boldsymbol{\ell}}u(0)$ для любого строго внутреннего направления $\boldsymbol{\ell}$ является условие Дини для функции ϕ' в нуле (это утверждение равносильно полученному в [66]).

Поведение решений уравнения $\mathcal{L}u=0$ в окрестности точки $x^0\in\partial\Omega$ в случае, когда граница области удовлетворяет в точке x^0 лишь условию внутреннего/внешнего конуса, при условии $b^i(x)=o(|x-x^0|^{-1})$ изучалось, соответственно, в [70]–[71] и в [72].

Большой цикл работ по обобщению леммы о нормальной производной принадлежит Б.Н. Химченко и Л.И. Камынину.

В статье [73] (см. также [74]) лемма о нормальной производной для оператора Лапласа была установлена для областей, удовлетворяющих условию внутреннего $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$-параболоида. Далее, в этой работе (см. также [75]) была получена оценка нормальной производной на $\partial\Omega$ для решения задачи

$$-\Delta u=f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega}=0,$$

при условии, что Ω удовлетворяет условию внешнего $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$-параболоида[22], а $|f(x)|\le C\mathrm{d}^{\gamma-1}(x)$, $\gamma\in(0,1)$. Наконец, в [73] даны примеры, показывающие, что условия на границу нельзя заметно улучшить (и по существу повторяющие соответствующие контрпримеры из [66] и [69]).

В работе [76] результаты [73] были распространены на равномерно эллиптические операторы вида $\mathcal{L}+c(x)$ с ограниченными коэффициентами $b^i(x)$. Лемма о нормальной производной здесь сформулирована (для любого строго внутреннего направления) при условии, что “предполагается справедливым принцип максимума” (что, по-видимому, означало $c(x)\ge 0$), а оценка градиента на $\partial\Omega$ для решения задачи

$$\mathcal{L}u+cu=f \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega}=g,$$

[22]Здесь (возможно, впервые в литературе) можно усмотреть проявление двойственности оценки градиента решения на $\partial\Omega$ и леммы о нормальной производной.

– при условиях

$$|c(x)|, |f(x)| \le C\mathrm{d}^{\gamma-1}(x), \quad \gamma \in (0,1); \qquad g \in \mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}(\partial\Omega).$$

В статье [43] (см. также [77]) лемма о нормальной производной перенесена на эллиптико-параболические операторы

$$-a^{ij}(x,y)D_{x_i}D_{x_j} - \tilde{a}^{kl}(x,y)D_{y_k}D_{y_l} + b^i(x,y)D_{x_i} + \tilde{b}^k(x,y)D_{y_k} + c(x,y),$$

с ограниченными коэффициентами при следующих условиях: матрица $\mathcal{A}$ удовлетворяет условию равномерной эллиптичности, матрица $\widetilde{\mathcal{A}}$ неотрицательно определена, $c(x) \ge 0$, область Ω удовлетворяет условию внутреннего $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$-параболоида, ось которого не перпендикулярна плоскости $y = 0$.

В работах [78] и [79] (см. также [80]) результаты [76] обобщаются на класс слабо вырождающихся операторов, старшие коэффициенты которых удовлетворяют условиям, близким к [51], [63] (младшие коэффициенты ограничены)[23].

Наконец, в серии статей [82]–[88] даны тонкие обобщения результатов [53]–[57].

Весьма интересная "ослабленная" форма леммы о нормальной производной была установлена Н.С. Надирашвили [89] (см. также [90]) в области Ω, удовлетворяющей условию внутреннего конуса. Именно, пусть $\mathcal{L}$ – равномерно эллиптический оператор вида (2.1), и $c(x) \ge 0$. Если непостоянная функция u, удовлетворяющая условию $\mathcal{L}u + cu \ge 0$, достигает наименьшего неположительного значения в точке $x^0 \in \partial\Omega$, то ***в любой окрестности*** x^0 ***найдется точка*** $x^* \in \partial\Omega$ такая, что для любого строго внутреннего направления $\boldsymbol{\ell}$ справедливо неравенство

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{u(x^* + \varepsilon\boldsymbol{\ell}) - u(x^*)}{\varepsilon} > 0.$$

В работе [91] этот результат был обобщен на некоторый класс областей с внешними "пиками" и на слабо вырождающиеся (в духе [78]) недивергентные операторы.

В статье Г. Либермана [65] было введено важное понятие **регуляризованного расстояния**[24]. В частности, было показано, что в любой

[23] Дальнейшее развитие этой тематики можно найти, например, в [81].

[24] В частных случаях эта конструкция использовалась и раньше, см., например, [92], [63], [64].

области Ω класса $\mathcal{C}^1$ существует функция $\rho \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus \partial\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n)$, для которой выполнены оценки (знаки $+$ и $-$ относятся, соответственно, к точкам $x \in \overline{\Omega}$ и $x \in \mathbb{R}^n \setminus \Omega$)

$$C^{-1}\mathrm{d}(x) \le \pm\rho(x) \le C\,\mathrm{d}(x);$$

$$|D\rho(x) - D\rho(y)| \le C\sigma(|x-y|);$$

$$|D^2\rho(x)| \le C\,\frac{\sigma(|\rho(x)|)}{|\rho(x)|}.$$

Здесь σ – общий модуль непрерывности градиентов функций, задающих $\partial\Omega$ в локальных координатах.

В качестве следствия в [65] получена лемма о нормальной производной в области класса $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$ при условиях на коэффициенты (как старшие, так и младшие), близких к [51], [63]. Вслед за этим в работе [93] были установлены оценки градиента на $\partial\Omega$ для решения задачи Дирихле в области класса $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$ с граничными данными $g \in \mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}(\partial\Omega)$, а также проанализирована граничная гладкость решения в случае, когда $Dg \in \mathcal{C}(\partial\Omega)$ не удовлетворяет условию Дини.

Отметим, наконец, монументальную работу [16]. Условия на коэффициенты, при которых справедливы лемма о нормальной производной и сильный принцип максимума, в ней несколько ослаблены по сравнению с работами, перечисленными ранее, хотя проверять эти условия существенно труднее. Также в [16] приведены некоторые новые контрпримеры, показывающие точность введенных условий.

2.3 Принцип максимума Александрова–Бакельмана

Этот параграф посвящен одной из самых красивых геометрических идей в теории уравнений в частных производных – принципу максимума А.Д. Александрова–И.Я. Бакельмана. Такое название получили априорные оценки максимума для решений недивергентных уравнений, имеющие огромное число приложений и, в частности, играющие ключевую роль для доказательства сильного принципа максимума и леммы о нормальной производной для уравнений с неограниченными младшими коэффициентами из пространств Лебега.

Первые оценки этого типа были опубликованы в [94] и [95][25]. Оценка решения задачи Дирихле в общем случае была получена в [101]. В этой работе, кроме того, была доказана точность полученных оценок[26]. В 1963 году Александров прочел в Италии цикл лекций о своем методе, которые были изданы в Риме [104].

Для доказательства оценки Александрова–Бакельмана введем некоторые определения.

Пусть в области Ω задана непрерывная функция u, причем $u\big|_{\partial\Omega} < 0$. Обозначим $\widetilde{\Omega} = \operatorname{conv}(\Omega)$ выпуклую оболочку Ω и будем в дальнейшем считать, что функция u_+ продолжена нулем на $\widetilde{\Omega} \setminus \Omega$.

Выпуклой оболочкой функции u_+ назовем наименьшую функцию, выпуклую вверх и мажорирующую u_+ в $\widetilde{\Omega}$. Будем обозначать эту функцию z. Очевидно, что $z\big|_{\partial\widetilde{\Omega}} = 0$, и подграфик функции z – выпуклое множество (выпуклая оболочка подграфика u_+). Можно показать также (см. [20]), что если Ω – область класса $\mathcal{C}^{1,1}$ и $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\Omega)$, то $z \in \mathcal{C}^{1,1}(\widetilde{\Omega})$[27]. Введем еще так называемое **контактное множество**

$$\mathcal{Z} = \{x \in \Omega \,\big|\, z(x) = u(x)\}.$$

Определим теперь (вообще говоря, многозначное) **нормальное отображение (отображение годографа)** $\Phi : \widetilde{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, порождаемое функцией z. Каждой точке $x^0 \in \widetilde{\Omega}$ это отображение сопоставляет всевозможные векторы $p \in \mathbb{R}^n$, такие, что график функции $\pi(x) = p\cdot(x-x^0)+z(x^0)$ является опорной плоскостью к подграфику функции z в точке x^0. Очевидно, что если $z \in C^1(\widetilde{\Omega})$, то отображение Φ однозначно в $\widetilde{\Omega}$ (но не в ее замыкании!) и задается формулой $\Phi(x) = Dz(x)$.

---

[25] История этого результата непроста. Статья [95] опубликована позже, чем краткая заметка [94], но была подана в печать несколько раньше. В [96, § 28.1] сказано: “The first version of these maximum principles was obtained by Bakelman [97], [98] in 1959”. На самом деле рассматриваемых оценок эти работы еще не содержат, хотя идея исследования нормальных изображений для оценки решений развивалась ранее и Александровым в [99], и Бакельманом в [100], [97], [98]. С другой стороны, в обзоре [13] значение работы [95] отражено некорректно.

[26] Результаты [101] были позже переоткрыты в [102]–[103]. В связи с этим в англоязычной литературе часто встречается название “Aleksandrov–Bakelman–Pucci (ABP) maximum principle”.

[27] Заметим, что это утверждение будет неверным, если условие $u\big|_{\partial\Omega} < 0$ ослабить до $u\big|_{\partial\Omega} \le 0$.

Рассмотрим сначала оператор $\mathcal{L}_0$ с измеримыми коэффициентами.

Лемма 2.1. *Пусть* Ω *– область класса* $\mathcal{C}^{1,1}$*,* $u \in \mathcal{C}^{1,1}(\Omega)$ *и* $u\big|_{\partial\Omega} < 0$*. Пусть выполнено условие равномерной эллиптичности (2.3). Тогда для любой неотрицательной функции* $\mathfrak{g}$ *справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\Phi(\widetilde{\Omega})} \mathfrak{g}(p)\,dp \le \frac{1}{n^n}\int\limits_{\mathcal{Z}} \mathfrak{g}(Du)\cdot\frac{(\mathcal{L}_0 u)^n}{\det(\mathcal{A})}\,dx. \tag{2.8}$$

Доказательство. Заметим, что в условиях леммы отображение Φ удовлетворяет условию Липшица. По формуле замены переменных в интеграле

$$\int\limits_{\Phi(\widetilde{\Omega})} \mathfrak{g}(p)\,dp = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{g}(Dz)|\det(D^2z)|\,dx = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{g}(Dz)\det(-D^2z)\,dx \tag{2.9}$$

(последнее равенство следует из того, что $(-D^2z)$ – неотрицательно определенная матрица).

Если $x \notin \mathcal{Z}$, то по теореме Каратеодори (см., например, [105, § 17]) точка $(x, z(x))$ является внутренней точкой симплекса[28], полностью лежащего на графике функции z. Поэтому вторая производная z в некотором направлении равна нулю. Но в силу знакоопределенности $D^2z(x)$ это направление должно быть главным, и, следовательно, $\det(-D^2z(x)) = 0$.

Если же $x \in \mathcal{Z}$, то условие касания в точке x дает

$$Dz(x) = Du(x); \qquad -D^2z(x) \le -D^2u(x)$$

(второе соотношение понимается в смысле квадратичных форм и справедливо для почти всех x). Поэтому из (2.9) следует

$$\int\limits_{\Phi(\widetilde{\Omega})} \mathfrak{g}(p)\,dp \le \int\limits_{\mathcal{Z}} \mathfrak{g}(Du)\det(-D^2u)\,dx.$$

Далее, поскольку на множестве $\mathcal{Z}$ матрицы $\mathcal{A}$ и $-D^2u$ неотрицательно определены, матрица $-\mathcal{A}\cdot D^2u$ имеет неотрицательные собственные

[28] В данном случае размерность симплекса может быть любым числом от 1 до n.

числа. По неравенству между средним арифметическим и средним геометрическим имеем (здесь и далее $\mathbf{Tr}$ – след матрицы)

$$\det(-D^2u) = \frac{\det(-\mathcal{A}\cdot D^2u)}{\det(\mathcal{A})} \le \frac{1}{n^n}\cdot\frac{(\mathbf{Tr}(-\mathcal{A}\cdot D^2u))^n}{\det(\mathcal{A})} = \frac{1}{n^n}\cdot\frac{(\mathcal{L}_0u)^n}{\det(\mathcal{A})},$$

откуда немедленно получаем (2.8). □

Замечание 2.2. *Поскольку на множестве $\mathcal{Z}$ выполнены неравенства $u>0$ и $\mathcal{L}_0u\ge 0$, вместо (2.8) часто используется более удобная оценка*

$$\int\limits_{\Phi(\widetilde{\Omega})} \mathfrak{g}(p)\,dp \le \frac{1}{n^n}\int\limits_{\{u>0\}} \mathfrak{g}(Du)\cdot\frac{(\mathcal{L}_0u)_+^n}{\det(\mathcal{A})}\,dx. \tag{2.10}$$

Теорема 2.2. *Пусть выполнено условие (2.2), и $\mathbf{Tr}(\mathcal{A})>0$ почти всюду в Ω. Тогда для любой функции $u\in W^2_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, такой, что $u\big|_{\partial\Omega}\le 0$*[29]*, выполнена оценка*

$$(\max_{\overline{\Omega}} u_+)^n \le \frac{\operatorname{diam}^n(\Omega)}{n^n|B_1|}\int\limits_{\mathcal{Z}}\frac{(\mathcal{L}_0u)^n}{\det(\mathcal{A})}\,dx \tag{2.11}$$

(здесь и далее следует положить $0/0=0$, если такая неопределенность возникает).

Доказательство. Будем сначала считать, что матрица $\mathcal{A}$, функция u и область Ω удовлетворяют условиям леммы 2.1. Достаточно рассмотреть случай $M=\max\limits_{\overline{\Omega}} u = \max\limits_{\widetilde{\Omega}} z > 0$.

Положим $d=\operatorname{diam}(\Omega)=\operatorname{diam}(\widetilde{\Omega})$ и покажем, что множество $\Phi(\widetilde{\Omega})$ содержит шар $B_{M/d}$. Действительно, пусть $p\in B_{M/d}$. Рассмотрим плоскость – график функции $\pi(x)=p\cdot x+h$. Выбрав подходящее h, можно добиться, чтобы эта плоскость была опорной к подграфику функции z в некоторой точке x^0, и записать $\pi(x)=p\cdot(x-x^0)+z(x^0)$.

Если $x^0\in\partial\widetilde{\Omega}$, то $z(x^0)=0$, и в точке максимума функции z имеем

$$M=z(x)\le p\cdot(x-x^0)\le |p|\cdot d<M,$$

[29]Это означает, что для любого $\varepsilon>0$ неравенство $u-\varepsilon<0$ выполняется в некоторой окрестности $\partial\Omega$.

что невозможно. Поэтому $x^0 \in \widetilde{\Omega}$, откуда

$$p = Dz(x^0) = \Phi(x^0) \in \Phi(\widetilde{\Omega}),$$

и утверждение доказано.

Применяя оценку (2.8) с $\mathfrak{g} \equiv 1$, получим

$$|B_1| \cdot \left(\frac{M}{d}\right)^n = |B_{M/d}| \leq |\Phi(\widetilde{\Omega})| \leq \frac{1}{n^n} \int\limits_{\mathcal{Z}} \frac{(\mathcal{L}_0 u)^n}{\det(\mathcal{A})}\, dx,$$

откуда немедленно следует (2.11).

Рассмотрим теперь общий случай. Подынтегральное выражение в (2.11) не меняется от домножения матрицы $\mathcal{A}$ на положительную функцию. Поэтому, не умаляя общности, можно считать, что $\mathbf{Tr}(\mathcal{A}) \equiv 1$. Возьмем функцию $u^\varepsilon = u - \varepsilon$ и аппроксимируем Ω изнутри областями с гладкими границами. Далее, поскольку оценка (2.11) выдерживает предельный переход в W_n^2, можно считать u^ε гладкой функцией. Применим оценку (2.11) к функции u^ε и равномерно эллиптическому оператору $\mathcal{L}_0 - \nu\Delta$. Затем можно положить $\nu \to 0$, а потом $\varepsilon \to 0$. $\square$

Теорема 2.3. *Пусть $\mathcal{L}$ – оператор общего вида (2.1), выполнено условие (2.2), и $\mathbf{Tr}(\mathcal{A}) > 0$ почти всюду в Ω. Предположим, что*

$$\mathfrak{h} \equiv \frac{|\mathbf{b}|}{\det^{\frac{1}{n}}(\mathcal{A})} \in L_n(\Omega). \tag{2.12}$$

Тогда для любой функции u, удовлетворяющей условиям теоремы 2.2, выполнена оценка

$$\max_{\overline{\Omega}} u_+ \leq N\left(n, \|\mathfrak{h}\|_{n,\{u>0\}}\right) \cdot \operatorname{diam}(\Omega) \left\| \frac{(\mathcal{L}u)_+}{\det^{\frac{1}{n}}(\mathcal{A})} \right\|_{n,\{u>0\}}. \tag{2.13}$$

Доказательство. Будем считать, что матрица $\mathcal{A}$, функция u и область Ω удовлетворяют условиям леммы 2.1. Общий случай получается из этого аналогично второй части доказательства теоремы 2.2.

Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}(|p|)$. Учитывая, что $B_{M/d} \subset \Phi(\widetilde{\Omega})$, из (2.10) получаем

$$n|B_1| \cdot \int\limits_0^{M/d} \mathfrak{g}(\rho)\rho^{n-1}\, d\rho \leq \frac{1}{n^n} \int\limits_{\{u>0\}} \mathfrak{g}(|Du|) \cdot \frac{(\mathcal{L}u - b^i D_i u)_+^n}{\det(\mathcal{A})}\, dx. \tag{2.14}$$

Введем обозначение

$$F = \left\| \frac{(\mathcal{L}u)_+}{\det^{\frac{1}{n}}(\mathcal{A})} \right\|_{n,\{u>0\}} + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Тогда дробь в правой части (2.14) можно оценить по неравенству Гельдера:

$$\frac{(\mathcal{L}u - b^i D_i u)_+^n}{\det(\mathcal{A})} \le (F^{\frac{n}{n-1}} + |Du|^{\frac{n}{n-1}})^{n-1} \cdot \left(\frac{(\mathcal{L}u)_+^n}{\det(\mathcal{A})F^n} + \mathfrak{h}^n \right).$$

Положим $\mathfrak{g}(\rho) = (F^n + \rho^n)^{-1}$. Тогда из (2.14) получим

$$n|B_1| \int\limits_0^{M/d} \frac{\rho^{n-1}}{F^n + \rho^n}\, d\rho \le \frac{1}{n^n} \int\limits_{\{u>0\}} \frac{(F^{\frac{n}{n-1}} + |Du|^{\frac{n}{n-1}})^{n-1}}{F^n + |Du|^n} \cdot \left(\frac{(\mathcal{L}u)_+^n}{\det(\mathcal{A})F^n} + \mathfrak{h}^n \right) dx.$$

Учитывая элементарное неравенство $(x+y)^{n-1} \le 2^{n-2}(x^{n-1} + y^{n-1})$, отсюда выводим

$$\ln\left(1 + \tfrac{M^n}{d^n F^n}\right) \le \tfrac{2^{n-2}}{n^n |B_1|} \left(1 + \|\mathfrak{h}\|_{n,\{u>0\}}^n\right),$$

или

$$M \le d \cdot F \left(\exp\left(\tfrac{2^{n-2}}{n^n|B_1|} \left(1 + \|\mathfrak{h}\|_{n,\{u>0\}}^n\right)\right) - 1 \right)^{\frac{1}{n}}.$$

Полагая $\varepsilon \to 0$ в выражении для F, приходим к (2.13). □

Замечание 2.3. *Если выполняется условие равномерной эллиптичности (2.3), то из (2.13) с учетом замечания 2.2 следует более простая оценка:*

$$\max_{\overline{\Omega}} u_+ \le N\left(n, \tfrac{\|\mathbf{b}\|_{n,\{u>0\}}}{\nu}\right) \cdot \frac{\operatorname{diam}(\Omega)}{\nu} \cdot \|(\mathcal{L}u)_+\|_{n,\{u>0\}}. \tag{2.15}$$

Поясним отличие теоремы 2.3 от некоторых других оценок максимума.

Для равномерно эллиптических операторов вида (2.1) хорошо известна оценка максимума Хопфа (см., например, [106, Теорема 3.7]):

$$\max_{\overline{\Omega}} u_+ \le C\left(\operatorname{diam}(\Omega), \tfrac{\|\mathbf{b}\|_{\infty,\{u>0\}}}{\nu}\right) \cdot \frac{\|(\mathcal{L}u)_+\|_{\infty,\{u>0\}}}{\nu}.$$

Здесь максимум решения оценивается через L_∞-норму правой части, что оказывается недостаточным в приложениях.

С другой стороны, из коэрцитивных оценок в L_r ([106, Теорема 9.13]) и теоремы вложения Соболева следует, что

$$\max_{\overline{\Omega}} u_+ \le C \cdot \|(\mathcal{L}_0 u)_+\|_{r,\Omega}, \qquad r > n/2. \tag{2.16}$$

Однако в этой оценке константа C ***зависит от модулей непрерывности коэффициентов*** a^{ij}. Поэтому, например, для квазилинейных уравнений, когда коэффициенты a^{ij} зависят от самого решения u и от его производных, оценка (2.16) мало полезна.

Оценка Александрова–Бакельмана отличается тем, что не требует ни непрерывности старших коэффициентов, ни ограниченности младших коэффициентов и правой части уравнения.

В связи с теоремой 2.3 упомянем так называемый **принцип максимума в форме Бони**.

Пусть $\mathcal{L}$ – оператор вида (2.1), и выполнено условие (2.2). Если функция u достигает наименьшего значения в точке $x^0 \in \Omega$, то справедливо неравенство $\operatorname{ess}\liminf\limits_{x\to x^0} \mathcal{L}u \le 0$.

Это утверждение было доказано для операторов с ограниченными коэффициентами в [107] при $u \in W_q^2(\Omega)$ для любого $q > n$ и в [108] – при $u \in W_n^2(\Omega)$[30]. Мы докажем его вариант для операторов с неограниченными младшими коэффициентами.

Следствие 2.1. *Предположим, что коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ удовлетворяют условиям теоремы 2.3. Если функция $u \in W^2_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ достигает наименьшего значения в точке $x^0 \in \Omega$, то*

$$\operatorname{ess}\liminf_{x\to x^0} \frac{\mathcal{L}u}{\mathbf{Tr}(\mathcal{A})} \le 0. \tag{2.17}$$

[30] В [108] было доказано более сильное свойство (второе соотношение понимается в смысле квадратичных форм):

$$\operatorname{ess}\liminf_{x\to x^0} |Du| = 0; \qquad \operatorname{ess}\liminf_{x\to x^0} D^2 u \ge 0.$$

Однако для операторов с неограниченными коэффициентами соотношение (2.17) отсюда непосредственно не следует.

Доказательство. Как и в теореме 2.2, не умаляя общности, можно считать, что $\mathbf{Tr}(\mathcal{A}) \equiv 1$. Поместим начало координат в точку x^0.

