



Решения с различными структурами для полулинейных уравнений в \mathbb{R}^n с дробным лапласианом

А.И. Назаров*, А.П. Щеглова**

1 Постановка задачи

Пусть $n \geq 2$, $s \in (0, 1)$, $q \in (2, 2_s^*)$ где $2_s^* = \frac{2n}{n-2s}$ – предельный показатель Соболева для пространства $H^s(\mathbb{R}^n)$. Рассмотрим уравнение

$$(-\Delta)^s u + u = |u|^{q-2}u \quad \text{в } \mathbb{R}^n, \quad (1)$$

где $(-\Delta)^s$ – оператор дробного лапласиана в \mathbb{R}^n , определяемый при любом $s > 0$ с помощью преобразования Фурье:

$$(-\Delta)^s u := \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}u(\xi)).$$

Полулинейные уравнения с дробным лапласианом исследовались во многих работах. Мы построим несколько новых семейств решений уравнения (1), которые, по-видимому, ранее не рассматривались.

В локальном случае ($s = 1$) решения с различными симметриями для уравнений вида (1), в основном для модельного уравнения

$$-\Delta u + u = u^3 \quad \text{в } \mathbb{R}^n, \quad n = 2, 3, \quad (2)$$

изучались многими авторами (см., напр., [12], где приведен обзор применяющихся методов, а также цитируемую там литературу). В недавней работе [12] был предложен вариационный подход, основанный на принципе концентрации-компактности П.-Л. Лионса и методе отражений. Этот метод, применимый также к уравнениям с p -лапласианом в главной части, позволяет единообразно строить решения, которые могут иметь различные симметрии, а также убывать в некоторых направлениях.

*ПОМИ РАН и СПбГУ

**СПбГЭТУ и СПбГУ

В настоящей работе мы модифицируем метод [12] для работы с дробными лапласианами. Отметим, что модификация других методов построения решений уравнений типа (2) на нелокальный случай затруднительна.

Наиболее существенная модификация касается теоремы о концентрации. Подобные утверждения были доказаны для дробного лапласиана в \mathbb{R}^n в [2], для суженного (restricted) дробного лапласиана в [21, 14]. В §4 мы докажем эту теорему для спектрального лапласиана Неймана; аналогичное доказательство проходит и для спектрального лапласиана Дирихле.

Статья имеет следующую структуру. В §2 собраны классические факты о концентрации и о дробных лапласианах. В §3 доказаны важные вспомогательные утверждения о влиянии срезающих функций на интеграл энергии, §4 посвящен теореме о концентрации. Далее мы строим решения уравнения (1) с различными симметриями.

В §5 рассматриваются положительные решения с периодическими структурами. Основная часть этого параграфа посвящена решениям на плоскости, в п.5.4 полученные результаты обобщены на многомерный случай.

В §6 строятся другие типы решений — периодические знакопеременные и квазипериодические комплекснозначные, бризеры и радиальные решения. Отметим, что положительные радиальные решения уравнения (1) хорошо изучены, см., напр., [5, 6, 7, 8]. Другие классы решений, построенные в нашей статье, по-видимому, ранее не изучались. В локальном случае подобные решения рассмотрены в [12]. Однако решения, построенные в п.6.3, являются новыми даже при $s = 1$.

Обозначения. Мы будем обозначать Ω область в \mathbb{R}^n с кусочно гладкой границей $\partial\Omega$. Для удобства считаем, что $0 \in \Omega$.

Через $B_r(x)$ обозначим открытый шар с центром в точке x и радиусом r ; $B_r = B_r(0)$. Определим срезающую функцию

$$\eta \in C^\infty(\mathbb{R}_+), \quad 0 \leq \eta \leq 1, \quad \eta(t) = \begin{cases} 1, & t \leq \frac{1}{2}, \\ 0, & t \geq 1. \end{cases} \quad (3)$$

Скалярное произведение в пространстве $L_2(\Omega)$ обозначается $(\cdot, \cdot)_\Omega$. Так же будем обозначать двойственность, порождаемую этим скалярным произведением.