Предположим, что в некоторой окрестности точки 0 почти всюду выполнено неравенство $\mathcal{L}u \geq \delta > 0$. Рассмотрим в шаре B_r функцию

$$w^\varepsilon(x) = \varepsilon\Big(1 - \frac{|x|^2}{r^2}\Big) - u(x) + u(0).$$

Тогда $w^\varepsilon(0) = \varepsilon$, и при достаточно малом r имеем $w^\varepsilon|_{\partial B_r} \leq 0$. Применяя к w^ε в B_r оценку (2.15), получаем

$$\varepsilon \leq N\left(n, \|\mathfrak{h}\|_{n,B_r}\right) \cdot 2r \cdot \left\| \frac{(\mathcal{L}w^\varepsilon)_+}{\det^{\frac{1}{n}}(\mathcal{A})} \right\|_{n,B_r}.$$

Поскольку $\mathcal{L}w^\varepsilon = \frac{2\varepsilon}{r^2}\big(\mathbf{Tr}(\mathcal{A}) + b^i x_i\big) - \mathcal{L}u \leq \frac{2\varepsilon}{r^2}\big(1 + r|\mathbf{b}|\big) - \delta$, это дает при $\varepsilon < \frac{\delta r^2}{4}$

$$\varepsilon \leq N \left\| \frac{(4\varepsilon|\mathbf{b}| - r\delta)_+}{\det^{\frac{1}{n}}(\mathcal{A})} \right\|_{n,B_r} \overset{(*)}{\leq} 4\varepsilon N \left\| \Big(\mathfrak{h} - \frac{r\delta}{4\varepsilon}\Big)_+ \right\|_{n,B_r} = o(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0$$

(неравенство $(*)$ следует из $\det^{\frac{1}{n}}(\mathcal{A}) \leq \mathbf{Tr}(\mathcal{A}) = 1$). Полученное противоречие доказывает (2.17). $\square$

А.Д. Александров неоднократно развивал и усиливал результаты [101]. В статье [109] получены ***поточечные*** оценки решения задачи Дирихле через расстояние до границы области, в [110] они распространены на более широкий класс уравнений. Работа [111] посвящена доказательству достижимости полученных оценок, в небольшой заметке [112] доказана невозможность ***в общем случае*** ослабить требования на правую часть уравнения. Наконец, в статье [113] получены поточечные оценки решения через тонкие характеристики области Ω и на основании этого результата получена оценка градиента решения на $\partial\Omega$ для некоторых частных случаев (краткое изложение этих результатов дано в [114]–[115]).

В середине 1970-х годов Н.В. Крылов ([116]–[117], см. также [118]) впервые получил оценки александровского типа для параболических операторов. После этого исследование эллиптических и параболических задач шло почти параллельно, но обсуждение результатов для нестационарных уравнений выходит за рамки нашего обзора.

В дальнейшем техника работы с нормальным изображением стала применяться к краевым задачам, отличным от задачи Дирихле. Локальная оценка максимума александровского типа для **задачи с наклонной производной** (на части границы области задана производная по направлению некасательного векторного поля) была установлена в [119] для ограниченных коэффициентов b^i и в [120] в общем случае (см. также [121] и [122]).

Для **задачи Вентцеля**, в которой на границе задается оператор

$$\mathcal{L}' \equiv -\alpha^{ij}(x)\mathfrak{d}_i\mathfrak{d}_j + \beta^i(x)D_i, \qquad \mathfrak{d}_i \equiv D_i - \mathbf{n}_i\mathbf{n}_k D_k, \qquad \beta^i(x)\mathbf{n}_i \le 0,$$

имеющий второй порядок по касательным переменным, соответствующие оценки были получены в [123], [124] в двух случаях: невырожденном, когда оператор $\mathcal{L}'$ равномерно эллиптичен относительно касательных переменных, и вырожденном, когда члены второго порядка в граничном операторе могут обращаться в нуль на множестве положительной меры, но векторное поле (β^i) некасательно к $\partial\Omega$. Впоследствии эти оценки были обобщены на случай операторов $\mathcal{L}$ и $\mathcal{L}'$ с неограниченными младшими коэффициентами [125], [126]. В статье [127] были установлены локальные оценки александровского типа для решений так называемой **двухфазной** задачи Вентцеля. Во всех перечисленных случаях указанные оценки служили "стартовой площадкой" для получения серии априорных оценок, требуемых для доказательства теорем существования решения квазилинейных и нелинейных краевых задач.

Другое направление развития идей Александрова – перенесение оценок максимума на уравнения с младшими коэффициентами и правыми частями из других функциональных классов. В работах [128], [122] и [129] были рассмотрены различные классы операторов с "составными" коэффициентами. Статья [130] посвящена оценке александровского типа через нормы правой части в весовых пространствах Лебега. Каждый из этих результатов приводил к соответствующему расширению класса нелинейных уравнений, для которых удается доказать разрешимость основных краевых задач.

Л. Каффарелли [131] установил оценку Александрова–Бакельмана для так называемых **вязкостных решений** эллиптических уравнений. Далее эта идея активно применялась к различным классам нелинейных уравнений (см., например, [132], [133, Ch.3], [134]– [137]).

Еще одна группа работ посвящена ослаблению условий на правую часть уравнения для ***некоторых классов*** операторов $\mathcal{L}$. В 1984 году Е. Фэйбс и Д. Струк [138] получили оценку (2.16) для операторов с измеримыми старшими коэффициентами при $r > r_0$, где $r_0 < n$ – показатель, зависящий от константы эллиптичности оператора (см. также [139]). В [140] и [141] эта оценка была установлена для задачи с наклонной производной. С другой стороны, К. Пуччи [142] с помощью введенного им понятия **максимального и минимального операторов** установил нижнюю границу для значений r_0, при которых такая оценка возможна (в связи с этим см. [143] и цитируемую там литературу). Необходимые и достаточные условия выполнения оценки (2.16) получены лишь в двумерном случае [144]. В ряде работ (см. [145] и приведенную там литературу) результаты [138] были распространены на вязкостные решения нелинейных уравнений.

В работе [146] установлена серия оценок максимума решения через L_m-нормы правой части (здесь $m \in (n/2, n]$ – целое число) при условии, что матрица старших коэффициентов уравнения для почти всех $x \in \Omega$ принадлежит некоторому специальному выпуклому конусу в пространстве матриц. Среди недавних продвижений в этом направлении назовем статью Н.С. Трудингера [147]. Несомненно, эти исследования еще далеки от завершения.

Следует отметить также работу [148], в которой изучается зависимость оценки максимума от характеристик области. В частности, удалось получить оценку через $|\Omega|^{\frac{1}{n}}$ вместо диаметра области (заметим, что для *выпуклых* областей это было сделано еще в [101]).

Упомянем еще работу [149], в которой был получен дискретный аналог оценки Александрова–Бакельмана для разностных операторов.

2.4 Результаты для операторов с коэффициентами $b^i(x)$ из пространств Лебега

Простейшее следствие оценки Александрова–Бакельмана – слабый принцип максимума для операторов вида (2.1) с коэффициентами $b^i \in L_n(\Omega)$ и функций $u \in W_n^2(\Omega)$. Более того, как указано уже в [101], эта оценка позволяет рассмотреть оператор $\mathcal{L} + c(x)$ с коэффициентом $c(x)$ “неправильного знака”.

Следствие 2.2. *Предположим, что коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ удо-*

влетворяют условиям теоремы 2.3. Тогда существует $\delta > 0$, зависящая только от n, $\operatorname{diam}(\Omega)$ и $\|\mathfrak{h}\|_{n,\Omega}$ (функция $\mathfrak{h}$ введена в (2.12)), такая, что если

$$h \equiv \frac{c_-}{\det^{\frac{1}{n}}(\mathcal{A})} \in L_n(\Omega), \qquad \|h\|_{n,\Omega} < \delta$$

(напомним, что мы полагаем $0/0 = 0$, если такая неопределенность возникает), то для оператора $\mathcal{L} + c(x)$ и функций $u \in W^2_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ справедлив слабый принцип максимума.

Доказательство. Предположим, напротив, что $\mathcal{L}u + cu \geq 0$ в Ω и $u \geq 0$ на $\partial\Omega$, но $\min\limits_{\Omega} u = -A < 0$. Рассмотрим функцию $u^\varepsilon = -u - \varepsilon$ и применим к ней оценку (2.13). Поскольку на множестве $\{u^\varepsilon > 0\}$ справедливо неравенство $\mathcal{L}u^\varepsilon = -\mathcal{L}u \leq cu \leq Ac_-$, мы получаем

$$(A - \varepsilon)_+ \leq N\left(n, \|\mathfrak{h}\|_{n,\Omega}\right) \cdot \operatorname{diam}(\Omega) \cdot \|h\|_{n,\Omega} A,$$

что невозможно, если $N(n, \|\mathfrak{h}\|_{n,\Omega}) \cdot \operatorname{diam}(\Omega) \cdot \|h\|_{n,\Omega} < 1$ и $\varepsilon > 0$ достаточно мало. $\square$

Легко видеть, что доказательство теоремы 2.1 теперь проходит без изменений для так называемых **сильных суперрешений**: $u \in W^2_n(\Omega)$, и $\mathcal{L}u + cu \geq 0$ почти всюду в Ω (коэффициенты оператора $\mathcal{L}$ измеримы и ограничены). Однако для того, чтобы включить в рассмотрение младшие коэффициенты из пространств Лебега, были необходимы новые идеи.

Заметим, что снизить требование $b^i \in L_n(\Omega)$ до $b^i \in L_p(\Omega)$ при $p < n$ невозможно: функция $u(x) = |x|^2$ удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u + \frac{nx_i}{|x|^2} D_i u = 0 \quad \text{в} \quad B_1,$$

но не удовлетворяет принципу максимума; коэффициенты $b^i(x) = \frac{nx_i}{|x|^2}$ при этом лежат в пространстве $L_p(B_1)$ с любым $p < n$ и даже в слабом пространстве L_n – пространстве Лоренца $L_{n,\infty}(B_1)$, но не в $L_n(B_1)$.

Сильный принцип максимума для операторов с $b^i \in L_n(\Omega)$ был установлен в [150]. Мы докажем простейший вариант этого результата[31].

[31] В [150] рассматриваются операторы вида $\mathcal{L} + c(x)$ при условии $c(x) \leq \frac{h(x)}{|x - x^0|}$, где x^0 – точка (нулевого) минимума функции u, и $h \in L_n(\Omega)$. Кроме того, ограничения на коэффициенты в этой работе могут зависеть от направления.

Теорема 2.4. *Пусть $\mathcal{L}$ – оператор вида (2.1), выполнено условие (2.3), и $b^i \in L_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$. Предположим, что $u \in W^2_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, и $\mathcal{L}u \geq 0$ почти всюду в Ω. Если u достигает наименьшего значения во внутренней точке области, то $u \equiv const$ и $\mathcal{L}u \equiv 0$.*

Доказательство. Предположим, что $u \not\equiv const$, но множество (2.4) не пусто. Как и в доказательстве теоремы 2.1, в $\Omega \backslash M$ найдется шар, граница которого содержит точку $x^0 \in M$. Обозначим радиус шара $\frac{r}{2}$ и будем считать, не умаляя общности, что $B_r \subset \Omega$. Обозначим $\pi = B_r \setminus \overline{B}_{\frac{r}{4}}$ и рассмотрим в π барьерную функцию (2.5).

Имеем

$$\mathcal{L}v_s(x) \leq s|x|^{-s-2} \cdot \Big(-(s+2)\nu + n\nu^{-1} + r|\mathbf{b}(x)|\Big).$$

В отличие от теоремы 2.1, здесь мы не можем добиться выполнения неравенства $\mathcal{L}v_s \leq 0$. Однако выбрав $s = n\nu^{-2}$, мы получим

$$\mathcal{L}v_s(x) \leq sr|x|^{-s-2}|\mathbf{b}(x)| \leq 4^{s+2}sr^{-s-1}|\mathbf{b}(x)| \quad \text{в} \quad \pi.$$

По построению на $\partial B_{\frac{r}{4}}$ выполнено неравенство $u(x)-u(x^0) > 0$. Поэтому для достаточно малого $\varepsilon > 0$ функция $w^\varepsilon(x) = \varepsilon v_s(x) - u(x) + u(x_0)$ неположительна на всей границе области π.

Применяя к w^ε в π оценку (2.15), получаем

$$w^\varepsilon(x) \leq C\left(n,\nu,\|\mathbf{b}\|_{n,\pi}\right)\cdot r\cdot\varepsilon\|(\mathcal{L}v_s(x))_+\|_{n,\pi} \leq C\left(n,\nu,s,\|\mathbf{b}\|_{n,\pi}\right)\cdot\varepsilon r^{-s}\,\|\mathbf{b}\|_{n,\pi},$$

и потому

$$u(x) - u(x^0) \geq \varepsilon\Big(|x|^{-s} - r^{-s} - C\left(n,\nu,s,\|\mathbf{b}\|_{n,\pi}\right)\|\mathbf{b}\|_{n,\pi}r^{-s}\Big). \tag{2.18}$$

По теореме Лебега для любого $\delta > 0$ можно выбрать r столь малым, что $\|\mathbf{b}\|_{n,\pi} \leq \delta$. Тогда неравенство (2.18) в точке x^0 дает

$$0 \geq \varepsilon r^{-s}\Big(2^s - 1 - C\left(n,\nu,s,\delta\right)\delta\Big),$$

что невозможно при достаточно малом δ. □

В качестве следствия в [150] было доказано такое утверждение[32].

[32] Этот результат также приводится в упрощенном варианте.

Следствие 2.3. *Пусть оператор $\mathcal{L}$ и функция и удовлетворяют условию теоремы 2.4. Пусть в окрестности U точки $x^0 \in \partial\Omega$ область удовлетворяет условию внутреннего шара. Предположим, что*

$$u\big|_{\partial\Omega\cap U} \equiv \inf_{\Omega} u; \quad Du\big|_{\partial\Omega\cap U} \equiv 0. \tag{2.19}$$

Тогда $u \equiv const$ в Ω.

Доказательство. Продолжая функцию u константой за пределы Ω в окрестности точки x^0, мы попадаем в условия теоремы 2.4. □

Легко видеть, что следствие 2.3 существенно слабее леммы о нормальной производной, поскольку условие (2.19) должно выполняться на целом куске границы. Однако в отличие от случая ограниченных младших коэффициентов (когда сильный принцип максимума и лемма о нормальной производной доказываются практически одинаково), в условиях теоремы 2.4 лемма о нормальной производной неверна! Приведем соответствующий контрпример (см. [151]–[153]).

Пусть $u(x) = x_n \cdot \ln^{\alpha}(|x|^{-1})$ в полушаре $B_r^+ = B_r \cap \{x_n > 0\}$. Тогда легко видеть, что $u \in W_n^2(B_r^+)$ при $r \leq \frac{1}{2}$ и $\alpha < \frac{n-1}{n}$. Далее, прямое вычисление показывает, что u удовлетворяет уравнению

$$-\Delta u + b^n(x) D_n u = 0 \qquad \text{с} \quad |b^n| \leq \frac{C(\alpha)}{|x| \ln(|x|^{-1})} \in L_n(B_r^+).$$

Наконец, $u > 0$ в B_r^+, и u достигает наименьшего значения в граничной точке 0. Однако при $\alpha < 0$ очевидно имеем $D_n u(0) = 0$.

Замечание 2.4. *Обратите внимание, что ослабленная форма леммы о нормальной производной (см. [89]) в этом примере верна. Мы предполагаем, что такое утверждение верно для общего равномерно эллиптического оператора $\mathcal{L}$ с $b^i \in L_n(\Omega)$, но, насколько нам известно, этот вопрос остается открытым.*

Замечание 2.5. *Приведенный контрпример также показывает, что условия $b^i \in L_n(\Omega)$ недостаточно для оценки градиента решения задачи Дирихле на $\partial\Omega$, поскольку при $\alpha > 0$ имеем $D_n u(0) = +\infty$.*

Важную роль играет статья О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой [154] (краткое сообщение было опубликовано тремя годами раньше в

[155]). Здесь впервые был применен итерационный метод оценки решения в окрестности границы. В простейшем случае он выглядит так.

Пусть в цилиндре $Q_{1,1}$ задана функция u, удовлетворяющая уравнению $\mathcal{L}u = f$ и граничному условию $u|_{x_n=0} = 0$. Введем последовательность цилиндров Q_{r_k,h_k}, где $r_k = 2^{-k}$, а h_k – подходящим образом выбранная последовательность, такая, что $h_k = o(r_k)$ при $k \to \infty$. Обозначим

$$M_k = \sup_{Q_{r_k,h_k}} \frac{u(x)}{h_k}$$

и применим оценку Александрова–Бакельмана к разности

$$u(x) - M_k h_k \cdot \mathfrak{v}\left(\tfrac{x'}{r_k}, \tfrac{x_n}{h_k}\right),$$

где $\mathfrak{v}$ – специальная барьерная функция.

Полученная оценка, взятая в точках $x \in Q_{r_{k+1},h_{k+1}}$, дает рекуррентное соотношение между M_{k+1} и M_k. Итерированием этого соотношения получаем $\limsup\limits_{k} M_k < \infty$, что дает оценку сверху для $D_n u(0)$ через $\sup\limits_{Q_{1,1}} u$ и некоторую интегральную норму правой части.

В [154] эта схема была применена к уравнению $\mathcal{L}u = f$ с равномерно эллиптическим оператором $\mathcal{L}$ при условиях

$$u \in W_n^2(\Omega), \quad b^i \in L_q(\Omega), \quad f_+ \in L_q(\Omega), \qquad q > n, \tag{2.20}$$

в области одного из двух классов:

1) выпуклые области;

2) области класса[33] W_q^2.

В работе [128], как уже упоминалось в § 2.3, была установлена оценка александровского типа в $\Omega \subset Q_{R,R}$ для операторов вида (2.1) с "составными" младшими коэффициентами $b^i = b^i_{(1)} + b^i_{(2)}$ при условии

$$b^i_{(1)} \in L_n(\Omega), \quad \left|b^i_{(2)}(x)\right| \le C x_n^{\gamma-1}, \quad \gamma \in (0,1). \tag{2.21}$$

На основании этого результата в [128] была установлена оценка $\operatorname{ess\,sup} \partial_{\mathbf{n}} u$ на $\partial\Omega$ в области класса W_q^2, $q > n$, при условиях

$$\begin{matrix} b^i = b^i_{(1)} + b^i_{(2)}; & b^i_{(1)} \in L_q(\Omega), & \left|b^i_{(2)}(x)\right| \le C x_n^{\gamma-1}, \\ \mathcal{L}u = f^{(1)} + f^{(2)}; & f^{(1)}_+ \in L_q(\Omega), & f^{(2)}_+(x) \le C x_n^{\gamma-1}, \end{matrix} \qquad \gamma \in (0,1).$$

[33]Это означает, что у любой точки $x^0 \in \partial\Omega$ есть окрестность U такая, что множество $U \cap \Omega$ отображается на $Q_{1,1}$ диффеоморфизмом класса W_q^2, причем нормы прямого и обратного диффеоморфизмов оцениваются равномерно относительно x^0. Это условие обеспечивает инвариантность условий (2.20) при локальном распрямлении границы.

В работе М.В. Сафонова [156] (см. также [157]) был развит новый подход к проблеме, основанный на граничном неравенстве Гарнака (см. § 4.3). При этом единым способом установлены:

1. лемма о нормальной производной при условии $\mathcal{L}_0 u \geq 0$ в области, удовлетворяющей условию внутреннего $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$-параболоида[34];

2. оценка сверху для $\partial_{\mathbf{n}} u(0)$ при условиях $\mathcal{L}_0 u \leq 0$, $u|_{\partial\Omega\cap B_r} = 0$, в области, удовлетворяющей условию внешнего $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$-параболоида[34].

В статье [152] итерационный метод Ладыженской–Уральцевой (несколько усовершенствованный) был применен[35] для вывода леммы о нормальной производной в области $\Omega = Q_{R,R}$ при условиях

$$u \in W^2_{n,\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega}), \quad \min_{\overline{\Omega}} u = u(0); \qquad b^i \in L_n(\Omega), \quad b^n \in L_q(\Omega), \quad q > n.$$

Таким образом, оказалось, что по сравнению с $b^i \in L_n(\Omega)$ достаточно усилить условие только на нормальную компоненту вектора $\mathbf{b}$.

В работе [153] получены наиболее точные на данный момент условия справедливости как леммы о нормальной производной, так и оценки градиента решения задачи Дирихле на границе области. При этом явным образом продемонстрирована двойственность этих утверждений. Результат достигается комбинацией техники Ладыженской–Уральцевой–Сафонова и оценки александровского типа [122], в которой условие на $b^i_{(2)}$ из (2.21) уточнено до $\left|b^i_{(2)}(x)\right| \leq \frac{\sigma(x_n)}{x_n}$, $\sigma \in \mathcal{D}$.

Приведем формулировку этого результата.

Теорема 2.5. *Пусть $\mathcal{L}$ – равномерно эллиптический оператор вида (2.1) в области $\Omega = Q_{R,R}$. Пусть $b^i = b^i_{(1)} + b^i_{(2)}$, и выполнены следующие условия:*

$$b^i_{(1)} \in L_n(\Omega), \quad \|b^n_{(1)}\|_{n,Q_{r,r}} \leq \sigma(r) \ \text{при} \ r \leq R; \quad \left|b^i_{(2)}(x)\right| \leq \frac{\sigma(x_n)}{x_n}; \quad \sigma \in \mathcal{D}.$$

Пусть также $u \in W^2_{n,\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Тогда

[34] В [156] условие $\int_0^\varepsilon \tau^{-2}\phi(\tau)\,d\tau < \infty$ на функцию ϕ, задающую внутренний или внешний параболоид, формально является более общим, но в [153, Lemma 2.4] показано, что по существу полученное условие на область эквивалентно обычному.

[35] В [152] отмечено, что при $b^i \in L_q(\Omega)$, $q > n$, лемма о нормальной производной была по существу получена еще в [154, Лемма 4.4]. Этот факт оставался незамеченным более 20 лет!

1. Если $u > 0$ в $Q_{R,R}$, $u(0) = 0$, и $\mathcal{L}u \geq 0$, то

$$\inf_{0<x_n<R} \frac{u(0,x_n)}{x_n} > 0.$$

2. Если $u|_{x_n=0} \leq 0$, $u(0) = 0$, и $\mathcal{L}u = f^{(1)} + f^{(2)}$, где

$$\|f_+^{(1)}\|_{n,Q_{r,r}} \leq \sigma(r) \quad \textit{при} \quad r \leq R; \qquad f_+^{(2)}(x) \leq \frac{\sigma(x_n)}{x_n},$$

то

$$\sup_{0<x_n<R} \frac{u(0,x_n)}{x_n} \leq C,$$

где $C < \infty$ определяется известными величинами.

Важно отметить, что включение слагаемого $b^i_{(2)}$ позволяет проводить преобразование координат, использующее регуляризованное расстояние, в окрестности недостаточно гладкой границы. Таким образом к теореме 2.5 сводятся соответствующие утверждения в областях, удовлетворяющих условию внутреннего/внешнего $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$-параболоида[36].

В работе [17] был построен новый контрпример, показывающий точность условия внутреннего $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$-параболоида для леммы о нормальной производной. Приведем его формулировку в простейшем случае.

Теорема 2.6. *Пусть Ω – область, локально выпуклая в окрестности начала координат, то есть при некотором $R > 0$*

$$\Omega \cap B_R = \bigl\{x \in \mathbb{R}^n \bigm| F(x') < x_n < \sqrt{R^2 - |x'|^2}\bigr\},$$

где F – выпуклая функция, $F \geq 0$ и $F(0) = 0$.

Пусть, далее, $u \in W^2_{n,\mathrm{loc}}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\overline{\Omega})$ – решение уравнения $\mathcal{L}_0 u = 0$ с равномерно эллиптическим оператором $\mathcal{L}_0$, и $u|_{\partial\Omega \cap B_R} = 0$.

Если функция

$$\delta(r) = \sup_{|x'| \leq r} \frac{F(x')}{|x'|}$$

не удовлетворяет условию Дини в нуле, то $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \frac{u(\varepsilon x_n)}{\varepsilon} = 0$.

[36] Ср. [158], где доказывается существование $D_n u(0)$ для вязкостных решений уравнения $\mathcal{L}_0 u = f$.

Заметим, что если $\delta(r)$ удовлетворяет условию Дини в нуле, то Ω удовлетворяет условию внутреннего $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$-параболоида в начале координат. Таким образом, для ***локально выпуклых*** областей условие Дини в нуле для функции $\delta(r)$ необходимо и достаточно для справедливости леммы о нормальной производной.

Подчеркнем, что все предыдущие контрпримеры этого типа ([66], [69], [76] и [156]) требуют отсутствия условия Дини для функции $\inf\limits_{|x'|\le r} \frac{F(x')}{|x'|}$. Грубо говоря, в них условие Дини должно нарушаться во всех направлениях, в то время как в теореме 2.6 достаточно его нарушения в одном направлении.