Используется стандартное обозначение $H^s(\mathbb{R}^n)$ для пространств Соболева–Слободецкого. Введем также соответствующие пространства в области (см., напр., [26, гл. 4]):

$$H^s(\Omega) = \{u|_\Omega : u \in H^s(\mathbb{R}^n)\}; \quad \tilde{H}^s(\Omega) = \{u \in H^s(\mathbb{R}^n) : \text{supp } u \subset \bar{\Omega}\}.$$

Для положительной последовательности $R \rightarrow +\infty$ определим семейство расширяющихся областей $\Omega_R = \{x \in \mathbb{R}^n : x/R \in \Omega\}$.

В записи $o_R(1)$ и т.п. нижний индекс обозначает параметр, за счет которого достигается малость.

Положительные не зависящие от R константы, значение которых для нас не важно, мы будем обозначать через C . При необходимости параметры, от которых зависит константа C , указываются в скобках. При этом зависимость от n и s не указывается.

2 Некоторые основные понятия

2.1 Концентрация

Напомним следующий факт, известный как принцип концентрации-компактности.

Лемма 2.1. [13, Лемма I.1] *Рассмотрим произвольную последовательность функций $u_j \in L_q(\mathbb{R}^n)$. Тогда для некоторой подпоследовательности этих функций верно одно из двух утверждений:*

1 (концентрация). *Существует $\lambda \in (0; 1]$ и последовательность точек $x_j \in \mathbb{R}^n$, такая, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $\rho > 0$, последовательность $\rho_j \rightarrow +\infty$ и j_0 , такое что при всех $j \geq j_0$*

$$\begin{aligned} & \left| \int_{B_\rho(x_j)} |u_j|^q dx - \lambda \int_{\mathbb{R}^n} |u_j|^q dx \right| + \\ & + \left| \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_{\rho_j}(x_j)} |u_j|^q dx - (1 - \lambda) \int_{\mathbb{R}^n} |u_j|^q dx \right| < \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} |u_j|^q dx \end{aligned} \quad (4)$$

2 (размывание). *Для любого $\rho > 0$*

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \int_{B_\rho(x)} |u_j|^q dx = 0. \quad (5)$$

В случае, когда реализуется первый пункт леммы 2.1, будем говорить, что x_j — последовательность концентрации для функций u_j . Число λ будем называть весом этой последовательности.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что если последовательность точек x_j удовлетворяет (4), и последовательность точек y_j удовлетворяет условию $|x_j - y_j| \leq d$ для некоторого $d > 0$, то y_j также удовлетворяет условию (4) с $\rho_y = \rho_x + d$, $(\rho_j)_y = (\rho_j)_x - d$. В этом случае будем говорить, что последовательности x_j и y_j эквивалентны.

Замечание 2. Отметим также, что если (4) верно для некоторого ρ и последовательности ρ_j , то оно останется верным для любого $\rho' > \rho$ и последовательности $\rho'_j \rightarrow +\infty$, $\rho'_j < \rho_j$. Поэтому при применении (4) к функциям с носителями в Ω_R , $R \rightarrow +\infty$, мы всегда будем считать, что $\rho_R = o(R)$.

2.2 Дробные лапласианы Неймана и Дирихле в области. Продолжение Стинга–Торреа

Напомним, что спектральный дробный лапласиан Дирихле $(-\Delta)_{\mathcal{D}}^s$ — это s -я степень оператора Лапласа с условием Дирихле в смысле спектральной теории (см., например, [1, гл. 10]), т. е. самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме¹

$$[u]_{\mathcal{D}, \Omega}^2 \equiv ((-\Delta)_{\mathcal{D}}^s u, u)_{\Omega} := \sum_{j=1}^{+\infty} \lambda_j^s (u, \psi_j)_{\Omega}^2, \quad (6)$$

¹Формулы (6), (7) и (10) справедливы для ограниченной области. Для областей типа полосы эти формулы видоизменяются, но доказательства, основанные на СТ-продолжениях, остаются верными.