Для областей общего вида в работе [157] был построен более тонкий контрпример, который, однако, слишком сложен для описания.

2.5 Неравенство Гарнака

Как уже упоминалось во введении, неравенство Гарнака, которое можно рассматривать как количественную версию сильного принципа максимума, впервые было доказано К.Г.А. Гарнаком [5] для гармонических функций на плоскости. Поскольку доказательство Гарнака основано на формуле Пуассона, оно очевидно справедливо в любой размерности. Формулировка Гарнака вошла в большинство учебников:

Если $u \ge 0$ – гармоническая функция в $B_R \subset \mathbb{R}^n$, то

$$u(0)\,\frac{(R-|x|)R^{n-2}}{(R+|x|)^{n-1}} \le u(x) \le u(0)\,\frac{(R+|x|)R^{n-2}}{(R-|x|)^{n-1}}, \tag{2.22}$$

откуда для $\Omega = B_R$ и $\Omega' = B_{\theta R}$, $\theta < 1$, немедленно следует неравенство (1.2) с $C = \left(\frac{1+\theta}{1-\theta}\right)^n$.

В дальнейшем в этом параграфе предполагается выполненным условие равномерной эллиптичности (2.3).

Л. Лихтенштейн в работе [27] доказал неравенство (1.2) для операторов общего вида $\mathcal{L} + c(x)$, $c \ge 0$, с $\mathcal{C}^2$-гладкими коэффициентами (также в двумерном случае).

В работе Дж. Серрина [159] неравенство Гарнака при $n = 2$ было установлено для операторов $\mathcal{L} + c(x)$, $c \ge 0$, с ***ограниченными*** коэффициентами. Одновременно и независимо этот результат был получен в [160]. Для случая $n \geq 3$ Серрин также доказал (1.2) при условии[37] $a^{ij} \in \mathcal{C}^{0,\mathcal{D}}(\Omega)$.

Важное улучшение было сделано Е.М. Ландисом [161] (см. также [50, гл. 1]). С помощью предложенной им **леммы о возрастании** он доказал неравенство Гарнака в произвольной размерности для оператора $\mathcal{L}_0$ с ограниченными коэффициентами при дополнительном условии – разброс собственных чисел матрицы $\mathcal{A}$ достаточно мал[38]. Именно, предполагаются выполненными следующие соотношения (после домножения матрицы $\mathcal{A}$ на подходящую положительную функцию)

$$\mathbf{Tr}(\mathcal{A}) \equiv 1, \qquad \nu > \frac{1}{n+2} \tag{2.23}$$

(очевидно, что всегда выполнено неравенство $\nu \leq \frac{1}{n}$, причем равенство возможно только для оператора Лапласа).

Отметим, что все перечисленные результаты были получены для классических решений $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$.

Наконец, решающий шаг принадлежит Н.В. Крылову и М.В. Сафонову [163], [164] (см. также [165]). Сочетая метод Ландиса с оценками Александрова–Бакельмана (в эллиптическом случае) и Крылова [116]–[117] (в параболическом случае), им удалось получить неравенство (1.2) для ***сильных*** решений эллиптических [164] и параболических [163] уравнений с операторами общего вида $\mathcal{L} + c(x)$, $c \geq 0$ (с ограниченными коэффициентами), без предположений о непрерывности матрицы $\mathcal{A}$ или о малости разброса ее собственных значений[39].

Для операторов $\mathcal{L}$ с условием $b^i \in L_n(\Omega)$ неравенство Гарнака было доказано в [152] (см. также [120]). В статьях [167] и [168] продемонстрирован единый подход к доказательству неравенства Гарнака для дивер-

[37]Точнее, старшие коэффициенты оператора должны удовлетворять условию Дини в некоторой окрестности $\partial\Omega$.

[38]Подобные условия были впервые введены в [162], поэтому Ландис называет (2.23) условием кордесовского типа.

[39]Заметим, что если $c \equiv 0$, то из неравенства Гарнака легко вытекает априорная оценка гельдеровской нормы решения. Распространив эту оценку, также полученную в [163]–[164], на квазилинейные уравнения, О.А. Ладыженская и Н.Н. Уральцева в дальнейшем установили разрешимость задачи Дирихле для недивергентных квазилинейных уравнений только при естественных структурных условиях (см. обзор [166]). Впоследствии этот результат был распространен и на другие краевые задачи для квазилинейных и полностью нелинейных уравнений.

гентных и недивергентных операторов. В то же время в [167] было показано[40], что для операторов смешанного (дивергентно-недивергентного) вида

$$-D_i(a^{ij}(x)D_j) - \tilde{a}^{ij}(x)D_iD_j$$

(матрицы старших коэффициентов $\mathcal{A}$ и $\widetilde{\mathcal{A}}$ удовлетворяют условию равномерной эллиптичности) неравенство Гарнака может не выполняться даже при $n = 1$.

Упомянем еще работы [170] и [171], в которой неравенство Гарнака и гельдеровская непрерывность решений были рассмотрены в "абстрактном" контексте метрических и квазиметрических пространств.

3 Операторы дивергентного вида

В этой главе рассматриваются операторы следующей структуры:

$$\mathfrak{L} \equiv -D_i(a^{ij}(x)D_j) + b^i(x)D_i \tag{3.1}$$

(в случае $\mathbf{b} \equiv 0$ вместо $\mathfrak{L}$ будем писать $\mathfrak{L}_0$), а также операторы более общего вида

$$\widehat{\mathfrak{L}} \equiv -D_i(a^{ij}(x)D_j + d^i) + b^i(x)D_i + c(x). \tag{3.2}$$

Матрица старших коэффициентов $\mathcal{A}$ симметрична и удовлетворяет условию эллиптичности

$$\nu(x)|\xi|^2 \le a^{ij}(x)\xi_i\xi_j \le \mathcal{V}(x)|\xi|^2 \quad \text{для всех} \quad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{3.3}$$

или условию равномерной эллиптичности (2.3) для почти всех $x \in \Omega$. В (3.3) функции $\nu(x)$ и $\mathcal{V}(x)$ положительны и конечны[41] почти всюду в Ω.

Под решением уравнения $\widehat{\mathfrak{L}}u = 0$ здесь понимается **слабое решение**, то есть функция $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такая, что **интегральное тождество**

$$\langle \widehat{\mathfrak{L}}u, \eta \rangle := \int\limits_\Omega (a^{ij}D_juD_i\eta + b^iD_iu\,\eta + d^iuD_i\eta + cu\eta)\,dx = 0$$

[40]В связи с этим см. также [169].

[41]Подчеркнем, что, в отличие от операторов недивергентного вида, свойства оператора $\mathfrak{L}$ не сохраняются при умножении на произвольную положительную функцию. Поэтому поведение функций $\nu(x)$ и $\mathcal{V}(x)$ следует рассматривать раздельно.

выполняется для любой пробной функции $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Соответственно, **слабое суперрешение** ($\widehat{\mathfrak{L}}u \geq 0$) – это функция $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такая, что

$$\int\limits_\Omega (a^{ij} D_j u D_i \eta + b^i D_i u\, \eta + d^i u D_i \eta + c u \eta)\, dx \geq 0 \tag{3.4}$$

для любой ***неотрицательной*** пробной функции $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$. Аналогично определяется слабое субрешение ($\widehat{\mathfrak{L}}u \leq 0$).

Докажем для оператора $\widehat{\mathfrak{L}}$ слабый принцип максимума при простейших ограничениях на коэффициенты.

Теорема 3.1. *Пусть $n \geq 3$, $\widehat{\mathfrak{L}}$ – оператор вида (3.2) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, выполнено условие (2.3),*

$$b^i, d^i \in L_n(\Omega), \quad c \in L_{\frac{n}{2}}(\Omega),$$

и функция $\mathfrak{u} \equiv 1$ – слабое суперрешение уравнения $\widehat{\mathfrak{L}}u = 0$ в Ω.

Пусть $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $u \geq 0$ на $\partial\Omega$[42], и $\widehat{\mathfrak{L}}u \geq 0$ в Ω. Тогда $u \geq 0$ в Ω.

Доказательство. 1. Для начала заметим, что билинейная форма $\langle \widehat{\mathfrak{L}}u, \eta\rangle$ непрерывна на $W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega) \times \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega')$, если $\overline{\Omega}' \subset \Omega$. Действительно, применяя неравенства Гельдера и Соболева, получаем

$$\begin{aligned}|\langle \widehat{\mathfrak{L}}u, \eta\rangle| &\leq \nu^{-1}\|Du\|_{2,\Omega'}\|D\eta\|_{2,\Omega'} + \|\mathbf{b}\|_{n,\Omega}\|Du\|_{2,\Omega'}\|\eta\|_{2^*,\Omega'} \\ &+ \|\mathbf{d}\|_{n,\Omega}\|D\eta\|_{2,\Omega'}\|u\|_{2^*,\Omega'} + \|c\|_{\frac{n}{2},\Omega}\|u\|_{2^*,\Omega'}\|\eta\|_{2^*,\Omega'} \\ &\leq C\big(\|Du\|_{2,\Omega'} + \|u\|_{2,\Omega'}\big) \cdot \|D\eta\|_{2,\Omega'}\end{aligned}$$

(здесь и далее $2^* = \frac{2n}{n-2}$ – предельный показатель Соболева). Поэтому в определении слабого решения (суб/суперрешения) можно брать любые пробные функции $\eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ с компактным носителем.

2. Предположим, напротив, что $\operatorname{ess\,inf}\limits_\Omega u = -A < 0$ (случай $A = \infty$ не исключается). Тогда при $0 < k < A$ функция $\eta = (u+k)_- \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$

[42] Аналогично примечанию 29, это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ неравенство $u + \varepsilon > 0$ выполняется в некоторой окрестности $\partial\Omega$.

неотрицательна и имеет компактный носитель в Ω, и потому справедливо неравенство (3.4). Поскольку $D(u+k)_- = -Du\cdot\chi_{\{u<-k\}}$, это дает

$$\int\limits_{\{u<-k\}} a^{ij}D_juD_iu\,dx \le \int\limits_{\{u<-k\}} (b^iD_iu\,\eta + d^iuD_i\eta + cu\eta)\,dx$$
$$= \int\limits_{\{u<-k\}} (b^i-d^i)D_iu\,\eta\,dx + \int\limits_{\{u<-k\}} (d^iD_i(u\eta)+c(u\eta))\,dx.$$

Последнее слагаемое здесь неположительно, поскольку $\mathfrak{u}\equiv 1$ – слабое суперрешение. Используя в левой части (2.3), а в правой – неравенства Гельдера и Соболева, мы получаем

$$\nu\|Du\|^2_{2,\{u<-k\}} \le (\|\mathbf{b}\|_{n,\{u<-k\}} + \|\mathbf{d}\|_{n,\{u<-k\}})\|Du\|^2_{2,\{u<-k\}}. \tag{3.5}$$

Если $A=\infty$, то первый множитель в правой части стремится к нулю при $k\to\infty$, что дает противоречие.

Если же $A<\infty$, то $Du=0$ почти всюду на множестве $\{u=-A\}$, и (3.5) переписывается так: $\nu\le\|\mathbf{b}\|_{n,\mathscr{A}_k}+\|\mathbf{d}\|_{n,\mathscr{A}_k}$, где

$$\mathscr{A}_k=\{x\in\Omega\,\big|\,-A<u(x)<-k,\ Du(x)\ne 0\}.$$

Очевидно, $|\mathscr{A}_k|\to 0$ при $k\to A$. Следовательно, $\|\mathbf{b}\|_{n,\mathscr{A}_k}+\|\mathbf{d}\|_{n,\mathscr{A}_k}\to 0$, и мы вновь приходим к противоречию. □

Замечание 3.1. *В недавней работе [172] доказан слабый принцип максимума в области класса Джона для функций $u\in W^1_2(\Omega)$, если $\widehat{\mathfrak{L}}u\ge 0$ в Ω, а вместо условия $u\ge 0$ на $\partial\Omega$ выполняется условие с конормальной производной $(a^{ij}D_ju+d^iu)\mathbf{n}_i\ge 0$, то есть неравенство (3.4) выполнено для всех неотрицательных функций $\eta\in W^1_2(\Omega)$.*

3.1 Неравенство Гарнака и сильный принцип максимума

В отличие от недивергентных операторов[43], в дивергентном случае почти все результаты о сильном принципе максимума были получены как

[43] Сравните годы появления первых результатов, приведенные в таблице:

	Сильный принцип макс.	Неравенство Гарнака
Оператор Лапласа	1839 [2], [3]	1887 [5]
Опер-ры с гладкими коэфф.	1892 [24]	1912 [27]
Опер-ры с разрыв. коэфф.	1927 [28]	1955 [159], [160]

следствие соответствующих неравенств Гарнака. В связи с этим мы приводим историю этих результатов параллельно.

Несколько особняком стоят работы У. Литтмана [173], [174], в которых изучались операторы

$$\mathcal{L}^* \equiv -D_i D_j a^{ij}(x) - D_i b^i(x), \tag{3.6}$$

формально сопряженные к операторам вида (2.1). Слабым суперрешением уравнения $\mathcal{L}^* u + cu = 0$ называется функция $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$ такая, что для любой неотрицательной пробной функции $\eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ выполнено неравенство

$$\langle \mathcal{L}^* u + cu, \eta \rangle := \int\limits_\Omega u(\mathcal{L}\eta + c\eta)\, dx \geq 0.$$

В [173] коэффициенты оператора предполагались гладкими, в [174] условия были существенно ослаблены. Сформулируем этот результат.

Пусть $\mathcal{L}$ – оператор вида (2.1), функции a^{ij}, b^i и c принадлежат $\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$, выполнено условие (2.3), и пусть u – слабое суперрешение уравнения $\mathcal{L}^* u + cu = 0$ в Ω. Тогда

1. *u не может достигать в Ω нулевого минимума, за исключением случая $u \equiv 0$.*

2. *Если $\mathfrak{u} \equiv 1$ – слабое суперрешение уравнения $\mathcal{L}^* u + cu = 0$ в Ω[44], то u не может достигать в Ω отрицательного минимума, за исключением случая $u \equiv const$ (в этом случае u – слабое решение).*

3. *Если $-\mathfrak{u}$ – слабое суперрешение уравнения $\mathcal{L}^* u + cu = 0$ в Ω, то u не может достигать в Ω положительного минимума, за исключением случая $u \equiv const$ (в этом случае u – слабое решение).*

Дальнейшее развитие этих результатов для оператора вида (3.6) можно найти в работах [175]–[178] (см. также цитируемую там литературу).

Вернемся к дивергентным уравнениям. Впервые неравенство Гарнака для равномерно эллиптического оператора $\mathfrak{L}_0$ с измеримыми коэффици-

[44] В данном случае это означает, что $-D_i D_j(a^{ij}) - D_i(b^i) + c \geq 0$ в смысле обобщенных функций.

ентами было доказано Ю. Мозером [179][45]. В работе Г. Стампаккья [184] этот результат был обобщен на операторы вида (3.2) при условии

$$b^i \in L_n(\Omega), \quad d^i \in L_q(\Omega), \quad c \in L_{\frac{q}{2}}(\Omega), \qquad q > n. \tag{3.7}$$

Аналогичный результат можно извлечь из статьи [185], посвященной квазилинейным уравнениям.

В качестве следствия в [184] доказан сильный принцип максимума[46] в двух вариантах:

1. для оператора $\widehat{\mathfrak{L}}$ при $\operatorname{ess\,inf}\limits_{\Omega} u = 0$;

2. для оператора $\mathfrak{L}$.

Приведем несколько упрощенное доказательство второго утверждения, основанное на идее Мозера [188], но не опирающееся на неравенство Гарнака.

Теорема 3.2. *Пусть $\mathfrak{L}$ – равномерно эллиптический оператор вида (3.1) в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, и $b^i \in L_n(\Omega)$. Пусть $u \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$, и $\mathfrak{L}u \geq 0$ в Ω. Если u достигает в точке $x^0 \in \Omega$ наименьшего значения[47], то $u \equiv const$.*

Доказательство. 1. Аналогично п. 1 доказательства теоремы 3.1 получаем, что в определении слабого решения (суб/суперрешения) можно брать любые пробные функции $\eta \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$ с компактным носителем.

2. Пусть теперь v – слабое субрешение, т.е. $\mathfrak{L}v \leq 0$ в Ω. Подставим в неравенство $\langle \mathfrak{L}v, \eta \rangle \leq 0$ пробную функцию $\eta = \varphi'(v) \cdot \varsigma$, где ς – неотрицательная липшицева функция с носителем в $\overline{B}_{2R} \subset \Omega$, а φ – выпуклая липшицева на $\mathbb{R}$ функция, равная нулю на отрицательной полуоси. Это дает

$$\int\limits_{B_{2R}\cap\{u>0\}} \Big(a^{ij} D_j V D_i \varsigma + \frac{\varphi''(v)}{\varphi'^2(v)}\, a^{ij} D_j V D_i V \varsigma + b^i D_i V \varsigma \Big)\, dx \leq 0, \tag{3.8}$$

[45]Как показано в [180] (см. также [181] и [182]), неравенство (1.2) можно получить и из доказательства Э. Де Джорджи [183] гельдеровской непрерывности слабых решений уравнения $\mathfrak{L}_0 u = 0$.

[46]См. также [186] и [187].

[47]Это утверждение понимается в следующем смысле: $\operatorname{ess}\liminf\limits_{x\to x^0} u = \operatorname{ess\,inf}\limits_{\Omega} u$.

где $V = \varphi(v) \in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$. В частности, поскольку второе слагаемое в (3.8) неотрицательно, V – также слабое субрешение.

Положим[48] в (3.8) $\varphi(\tau) = \tau_+^p$, $p > 1$, и $\varsigma = V\zeta^2$, где ζ – гладкая срезка в B_{2R}. Получим

$$\int\limits_{B_{2R}} \tfrac{2p-1}{p}\, a^{ij} D_j V D_i V\, \zeta^2\, dx \le -\int\limits_{B_{2R}} \Big(2a^{ij} D_j V\, V D_i\zeta\, \zeta + b^i D_i V\, V\zeta^2\Big)\, dx. \quad (3.9)$$

Левую часть (3.9) оценим снизу по неравенству (2.3), а правую – сверху по неравенствам Гельдера и Соболева:

$$\begin{aligned} &\nu \|DV\,\zeta\|^2_{2,B_{2R}} \\ &\le 2\nu^{-1}\|DV\,\zeta\|_{2,B_{2R}} \|VD\zeta\|_{2,B_{2R}} + \|\mathbf{b}\|_{n,B_{2R}} \|DV\,\zeta\|_{2,B_{2R}} \|V\,\zeta\|_{2^*,B_{2R}} \\ &\le N(n)\|\mathbf{b}\|_{n,B_{2R}} \|DV\,\zeta\|^2_{2,B_{2R}} + C\|DV\,\zeta\|^2_{2,B_{2R}} \|VD\zeta\|^2_{2,B_{2R}}. \end{aligned}$$

По теореме Лебега при достаточно малом R_* имеем $N(n)\|\mathbf{b}\|_{n,B_{2R_*}} \le \frac{\nu}{2}$. Это дает при $R \le R_*$

$$\|DV\,\zeta\|_{2,B_{2R}} \le C(n, \nu, \|\mathbf{b}\|_{n,\Omega}) \cdot \|VD\zeta\|_{2,B_{2R}}. \quad (3.10)$$

Положим в (3.10) $R_k = R(1+2^{-k})$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, и возьмем такие $\zeta = \zeta_k$, что

$$\zeta_k \equiv 1 \ \text{ в } \ B_{R_{k+1}}, \quad \zeta_k \equiv 0 \ \text{ вне } \ B_{R_k}, \qquad |D\zeta_k| \le \frac{2^{k+2}}{R}.$$

Тогда получим

$$\|DV\,\zeta_k\|_{2,B_{R_k}} \le \frac{C(n, \nu, \|\mathbf{b}\|_{n,\Omega})}{R} \cdot 2^k \|V\|_{2,B_{R_k}}. \quad (3.11)$$

Теперь для $p = p_k \equiv (2^*/2)^k$ мы выводим из неравенства Соболева и (3.11)

$$\begin{aligned} \bigg(\ \fint\limits_{B_{R_{k+1}}} v_+^{2p_{k+1}} dx\bigg)^{\frac{1}{2p_{k+1}}} &\le \bigg(N(n) \fint\limits_{B_{R_k}} (V\zeta_k)^{2^*}\, dx\bigg)^{\frac{1}{2^* p_k}} \\ &\le \bigg(4^k C \fint\limits_{B_{R_k}} V^2\, dx\bigg)^{\frac{1}{2p_k}} = \bigg(4^k C \fint\limits_{B_{R_k}} v_+^{2p_k} dx\bigg)^{\frac{1}{2p_k}}, \quad (3.12) \end{aligned}$$

[48] Более формально, надо взять $\varphi'(v) = p\,\min\{v_+, N\}^{p-1}$ при $N > 0$, и $\varsigma = \varphi(v)\zeta^2$, а затем перейти в (3.10) к пределу при $N \to \infty$.

где C зависит только от n, ν и $\|\mathbf{b}\|_{n,\Omega}$.

Итерируя (3.12), получаем, что любое (слабое) субрешение v допускает оценку

$$\operatorname*{ess\,sup}_{B_R} v_+ \le C(n,\nu,\|\mathbf{b}\|_{n,\Omega})\cdot\Bigg(\fint\limits_{B_{2R}} v_+^2\,dx\Bigg)^{\frac{1}{2}}, \qquad R\le R_*. \tag{3.13}$$

3. Приступим теперь к доказательству теоремы. Не умаляя общности, можно считать $\operatorname*{ess\,inf}_{\Omega} u = 0$.

Предположим противное. Тогда существует точка $x^0\in\Omega$ такая, что $\operatorname{ess}\liminf\limits_{x\to x^0} u = 0$, но для каких-то $k>0$, $\delta>0$ и $R\le R_*$ имеем

$$\big|\{u\ge k\}\cap B_R(x^0)\big| \ge \delta\cdot|B_R|. \tag{3.14}$$

Не умаляя общности, $\overline{B}_{2R}(x^0)\subset\Omega$. Поместим начало координат в точку x^0 и введем функцию $v_\varepsilon(x) = 1-\frac{u}{k}-\varepsilon$, $\varepsilon>0$. Очевидно, что v_ε – субрешение.

Применим неравенство (3.8) с $V=\varphi(v^\varepsilon)\equiv\big(\ln\frac{1}{1-v^\varepsilon}\big)_+$ (это возможно, поскольку $v^\varepsilon<1$) и $\varsigma=\zeta^2$, где ζ – гладкая срезающая функция, равная 1 в B_R. Поскольку $\frac{\varphi''}{\varphi'^2}\equiv 1$, с помощью (2.3) и неравенств Гельдера и Соболева получим

$$\begin{aligned}\nu\|DV\,\zeta\|^2_{2,B_{2R}} &\le \int\limits_{B_{2R}} a^{ij}D_jV\,D_iV\,\zeta^2\,dx \le -\int\limits_{B_{2R}}\Big(2a^{ij}D_jV\,\zeta D_i\zeta + b^iD_iV\,\zeta^2\Big)\,dx\\ &\le C(n,\nu,\|\mathbf{b}\|_{n,\Omega})\cdot\|DV\,\zeta\|_{2,B_{2R}}\|D\zeta\|_{2,B_{2R}},\end{aligned}$$

или

$$\|DV\,\zeta\|_{2,B_{2R}} \le C(n,\nu,\|\mathbf{b}\|_{n,\Omega})R^{\frac{n}{2}-1}. \tag{3.15}$$

Заметим теперь, что V обращается в нуль на множестве $\{u\ge k\}\cap B_R$, и $\zeta\equiv 1$ на этом множестве. Из доказательства леммы 5.1 главы II [189] следует, что это влечет

$$\big|\{u\ge k\}\cap B_R\big|\cdot V(x)\,\zeta(x)\le\frac{(4R)^n}{n}\int\limits_{B_{2R}}\frac{|DV(y)|\,\zeta(y)}{|y-x|^{n-1}}\,dy.$$

Возьмем от обеих частей норму в L_{2^*}, оценим правую часть по неравенству Харди–Литтлвуда–Соболева (см., например, [19, Теорема 1.18.9/3]) и учтем (3.14) и (3.15):

$$\|V\zeta\|_{2^*,B_{2R}} \le \frac{C(n)}{\delta}\,\|DV\,\zeta\|_{2,B_{2R}} \le C(n,\nu,\delta,\|\mathbf{b}\|_{n,\Omega})R^{\frac{n}{2}-1},$$

и потому

$$\Bigg(\ \fint\limits_{B_R} V^2dx\Bigg)^{\frac{1}{2}} \le C(n)R^{1-\frac{n}{2}}\|V\zeta\|_{2^*,B_{2R}} \le C(n,\nu,\delta,\|\mathbf{b}\|_{n,\Omega}).$$

Наконец, поскольку V – субрешение, можно применить оценку (3.13). Это дает $\operatorname{ess}\sup\limits_{B_{R/2}} V_+ \le C$, что равносильно

$$\operatorname{ess}\inf_{B_{R/2}} u \ge k(\exp(-C)-\varepsilon).$$

Поскольку константа C не зависит от ε, получаем противоречие с предположением $\operatorname{ess}\liminf\limits_{x\to 0} u = 0$. $\square$

Замечание 3.2. *Если оценить последний член в (3.9) так:*

$$\int\limits_{B_{2R}} |b^iD_iV\,V\zeta^2|\,dx \le \|\mathbf{b}\|_{L_{n,\infty}(B_{2R})}\|DV\,\zeta\|_{2,B_{2R}}\|V\,\zeta\|_{L_{2^*,2}(B_{2R})}$$

(напомним, что $L_{p,q}$ – пространства Лоренца) и воспользоваться усиленной теоремой вложения Соболева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_{2^*,2}(\Omega)$ ([190]), то условие $b^i \in L_n(\Omega)$ можно ослабить до $b^i \in L_{n,q}(B_{2R})$ с любым $q<\infty$. Контрпример в начале § 2.4 показывает, что положить $q=\infty$ нельзя. Однако если норма $\|\mathbf{b}\|_{L_{n,\infty}(\Omega)}$ достаточно мала, то доказательство проходит без изменений.

При тех же условиях справедливо и неравенство Гарнака (доказательство теоремы 2.5′ [191] полностью переносится на этот случай).

Замечание 3.3. *В двумерном случае утверждение теоремы 3.2 (и даже теоремы 3.1) неверно*[49]*; приведем соответствующий контрпример из работы [192].*

При $n=2$ положим $u(x)=\ln^{-1}(|x|^{-1})$. Очевидно, что при $r\le\frac{1}{2}$ функция $u\in W_2^1(B_r)$ является слабым решением уравнения

$$-\Delta u + b^i(x)D_iu = 0 \qquad c \quad b^i(x) = \frac{2x_i}{|x|^2\ln(|x|^{-1})} \in L_2(B_r).$$

[49]Этот факт в [184] и [186] не отмечен.

Однако и достигает наименьшего значения в точке 0.

Таким образом, при $n = 2$ *условие на* b^i *надо усилить. Например, можно оценить последний член в (3.9) так (ср. [193, Theorem 3.1]):*

$$\int\limits_{B_{2R}} |b^i D_i V\, V\zeta^2|\,dx \le \|\mathbf{b}\|_{L_{\Phi_1}(B_{2R})}\|DV\,\zeta\|_{2,B_{2R}}\|V\,\zeta\|_{L_{\Phi_2}(B_{2R})},$$

где L_Φ *– пространства Орлича с* N*-функцией* Φ *(см., например, [194, § 10]),*

$$\Phi_1(t) = t^2\ln(1+t), \qquad \Phi_2(t) = \exp(t^2) - 1,$$

и применить теорему вложения Юдовича–Похожаева $\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega) \hookrightarrow L_{\Phi_2}(\Omega)$ *(см., например, [194, 10.6]). Это дает сильный принцип максимума при условии* $\mathbf{b}\ln^{\frac{1}{2}}\big(1+|\mathbf{b}|\big) \in L_2(\Omega)$*, введенном в [191]. При том же условии верно и неравенство Гарнака (см. теорему 2.5′ [191]). Приведенный выше пример показывает, что степень* $\frac{1}{2}$ *у логарифма уменьшить нельзя.*

Со второй половины 1960-х годов количество работ о неравенстве Гарнака для дивергентных уравнений (даже линейных) быстро растет. Мы остановимся на трех важных направлениях развития этой темы.

1. Неравномерно эллиптические операторы. В ряде работ изучались операторы с условием эллиптичности (3.3) при различных предположениях о функциях $\nu(x)$ и $\mathcal{V}(x)$.

Н.С. Трудингер [195] доказал неравенство Гарнака для операторов $\mathfrak{L}_0$ при условии

$$\nu^{-1} \in L_q(\Omega), \quad \nu^{-1}\mathcal{V}^2 \in L_r(\Omega), \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{2}{n}.$$

В работе [196] были рассмотрены операторы общего вида (3.2) при более слабом условии

$$\nu^{-1} \in L_q(\Omega), \quad \mathcal{V} \in L_r(\Omega), \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < \frac{2}{n}; \tag{3.16}$$

на младшие коэффициенты при этом накладывались некоторые условия суммируемости с весом, определяемым матрицей $\mathcal{A}$[50].

[50] В случае равномерно эллиптического оператора эти условия близки к условиям Стампаккья (3.7).

При этих условиях в [196] установлено неравенство Гарнака, а также сильный принцип максимума в такой форме:

Пусть u – слабое суперрешение уравнения $\widehat{\mathfrak{L}}u = 0$ в Ω. Если $\mathfrak{u} \equiv 1$ – также суперрешение, то u не может достигать в Ω отрицательного минимума, за исключением случая $u \equiv const$ (в этом случае u – слабое решение).

Для операторов простейшего вида $\mathfrak{L}_0$ в недавней статье [197] условие на показатели в (3.16) было ослаблено до $\frac{1}{q}+\frac{1}{r} < \frac{2}{n-1}$. С другой стороны, в [198] построен пример, показывающий, что в размерности $n \geq 4$ при $\frac{1}{q}+\frac{1}{r} > \frac{2}{n-1}$ уравнение $\mathfrak{L}_0 u = 0$ в B_R может иметь слабое решение, неограниченное в $B_{\frac{R}{2}}$. Вопрос о справедливости неравенства Гарнака в пограничном случае $\frac{1}{q}+\frac{1}{r} = \frac{2}{n-1}$ пока остается открытым.

В работе [199] рассматривались операторы $\mathfrak{L}_0$ при условиях[51]

1. существует $N \geq 1$ такое, что $\mathcal{V}(x) \leq N \cdot \nu(x)$ для почти всех $x \in \Omega$;

2. ν принадлежит классу Макенхаупта A_2, то есть

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n,\, r>0} \Big(\fint_{B_r(x)} \nu(y)\,dy \cdot \fint_{B_r(x)} \nu^{-1}(y)\,dy \Big) < \infty. \tag{3.17}$$

При этих условиях в [199] доказаны неравенство Гарнака и сильный принцип максимума. Кроме того, приведен контрпример, показывающий, что ослабление условия $\nu \in A_2$ до $\nu \in \bigcup_{p>2} A_p$ не обеспечивает выполнения неравенства Гарнака[52].

В статье [201] результаты [199] были обобщены на операторы общего вида (3.2). На младшие коэффициенты при этом накладывались условия

$$\frac{b^i}{\nu} \in L_m(\Omega), \quad \frac{d^i}{\nu} \in L_q, \quad \frac{c}{\nu} \in L_{\frac{q}{2}}, \qquad q > m, \tag{3.18}$$

(здесь m – показатель, названный в [201] “внутренней размерностью”, порождаемой поведением веса ν; для равномерно эллиптических операторов $m = n$, и эти условия превращаются в (3.7)).

[51] Эти условия появились еще в работе [200], посвященной квазилинейным уравнениям, но в ней на функции $\nu(x)$ и $\mathcal{V}(x)$ дополнительно накладывались ограничения (3.16).

[52] Сильного принципа максимума этот контрпример не нарушает.

Отметим еще работы [202] и [203], в которых неравенство Гарнака было установлено для оператора $\mathfrak{L}_0$ при "абстрактных" условиях на функции $\nu(x)$ и $\mathcal{V}(x)$, а именно, при выполнении некоторых весовых неравенств Соболева и Пуанкаре.

2. Младшие коэффициенты из классов Като. Пространства Лебега (а также Лоренца и Орлича) относятся к перестановочно инвариантным пространствам – норма функции f в них определяется только поведением меры множества $\{x \in \Omega \,\big|\, |f(x)| > N\}$ при $N \to \infty$. Более тонкое описание особенностей коэффициентов может быть дано в терминах классов Като.

Напомним, что класс $\mathcal{K}_{n,\beta}$, $\beta \in (0, n)$, состоит из функций $f \in L_1(\Omega)$, для которых

$$\omega_\beta(r) := \sup_{x\in\Omega} \int\limits_{\Omega\cap B_r(x)} \frac{|f(y)|}{|x-y|^{n-\beta}}\, dy \to 0 \quad \text{при} \quad r \to 0. \tag{3.19}$$

Соответственно, $f \in \mathcal{K}_{n,\beta,\text{loc}}$ означает, что $f\chi_{\Omega'} \in \mathcal{K}_{n,\beta}$ для любой подобласти Ω' такой, что $\overline{\Omega}' \subset \Omega$.

Функционалы $\omega_\beta(r)$ и пространства, определяемые ими, были введены М. Шехтером в [204], [205, Ch. 5, § 1; Ch. 7, § 7] и подробно исследованы в [206][53]. Дальнейшее развитие теории и ссылки можно найти в [211].

Все результаты этого пункта относятся к случаю $n \ge 3$.

В статье [212] было установлено неравенство Гарнака для оператора $-\Delta + c(x)$ при условии $c \in \mathcal{K}_{n,2}$. В работе [213] этот результат был распространен на равномерно эллиптические операторы вида $\mathfrak{L}_0 + c(x)$ при том же условии[54].

В статье [216] неравенство Гарнака было доказано для равномерно эллиптических операторов более общего вида $\mathfrak{L} + c(x)$ при условии[55]

$$(b^i)^2, c \in \mathcal{K}_{n,2,\text{loc}}. \tag{3.20}$$

[53]Для частных значений β условие (3.19) было использовано в [207] и [208]. В связи с этим $\mathcal{K}_{n,\beta}$ обычно называют классами Като или Като–Штуммеля, что является очередным проявлением принципа Арнольда [209]. Некоторые обобщения классов $\mathcal{K}_{n,\beta}$ можно найти, например, в [210].

[54]В связи с этим см. также [214] и [215].

[55]В более ранней работе [217] рассматривался оператор $-\Delta + b^i(x)D_i$ при более жестких ограничениях $(b^i)^2 \in \mathcal{K}_{n,2,\text{loc}}$ и $b^i \in \mathcal{K}_{n,1,\text{loc}}$.

Наконец, в работе [218] два описанных выше направления объединены. Именно, неравенство Гарнака доказано для операторов (3.2), причем функции $\nu(x)$ и $\mathcal{V}(x)$ из (3.3) удовлетворяют условиям $\mathcal{V}(x) \le N \cdot \nu(x)$ и (3.17), а функции $(b^i)^2$, $(d^i)^2$ и c принадлежат весовому аналогу класса Като $\mathcal{K}_{n,2}$ с дополнительным ограничением[56]: соответствующий аналог функции ω_2 из (3.19) допускает при $r \to 0$ оценку $O(r^\gamma)$ при некотором $\gamma > 0$.

Условие (3.20) в общем случае весьма близко к оптимальному. Его вариации возможны, если наложить некоторые дополнительные условия на матрицу $\mathcal{A}$.

В статье [219] рассмотрен равномерно эллиптический оператор вида (3.1) с $a^{ij} \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$, $\alpha \in (0,1)$. Это ограничение позволило доказать неравенство Гарнака при условии $b^i \in \mathcal{K}_{n,1}$.

Заметим, что условие Гельдера на старшие коэффициенты в [219] излишне: используя оценки функции Грина и ее производных из [220], тот же результат можно получить при $a^{ij} \in \mathcal{C}^{0,\mathcal{D}}(\Omega)$.

В недавней работе [221] разобран в некотором смысле промежуточный случай. Старшие коэффициенты равномерно эллиптического оператора $\mathfrak{L}$ в этой работе принадлежат пространству Сарасона $VMO(\Omega)$. Это означает, что $\omega^{ij}(\rho) \to 0$ при $\rho \to 0$, где

$$\omega^{ij}(\rho) := \sup_{x\in\Omega} \sup_{r\le\rho} \fint_{\Omega\cap B_r(x)} \Big| a^{ij}(y) - \fint_{\Omega\cap B_r(x)} a^{ij}(z)\,dz \Big|\,dy. \tag{3.21}$$

На младшие коэффициенты при этом накладывается условие $|b^i|^\beta \in \mathcal{K}_{n,\beta}$, $\beta > 1$, с дополнительным ограничением

$$\sup_{x\in\Omega} \int_{\Omega\cap B_r(x)\setminus B_{\frac{r}{2}}(x)} \frac{|b^i(y)|^\beta}{|x-y|^{n-\beta}}\,dy \le \sigma^\beta(r), \quad \sigma \in \mathcal{D}. \tag{3.22}$$

Для таких операторов в [221] доказан сильный принцип максимума[57]. Заметим, что неравенство Гарнака также может быть доказано при этих условиях. Возможно ли снять или хотя бы ослабить ограничение (3.22), пока неясно.

[56] Мы предполагаем, что это ограничение носит технический характер, но, насколько нам известно, этот вопрос остается открытым.

[57] В случае $n = 2$, также рассмотренном в [221], условие (3.22) несколько видоизменяется.

3. Операторы с $\mathrm{div}(\mathbf{b}) \le 0$**.** При исследовании задач гидродинамики нередко возникают (см., например, [222]–[225]) операторы $-\Delta + b^i(x)D_i$ (или, более общо, операторы вида (3.1)) с дополнительным структурным условием $D_i(b^i) = 0$ или $D_i(b^i) \le 0$ в смысле обобщенных функций. Напомним, что это означает, соответственно,

$$\int\limits_{\Omega} b^i D_i \eta \, dx = 0 \quad \text{для всех} \quad \eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$$

или

$$\int\limits_{\Omega} b^i D_i \eta \, dx \ge 0 \quad \text{для всех} \quad \eta \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega), \quad \eta \ge 0.$$

Это условие позволяет существенно ослабить предположения о регулярности коэффициентов b^i.

В статье [226] было установлено неравенство Гарнака для оператора $-\Delta + b^i(x)D_i$ с $D_i(b^i) = 0$ при условии $b^i \in BMO^{-1}(\Omega)$. Это означает, что $b^i = D_j(B^{ij})$ в смысле обобщенных функций, где $B^{ij} \in BMO(\Omega)$, т.е. функции $\omega^{ij}(\rho)$, определенные в (3.21) (с B^{ij} вместо a^{ij}), ограничен[58]. При этом соотношение $D_i(b^i) = 0$ обеспечивается дополнительным условием $B^{ij}(x) = -B^{ji}(x)$ для почти всех $x \in \Omega$.

В работе [191] изучались равномерно эллиптические операторы вида (3.1) с $D_i(b^i) \le 0$. При этом требования на младшие коэффициенты описывались в терминах пространств Морри.

Напомним, что пространство $\mathbb{M}_p^\alpha(\Omega)$, $1 \le p < \infty$, $\alpha \in (0, n)$, состоит из функций $f \in L_p(\Omega)$, для которых

$$\|f\|_{\mathbb{M}_p^\alpha(\Omega)} := \sup_{B_r(x) \subset \Omega} r^{-\alpha} \|f\|_{p, B_r(x)} < \infty.$$

В частности, в [191] было доказано неравенство Гарнака при условии[59] $b^i \in \mathbb{M}_q^{\frac{n}{q}-1}(\Omega)$, $\frac{n}{2} < q < n$. Н.Д. Филонов построил чрезвычайно тонкий контрпример (теорема 1.6 в [192]), показывающий, что даже при условии $D_i(b^i) = 0$ показатель $\alpha = \frac{n}{q} - 1$ не может быть уменьшен.

[58] Очевидно, $L_n(\Omega) \subset BMO^{-1}(\Omega)$ ввиду вложения $W_n^1(\Omega) \hookrightarrow BMO(\Omega)$.

[59] Очевидно, $L_n(\Omega) \subset \mathbb{M}_q^{\frac{n}{q}-1}(\Omega)$ ввиду неравенства Гельдера.

Сильный принцип максимума был установлен в [191] для липшицевых суперрешений[60] при $b^i\in L_q(\Omega)$, $q>\frac{n}{2}$. Однако с помощью аппроксимации ([227, Theorem 3.1] можно получить такое частичное обобщение этого результата:

Пусть $\Omega\subset\mathbb{R}^n$, $n\ge 3$. Предположим, что функция $u\in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)$ является слабым решением уравнения $-\Delta u+b^i(x)D_iu=0$ в Ω, причем

$$D_i(b^i)=0;\quad b^i\in L_q(\Omega);\quad q>\frac{n}{2}\ \ \textit{при}\ \ n\ge 4;\quad q=2\ \ \textit{при}\ \ n=3.$$

Если u достигает в точке $x^0\in\Omega$ наименьшего значения, то $u\equiv const$.

С другой стороны, в [227] был построен следующий контрпример.

Пусть $n\ge 4$, и $u(x)=\ln^{-1}(|x'|^{-1})$. Тогда $u\in W^1_2(B_r)$ при $r\le\frac12$. Прямой подсчет показывает, что u является слабым решением уравнения $-\Delta u+b^i(x)D_iu=0$ при[61]

$$b^i(x)=\begin{cases}\left(\dfrac{n-3}{|x'|}+\dfrac{2}{|x'|\ln(|x'|^{-1})}\right)\dfrac{x_i}{|x'|}, & i<n;\\[2ex] -\left(\dfrac{(n-3)^2}{|x'|}+\dfrac{2(n-3)}{|x'|\ln(|x'|^{-1})}+\dfrac{2}{|x'|\ln^2(|x'|^{-1})}\right)\dfrac{x_n}{|x'|}, & i=n.\end{cases}$$

Несложно видеть, что $D_i(b^i)=0$, и $b^i\in L_q(B_r)$ при всех $q<\frac{n-1}{2}$. Однако сильный принцип максимума не выполняется. В недавней работе [228] (см. также [229]) был построен пример векторного поля $\mathbf{b}\in L_{\frac{n-1}{2}}(B_r)$, $D_i(b^i)=0$, для которого уравнение $-\Delta u+b^i(x)D_iu=0$ имеет слабое решение, неограниченное в $B_{\frac{r}{2}}$, что также можно считать нарушением сильного принципа максимума. Вопрос о справедливости сильного принципа максимума для $\frac{n-1}{2}<q\le\frac{n}{2}$ при условии $D_i(b^i)=0$ открыт.

3.2 Лемма о нормальной производной

История леммы о нормальной производной для слабых (супер)решений уравнения $\mathfrak{L}u=0$ довольно коротка. Первый результат здесь был получен Р. Финном и Д. Гилбаргом в 1957 году в работе [230]. В ней рассматривались равномерно эллиптические операторы вида (3.1) с $a^{ij}\in\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$ и $b^i\in\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ в двумерной области класса $\mathcal{C}^{1,\alpha}$, $\alpha\in(0,1)$.

[60] Для слабых суперрешений требования на b^i в [191] несколько сильнее.
[61] В [227] в формуле для b^n имеется опечатка.

Только в 2015 году этот результат был обобщен на n-мерный случай [231], причем граница области в этой работе предполагалась гладкой[62]. В статье [232] лемма о нормальной производной была доказана для всех $n \geq 3$ при тех же условиях на a^{ij} и $\partial\Omega$, что и в [230], и при $b^i \in L^q(\Omega)$, $q > n$.

Еще в 1959 году был построен контрпример [233][63], показывающий, что требование на старшие коэффициенты нельзя ослабить до $a^{ij} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Приведем здесь пример более общего вида (см. [153]).

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$ такая, что $\Omega \cap \{x_n < h\} = \mathfrak{T}(\phi, h)$, причем $\phi \in \mathcal{C}^1$, но ϕ' не удовлетворяет условию Дини в нуле. Как упоминалось в §2.2, в [69] показано, что лемма о нормальной производной для оператора Лапласа в такой области не выполняется.

Теперь распрямим границу в окрестности начала координат. Это даст нам оператор $\mathfrak{L}_0$ с ***непрерывными*** старшими коэффициентами, для которого лемма о нормальной производной не выполняется в ***гладкой*** области.

Из этого примера видно, что естественным условием на старшие коэффициенты оператора является условие Дини. Отметим в связи с этим работу В.А. Козлова и В.Г. Мазья [234], в которой для оператора $\mathfrak{L}_0$ получено более тонкое условие на коэффициенты a^{ij}, обеспечивающее оценку градиента решения в точках (гладкой) границы $\partial\Omega$. По-видимому, из полученной в [234] асимптотики решения можно вывести также условие выполнения леммы о нормальной производной, более точное, чем условие Дини.[64]

Для демонстрации основной идеи мы докажем лемму о нормальной производной для простейшего оператора $\mathfrak{L}_0$ с $a^{ij} \in \mathcal{C}^{0,\mathcal{D}}(\Omega)$[65] при минимальных условиях на границу области.

[62]Также в [231] приведены примеры статей с некорректным использованием леммы о нормальной производной для слабых решений.

[63]В различных формах он приведен в [106, гл. 3], [15, Ch.2].

[64]Как сообщил нам Б. Сираков, он доказал лемму о нормальной производной при условии, что a^{ij} удовлетворяют **условию Дини в среднем**, т.е. в формуле (3.21) выполнено $\omega^{ij} \in \mathcal{D}$. Это условие сильнее, чем $a^{ij} \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$, но слабее, чем $a^{ij} \in \mathcal{C}^{0,\mathcal{D}}(\Omega)$. В связи с этим см. [178], где была доказана $\mathcal{C}^1$-оценка вплоть до границы для решения уравнения при этом условии.

[65]Очевидно, достаточно выполнения этого условия лишь в некоторой окрестности $\partial\Omega$. По-видимому, можно обойтись этим условием только на $\partial\Omega$, см. [234].

Теорема 3.3. *Пусть область* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *удовлетворяет условию внутреннего* $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$*-параболоида. Предположим, что коэффициенты оператора* $\mathfrak{L}_0$ *удовлетворяют условиям (2.3), и* $a^{ij} \in \mathcal{C}^{0,\mathcal{D}}(\Omega)$*. Пусть* $u \not\equiv const$ *– слабое суперрешение уравнения* $\mathfrak{L}_0 u = 0$ *в* Ω*.*

Если u *непрерывна в* $\overline{\Omega}$ *и достигает минимума в точке* $x^0 \in \partial\Omega$*, то для любого строго внутреннего направления* $\boldsymbol{\ell}$ *справедливо неравенство*

$$\liminf_{\varepsilon \to +0} \frac{u(x^0 + \varepsilon \boldsymbol{\ell}) - u(x^0)}{\varepsilon} > 0.$$

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $x^0 = 0$ и $\Omega = \mathfrak{T}(\phi, h)$, причем $\phi \in \mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$. Далее, ограничения на a^{ij} сохраняются при преобразовании координат класса $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$. Поэтому можно распрямить $\partial\Omega$ в окрестности x^0 и считать, что $B_R \cap \{x_n > 0\} \subset \Omega$ для некоторого $R > 0$.

При $0 < r < R/2$ рассмотрим точку $x^r = (0, \dots, 0, r)$ и рассмотрим кольцо $\pi = B_r(x^r) \setminus \overline{B}_{\frac{r}{2}}(x^r) \subset \Omega$.