где λ_j и ψ_j — соответственно, собственные числа и ортонормированные собственные функции оператора Лапласа с условием Дирихле в области Ω . Известно (см., напр., [15, лемма 1]), что при $s \in [0, 1]$ область определения квадратичной формы (6) совпадает с пространством $\tilde{H}^s(\Omega)$. Введем в $\tilde{H}^s(\Omega)$ эквивалентную норму

$$\|u\|_{\tilde{H}^s(\Omega)}^2 = [u]_{\mathcal{D},\Omega}^2 + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Аналогично, спектральный дробный лапласиан Неймана $(-\Delta)_{\mathcal{N}}^s$ — это самосопряженный оператор, восстановленный по квадратичной форме

$$[u]_{\mathcal{N},\Omega}^2 \equiv ((-\Delta)_{\mathcal{N}}^s u, u)_{\Omega} := \sum_{j=1}^{+\infty} \mu_j^s (u, \varphi_j)_{\Omega}^2, \quad (7)$$

где μ_j и φ_j — соответственно, собственные числа и ортонормированные собственные функции оператора Лапласа с условием Неймана в области Ω . При этом мы полагаем, что $\mu_0 = 0$, $\varphi_0 = \text{const}$ и не учитываем это слагаемое в (7).

Аналогично [15, лемма 1] доказывается, что при $s \in (0, 1)$ область определения квадратичной формы (7) совпадает с $H^s(\Omega)$, и в $H^s(\Omega)$ можно ввести эквивалентную норму

$$\|u\|_{H^s(\Omega)}^2 = [u]_{\mathcal{N},\Omega}^2 + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

В знаменитой работе [4] дробный лапласиан в \mathbb{R}^n был связан с оператором обобщенного гармонического продолжения. В статье [25] этот результат был распространен на неотрицательно определенные операторы весьма общего вида. В частности, спектральные лапласианы Неймана и Дирихле можно получить с помощью операции, которую мы будем называть продолжением Стинга—Торреа (далее СТ-продолжение).

Именно, для $u \in H^s(\Omega)$ (соответственно, $u \in \tilde{H}^s(\Omega)$) существует и единственно решение задачи в полуцилиндре $\Omega \times \mathbb{R}_+$

$$-\text{div}(t^{1-2s}\nabla w(x, t)) = 0 \quad \text{в } \Omega \times \mathbb{R}_+, \quad w|_{t=0} = u, \quad (8)$$

удовлетворяющее на боковой границе $\partial\Omega \times \mathbb{R}_+$ однородному условию Неймана или Дирихле соответственно и имеющее конечную энергию

$$\mathcal{E}_{\Omega}(w) = \int_0^{+\infty} dt \int_{\Omega} t^{1-2s} |\nabla w(x, t)|^2 dx. \quad (9)$$

Несложно видеть (см., например, [16, §2]), что эти решения (обозначим их $w^{\mathcal{N}}$ и $w^{\mathcal{D}}$) минимизируют энергию \mathcal{E}_{Ω} на аффинных подпространствах

$$\mathcal{W}_{\mathcal{N}}^s(\Omega \times \mathbb{R}_+) = \{w(x, t) : \mathcal{E}_{\Omega}(w) < +\infty, w|_{t=0} = u\}$$

и

$$\mathcal{W}_{\mathcal{D}}^s(\Omega \times \mathbb{R}_+) = \{w \in \mathcal{W}_{\mathcal{N}}^s(\Omega \times \mathbb{R}_+) : w|_{x \in \partial\Omega} = 0\}$$

соответственно. При этом квадратичные формы (7) и (6) выражаются через энергии соответствующих СТ-продолжений:

$$[u]_{\mathcal{N},\Omega}^2 = C_s \mathcal{E}_{\Omega}(w^{\mathcal{N}}); \quad [u]_{\mathcal{D},\Omega}^2 = C_s \mathcal{E}_{\Omega}(w^{\mathcal{D}}); \quad C_s = \frac{4^s \Gamma(1+s)}{2s \Gamma(1-s)}.$$

Функции из множеств $\mathcal{W}_{\mathcal{N}}^s(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ и $\mathcal{W}_{\mathcal{D}}^s(\Omega \times \mathbb{R}_+)$ будем называть соответственно допустимыми \mathcal{N} -продолжениями и \mathcal{D} -продолжениями функции u .

Далее (см., напр., [25, (3.1)–(3.8)]), для функции $w^{\mathcal{N}}$ имеет место разложение в ряд Фурье по собственным функциям задачи Неймана:

$$w^{\mathcal{N}}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(t) \varphi_k(x), \quad d_k(t) = (u, \varphi_k)_{\Omega} \cdot \mathcal{Q}_s(t\sqrt{\mu_k}), \quad \mathcal{Q}_s(\tau) = \frac{2^{1-s}\tau^s}{\Gamma(s)} \mathcal{K}_s(\tau), \quad (10)$$

где $\mathcal{K}_s(\tau)$ — модифицированная функция Бесселя второго рода. Аналогичная формула верна для функции $w^{\mathcal{D}}$ (с заменой φ_j и μ_j на ψ_j и λ_j).