Условие $a^{ij} \in \mathcal{C}^{0,\mathcal{D}}(\Omega)$ дает

$$|a^{ij}(x) - a^{ij}(y)| \le \sigma(|x-y|), \quad x, y \in \overline{\pi}, \qquad \sigma \in \mathcal{D}. \tag{3.23}$$

Пусть x^* – произвольная точка в $\overline{\pi}$. Следуя [230], определим барьерную функцию $\mathfrak{V}$ и вспомогательную функцию Ψ_{x^*} как решения следующих краевых задач:

$$\begin{cases} \mathfrak{L}_0 \mathfrak{V} = 0 & \text{в } \pi, \\ \mathfrak{V} = 1 & \text{на } \partial B_{\frac{r}{2}}(x^r), \\ \mathfrak{V} = 0 & \text{на } \partial B_r(x^r), \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathfrak{L}_0^{x^*} \Psi_{x^*} = 0 & \text{в } \pi, \\ \Psi_{x^*} = 1 & \text{на } \partial B_{\frac{r}{2}}(x^r), \\ \Psi_{x^*} = 0 & \text{на } \partial B_r(x^r), \end{cases}$$

где $\mathfrak{L}_0^{x^*}$ – оператор с постоянными коэффициентами

$$\mathfrak{L}_0^{x^*} \Psi_{x^*} := -D_i(a^{ij}(x^*) D_j \Psi_{x^*}).$$

Хорошо известно, что $\Psi_{x^*} \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\pi})$. Далее, существование (единственного) слабого решения $\mathfrak{V}$ следует из общей линейной теории. Более того, лемма 3.2 [220] показывает, что $\mathfrak{V} \in \mathcal{C}^1(\overline{\pi})$, и при $y \in \overline{\pi}$ справедлива следующая оценка:

$$|D\mathfrak{V}(y)| \le \frac{N_1(n, \nu, \sigma)}{r}. \tag{3.24}$$

Положим $\mathfrak{w} = \mathfrak{V} - \Psi_{x^*}$ и заметим, что $\mathfrak{w} = 0$ на $\partial\pi$. Поэтому для $\mathfrak{w}$ имеет место представление через функцию Грина $\mathcal{G}_{x^*}$ оператора $\mathfrak{L}_0^{x^*}$ в π:

$$\mathfrak{w}(x) = \int\limits_{\pi} \mathcal{G}_{x^*}(x,y)\, \mathfrak{L}_0^{x^*}\mathfrak{w}(y)\, dy \overset{(\star)}{=} \int\limits_{\pi} \mathcal{G}_{x^*}(x,y) \left(\mathfrak{L}_0^{x^*}\mathfrak{V}(y) - \mathfrak{L}_0\mathfrak{V}(y)\right) dy,$$

(равенство $(\star)$ следует из соотношения $\mathfrak{L}_0^{x^*}\Psi_{x^*} = \mathfrak{L}_0\mathfrak{V} = 0$).

Интегрируя по частям, имеем

$$\mathfrak{w}(x) = \int\limits_{\pi} D_{y_i}\mathcal{G}_{x^*}(x,y) \left(a^{ij}(x^*) - a^{ij}(y)\right) D_j\mathfrak{V}(y)\, dy. \tag{3.25}$$

Дифференцируя обе части равенства (3.25) по x_k, получаем

$$\begin{gathered} D_k\mathfrak{w}(x^*) = \int\limits_{\pi} D_{x_k}D_{y_i}\mathcal{G}_{x^*}(x^*,y) \left(a^{ij}(x^*) - a^{ij}(y)\right) D_j\mathfrak{V}(y)\, dy, \\ k = 1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{3.26}$$

Производные функции Грина $\mathcal{G}_{x^*}(x,y)$ допускают оценку (см., например, теорему 3.3 [220])

$$|D_xD_y\mathcal{G}_{x^*}(x,y)| \le \frac{N_2(n,\nu)}{|x-y|^n}, \qquad x,y \in \overline{\pi}. \tag{3.27}$$

Подстановка (3.24), (3.27) и (3.23) в (3.26) дает

$$|D\mathfrak{w}(x^*)| \le \frac{N_1N_2}{r} \int\limits_{B_{2r}(x^*)} \frac{\sigma(|x^*-y|)}{|x^*-y|^n}\, dy,$$

и мы получаем

$$|D\mathfrak{V}(x^*) - D\Psi_{x^*}(x^*)| \le \frac{N_3(n,\nu,\sigma)}{r} \int\limits_0^{2r} \frac{\sigma(\tau)}{\tau}\, d\tau, \qquad x^* \in \overline{\pi}. \tag{3.28}$$

Поскольку лемма о нормальной производной верна для операторов с постоянными коэффициентами, для любого строго внутреннего направления $\boldsymbol{\ell}$ имеем

$$\partial_{\boldsymbol{\ell}}\Psi_0(0) \ge \frac{N_4(n,\nu,\boldsymbol{\ell})}{r} > 0.$$

Ввиду (3.28) при достаточно малом $r > 0$ имеем

$$\partial_{\boldsymbol{\ell}}\mathfrak{V}(0) \geq \partial_{\boldsymbol{\ell}}\Psi_0(0) - |D\mathfrak{V}(0) - D\Psi_0(0)| \geq \frac{N_4}{r} - \frac{N_3}{r}\int\limits_0^{2r} \frac{\sigma(\tau)}{\tau}\,d\tau \geq \frac{N_4}{2r}.$$

Зафиксируем такое r. Поскольку $u \not\equiv const$, сильный принцип максимума дает $u - u(0) > 0$ на $\partial B_{\frac{r}{2}}(x^r)$. Поэтому при достаточно малых $\varkappa > 0$

$$\mathfrak{L}_0(u - u(0) - \varkappa\mathfrak{V}) \geq 0 \quad \text{в} \;\; \pi; \qquad u - u(0) - \varkappa\mathfrak{V} \geq 0 \quad \text{на} \;\; \partial\pi.$$

Теперь слабый принцип максимума дает $u - u(0) \geq \varkappa\mathfrak{V}$ в π. Ввиду равенства в начале координат имеем

$$\liminf_{\varepsilon\to+0} \frac{u(\varepsilon\boldsymbol{\ell}) - u(0)}{\varepsilon} \geq \varkappa\partial_{\boldsymbol{\ell}}\mathfrak{V}(0),$$

и теорема доказана. □

Приведем формулировку более общего результата, установленного в [18]. В этой работе получены наиболее точные на данный момент условия на младшие коэффициенты, гарантирующие справедливость леммы о нормальной производной.

Теорема 3.4. *Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ и старшие коэффициенты оператора $\mathfrak{L}$ удовлетворяют условиям теоремы 3.3. Предположим также, что*

$$\sup_{x\in\Omega} \int\limits_{\Omega\cap B_r(x)} \frac{|\mathbf{b}(y)|}{|x-y|^{n-1}} \cdot \frac{\mathrm{d}(y)}{\mathrm{d}(y) + |x-y|}\,dy \to 0 \quad \textit{при} \quad r \to 0. \tag{3.29}$$

Пусть $u \in W_2^1(\Omega)$ – слабое суперрешение уравнения $\mathfrak{L}u = 0$, непостоянное в Ω, и $b^iD_iu \in L_1(\Omega)$. Тогда справедливо заключение теоремы 3.3.

Замечание 3.4. *В любой подобласти Ω' такой, что $\overline{\Omega}' \subset \Omega$, условие (3.29) совпадает с $b^i \in \mathcal{K}_{n,1}$, ср. (3.22). Поэтому, в частности, из (3.29) вытекает $b^i \in \mathcal{K}_{n,1,\mathrm{loc}}$. С другой стороны, в [18] показано, что условия на b^i, наложенные в теореме 2.5, влекут (3.29).*

Замечание 3.5. *Лемма о нормальной производной для операторов дивергентного вида напрямую связана со свойствами функций Грина для этих операторов.*

Впервые функция Грина для равномерно эллиптического оператора $\mathfrak{L}_0$ с измеримыми коэффициентами была построена в эпохальной статье [235]. Среди других результатов этой работы отметим оценку[66]

$$\frac{C^{-1}}{|x-y|^{n-2}} \le \mathcal{G}(x,y) \le \frac{C}{|x-y|^{n-2}}$$

(здесь C зависит только от n и ν), справедливую в $\mathbb{R}^n$, $n \ge 3$.

Не менее важную роль сыграла статья [220], в которой среди других результатов были доказаны следующие оценки функции Грина для равномерно эллиптического оператора $\mathfrak{L}_0$ с коэффициентами, удовлетворяющими условию Дини, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \ge 3$, удовлетворяющей условию внешнего шара:

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(x,y) &\le \frac{C}{|x-y|^{n-2}} \cdot \frac{\mathrm{d}(x)}{\mathrm{d}(x)+|x-y|} \cdot \frac{\mathrm{d}(y)}{\mathrm{d}(y)+|x-y|};\\
|D_x\mathcal{G}(x,y)| &\le \frac{C}{|x-y|^{n-1}} \cdot \frac{\mathrm{d}(y)}{\mathrm{d}(y)+|x-y|};\\
|D_xD_y\mathcal{G}(x,y)| &\le \frac{C}{|x-y|^{n}}
\end{aligned}$$

(константа C зависит от n, ν, функции σ в условии Дини для коэффициентов и области Ω).

Таким образом, условие (3.29), грубо говоря, означает, что функция $|\mathbf{b}(y)| \cdot |D_x\mathcal{G}(x,y)|$ интегрируема равномерно по x.

4 Некоторые обобщения и приложения

Как уже упоминалось во введении, эта глава посвящена краткому описанию некоторых сюжетов, либо обобщающих основные утверждения нашего обзора, либо непосредственно опирающихся на них.

[66] В дальнейшем эта оценка была распространена на более общие операторы вида (3.1). Недавние результаты в этой области, а также обзор по истории вопроса можно найти в [236].

4.1 Симметрия решений нелинейных краевых задач

Мы начнем со знаменитого **метода движущихся плоскостей (moving plain method)**. Впервые он был применен А.Д. Александровым [237] в задаче о характеризации сферы свойством постоянства ее средней кривизны (или некоторых других функций главных кривизн)[67]. Позднее метод был переоткрыт Дж. Серрином [47] при решении переопределенной задачи

$$-\Delta u = 1 \quad \text{в} \quad \Omega, \qquad u\big|_{\partial\Omega} = 0, \qquad \partial_{\mathbf{n}} u\big|_{\partial\Omega} = \text{const}$$

в неизвестной области Ω класса $\mathcal{C}^2$. В [47] показано, что такая задача разрешима только в том случае, когда Ω – шар.

Своей популярностью метод обязан статье [46], в которой рассматривалась задача

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{в} \quad B_R, \qquad u\big|_{\partial B_R} = 0 \tag{4.1}$$

и ее обобщения. Сформулируем базовый результат этой работы.

Теорема 4.1. *Пусть $f \in \mathcal{C}^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, и пусть $u \in \mathcal{C}^2(\overline{B}_R)$ – положительное в B_R решение задачи (4.1). Тогда $u = u(r)$ (функция u радиально симметрична), причем $u'(r) < 0$ при $0 < r < R$.*

Приведем набросок доказательства теоремы 4.1. Очевидно, достаточно показать, что u – четная функция переменной x_n и $D_n u(x) < 0$ при $x_n > 0$.

При $0 < \lambda < R$ плоскость $\Pi_\lambda = \{x \,\big|\, x_n = \lambda\}$ отсекает от шара сегмент Σ_λ. При $x \in \overline{\Sigma}_\lambda$ обозначим $\widehat{x}_\lambda = (x', 2\lambda - x_n)$ точку, симметричную x относительно Π_λ.

Рассмотрим в $\overline{\Sigma}_\lambda$ функцию $v_\lambda(x) = u(\widehat{x}_\lambda) - u(x)$. Она удовлетворяет уравнению

$$-\Delta v_\lambda + c(x) v_\lambda = 0; \qquad c(x) = \frac{f(u(\widehat{x}_\lambda)) - f(u(x))}{u(x) - u(\widehat{x}_\lambda)} \in L_\infty(\Sigma_\lambda).$$

При λ, достаточно близких к 1, функция v_λ положительна в Σ_λ (график “отраженной” функции лежит выше исходного) и достигает **нулевого**

[67] Постановка задачи и история вопроса приведены в [238]; см. также [239]; обобщения этого результата см., например, в [240]–[242].

минимума на Π_λ. По лемме о нормальной производной (п. *Б1* теоремы 2.1) $\partial_{\mathbf{n}} v_\lambda(x) = 2D_n u(x) < 0$ на Π_λ[68]. Поэтому можно немного уменьшить λ (сдвинуть плоскость Π_λ к центру шара), и неравенство $v_\lambda > 0$ в Σ_λ будет по-прежнему выполнено.

Обозначим λ_0 точную нижнюю грань тех λ, для которых $v_\lambda > 0$ в Σ_λ. Если предположить, что $\lambda_0 > 0$, то $v_{\lambda_0} > 0$ на "круглой" части $\partial\Sigma_{\lambda_0}$. Согласно сильному принципу максимума (п. *A1* теоремы 2.1) $v_{\lambda_0} > 0$ в Σ_{λ_0}. Но тогда можно повторить предыдущее рассуждение и получить, что плоскость Π_{λ_0} можно еще немного сдвинуть к центру, что невозможно. Таким образом, $\lambda_0 = 0$, и $v_0 \equiv 0$, то есть $u(x', -x_n) \equiv u(x)$. Теорема доказана.

Как указано в [46], при $f(0) \geq 0$ априорную положительность u можно заменить на условие $u \geq 0$, $u \not\equiv 0$. Очевидно также, что условие $f \in \mathcal{C}^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$ можно заменить на локальное условие Липшица. Следующий пример, приведенный в [46], показывает, что условия Гельдера на f, вообще говоря, недостаточно.

Пусть $p > 2$, $u(x) = (1 - |x - x^0|^2)_+^p$. Прямой подсчет показывает, что u есть решение задачи (4.1) при $R > |x^0| + 1$, если положить[69]

$$f(u) = 2p(n - 2 + 2p)u^{1-\frac{1}{p}} - 4p(p-1)u^{1-\frac{2}{p}} \in \mathcal{C}^{0,1-\frac{2}{p}}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+).$$

Показатель Гельдера можно сделать сколь угодно близким к единице за счет выбора p, но утверждение теоремы не выполняется[70].

Статья [46] (а также [245], где рассматривались уравнения вида (4.1) во всем пространстве) породила огромное количество усилений и обобщений, среди которых следует выделить работу А. Берестики и Л. Ниренберга [246]. В ней с помощью принципа максимума Александрова–Бакельмана результаты [46] распространены на сильные решения для весьма широкого класса равномерно эллиптических нелинейных уравнений. Применение метода движущихся плоскостей к вырождающимся операторам типа p-лапласиана можно найти в статьях [247]–[250] и цитируемых там работах.

---

[68] Напомним, что знак коэффициента $c(x)$ здесь неважен. Заметим также, что если $f(0) < 0$, то $D_n u$ может обращаться в нуль в точках $x \in \Pi_\lambda \cap \partial B_R$, но в [46] показано, что в этом случае $D_n D_n u(x) > 0$; этого достаточно для дальнейшего рассуждения.

[69] В [46] в этой формуле имеется опечатка.

[70] Тем не менее, если $f > 0$, то условие Липшица на f можно ослабить, см., например, [243] и [244].

Значительное число работ используют **метод движущихся сфер** – сочетание метода движущихся плоскостей с конформными преобразованиями (см., например, [251] и [252]). Упомянем еще статью [253], в которой были получены дискретные аналоги результатов [46].

Другие применения сильного принципа максимума и леммы о нормальной производной к доказательству свойств симметрии в геометрических задачах можно найти, например, в [254]–[259] (см. также [8]). Приложениям принципа максимума Александрова–Бакельмана и его вариантов к исследованию свойств симметрии решений нелинейных краевых задач и доказательству изопериметрических неравенств посвящены работы [260]–[262] (см. также обзор [263]).

4.2 Теоремы типа Фрагмена–Линделёфа

Принцип Фрагмена–Линделёфа в первоначальной формулировке [264] описывает поведение на бесконечности функции, аналитической в неограниченной области.

Для решений равномерно эллиптических (недивергентных) уравнений общего вида теоремы такого типа впервые были доказаны Е.М. Ландисом [265]–[266] (краткие сообщения были опубликованы ранее в [267]–[269]). При этом старшие коэффициенты оператора в [266] удовлетворяют условию Дини, а поведение области на бесконечности описывается в терминах меры.

Более точные теоремы типа Фрагмена–Линделёфа получаются, если области описываются в терминах емкости. Первые результаты здесь были получены в [270], [271] для дивергентных уравнений с измеримыми старшими коэффициентами и в [272], [271] для недивергентных уравнений с условием Гельдера на старшие коэффициенты.

Наконец, решающий шаг был сделан Е.М. Ландисом [48] (см. также [50, гл. 1]), который с помощью введенного им понятия s-емкости доказал теоремы типа Фрагмена–Линделёфа для недивергентных уравнений с измеримыми старшими коэффициентами.

Приведем, например, один из результатов [50, гл. 1, § 6].

Теорема 4.2. *Пусть* Ω *– неограниченная область, лежащая внутри бесконечного слоя*

$$\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^n \,\big|\, |x_n| < h\}.$$

Пусть оператор $\mathcal{L}_0$ удовлетворяет условию (2.3), и пусть $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ – классическое субрешение[71] *уравнения $\mathcal{L}_0 u = 0$, причем $u|_{\partial\Omega} \le 0$.*

Если $u(x) > 0$ в какой-нибудь точке $x \in \Omega$, то

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{\max\limits_{|x|=R} u(x)}{\exp\left(\frac{C}{h}R\right)} > 0,$$

где константа $C > 0$ зависит только от n и ν.

Отметим еще работу В.Г. Мазья [273], в которой исследовались близкие вопросы для квазилинейных операторов типа p-лапласиана.

В случае, когда на части $\partial\Omega$ задана производная по некасательному направлению, теоремы типа Фрагмена–Линделёфа были доказаны в [274]–[276] для дивергентных уравнений и в [277] (см. также [278]) для недивергентных уравнений. Отметим, что в двух последних работах использовалась ослабленная форма леммы о нормальной производной [89].

К упомянутым результатам примыкает **гипотеза Ландиса** – задача о максимально возможной скорости стремления к нулю нетривиального решения равномерно эллиптического уравнения в области $\Omega = \mathbb{R}^n \setminus B_R$. Впервые она была сформулирована в обзоре [9] для уравнения

$$-\Delta u + c(x)u = 0 \tag{4.2}$$

при $c \in L_\infty(\Omega)$ (в этом случае предполагаемый ответ – экспоненциальное убывание: если $|u(x)| = O(\exp(-N|x|))$ при $|x| \to \infty$ для любого $N > 0$, то $u \equiv 0$). Полностью эта задача не решена даже для простейшего уравнения (4.2). Недавние результаты в этой области, а также обзор по истории вопроса можно найти в [279] (см. также [280]).

4.3 Граничное неравенство Гарнака

Если лемма о нормальной производной не выполняется, ее ослабленной версией может выступать следующее утверждение:

Граничное неравенство Гарнака. *Пусть $0 \in \Omega$, и $\mathbb{L}$ – эллиптический оператор в области Ω. Если u_1 и u_2 – положительные решения уравнения $\mathbb{L}u = 0$ в Ω, удовлетворяющие условию $u_1|_{\partial\Omega\cap B_R} = u_2|_{\partial\Omega\cap B_R} = 0$, то*

[71] С помощью принципа максимума Александрова–Бакельмана этот результат переносится на сильные субрешения $u \in W^2_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$.

в подобласти $\Omega \cap B_{R/2}$ справедливо неравенство

$$C^{-1}\,\frac{u_1(0)}{u_2(0)} \le \frac{u_1(x)}{u_2(x)} \le C\,\frac{u_1(0)}{u_2(0)}, \tag{4.3}$$

где C – константа, не зависящая от u_1 и u_2.

Замечание 4.1. *Если, например, Ω – область класса $\mathcal{C}^{1,\mathcal{D}}$, а $\mathcal{L}$ – равномерно эллиптический оператор вида (2.1) с ограниченными коэффициентами, то (4.3) легко следует из леммы о нормальной производной, оценки градиента решения на $\partial\Omega$ и обычного неравенства Гарнака.*

Замечание 4.2. *В важном частном случае плоской границы $x_n = 0$ и оператора $\mathcal{L}_0$, когда можно взять $u_2(x) = x_n$, граничное неравенство Гарнака было впервые получено Н.В. Крыловым [281] с целью получения граничных оценок в $\mathcal{C}^{2,\alpha}$ для решений* ***нелинейных*** *уравнений.*

Для описания результатов этого параграфа нам потребуются новые классы областей:

- Nontangentially accessible domains (NTA domains);
- Uniform domains;
- Области, удовлетворяющие λ-условию Джона, $\lambda \ge 1$; при $\lambda = 1$ говорят просто “условие Джона” (John domains);
- Twisted Hölder domains (THD domains); при необходимости уточняют “порядка $\alpha \in (0,1]$” (THD-α).

Точные определения этих классов можно найти в соответствующих работах, перечисленных в таблице 1. Для удобства читателя мы приведем лишь соотношения между ними (см., например, [282][72]):

$$\mathcal{C}^{0,1} \subset \mathrm{NTA} \subset \mathrm{Uniform} \subset \mathrm{John} = \mathrm{THD}\text{-}1;$$
$$\mathcal{C}^{0,\alpha} \subset \tfrac{1}{\alpha}\text{-John} \overset{(\triangle)}{=} \mathrm{THD}\text{-}\alpha.$$

В таблице 1 по умолчанию предполагается, что старшие коэффициенты операторов измеримы и удовлетворяют условию (2.3).

[72] Соотношение $(\triangle)$ не сформулировано явно в [282], но следует из замечания 2.5 в этой работе.

Operator	$\mathcal{C}^{0,1}$	NTA	Unif.	John	$\mathcal{C}^{0,\alpha}$	THD[73]
$-\Delta$	[283][74]	[284]	[285]			
$\mathcal{L} + c(x)$ [75]	[286]					
$\mathfrak{L}_0$	[287]				[288][76]	[289]
$-\Delta + b^i(x)D_i$ [77]	[217]					
$\mathcal{L}_0$	[290][78]					
$\mathfrak{L}_0 + c(x), \quad c \in \mathcal{K}_{n,2}$	[214][79]					
$\widehat{\mathfrak{L}}$	[201][80]					
$\mathcal{L}, \qquad b^i \in L_\infty(\Omega)$					[291][81]	
$\mathcal{L}, \qquad b^i \in L_n(\Omega)$	[152]			[292]		[282]

Таблица 1: Граничное неравенство Гарнака для разных классов областей

В недавних работах [298], [299] продемонстрирован единый подход к доказательству граничного неравенства Гарнака для дивергентных и недивергентных операторов[82].

Вариация граничного неравенства Гарнака для суперрешений и “почти суперрешений” уравнения $\mathfrak{L}u + cu = 0$ с ограниченными коэффициентами получена в [300][83].

К граничному неравенству Гарнака примыкают результаты (см. [302] и цитированную там литературу) типа слабого неравенства Гарнака для

[73]Результаты получены для $\alpha > \frac{1}{2}$; контрпримеры построены в [289] для $\alpha < \frac{1}{2}$ и в [293] для $\alpha = \frac{1}{2}$.

[74]См. также [294].

[75]Коэффициенты удовлетворяют условию Гельдера.

[76]См. также [295].

[77]Условия на коэффициенты b^i см. примечание 55.

[78]См. также [296]; несколько более общее условие на область рассмотрено в [297].

[79]См. примечание 54.

[80]Старшие коэффициенты удовлетворяют условиям (3.3), $\mathcal{V}(x) \le N \cdot \nu(x)$ и (3.17), а младшие – условию (3.18).

[81]Результат получен для $\alpha > \frac{1}{2}$; для $\alpha < \frac{1}{2}$ построен контрпример. Если $\partial\Omega$ дополнительно удовлетворяет условию (A), введенному О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой (см., например, [166]), то результат получен для всех $\alpha > 0$.

[82]Ранее подобные идеи появлялись в работах М.В. Сафонова, см. [167], [152], [282].

[83]См. в связи с этим работу [301], в которой установлена оценка супергармонической функции, удовлетворяющей нулевому условию Дирихле в двумерной области с углами, через первую собственную функцию лапласиана Дирихле.

отношения $\dfrac{u(x)}{\mathrm{d}(x)}$. Приведем, например, один из результатов [302].

Теорема 4.3. *Пусть u – неотрицательное слабое суперрешение уравнения*[84] $\mathfrak{L}u = f$ *в области класса* $\mathcal{C}^{1,1}$. *Предположим, что выполнено условие (2.3), а также следующие условия:*

$$a^{ij} \in W^1_q(\Omega), \quad b^i \in L_q(\Omega), \quad f_- \in L_q(\Omega); \qquad q > n.$$

Тогда

$$\left(\int\limits_{\Omega} \left(\frac{u(x)}{\mathrm{d}(x)}\right)^s dx\right)^{\frac{1}{s}} \le C\left(\inf_{x\in\Omega} \frac{u(x)}{\mathrm{d}(x)} + \|f_-\|_{q,\Omega}\right)$$

для любого $s < 1$. Константа C зависит от n, ν, s, q, от норм коэффициентов a^{ij} и b^i в соответствующих пространствах, от $\mathrm{diam}(\Omega)$ *и от свойств $\partial\Omega$.*

Пример гармонической функции $x_n \cdot |x|^{-n}$ в полушаре $B_r^+ = B_r \cap \{x_n > 0\}$ показывает, что ограничение $s < 1$ точно.

Упомянем еще работы (см., например, [303]–[305]), в которых граничное неравенство Гарнака было получено в “абстрактном” контексте метрических пространств.

4.4 Другие результаты для линейных операторов

В работах [306], [307] установлен обобщенный сильный принцип максимума для операторов вида $-\Delta + c(x)$ с $c \in L_1(\Omega)$; решения при этом понимаются в смысле мер. Дальнейшие результаты в этом направлении можно найти в [308]–[310].

Хорошо известно, что справедливость слабого принципа максимума для эллиптического оператора второго порядка равносильна положительности первого собственного числа соответствующей задачи Дирихле. В работе [311] для равномерно эллиптических операторов $\mathcal{L} + c(x)$ с ограниченными коэффициентами в произвольной ограниченной области определено обобщенное первое собственное число[85]

[84] Важно, что никакого условия на поведение u на $\partial\Omega$ не накладывается.

[85] Для операторов с гладкими коэффициентами в гладких областях эта формула действительно дает первое собственное число; супремум при этом можно брать по гладким функциям ϕ, положительным в Ω. Для оператора Лапласа формула (4.4) была, по-видимому, впервые выделена в [312]. В дальнейшем она обобщалась на различные классы операторов (см. [311] и цитируемую там литературу).

$$\lambda_1 = \sup_{\phi} \inf_{x \in \Omega} \frac{\mathcal{L}\phi(x) + c(x)\phi(x)}{\phi(x)} \tag{4.4}$$

(супремум берется по $\phi \in W^2_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\phi > 0$ в Ω) и показано, что слабый принцип максимума (а также введенный в этой статье "улучшенный" слабый принцип максимума) для оператора $\mathcal{L}+c(x)$ равносилен неравенству $\lambda_1 > 0$.

В последние десятилетия весьма популярными стали исследования уравнений в частных производных на сложных структурах. В ряде работ (см., например, [313]–[316] и цитируемую там литературу) изучались условия справедливости сильного принципа максимума, неравенства Гарнака, леммы о нормальной производной и граничного неравенства Гарнака для **субэллиптических** операторов, включая сублапласианы на однородных группах Карно.

В работах [317]–[319] рассматривались сильный принцип максимума и лемма о нормальной производной для простейших эллиптических операторов на **стратифицированных множествах** – клеточных комплексах с некоторыми специальными свойствами[86].

4.5 Нелинейные операторы

Даже простейший поиск по ключевым словам показывает, что за последние годы количество статей по теме обзора, касающихся нелинейных операторов, исчисляется десятками в год. Поэтому данный параграф имеет очевидно пунктирный характер без даже минимальной полноты охвата темы.

Неравенство Гарнака для квазилинейных операторов дивергентного вида было впервые доказано в [185] и затем для более широких классов операторов – в [320] и [321]. Эти работы ныне являются классическими. Отметим также работу [180], в которой было установлено неравенство Гарнака для ***квазиминимайзеров*** вариационных задач.

В работе [322] было получено обобщение леммы о нормальной производной из [63], [64] на квазилинейный случай.

[86]Простейшие примеры таких операторов – операторы задачи Вентцеля и двухфазной задачи Вентцеля.

Для операторов типа p-лапласиана

$$\Delta_p u \equiv D_i(|Du|^{p-2}D_i u), \qquad p>1 \tag{4.5}$$

лемма о нормальной производной была впервые доказана в [323]. Из недавних обобщений этого результата упомянем статьи [324] и [325].

В работах [326] и [327] были получены точные условия сильного принципа максимума и леммы о нормальной производной для минимайзеров функционала

$$J[u] = \int\limits_{\Omega} f(Du)\,dx.$$

Х.Л. Васкес [328] исследовал уравнение

$$-\Delta_p u + f(u) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega\subset\mathbb{R}^n, \qquad n\ge 2, \tag{4.6}$$

и доказал следующую теорему:

Теорема 4.4. *Пусть $f\in\mathcal{C}(\mathbb{R}_+)$ – неубывающая функция, $f(0)=0$. Тогда необходимым и достаточным условием того, чтобы любое (ненулевое) неотрицательное суперрешение уравнения (4.6) не обращалось в нуль в Ω, является соотношение*

$$\int\limits_0^\delta \frac{dt}{\big(F(t)\big)^{\frac{1}{p}}} = \infty, \qquad \textit{где} \quad F(t)=\int\limits_0^t f(s)\,ds. \tag{4.7}$$

Обобщение этого результата на более широкие классы квазилинейных операторов см. [329], [330], [279]. В статье [331] установлено (при $p=2$) соответствующее неравенство Гарнака:

Теорема 4.5. *Предположим, что $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ – неубывающая функция. Пусть $u\in W_2^1(B_{2R})$ – решение уравнения $\mathfrak{L}_0 u + f(u) = 0$, где $\mathfrak{L}_0$ – (дивергентный) равномерно эллиптический оператор с измеримыми коэффициентами. Обозначим $M=\sup\limits_{B_R} u$ и $m=\inf\limits_{B_R} u$. Тогда*[87]

$$\int\limits_m^M \frac{dt}{\big(F(t)\big)^{\frac{1}{2}}+t} \le C,$$

где F определена в (4.7), а константа C зависит только от n и ν (в частности, она не зависит от f!).

[87] Обратите внимание, что при $f\equiv 0$ получается классическое неравенство Гарнака.

Граничное неравенство Гарнака для операторов типа p-лапласиана в области класса $\mathcal{C}^2$ было установлено в [332]. Впоследствии оно было доказано для более широких классов областей, обсуждаемых в § 4.3 (см. [333] и цитируемую там литературу). Граничное неравенство Гарнака для максимальных и минимальных операторов Пуччи было доказано в работе [334] (см. также [335]).

Популярными объектами исследования в настоящее время являются также $p(x)$-лапласианы – операторы вида (4.5), в которых показатель p есть функция переменных x. Неравенство Гарнака для таких операторов было впервые доказано в [336] (из недавних обобщений см., например, [337] и [338]). В работе [339] было установлено граничное неравенство Гарнака в области класса $\mathcal{C}^{1,1}$.

4.6 Нелокальные операторы

В последние десятилетия существенно возрос интерес к изучению нелокальных (интегро-дифференциальных) операторов, среди которых выделяются **дробные лапласианы**. Простейший (и исторически первый) из них – дробный лапласиан в $\mathbb{R}^n$ порядка s – определяется с помощью преобразования Фурье[88]:

$$(-\Delta)^s u = \mathcal{F}^{-1}\big(|\xi|^{2s}(\mathcal{F}u)(\xi)\big), \qquad s > 0;$$

при $s \in (0,1)$ этот оператор можно определить с помощью гиперсингулярного интеграла

$$\big((-\Delta)^s u\big)(x) = C_{n,s} \cdot \mathrm{P.V.} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{u(x)-u(y)}{|x-y|^{n+2s}}\,dy, \qquad C_{n,s} = \frac{s2^{2s}\Gamma(\frac{n}{2}+s)}{\pi^{\frac{n}{2}}\Gamma(1-s)}.$$

Еще М. Рисс [341] (см. также [342, гл. IV, § 5]) доказал прямой аналог неравенства Гарнака (2.22) для $(-\Delta)^s$ при $s \in (0,1)$:

Пусть $u \geq 0$ в $\mathbb{R}^n$, и $(-\Delta)^s u = 0$ в B_R. Тогда при $x \in B_R$ имеем

$$u(0)\,\frac{(R-|x|)^s R^{n-2s}}{(R+|x|)^{n-s}} \leq u(x) \leq u(0)\,\frac{(R+|x|)^s R^{n-2s}}{(R-|x|)^{n-s}}.$$

[88]Для аккуратного определения этого и аналогичных операторов, а также понятия слабого (суб/супер)решения соответствующих уравнений, потребовалось бы ввести пространства Соболева–Слободецкого ([19, гл. 2–4]; см. также [340]). Мы не будем этого делать, жалея читателя.

В отличие от случая всего пространства, дробные лапласианы в области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, естественно, зависят от граничных условий (различают дробные лапласианы Дирихле, Неймана, и т.д.). Более того, даже для фиксированного типа граничных условий существуют несколько существенно различных определений дробных лапласианов: **суженные (restricted), спектральные** и др. Отметим, что для сравнения суженного и спектрального лапласиана Дирихле в работах [343], [344] использовалась классическая лемма о нормальной производной для слабо вырождающихся операторов (см. [78], [16]).

Доказательство сильного принципа максимума для различных дробных лапласианов порядка $s \in (0,1)$ в Ω можно найти в [345]–[347]; в работе [348] был предложен единый подход для большого семейства дробных лапласианов и более общих нелокальных операторов. В то же время в работах [349], [350] показано, что при $s > 1$ для суженного дробного лапласиана Дирихле в области общего вида не выполнен даже слабый принцип максимума[89].

Граничное неравенство Гарнака для оператора $(-\Delta)^s$, $s \in (0,1)$, в липшицевой области было доказано в [351]. В связи с нелокальностью оператора его формулировка отличается от стандартной (см. § 4.3):

Пусть $0 \in \Omega$. Если u_1 и u_2 – неотрицательные в $\mathbb{R}^n$ функции, непрерывные в шаре B_R, удовлетворяющие уравнению $(-\Delta)^s u = 0$ в $\Omega \cap B_R$ и условию $u_1|_{B_R \setminus \Omega} = u_2|_{B_R \setminus \Omega} = 0$, то в подобласти $\Omega \cap B_{R/2}$ справедливо неравенство (4.3)[90] с константой C, зависящей только от n, s, Ω и R.

В дальнейшем этот результат был распространен на ***произвольные*** области Ω и на широкий класс интегро-дифференциальных операторов (см. [352] и цитируемую там литературу).

В работе [353] был построен барьер, достаточный для доказательства аналога леммы о нормальной производной в следующей форме:

Пусть Ω – область класса $\mathcal{C}^{1,1}$, $s \in (0,1)$. Пусть u – слабое суперрешение уравнения $(-\Delta)^s u = 0$ в Ω, равное нулю в $\mathbb{R}^n \setminus \Omega$. Если $u \not\equiv 0$, то

$$\inf_{x\in\Omega} \frac{u(x)}{\mathrm{d}^s(x)} > 0. \tag{4.8}$$

---

[89] Заметим, что как в $\mathbb{R}^n$, так и в шаре $\Omega = B_R$ сильный принцип максимума выполнен для любого $s > 0$, что также показано в [349].

[90] Если $u_2(0) = 0$, то $u_2 \equiv 0$. Поэтому можно считать, что $u_2(0) > 0$.

Дальнейшие обобщения этого результата можно найти, например, в статьях [354], [355]. Для операторов типа дробных p-лапласианов аналогичное утверждение было доказано в [356].

Для ***спектрального*** дробного лапласиана Дирихле вместо (4.8) при тех же условиях справедливо неравенство $\inf\limits_{x\in\Omega} \dfrac{u(x)}{\mathrm{d}(x)} > 0$ (см. теорему 1.2 [357], где рассмотрены также более общие функции от оператора Лапласа с условиями Дирихле). Аналог леммы о нормальной производной **регионального (regional)** дробного лапласиана при $s \in (\frac{1}{2}, 1)$ получен в недавнем препринте [358].

В статье [359] получено обобщение принципа максимума Александрова–Бакельмана для нелокальных аналогов максимальных и минимальных операторов Пуччи.

Применение метода движущихся плоскостей к задачам с дробными лапласианами можно найти в [360] и цитируемых там работах.

Список литературы

[1] C.F. Gauss. *Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte.* Wiedmannschen Buchhandlung, Leipzig, 1840. [German]. Перевод: Общие теоремы относительно сил притяжения и отталкивания, действующих обратно пропорционально квадрату расстояния. В кн.: К.Ф. Гаусс, Избранные труды по земному магнетизму. Сер. “Классики науки”. М., Изд. АН СССР, 1952, с. 179–234.

[2] C.F. Gauss. Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus. In *Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1838.* Leipzig, 1839. [German]. Перевод: Общие теория земного магнетизма. В кн.: К.Ф. Гаусс, Избранные труды по земному магнетизму. Сер. “Классики науки”. М., Изд. АН СССР, 1952, с. 77–145.

[3] S. Earnshaw. On the nature of the molecular forces which regulate the constitution of the luminiferous ether. *Cambridge Philos. Soc. Trans.*, 7:97–112, 1839.

[4] S. Zaremba. Sur un problème mixte relatif à l’ équation de Laplace. *Bull. Acad. Sci. Cracovie. Cl. Sci. Math. Nat. Ser. A*, pages 313–344, 1910.

[French]. Перевод: Об одной смешанной задаче, относящейся к уравнению Лапласа. *Успехи Мат. Наук*, 1:3–4 (13–14), 125–146, 1946.

[5] A. Harnack. Die Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentiales und der eindeutigen Potentialfunction in der Ebene. Leipzig. Teubner, 1887. [German].

[6] G. Kresin and V. Maz'ya. On sharp Agmon-Miranda maximum principles. Preprint, arxiv.org/abs/2009.01805, 2020.

[7] M.H. Protter and H.F. Weinberger. *Maximum principles in differential equations*. Springer-Verlag, New York, 1984. Corrected reprint of the 1967 original.

[8] R.P. Sperb. *Maximum principles and their applications*, volume 157 of *Mathematics in Science and Engineering*. Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, 1981.

[9] В.А. Кондратьев, Е.М. Ландис. Качественная теория линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, 32:99–215, 1988.

[10] M. Bramanti. Potential theory for stationary Schrödinger operators: a survey of results obtained with non-probabilistic methods. *Matematiche*, 47(1):25–61, 1992.

[11] L.E. Fraenkel. *An introduction to maximum principles and symmetry in elliptic problems*, volume 128 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[12] P. Pucci and J. Serrin. The strong maximum principle revisited. *J. Differ. Equ.*, 196(1):1–66, 2004.

[13] А.И. Назаров. Принцип максимума А.Д. Александрова. *Соврем. мат. прилож.*, 29:127–143, 2005.

[14] M. Kassmann. Harnack inequalities: an introduction. *Bound. Value Probl.*, 2007:081415, 1–21, 2007.

[15] P. Pucci and J. Serrin. *The maximum principle*, volume 73 of *Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications*. Birkhäuser Verlag, Basel, 2007.

[16] Р. Альворадо, Д. Бригхам, В. Мазья, М. Митреа, Е. Зиадэ. О регулярности областей, удовлетворяющих равномерному условию песочных часов, и точная версия принципа граничных точек Хопфа–Олейник. *Проблемы мат. анализа*, 57:3–68, 2011.

[17] D.E. Apushkinskaya and A.I. Nazarov. A counterexample to the Hopf-Oleinik lemma (elliptic case). *Anal. PDE*, 9(2):439–458, 2016.

[18] D.E. Apushkinskaya and A.I. Nazarov. On the boundary point principle for divergence-type equations. *Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl.*, 30(4):677–699, 2019.

[19] Х. Трибель. *Теория интерполяций, функциональные пространства, дифференциальные операторы.* М., Мир, 1980.

[20] А.И. Назаров, Н.Н. Уральцева. Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 147:95–109, 1985.

[21] P. Monk. *Finite element methods for Maxwell's equations.* Numerical Mathematics and Scientific Computation. Oxford University Press, New York, 2003.

[22] Н.Г. Кузнецов. Свойства средних значений гармонических функций и родственные темы. *Проблемы мат. анализа*, 99:3–21, 2019.

[23] I. Netuka and J. Veselý. Mean value property and harmonic functions. In *Classical and modern potential theory and applications (Chateau de Bonas, 1993)*, volume 430 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 359–398. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1994.

[24] A. Paraf. *Sur le problème de Dirichlet et son extension au cas de l'équation linéaire générale du second ordre.* PhD thesis, Académie de Paris, 1892. [French].

[25] T. Moutard. Notes sur les équations aux dérivées partielles. *J. de l'École Polytechnique*, 64:55–69, 1894. [French].

[26] E. Picard. *Traité d'analyse*, volume II. Gauthier-Villars, Paris, 1905. [French].

[27] L. Lichtenstein. Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. Unendliche Folgen positiver Lösungen. *Rend. Circ. Mat. Palermo*, 33:201–211, 1912. [German].

[28] E. Hopf. Elementare Bemerkungen über die Lösungen partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl.*, 19:147–152, 1927. [German].

[29] M. Picone. Maggiorazione degli integrali delle equazioni lineari ellitticoparaboliche alle derivate parziali del second'ordine. *Atti Accad. Naz. Lincei, Rend., VI. Ser.*, 5:138–143, 1927. [Italian].

[30] E. Hopf. *Selected works of Eberhard Hopf with commentaries.* American Mathematical Society, Providence, RI, 2002. Edited by C.S. Morawetz, J.B. Serrin and Ya.G. Sinai.

[31] А.Д. Александров. Некоторые теоремы о дифференциальных уравнениях в частных производных второго порядка. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. физ. хим.*, 9(8):3–17, 1954.

[32] C. Neumann. Ueber die Methode des arithmetischen Mittels. Zweite Abhandlung. Leipz. Abh. XIV. 565–726, 1888. [German].

[33] A. Korn. *Lehrbuch der Potentialtheorie. II. Allgemeine Theorie des logarithmischen Potentials und der Potentialfunctionen in der Ebene.* Berlin: F. Dümmler, 1901. [German].

[34] L. Lichtenstein. Über eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktion. *Math. Ann.*, 67:559–575, 1909. [German].

[35] O.D. Kellogg. Harmonic functions and Green's integral. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 13:109–132, 1912.

[36] L. Lichtenstein. Über einige Eigenschaften der Gleichgewichtsfiguren rotierender homogener flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetz anziehen. *Berl. Ber.*, 1918:1120–1135, 1918. [German].

[37] L. Lichtenstein. Über eine Eigenschaft der klassischen Greenschen Funktion. *Math. Zeitschr.*, 11:319–320, 1921. [German].

[38] L. Lichtenstein. Neue Beiträge zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung vom elliptischen Typus. *Math. Zeitschr.*, 20:194–212, 1924. [German].

[39] M. Brelot. Étude de l'équation de la chaleur $\Delta u = c(m)u(m)$, $c(m) \geq 0$, au voisinage d'un point singulier du coefficient. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (3)*, 48:153–246, 1931. [French].

[40] G. Giraud. Generalisation des problèmes sur les operations du type elliptique. *Bull. des Sciences Math.*, 56:316–352, 1932. [French].

[41] G. Giraud. Problèmes de valeurs à la frontière relatifs à certaines données discontinues. *Bull. Soc. Math. France*, 61:1–54, 1933. [French].

[42] М. Келдыш, М. Лаврентьев. Об единственности задачи Неймана. *Доклады АН СССР*, XVI(3):151–152, 1937.

[43] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. О принципе максимума для эллиптико-параболического уравнения 2-го порядка. *Сиб. матем. журн.*, 13(4):773–789, 1972.

[44] E. Hopf. A remark on linear elliptic differential equations of second order. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 3:791–793, 1952.

[45] О.А. Олейник. О свойствах решений некоторых краевых задач для уравнений эллиптического типа. *Матем. сб.*, 30 (72):695–702, 1952.

[46] B. Gidas, W.M. Ni, and L Nirenberg. Symmetry and related properties via the maximum principle. *Commun. Math. Phys.*, 68(3):209–243, 1979.

[47] J. Serrin. A symmetry problem in potential theory. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 43:304–318, 1971.

[48] Е.М. Ландис. s-емкость и ее приложения к исследованию решений эллиптического уравнения 2-го порядка с разрывными коэффициентами. *Матем. сб.*, 76(118)(2):186–213, 1968.

[49] Е.М. Ландис. s-емкость и поведение решения эллиптического уравнения 2-го порядка с разрывными коэффициентами в окрестности граничной точки. *Доклады АН СССР*, 180(1):25–28, 1968.

[50] Е.М. Ландис. *Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов.* М., Наука, 1971.

[51] C. Pucci. Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. I. *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)*, 23(6):370–375, 1957. [Italian].

[52] C. Pucci. Proprietà di massimo e minimo delle soluzioni di equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo ellittico e parabolico. II. *Atti Accad. Naz. Lincei. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8)*, 24(1):3–6, 1958. [Italian].

[53] А.Д. Александров. Исследования о принципе максимума. I. *Известия ВУЗов. Математика*, 5(6):126–157, 1958.

[54] А.Д. Александров. Исследования о принципе максимума. II. *Известия ВУЗов. Математика*, 3(10):3–12, 1959.

[55] А.Д. Александров. Исследования о принципе максимума. III. *Известия ВУЗов. Математика*, 5(12):16–32, 1959.

[56] А.Д. Александров. Исследования о принципе максимума. IV. *Известия ВУЗов. Математика*, 3(16):3–15, 1960.

[57] А.Д. Александров. Исследования о принципе максимума. V. *Известия ВУЗов. Математика*, 5(18):16–26, 1960.

[58] О.А. Олейник, Е.В. Радкевич. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. In *Итоги науки*, Математика. Мат. анал. 1969, pages 7–252. ВИНИТИ, 1971.

[59] Е.В. Радкевич. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. i. *Соврем. мат. прилож.*, 55, 2008.

[60] Е.В. Радкевич. Уравнения с неотрицательной характеристической формой. ii. *Соврем. мат. прилож.*, 56, 2008.

[61] F. Punzo and A. Tesei. Uniqueness of solutions to degenerate elliptic problems with unbounded coefficients. *Ann. Inst. Henri Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 26(5):2001–2024, 2009.

[62] P.M.N. Feehan. Perturbations of local maxima and comparison principles for boundary-degenerate linear differential equations. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 373(8):5275–5332, 2020.

[63] R. Výborný. On a certain extension of the maximum principle. In *Differential Equations and Their Applications (Proc. Conf., Prague, 1962)*, pages 223–228. Publ. House Czechoslovak Acad. Sci., Prague; Academic Press, New York, 1963.

[64] R. Výborný. Über das erweiterte Maximumprinzip. *Czech. Math. J.*, 14:116–120, 1964. [German].

[65] G.M. Lieberman. Regularized distance and its applications. *Pacific J. Math.*, 117(2):329–352, 1985.

[66] K.-O. Widman. Inequalities for the Green function and boundary continuity of the gradient of solutions of elliptic differential equations. *Math. Scand.*, 21:17–37, 1967.

[67] Д.М. Эйдус. Оценки производных функции Грина. *Доклады АН СССР*, 106:207–209, 1956.

[68] Е.Д. Соломенцев. О граничных значениях субгармонических функций. *Czech. Math. J.*, 8(83):520–536, 1958.

[69] Г.М. Вержбинский, В.Г. Мазья. Об асимптотике решений задачи Дирихле вблизи нерегулярной границы. *Доклады АН СССР*, 176(3):498–501, 1967.

[70] J.K. Oddson. On the boundary point principle for elliptic equations in the plane. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 74:666–670, 1968.

[71] J.K. Oddson. Some solutions of elliptic extremal equations in the plane. *Matematiche*, 23:273–289, 1968.

[72] K. Miller. Barriers on cones for uniformly elliptic operators. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 76:93–105, 1967.

[73] Б.Н. Химченко. О поведении супергармонической функции вблизи границы области типа $A^{(1)}$. *Дифференц. уравнения*, 5(10):1845–1853, 1969.

[74] Б.Н. Химченко. Об одной теореме М.В. Келдыша и М.А. Лаврентьева. *Доклады АН СССР*, 192(1):46–47, 1970.