Наконец, справедливы соотношения в смысле обобщенных функций

$$(-\Delta)_{\mathcal{N}}^s u = -C_s \cdot \lim_{t \rightarrow +0} t^{1-2s} \partial_t w^{\mathcal{N}}(\cdot, t), \quad (-\Delta)_{\mathcal{D}}^s u = -C_s \cdot \lim_{t \rightarrow +0} t^{1-2s} \partial_t w^{\mathcal{D}}(\cdot, t), \quad (11)$$

а для “достаточно хороших” функций u эти соотношения выполнены поточечно.

В §§3 и 4 мы будем формулировать все утверждения для дробного лапласиана Неймана. При отсутствии дополнительных замечаний соответствующее утверждение для дробного лапласиана Дирихле формулируется и доказывается заменой индекса \mathcal{N} на \mathcal{D} и пространства H^s на \dot{H}^s . Если формулировка или доказательство требуют существенных изменений, то это будет описано отдельно.

2.3 Теорема Люстерника–Шнирельмана

В п.6.4 нам понадобится следующее утверждение (см., напр., [19, гл. 8]).

Лемма 2.2 (Теорема Люстерника–Шнирельмана). Пусть \mathcal{H} — гильбертово пространство, и $I : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ — функционал, обладающий следующими свойствами:

1. $I \in C_{\text{loc}}^{1,1}(\mathcal{H})$, $I(0) = 0$, $I[u] \equiv I[-u]$;
2. $I[u] > 0$ и $\|I'[u]\| > 0$ при $u \neq 0$;
3. I слабо непрерывен на \mathcal{H} .

Тогда при любом $a > 0$ функционал I имеет по крайней мере счетное число критических точек на сфере

$$\mathcal{S}_a = \{u \in \mathcal{H} \mid \|u\|_{\mathcal{H}} = a\}.$$

3 Срезка и разделение

Следующие два утверждения содержательны, если область Ω достаточно велика.

Лемма 3.1 (о срезке). Пусть $u \in H^s(\Omega)$, $\omega \subset \Omega$ — открытое множество с кусочно-гладкой границей, $r > 0$. Обозначим через w СТ-продолжение функции u и введем срезающую функцию (функция η определена в (3))

$$\eta_{\omega,r}(x, t) = \eta \left(\frac{\text{dist}(x, \omega)}{r} \right) \eta \left(\frac{t}{2r} \right). \quad (12)$$

Тогда при $r \rightarrow +\infty$

$$\mathcal{E}_{\Omega}(\eta_{\omega,r}w) \leq \mathcal{E}_{\Omega}(w) + o_r(1) \cdot \|u\|_{H^s(\Omega)}^2.$$

Доказательство. В силу (9) имеем

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_\Omega(\eta_{\omega,r}w) &= \int_0^{+\infty} dt \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla(\eta_{\omega,r}w)|^2 dx = \int_0^{+\infty} dt \int_\Omega t^{1-2s} |\nabla w|^2 \eta_{\omega,r}^2 dx \\
&\quad + 2 \underbrace{\int_0^{+\infty} dt \int_\Omega t^{1-2s} \eta_{\omega,r} w (\nabla \eta_{\omega,r}, \nabla w) dx}_{I_1} + \underbrace{\int_0^{+\infty} dt \int_\Omega t^{1-2s} w^2 |\nabla \eta_{\omega,r}|^2 dx}_{I_2} \\
&\leq \mathcal{E}_\Omega(w) + 2I_1 + I_2.
\end{aligned} \tag{13}$$

Сначала оценим I_2 :

$$I_2 \leq \frac{C}{r^2} \int_0^{2r} t^{1-2s} \int_\Omega w^2(x, t) dx dt. \tag{14}$$

Воспользуемся представлением (10) функции w . Известно, что для функций \mathcal{K}_s выполнены следующие асимптотики (см., напр., [25, (3.7)]):

$$\mathcal{K}_s(\tau) \sim \Gamma(s) 2^{s-1} \tau^{-s}, \text{ при } \tau \rightarrow 0; \quad \mathcal{K}_s(\tau) \sim \left(\frac{\pi}{2\tau}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\tau} (1 + O(\tau^{-1})) \text{ при } \tau \rightarrow +\infty.$$