[75] Б.Н. Химченко. Об ограниченности в замкнутой области градиента гармонической функции. *Успехи Мат. Наук*, 25(2(152)):279–280, 1970.

[76] Б.Н. Химченко. О поведении решений эллиптических уравнений вблизи границы области типа $A^{(1)}$. *Доклады АН СССР*, 193(2):304–305, 1970.

[77] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. О принципе максимума для параболических уравнений второго порядка. *Доклады АН СССР*, 200:282–285, 1971.

[78] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. Теоремы типа Жиро для уравнений 2-го порядка со слабо вырождающейся неотрицательной характеристической частью. *Сиб. матем. журн.*, 18(1):103–121, 1977.

[79] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. О локальных оценках вблизи границы решений уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. *Матем. сб.*, 106(148)(8):162–182, 1978.

[80] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. О теоремах типа Жиро для эллиптического оператора 2-го порядка, слабо вырождающегося вблизи границы. *Доклады АН СССР*, 224(4):752–755, 1975.

[81] S. Cho, B.R. Choe, and H. Koo. Weak Hopf lemma for the invariant Laplacian and related elliptic operators. *J. Math. Anal. Appl.*, 408(2):576–588, 2013.

[82] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. К исследованиям о принципе максимума. *Доклады АН СССР*, 240(4):774–777, 1978.

[83] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. О строгом принципе экстремума для слабо эллиптически связного оператора 2-го порядка. *Ж. вычисл. матем. и матем. физ.*, 19(1):129–142, 1979.

[84] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. О строгом принципе экстремума, изотропном в плоской области. *Сиб. матем. журн.*, 20(2):278–292, 1979.

[85] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. О строгом принципе экстремума для Д-(Φ, Ω)-эллиптически связного оператора второго порядка. *Дифференц. уравнения*, 15(7):1307–1317, 1979.

[86] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. К исследованиям об изотропном строгом принципе экстремума. *Доклады АН СССР*, 244(6):1312–1316, 1979.

[87] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. Об одном аспекте развития теории изотропного строгого принципа экстремума А.Д. Александрова. *Дифференц. уравнения*, 16(2):280–292, 1980.

[88] Л.И. Камынин, Б.Н. Химченко. О строгом принципе экстремума для Д-(Φ, Ω)-эллиптически связного оператора второго порядка. *Матем. сб.*, 112(154)(1(5)):24–55, 1980.

[89] Н.С. Надирашвили. К вопросу о единственности решения второй краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка. *Матем. сб.*, 122(164))(3(11)):341–359, 1983.

[90] Н.С. Надирашвили. Лемма о внутренней производной и единственность решения 2-й краевой задачи для эллиптических уравнений второго порядка. *Доклады АН СССР*, 261(4):804–808, 1981.

[91] Л.И. Камынин. Теорема о внутренней производной для слабо вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка. *Матем. сб.*, 126(168)(3):307–326, 1985.

[92] J. Nečas. Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles du type elliptique, voisine de la variationnelle. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., Ser. 3*, 16:305–326, 1962. [French].

[93] G.M. Lieberman. The Dirichlet problem for quasilinear elliptic equations with continuously differentiable boundary data. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 11:167–229, 1986.

[94] А.Д. Александров. Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле. *Доклады АН СССР*, 134:1001–1004, 1960.

[95] И.Я. Бакельман. К теории квазилинейных эллиптических уравнений. *Сиб. матем. журн.*, 2:179–186, 1961. [Russian].

[96] I.J. Bakelman. *Convex analysis and nonlinear geometric elliptic equations.* Berlin: Springer-Verlag, 1994.

[97] И.Я. Бакельман. Задача Дирихле для уравнений типа Монжа–Ампера и их n-мерных аналогов. *Доклады АН СССР*, 126:923–926, 1959.

[98] И.Я. Бакельман. Первая краевая задача для нелинейных эллиптических уравнений. Диссертация на соискание ученой степени доктора физико-математических наук, 1959. ЛГПИ им. А.И. Герцена, Ленинград.

[99] А.Д. Александров. Задача Дирихле для уравнения $\mathrm{Det}\|z_{ij}\| = \varphi(z_1, \dots, z_n, z, x_1, \dots, x_n)$. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 13(1(1)):5–24, 1958.

[100] И.Я. Бакельман. К теории уравнений Монжа–Ампера. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 13(1(1)):25–38, 1958.

[101] А.Д. Александров. Условия единственности и оценки решения задачи Дирихле. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 18(13(3)):5–29, 1963.

[102] C. Pucci. Su una limitazione per soluzioni di equazioni ellittiche. *Boll. Unione Mat. Ital., III. Ser.*, 21:228–233, 1966. [Italian].

[103] C. Pucci. Limitazioni per soluzioni di equazioni ellittiche. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 74:15–30, 1966. [Italian].

[104] A.D. Alexandrov. The method of normal map in uniqueness problems and estimations for elliptic equations. In *Seminari 1962/63 Anal. Alg. Geom. e Topol., Vol. 2, Ist. Naz. Alta Mat.*, pages 744–786. Edizioni Cremonese, Rome, 1965.

[105] Р. Рокафеллер. *Выпуклый анализ.* М., Мир, 1973.

[106] Д. Гилбарг, Н. Трудингер. *Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными.* М., Наука, 1989.

[107] J.-M. Bony. Principe du maximum dans les espaces de Sobolev. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B*, 265:333–336, 1967. [French].

[108] P.-L. Lions. A remark on Bony maximum principle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88(3):503–508, 1983.

[109] А.Д. Александров. Мажорирование решений линейных уравнений второго порядка. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 21(1(1)):5–25, 1966.

[110] А.Д. Александров. Один общий метод мажорирования решений задачи Дирихле. *Сиб. матем. журн.*, 7:486–498, 1966.

[111] А.Д. Александров. О мажорантах решений и условиях единственности для эллиптических уравнений. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 21(7(2)):5–20, 1966.

[112] А.Д. Александров. Невозможность общих оценок решений и условий единственности для линейных уравнений с нормами, более слабыми, чем L_n. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 21(13(3)):5–10, 1966.

[113] А.Д. Александров. Некоторые оценки решений задачи Дирихле. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 22(7(2)):19–29, 1967.

[114] А.Д. Александров. Принцип максимума. *Доклады АН СССР*, 173:247–250, 1967.

[115] А.Д. Александров. Некоторые оценки для производной решения задачи Дирихле на границе. *Доклады АН СССР*, 173:487–490, 1967.

[116] Н.В. Крылов. Некоторые оценки плотности распределения стохастического интеграла. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 38(1):228–248, 1974.

[117] Н.В. Крылов. Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения. *Сиб. матем. журн.*, 17(2):290–303, 1976.

[118] Н.В. Крылов. Принцип максимума для параболических уравнений. *Успехи Мат. Наук*, 31(4(190)):267–268, 1976.

[119] Н.С. Надирашвили. Некоторые оценки в задаче с наклонной производной. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 52(5):1982–1090, 1988.

[120] А.И. Назаров. Гёльдеровские оценки для ограниченных решений задач с наклонной производной для параболических уравнений недивергентной структуры. *Проблемы мат. анализа*, 11:37–46, 1990.

[121] M. Chicco. A maximum principle for mixed boundary value problems for elliptic equations in non-divergence form. *Boll. Unione Mat. Ital. B (7)*, 11(3):531–538, 1997.

[122] G.M. Lieberman. The maximum principle for equations with composite coefficients. *Electron. J. Differ. Equations*, pages 1–17, 2000.

[123] Y. Luo. An Aleksandrov-Bakelman type maximum principle and applications. *J. Differ. Equ.*, 101(2):213–231, 1993.

[124] Y. Luo and N.S. Trudinger. Linear second order elliptic equations with Venttsel' boundary conditions. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 118(3-4):193–207, 1991.

[125] D.E. Apushkinskaya and A.I. Nazarov. Hölder estimates of solutions to initial-boundary value problems for parabolic equations of nondivergent form with Wentzel boundary condition. In *Nonlinear evolution equations*, volume 164 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 1–13. AMS, Providence, RI, 1995.

[126] Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров. Гёльдеровские оценки решений вырожденных граничных задач Вентцеля для параболических и эллиптических уравнений недивергентного вида. *Проблемы мат. анализа*, 17:3–19, 1997.

[127] D.E. Apushkinskaya and A.I. Nazarov. Linear two-phase Venttsel problems. *Arkiv Mat.*, 39(2):201–222, 2001.

[128] Д.Е. Апушкинская, А.И. Назаров. Оценки на границе области градиента решения недивергентного параболического уравнения с "составной" правой частью и коэффициентами при младших производных. *Проблемы мат. анализа*, 14:3–27, 1995.

[129] А.И. Назаров. Приграничные оценки решений задачи Вентцеля для параболических и эллиптических уравнений в области с границей класса W^2_{q-1}. *Проблемы мат. анализа*, 24:181–204, 2002.

[130] А.И. Назаров. Оценки максимума решений эллиптических и параболических уравнений через весовые нормы правой части. *Алгебра и анализ*, 13(2):151–164, 2002.

[131] L. Caffarelli. Elliptic second order equations. *Rend. Sem. Mat. Fis. Milano*, 58:253–284, 1988.

[132] L.A. Caffarelli. Interior a priori estimates for solutions of fully nonlinear equations. *Ann. of Math. (2)*, 130(1):189–213, 1989.

[133] L.A. Caffarelli and X. Cabré. *Fully nonlinear elliptic equations*, volume 43 of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. AMS, Providence, RI, 1995.

[134] G. Dávila, P. Felmer, and A. Quaas. Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate for singular or degenerate fully nonlinear elliptic equations. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 347(19-20):1165–1168, 2009.

[135] C. Imbert. Alexandroff-Bakelman-Pucci estimate and Harnack inequality for degenerate/singular fully non-linear elliptic equations. *J. Differ. Equ.*, 250(3):1553–1574, 2011.

[136] R. Argiolas, F. Charro, and I. Peral. On the Aleksandrov-Bakel'man-Pucci estimate for some elliptic and parabolic nonlinear operators. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 202(3):875–917, 2011.

[137] F. Charro, G. De Philippis, A. Di Castro, and D. Máximo. On the Aleksandrov-Bakelman-Pucci estimate for the infinity Laplacian. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 48(3-4):667–693, 2013.

[138] E.B. Fabes and D.W. Stroock. The L^p-integrability of Green's functions and fundamental solutions for elliptic and parabolic equations. *Duke Math. J.*, 51(4):997–1016, 1984.

[139] M. Franciosi. Maximum principle for second order elliptic equations and applications. *J. Math. Anal. Appl.*, 138(2):343–348, 1989.

[140] C.E. Kenig and N.S. Nadirashvili. On optimal estimates for some oblique derivative problems. *J. Funct. Anal.*, 187(1):70–93, 2001.

[141] G.M. Lieberman. Maximum estimates for oblique derivative problems with right hand side in L^p, $p < n$. *Manuscripta Math.*, 112(4):459–472, 2003.

[142] C. Pucci. Operatori ellittici estremanti. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 72:141–170, 1966. [Italian].

[143] К. Пуччи. Максимизирующие эллиптические операторы, приложения и гипотезы. In *Дифф. ур. с част. произв. Труды междунар. конф. (октябрь 1983)*, pages 167–172. Новосибирск, Наука, 1986.

[144] K. Astala, T. Iwaniec, and G. Martin. Pucci's conjecture and the Alexandrov inequality for elliptic PDEs in the plane. *J. Reine Angew. Math.*, 591:49–74, 2006.

[145] S. Koike. On the ABP maximum principle and applications. *Suurikaisekikenkyusho Kokyuroku*, 1845:107–120, 2013.

[146] H.-J. Kuo and N.S. Trudinger. New maximum principles for linear elliptic equations. *Indiana Univ. Math. J.*, 56(5):2439–2452, 2007.

[147] N.S. Trudinger. Remarks on the Pucci conjecture. *Indiana Univ. Math. J.*, 69(1):109–118, 2020.

[148] X. Cabré. On the Alexandroff–Bakel'man–Pucci estimate and the reversed Hölder inequality for solutions of elliptic and parabolic equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 48(5):539–570, 1995.

[149] H.-J. Kuo and N.S. Trudinger. A note on the discrete Aleksandrov-Bakelman maximum principle. In *Proceedings of 1999 International Conference on Nonlinear Analysis (Taipei)*, volume 4, pages 55–64, 2000.

[150] А.Д. Александров. Исследования о принципе максимума. VI. *Известия ВУЗов. Математика*, 1(20):3–20, 1961.

[151] A.I. Nazarov and N.N. Uraltseva. Qualitative properties of solutions to elliptic and parabolic equations with unbounded lower-order coefficients. Preprint 2009-05, St. Petersburg Math. Soc. El. Prepr. Archive, 2009.

[152] M.V. Safonov. Non-divergence elliptic equations of second order with unbounded drift. In *Nonlinear partial differential equations and related topics*, volume 229 of *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*, pages 211–232. AMS, Providence, RI, 2010.

[153] A.I. Nazarov. A centennial of the Zaremba-Hopf-Oleinik lemma. *SIAM J. Math. Anal.*, 44(1):437–453, 2012.

[154] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. Оценки на границе области первых производных функций, удовлетворяющих эллиптическому или параболическому неравенству. In *Краевые задачи математической физики. 13*, volume 179 of *Тр. МИАН СССР*, pages 102–125. М. Наука, 1988.

[155] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. О разрешимости первой краевой задачи для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений при наличии особенностей. *Доклады АН СССР*, 281(2):275–279, 1985.

[156] M.V. Safonov. Boundary estimates for positive solutions to second order elliptic equations. Preprint, arxiv.org/abs/0810.0522, 2008.

[157] M.V. Safonov. On the boundary estimates for second-order elliptic equations. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 63(7-8):1123–1141, 2018.

[158] Y. Huang, D. Li, and L. Wang. A note on boundary differentiability of solutions of elliptic equations in nondivergence form. *Manuscripta Math.*, 162(3-4):305–313, 2020.

[159] J. Serrin. On the Harnack inequality for linear elliptic equations. *J. Analyse Math.*, 4:292–308, 1955/56.

[160] L. Bers and L. Nirenberg. On linear and non-linear elliptic boundary value problems in the plane. In *Convegno Internazionale sulle Equazioni Lineari alle Derivate Parziali, Trieste, 1954*, pages 141–167. Edizioni Cremonese, Roma, 1955.

[161] Е.М. Ландис. Неравенство Харнака для эллиптических уравнений второго порядка кордесовского типа. *Доклады АН СССР*, 179(6):1272–1275, 1968.

[162] H.O. Cordes. Über die erste Randwertaufgabe bei quasilinearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung in mehr als zwei Variablen. *Math. Ann.*, 131:278–312, 1956. [German]. Перевод: О первой краевой задаче для квазилинейных дифференциальных уравнений второго порядка более чем с двумя переменными. *Математика*, 3(2):75–108, 1959.

[163] Н.В. Крылов, М.В. Сафонов. Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 44(1):161–175, 1980.

[164] М.В. Сафонов. Неравенство Харнака для эллиптических уравнений и гельдеровость их решений. *Зап. научн. сем. ЛОМИ*, 96:272–287, 1980.

[165] Н.В. Крылов, М.В. Сафонов. Оценка вероятности попадания диффузионного процесса в множество положительной меры. *Доклады АН СССР*, 245(1):18–20, 1979.

[166] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева. Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности. *Успехи Мат. Наук*, 41(5(251)):59–83, 1986.

[167] E. Ferretti and M.V. Safonov. Growth theorems and Harnack inequality for second order parabolic equations. In *Harmonic analysis and boundary value problems (Fayetteville, AR, 2000)*, volume 277 of *Contemp. Math.*, pages 87–112. AMS, Providence, RI, 2001.

[168] M.V. Safonov. Narrow domains and the Harnack inequality for elliptic equations. *Алгебра и анализ*, 27(3):220–237, 2015.

[169] G. Chen and M. Safonov. On second order elliptic and parabolic equations of mixed type. *J. Funct. Anal.*, 272(8):3216–3237, 2017.

[170] H. Aimar, L. Forzani, and R. Toledano. Hölder regularity of solutions of PDE's: a geometrical view. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 26(7-8):1145–1173, 2001.

[171] M.V. Safonov. Growth theorems for metric spaces with applications to PDE. *Алгебра и анализ*, 32(4):271–284, 2020.

[172] D. Kim and S. Ryu. The weak maximum principle for second-order elliptic and parabolic conormal derivative problems. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 19(1):493–510, 2020.

[173] W. Littman. A strong maximum principle for weakly L-subharmonic functions. *J. Math. Mech.*, 8:761–770, 1959.

[174] W. Littman. Generalized subharmonic functions: monotonic approximations and an improved maximum principle. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., Ser. 3*, 17:207–222, 1963.

[175] L. Escauriaza. Weak type-$(1,1)$ inequalities and regularity properties of adjoint and normalized adjoint solutions to linear nondivergence form operators with VMO coefficients. *Duke Math. J.*, 74(1):177–201, 1994.

[176] L. Escauriaza. Bounds for the fundamental solution of elliptic and parabolic equations in nondivergence form. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 25(5-6):821–845, 2000.

[177] V. Maz'ya and R. McOwen. Asymptotics for solutions of elliptic equations in double divergence form. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 32(1-3):191–207, 2007.

[178] H. Dong, L. Escauriaza, and S. Kim. On $\mathcal{C}^1$, $\mathcal{C}^2$, and weak type-$(1,1)$ estimates for linear elliptic operators: part II. *Math. Ann.*, 370:447–489, 2018.

[179] J. Moser. On Harnack's theorem for elliptic differential equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 14:577–591, 1961.

[180] E. DiBenedetto and N.S. Trudinger. Harnack inequalities for quasiminima of variational integrals. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(4):295–308, 1984.

[181] E. DiBenedetto. Harnack estimates in certain function classes. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 37(1):173–182, 1989.

[182] D. Li and K. Zhang. A note on the Harnack inequality for elliptic equations in divergence form. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 145(1):135–137, 2017.

[183] E. De Giorgi. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari. *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3)*, 3:25–43, 1957. [Italian].

[184] G. Stampacchia. Le problème de Dirichlet pour les équations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier*, 15(1):189–257, 1965. [French].

[185] J. Serrin. Local behavior of solutions of quasi-linear equations. *Acta Math.*, 111:247–302, 1964.

[186] M. Chicco. Principio di massimo forte per sottosoluzioni di equazioni ellittiche di tipo variazionale. *Boll. Unione Mat. Ital., III. Ser.*, 22:368–372, 1967. [Italian].

[187] R.-M. Hervé and M. Hervé. Les fonctions surharmoniques associees à un opérateur elliptique du second ordre à coefficients discontinus. *Ann. Inst. Fourier*, 19(1):305–359, 1969. [French].

[188] J. Moser. A new proof of de Giorgi's theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 13:457–468, 1960.

[189] О.А. Ладыженская, В.А. Солонников, Н.Н. Уральцева. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа.* М., Наука, 1967.

[190] J. Peetre. Espaces d'interpolation et théorème de Soboleff. *Ann. Inst. Fourier*, 16(1):279–317, 1966. [French].

[191] А.И. Назаров, Н.Н. Уральцева. Неравенство Гарнака и связанные с ним свойства решений эллиптических и параболических уравнений с бездивергентными младшими коэффициентами. *Алгебра и анализ*, 23(1):136–168, 2011.

[192] N. Filonov. On the regularity of solutions to the equation $-\Delta u + b \cdot \nabla u = 0$. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 410:168–186, 2013.

[193] D.E. Apushkinskaya, A.I. Nazarov, D.K. Palagachev, and L.G. Softova. Venttsel boundary value problems with discontinuous data. *SIAM J. Math. Anal.*, 53(1):221–252, 2021.

[194] О.В. Бесов, В.П. Ильин, С.М. Никольский. *Интегральные представления функций и теоремы вложения.* М., Наука, 1996. 2-е изд., перераб. и доп.

[195] N.S. Trudinger. On the regularity of generalized solutions of linear, non-uniformly elliptic equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 42:50–62, 1971.

[196] N.S. Trudinger. Linear elliptic operators with measurable coefficients. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., Ser. 3*, 27:265–308, 1973.

[197] P. Bella and M. Schäffner. Local boundedness and Harnack inequality for solutions of linear nonuniformly elliptic equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 74(3):453–477, 2021.

[198] B. Franchi, R. Serapioni, and F. Serra Cassano. Irregular solutions of linear degenerate elliptic equations. *Potential Anal.*, 9(3):201–216, 1998.

[199] E.B. Fabes, C.E. Kenig, and R.P. Serapioni. The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 7:77–116, 1982.

[200] D.E. Edmunds and L.A. Peletier. A Harnack inequality for weak solutions of degenerate quasilinear elliptic equation. *J. London Math. Soc., II. Ser.*, 5:21–31, 1972.

[201] V. De Cicco and M.A. Vivaldi. Harnack inequalities for Fuchsian type weighted elliptic equations. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 21(9-10):1321–1347, 1996.

[202] S. Chanillo and R.L. Wheeden. Harnack's inequality and mean-value inequalities for solutions of degenerate elliptic equations. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 11:1111–1134, 1986.

[203] F. Chiarenza, A. Rustichini, and R. Serapioni. De Giorgi-Moser theorem for a class of degenerate non uniformly elliptic equations. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 14(5):635–662, 1989.

[204] M. Schechter. On the invariance of the essential spectrum of an arbitrary operator. III. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 64:975–984, 1968.

[205] M. Schechter. *Spectra of partial differential operators*, volume 14 of *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam-London; American Elsevier Publishing Co., Inc., New York, 1971.

[206] M. Schechter. *Spectra of partial differential operators*, volume 14 of *North-Holland Series in Applied Mathematics and Mechanics.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2nd edition, 1986.

[207] F. Stummel. Singuläre elliptische Differentialoperatoren in Hilbertschen Räumen. *Math. Ann.*, 132:150–176, 1956. [German].

[208] T. Kato. Schrödinger operators with singular potentials. *Israel J. Math.*, 13:135–148, 1972.

[209] В.И. Арнольд. О преподавании математики. *Успехи Мат. Наук*, 53(1(319)):229–234, 1998.

[210] Eridani and H. Gunawan. Stummel class of Morrey spaces. *Southeast Asian Bull. Math.*, 29(6):1051–1056, 2005.

[211] Q. Zheng and X. Yao. Higher-order Kato class potentials for Schrödinger operators. *Bull. London Math. Soc.*, 41(2):293–301, 2009.

[212] M. Aizenman and B. Simon. Brownian motion and Harnack inequality for Schrödinger operators. *Commun. Pure Appl. Math.*, 35:209–273, 1982.

[213] F. Chiarenza, E. Fabes, and N. Garofalo. Harnack's inequality for Schrödinger operators and the continuity of solutions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 98:415–425, 1986.

[214] M. Cranston, E. Fabes, and Z. Zhao. Conditional gauge and potential theory for the Schrödinger operator. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 307(1):171–194, 1988.

[215] C.G. Simader. An elementary proof of Harnack's inequality for Schrödinger operators and related topics. *Math. Zeitschr.*, 203(1):129–152, 1990.

[216] K. Kurata. Continuity and Harnack's inequality for solutions of elliptic partial differential equations of second order. *Indiana Univ. Math. J.*, 43(2):411–440, 1994.

[217] M. Cranston and Z. Zhao. Conditional transformation of drift formula and potential theory for $\frac{1}{2}\Delta + b(\cdot)\cdot\nabla$. *Commun. Math. Phys.*, 112:613–625, 1987.

[218] P. Zamboni. Hölder continuity for solutions of linear degenerate elliptic equations under minimal assumptions. *J. Differ. Equ.*, 182(1):121–140, 2002.

[219] Q. Zhang. A Harnack inequality for the equation $\nabla(a\nabla u) + b\nabla u = 0$, when $|b| \in K_{n+1}$. *Manuscripta Math.*, 89(1):61–77, 1996.

[220] M. Grüter and K.-O. Widman. The Green function for uniformly elliptic equations. *Manuscripta Math.*, 37:303–342, 1982.

[221] V. Kozlov and A. Nazarov. A comparison theorem for nonsmooth nonlinear operators. *Potential Anal.*, 54(3):471–481, 2021.

[222] Q.S. Zhang. A strong regularity result for parabolic equations. *Commun. Math. Phys.*, 244(2):245–260, 2004.

[223] C.-C. Chen, R.M. Strain, T.-P. Tsai, and H.-T. Yau. Lower bounds on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2008(9):Art. ID rnn016, 1–31, 2008.

[224] C.-C. Chen, R.M. Strain, T.-P. Tsai, and H.-T. Yau. Lower bounds on the blow-up rate of the axisymmetric Navier-Stokes equations. II. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 34(1-3):203–232, 2009.

[225] G. Koch, N. Nadirashvili, G.A. Seregin, and V. Šverák. Liouville theorems for the Navier-Stokes equations and applications. *Acta Math.*, 203(1):83–105, 2009.

[226] G. Seregin, L. Silvestre, V. Šverák, and A. Zlatoš. On divergence-free drifts. *J. Differ. Equ.*, 252(1):505–540, 2012.

[227] N. Filonov and T. Shilkin. On some properties of weak solutions to elliptic equations with divergence-free drifts. In *Mathematical analysis in fluid mechanics – selected recent results*, volume 710 of *Contemp. Math.*, pages 105–120. AMS, Providence, RI, 2018.

[228] Н.Д. Филонов, П.А. Ходунов. О локальной ограниченности решений уравнения $-\Delta u + a\partial_z u = 0$. *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 508:173–184, 2021.

[229] П.А. Ходунов. *О локальных свойствах решений задач гидродинамики.* Выпускная квалификационная работа магистра, СПбГУ, 2021.

[230] R. Finn and D. Gilbarg. Asymptotic behavior and uniquenes of plane subsonic flows. *Commun. Pure Appl. Math.*, 10:23–63, 1957.

[231] J.C. Sabina de Lis. Hopf maximum principle revisited. *Electron. J. Differ. Equations*, 2015(115):1–9, 2015.

[232] V. Kozlov and N. Kuznetsov. A comparison theorem for super- and subsolutions of $\nabla^2 u + f(u) = 0$ and its application to water waves with vorticity. *Алгебра и анализ*, 30(3):112–128, 2018.

[233] D. Gilbarg. Some hydrodynamic applications of function theoretic properties of elliptic equations. *Math. Zeitschr.*, 72:165–174, 1959.

[234] V. Kozlov and V. Maz'ya. Asymptotic formula for solutions to the Dirichlet problem for elliptic equations with discontinuous coefficients near the boundary. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5)*, 2(3):551–600, 2003.

[235] W. Littman, G. Stampacchia, and H.F. Weinberger. Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients. *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa, Sci. Fis. Mat., Ser. 3*, 17:43–77, 1963. Перевод: Регулярные точки для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами, *Математика*, 9(2):72–97, 1965.

[236] Yu. Alkhutov and M. Surnachev. Global Green's function estimates for the convection-diffusion equation. *Complex Var. Elliptic Equ.*, 67(5):1046–1075, 2022.

[237] А.Д. Александров. Теоремы единственности для поверхностей "в целом". V. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 13(19(4)):5–8, 1958.

[238] А.Д. Александров. Теоремы единственности для поверхностей "в целом". I. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 11(19(4)):5–17, 1956.

[239] А.Д. Александров. Теоремы единственности для поверхностей "в целом". III. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 13(7(2)):14–26, 1958.

[240] Y.Y. Li. Group invariant convex hypersurfaces with prescribed Gauss-Kronecker curvature. In *Multidimensional complex analysis and partial differential equations (São Carlos, 1995)*, volume 205 of *Contemp. Math.*, pages 203–218. AMS, Providence, RI, 1997.

[241] Y.Y. Li and L. Nirenberg. A geometric problem and the Hopf lemma. I. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 8(2):317–339, 2006.

[242] Y.Y. Li and L. Nirenberg. A geometric problem and the Hopf lemma. II. *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 27(2):193–218, 2006.

[243] P.-L. Lions. Two geometrical properties of solutions of semilinear problems. *Applicable Anal.*, 12(4):267–272, 1981.

[244] M. Grossi, S. Kesavan, F. Pacella, and M. Ramaswamy. Symmetry of positive solutions of some nonlinear equations. *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 12(1):47–59, 1998.

[245] B. Gidas, W.M. Ni, and L. Nirenberg. Symmetry of positive solutions of nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$. In *Mathematical analysis and applications, Part A*, volume 7 of *Adv. in Math. Suppl. Stud.*, pages 369–402. Academic Press, New York-London, 1981.

[246] H. Berestycki and L. Nirenberg. On the method of moving planes and the sliding method. *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, 22(1):1–37, 1991.

[247] L. Damascelli, F. Pacella, and M. Ramaswamy. A strong maximum principle for a class of non-positone singular elliptic problems. *NoDEA Nonlin. Differ. Equ. Appl.*, 10(2):187–196, 2003.

[248] L. Damascelli and B. Sciunzi. Regularity, monotonicity and symmetry of positive solutions of m-Laplace equations. *J. Differ. Equ.*, 206(2):483–515, 2004.

[249] F. Esposito and B. Sciunzi. On the Hopf boundary lemma for quasilinear problems involving singular nonlinearities and applications. *J. Funct. Anal.*, 278(4):108346, 25, 2020.

[250] F. Oliva, B. Sciunzi, and G. Vaira. Radial symmetry for a quasilinear elliptic equation with a critical Sobolev growth and Hardy potential. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 140:89–109, 2020.

[251] Y. Li and M. Zhu. Uniqueness theorems through the method of moving spheres. *Duke Math. J.*, 80(2):383–417, 1995.

[252] P. Padilla. Symmetry properties of positive solutions of elliptic equations on symmetric domains. *Appl. Anal.*, 64(1-2):153–169, 1997.

[253] P.J. McKenna and W. Reichel. Gidas-Ni-Nirenberg results for finite difference equations: estimates of approximate symmetry. *J. Math. Anal. Appl.*, 334(1):206–222, 2007.

[254] A. Aeppli. On the uniqueness of compact solutions for certain elliptic differential equations. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 11:826–832, 1960.

[255] J. Serrin. On surfaces of constant mean curvature which span a given space curve. *Math. Z.*, 112:77–88, 1969.

[256] L.E. Payne and I. Stakgold. On the mean value of the fundamental mode in the fixed membrane problem. *Applicable Anal.*, 3:295–306, 1973.

[257] A.E. Treibergs and S.W. Wei. Embedded hyperspheres with prescribed mean curvature. *J. Differential Geom.*, 18(3):513–521, 1983.

[258] V.I. Oliker. Hypersurfaces in $\mathbb{R}^{n+1}$ with prescribed Gaussian curvature and related equations of Monge-Ampère type. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 9(8):807–838, 1984.

[259] R. Musina. Planar loops with prescribed curvature: existence, multiplicity and uniqueness results. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 139(12):4445–4459, 2011.

[260] X. Cabré. Equacions en derivades parcials, geometria i control estocàstic. *Butll. Soc. Catalana. Mat.*, 15(1):7–27, 2000. [Catalana].

[261] X. Cabré. Elliptic PDE's in probability and geometry: symmetry and regularity of solutions. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 20(3):425–457, 2008.

[262] X. Cabré, X. Ros-Oton, and J. Serra. Sharp isoperimetric inequalities via the ABP method. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 18(12):2971–2998, 2016.

[263] X. Cabré. Topics in regularity and qualitative properties of solutions of nonlinear elliptic equations. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 8(2):331–359, 2002.

[264] E. Phragmén and E. Lindelöf. Sur une extension d'un principe classique de l'analyse et sur quelques propriétés de fonctions monogènes dans le voisinage d'un point singulier. *Acta Math.*, 31:381–406, 1908. [French].

[265] Е.М. Ландис. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических и параболических уравнений. *Успехи Мат. Наук*, 14(1(85)):21–85, 1959.

[266] Е.М. Ландис. Некоторые вопросы качественной теории эллиптических уравнений второго порядка (случай многих независимых переменных). *Успехи Мат. Наук*, 18(1(109)):3–62, 1963.

[267] Е.М. Ландис. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. In *Труды 3-го Всесоюзного матем. съезда, т.1*, pages 57–58. М., 1956.

[268] Е.М. Ландис. О принципе Фрагмена — Линделёфа для решений эллиптических уравнений. *Доклады АН СССР*, 107(4):508–511, 1956.

[269] Е.М. Ландис. О некоторых свойствах решений эллиптических уравнений. *Успехи Мат. Наук*, 11(2(68)):235–237, 1956.

[270] В.Г. Мазья. О поведении вблизи границы решения задачи Дирихле для эллиптического уравнения второго порядка в дивергентной форме. *Матем. заметки*, 2(2):209–220, 1967.

[271] Г.Н. Блохина. Теоремы типа Фрагмена-Линделёфа для линейного эллиптического уравнения второго порядка. *Матем. сб.*, 82(124)(4(8)):507–531, 1970.

[272] Г.Н. Блохина. Теоремы типа Фрагмена-Линделёфа для линейного эллиптического уравнения второго порядка. *Доклады АН СССР*, 162(4):727–730, 1965.

[273] В.Г. Мазья. О непрерывности в граничной точке решения квазилинейных эллиптических уравнений. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, 25(13(3)):42–55, 1970.

[274] Е.М. Ландис, А.И. Ибрагимов. Задачи Неймана в неограниченных областях. *Доклады АН СССР*, 343(1):17–18, 1995.

[275] А.И. Ибрагимов, Е.М. Ландис. О поведении решений задачи Неймана в неограниченных областях. *Труды семинара им. И.Г. Петровского*, 19:218–234, 1996.

[276] A.I. Ibragimov and E.M. Landis. Zaremba's problem for elliptic equations in the neighbourhood of a singular point or at infinity. *Appl. Anal.*, 67(3-4):269–282, 1997.

[277] D. Cao, A. Ibraguimov, and A.I. Nazarov. Mixed boundary value problems for non-divergence type elliptic equations in unbounded domains. *Asymptot. Anal.*, 109(1-2):75–90, 2018.

[278] A. Ibraguimov and A.I. Nazarov. On Phragmén-Lindelöf principle for non-divergence type elliptic equations and mixed boundary conditions. *Мат. Физ. Компьют. Модел.*, 20(3(40)):65–76, 2017.

[279] B. Sirakov and P. Souplet. The Vázquez maximum principle and the Landis conjecture for elliptic PDE with unbounded coefficients. *Adv. Math.*, 387:107838, 2021.

[280] A. Logunov, E. Malinnikova, N. Nadirashvili, and F. Nazarov. The Landis conjecture on exponential decay. Preprint, arxiv.org/abs/2007.07034, 2020.

[281] Н.В. Крылов. Ограниченно неоднородные эллиптические и параболические уравнения в области. *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, 47(1):75–108, 1983.

[282] Х. Ким, М. Сафонов. Граничный принцип Харнака для эллиптических уравнений второго порядка с неограниченным сносом. *Проблемы мат. анализа*, 61:109–122, 2011.

[283] B.E.J. Dahlberg. Estimates of harmonic measure. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 65(3):275–288, 1977.

[284] D.S. Jerison and C.E. Kenig. Boundary behavior of harmonic functions in nontangentially accessible domains. *Adv. in Math.*, 46(1):80–147, 1982.

[285] H. Aikawa. Boundary Harnack principle and Martin boundary for a uniform domain. *J. Math. Soc. Japan*, 53(1):119–145, 2001.

[286] A. Ancona. Principe de Harnack à la frontière et théorème de Fatou pour un opérateur elliptique dans un domaine lipschitzien. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 28(4):169–213, 1978. [French].

[287] L. Caffarelli, E. Fabes, S. Mortola, and S. Salsa. Boundary behavior of nonnegative solutions of elliptic operators in divergence form. *Indiana Univ. Math. J.*, 30(4):621–640, 1981.

[288] R. Bañuelos, R.F. Bass, and K. Burdzy. Hölder domains and the boundary Harnack principle. *Duke Math. J.*, 64(1):195–200, 1991.

[289] R.F. Bass and K. Burdzy. A boundary Harnack principle in twisted Hölder domains. *Ann. of Math. (2)*, 134(2):253–276, 1991.

[290] E. Fabes, N. Garofalo, S. Marín-Malave, and S. Salsa. Fatou theorems for some nonlinear elliptic equations. *Rev. Mat. Iberoamer.*, 4(2):227–251, 1988.

[291] R.F. Bass and K. Burdzy. The boundary Harnack principle for nondivergence form elliptic operators. *J. London Math. Soc. (2)*, 50(1):157–169, 1994.

[292] H. Kim and M. Safonov. The boundary Harnack principle for second order elliptic equations in John and uniform domains. In *Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XV. Advances in mathematical analysis of partial differential equations. Workshop dedicated to the 90th*

anniversary of the O. A. Ladyzhenskaya birthday, Stockholm, Sweden, July 9–13, 2012, pages 153–176. Providence, RI: AMS, 2014.

[293] Х. Ким, М. Сафонов. Оценка типа Карлесона для эллиптических уравнений второго порядка с неограниченным сносом. *Проблемы мат. анализа*, 58:195–207, 2011.

[294] J.M.G. Wu. Comparisons of kernel functions, boundary Harnack principle and relative Fatou theorem on Lipschitz domains. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 28(4):147–167, 1978.

[295] F. Ferrari. On boundary behavior of harmonic functions in Hölder domains. *J. Fourier Anal. Appl.*, 4(4-5):447–461, 1998.

[296] P. Bauman. Positive solutions of elliptic equations in nondivergence form and their adjoints. *Ark. Mat.*, 22(2):153–173, 1984.

[297] H. Aikawa. Equivalence between the boundary Harnack principle and the Carleson estimate. *Math. Scand.*, 103(1):61–76, 2008.

[298] D. De Silva and O. Savin. A short proof of boundary Harnack principle. *J. Differ. Equ.*, 269(3):2419–2429, 2020.

[299] D. De Silva and O. Savin. On the boundary Harnack principle in Hölder domains. *Math. Eng.*, 4(1):Paper No. 004, 12, 2022.

[300] M. Allen and H. Shahgholian. A new boundary Harnack principle (equations with right hand side). *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 234(3):1413–1444, 2019.

[301] G. Sweers. Hopf's lemma and two dimensional domains with corners. *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste*, XXVIII:383–419, 1997.

[302] B. Sirakov. Global integrability and weak Harnack estimates for elliptic PDEs in divergence form. *Anal. PDE*, 15(1):197–216, 2022.

[303] J. Lierl and L. Saloff-Coste. Scale-invariant boundary Harnack principle in inner uniform domains. *Osaka J. Math.*, 51(3):619–656, 2014.

[304] J. Lierl. Scale-invariant boundary Harnack principle on inner uniform domains in fractal-type spaces. *Potential Anal.*, 43(4):717–747, 2015.

[305] M.T. Barlow and M. Murugan. Boundary Harnack principle and elliptic Harnack inequality. *J. Math. Soc. Japan*, 71(2):383–412, 2019.

[306] A. Ancona. Une propriété d'invariance des ensembles absorbants par perturbation d'un opérateur elliptique. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 4(4):321–337, 1979. [French].

[307] H. Brezis and A.C. Ponce. Remarks on the strong maximum principle. *Differential Integral Equations*, 16(1):1–12, 2003.

[308] M. Bertsch, F. Smarrazzo, and A. Tesei. A note on the strong maximum principle. *J. Differ. Equ.*, 259(8):4356–4375, 2015.

[309] L. Orsina and A.C. Ponce. Strong maximum principle for Schrödinger operators with singular potential. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 33(2):477–493, 2016.

[310] A.C. Ponce and N. Wilmet. The Hopf lemma for the Schrödinger operator. *Adv. Nonlinear Stud.*, 20(2):459–475, 2020.

[311] H. Berestycki, L. Nirenberg, and S.R.S. Varadhan. The principal eigenvalue and maximum principle for second-order elliptic operators in general domains. *Commun. Pure Appl. Math.*, 47(1):47–92, 1994.

[312] J. Barta. Sur la vibration fondamentale d'une membrane. *C. R. Acad. Sci., Paris*, 204:472–473, 1937. [French].

[313] E. Götmark and K. Nyström. Boundary behavior of non-negative solutions to degenerate sub-elliptic equations. *J. Differ. Equ.*, 254(8):3431–3460, 2013.

[314] G. Di Fazio, M.S. Fanciullo, and P. Zamboni. Harnack inequality for degenerate elliptic equations and sum operators. *Commun. Pure Appl. Anal.*, 14(6):2363–2376, 2015.

[315] E. Battaglia, S. Biagi, and A. Bonfiglioli. The strong maximum principle and the Harnack inequality for a class of hypoelliptic non-Hörmander operators. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 66(2):589–631, 2016.

[316] V. Martino and G. Tralli. On the Hopf-Oleinik lemma for degenerate-elliptic equations at characteristic points. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 55(5):Art. 115, 20, 2016.

[317] А.А. Гаврилов, О.М. Пенкин. Аналог леммы о нормальной производной для эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. *Дифференц. уравнения*, 36(2):226–232, 2000.

[318] С.Н. Ощепкова, О.М. Пенкин, Д.В. Савастеев. Сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве. *Матем. заметки*, 92(2):276–290, 2012.

[319] С.Н. Ощепкова, О.М. Пенкин, Д.В. Савастеев. Лемма о нормальной производной для лапласиана на полиэдральном множестве. *Матем. заметки*, 96(1):116–125, 2014.

[320] N.S. Trudinger. On Harnack type inequalities and their application to quasilinear elliptic equations. *Commun. Pure Appl. Math.*, 20:721–747, 1967.

[321] N.S. Trudinger. Harnack inequalities for nonuniformly elliptic divergence structure equations. *Invent. Math.*, 64:517–531, 1981.

[322] M. A. Dow and R. Výborný. Maximum principles for some quasilinear second order partial differential equations. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 47:331–351, 1972.

[323] P. Tolksdorf. On the Dirichlet problem for quasilinear equations in domains with conical boundary points. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 8(7):773–817, 1983.

[324] H. Mikayelyan and H. Shahgholian. Hopf's lemma for a class of singular/degenerate PDE's. *Ann. Acad. Sci. Fenn.*, 40:475–484, 2015.

[325] D. Castorina, G. Riey, and B. Sciunzi. Hopf Lemma and regularity results for quasilinear anisotropic elliptic equations. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 58(3):Paper No. 95, 18, 2019.

[326] A. Cellina. On the strong maximum principle. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 130(2):413–418, 2002.

[327] S. Bertone, A. Cellina, and E.M. Marchini. On Hopf's lemma and the strong maximum principle. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 31(4-6):701–733, 2006.

[328] J.L. Vázquez. A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations. *Appl. Math. Optim.*, 12(3):191–202, 1984.

[329] P. Pucci and J. Serrin. A note on the strong maximum principle for elliptic differential inequalities. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 79(1):57–71, 2000.

[330] P.L. Felmer and A. Quaas. On the strong maximum principle for quasilinear elliptic equations and systems. *Adv. Differential Equations*, 7(1):25–46, 2002.

[331] V. Julin. Generalized Harnack inequality for semilinear elliptic equations. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 106(5):877–904, 2016.

[332] M.-F. Bidaut-Véron, R. Borghol, and L. Véron. Boundary Harnack inequality and a priori estimates of singular solutions of quasilinear elliptic equations. *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 27(2):159–177, 2006.

[333] K. Nyström. p-harmonic functions in the Heisenberg group: boundary behaviour in domains well-approximated by non-characteristic hyperplanes. *Math. Ann.*, 357(1):307–353, 2013.

[334] B. Sirakov. Boundary Harnack estimates and quantitative strong maximum principles for uniformly elliptic PDE. *Int. Math. Res. Not. IMRN*, 2018(24):7457–7482, 2018.

[335] J.E.M. Braga and D. Moreira. Inhomogeneous Hopf-Oleĭnik lemma and regularity of semiconvex supersolutions via new barriers for the Pucci extremal operators. *Adv. Math.*, 334:184–242, 2018.

[336] Ю.А. Алхутов. Неравенство Харнака и гёльдеровость решений нелинейных эллиптических уравнений с нестандартным условием роста. *Дифференц. уравнения*, 33(12):1651–1660, 1997.

[337] Ю.А. Алхутов, М.Д. Сурначев. О неравенстве Харнака для $p(x)$-лапласиана с двухфазным показателем $p(x)$. *Труды семинара им. И.Г. Петровского*, 32:8–56, 2019.

[338] I.I. Skrypnik and M.V. Voitovych. $\mathcal{B}_1$ classes of De Giorgi–Ladyzhenskaya–Ural'tseva and their applications to elliptic and parabolic equations with generalized Orlicz growth conditions. *Nonlinear Anal.*, 202:112135, 30, 2021.

[339] T. Adamowicz and N.L.P. Lundström. The boundary Harnack inequality for variable exponent p-Laplacian, Carleson estimates, barrier functions and $p(\cdot)$-harmonic measures. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 195(2):623–658, 2016.

[340] E. Di Nezza, G. Palatucci, and E. Valdinoci. Hitchhiker's guide to the fractional Sobolev spaces. *Bull. Sci. Math.*, 136(5):521–573, 2012.

[341] M. Riesz. Intégrales de Riemann–Liouville et potentiels. *Acta Litt. Sci. Szeged*, 9:1–42, 1938. [French].

[342] Н.С. Ландкоф. *Основы современной теории потенциала.* М., Физматлит, 1966.

[343] R. Musina and A.I. Nazarov. On fractional Laplacians. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 39(9):1780–1790, 2014.

[344] R. Musina and A.I. Nazarov. On fractional Laplacians—2. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 33(6):1667–1673, 2016.

[345] L. Silvestre. Regularity of the obstacle problem for a fractional power of the Laplace operator. *Comm. Pure Appl. Math.*, 60(1):67–112, 2007.

[346] A. Capella, J. Dávila, L. Dupaigne, and Y. Sire. Regularity of radial extremal solutions for some non-local semilinear equations. *Commun. Partial Differ. Equ.*, 36(8):1353–1384, 2011.

[347] A. Iannizzotto, S. Mosconi, and M. Squassina. H^s versus C^0-weighted minimizers. *NoDEA Nonlin. Differ. Equ. Appl.*, 22(3):477–497, 2015.

[348] R. Musina and A.I. Nazarov. Strong maximum principles for fractional Laplacians. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 149(5):1223–1240, 2019.

[349] N. Abatangelo, S. Jarohs, and A. Saldaña. On the loss of maximum principles for higher-order fractional Laplacians. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 146(11):4823–4835, 2018.

[350] N. Abatangelo, S. Jarohs, and A. Saldaña. Fractional Laplacians on ellipsoids. *Math. Eng.*, 3(5):Paper No. 038, 34, 2021.

[351] K. Bogdan. The boundary Harnack principle for the fractional Laplacian. *Studia Math.*, 123(1):43–80, 1997.

[352] X. Ros-Oton and J. Serra. The boundary Harnack principle for nonlocal elliptic operators in non-divergence form. *Potential Anal.*, 51(3):315–331, 2019.

[353] X. Ros-Oton and J. Serra. The Dirichlet problem for the fractional Laplacian: regularity up to the boundary. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 101(3):275–302, 2014.

[354] X. Ros-Oton. Nonlocal elliptic equations in bounded domains: a survey. *Publ. Mat.*, 60(1):3–26, 2016.

[355] X. Ros-Oton. Boundary regularity, Pohozaev identities and nonexistence results. In *Recent developments in nonlocal theory*, pages 335–358. De Gruyter, Berlin, 2018.

[356] L.M. Del Pezzo and A. Quaas. A Hopf's lemma and a strong minimum principle for the fractional p-Laplacian. *J. Differ. Equ.*, 263(1):765–778, 2017.

[357] P. Kim, R. Song, and Z. Vondraček. Potential theory of subordinate killed Brownian motion. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 371(6):3917–3969, 2019.

[358] N. Abatangelo, M.M. Fall, and R.Y. Temgoua. A Hopf lemma for the regional fractional Laplacian. Preprint, arxiv.org/abs/2112.09522, 2021.

[359] N. Guillen and R.W. Schwab. Aleksandrov-Bakelman-Pucci type estimates for integro-differential equations. *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 206(1):111–157, 2012.

[360] M.M. Fall and S. Jarohs. Overdetermined problems with fractional Laplacian. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 21(4):924–938, 2015.