Отсюда $\mathcal{Q}_s(\tau) \leq C$ и

$$\int_\Omega w^2(x, t) dx = \int_\Omega \left(\sum_{k=0}^{\infty} \mathcal{Q}_s^2(t\sqrt{\mu_k}) (u, \varphi_k)_\Omega^2 \varphi_k^2(x) \right) dx \leq C \|u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Подставляя эту оценку в (14), получаем

$$I_2 \leq \frac{C \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{r^2} \int_0^{2r} t^{1-2s} dt = Cr^{-2s} \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 = o_r(1) \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad \text{при } r \rightarrow +\infty.$$

Интеграл I_1 в (13) оценим по неравенству Коши–Буняковского:

$$I_1 \leq (\mathcal{E}_\Omega(w))^{1/2} \cdot I_2^{1/2} = C [u]_{\mathcal{N}, \Omega} \cdot \|u\|_{L_2(\Omega)} \cdot o_r(1) \leq \|u\|_{H^s(\Omega)}^2 \cdot o_r(1). \quad \square$$

Лемма 3.2 (о разделенных носителях). Пусть $v_1, v_2 \in H^s(\Omega)$. Обозначим через ω_j носители v_j ($j = 1, 2$) и положим $d = \text{dist}(\omega_1, \omega_2)$. Тогда

$$[v_1 + v_2]_{\mathcal{N}, \Omega}^2 = [v_1]_{\mathcal{N}, \Omega}^2 + [v_2]_{\mathcal{N}, \Omega}^2 + o_d(1) (\|v_1\|_{H^s(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{H^s(\Omega)}^2) \quad \text{при } d \rightarrow +\infty.$$

Доказательство. Обозначим w_1 и w_2 СТ-продолжения функций v_1 и v_2 соответственно. Определим срезающие функции η_j , $j = 1, 2$, положив в (12) $\omega = \omega_j$ и $r = \frac{d}{2}$. Применяя лемму 3.1, получим

$$\mathcal{E}_\Omega(w_j \eta_j) \leq \mathcal{E}_\Omega(w_j) + o_d(1) \|v_j\|_{H^s(\Omega)}^2, \quad j = 1, 2. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим функцию $w(x, t) = w_1(x, t)\eta_1(x, t) + w_2(x, t)\eta_2(x, t)$. Она является допустимым \mathcal{N} -продолжением для функции $v_1 + v_2$, поэтому

$$[v_1 + v_2]_{\mathcal{N}, \Omega}^2 \leq C_s \mathcal{E}_\Omega(w_1 \eta_1 + w_2 \eta_2) = C_s \mathcal{E}_\Omega(w_1 \eta_1) + C_s \mathcal{E}_\Omega(w_2 \eta_2),$$

так как носители функций $w_1\eta_1$ и $w_2\eta_2$ не пересекаются. С учетом (15) получаем

$$\begin{aligned} [v_1 + v_2]_{\mathcal{N},\Omega}^2 &\leq C_s \mathcal{E}_\Omega(w_1) + C_s \mathcal{E}_\Omega(w_2) + o_d(1) (\|v_1\|_{H^s(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{H^s(\Omega)}^2) \\ &= [v_1]_{\mathcal{N},\Omega}^2 + [v_2]_{\mathcal{N},\Omega}^2 + o_d(1) (\|v_1\|_{H^s(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{H^s(\Omega)}^2). \end{aligned}$$

Для доказательства неравенства в обратную сторону обозначим через w СТ-продолжение функции $v_1 + v_2$. Тогда $w\eta_1$ и $w\eta_2$ являются допустимыми \mathcal{N} -продолжениями для функций v_1 и v_2 , носители этих функций разделены, поэтому

$$[v_1]_{\mathcal{N},\Omega}^2 + [v_2]_{\mathcal{N},\Omega}^2 \leq C_s \mathcal{E}_\Omega(w\eta_1) + C_s \mathcal{E}_\Omega(w\eta_2) = C_s \mathcal{E}_\Omega(w(\eta_1 + \eta_2)).$$

К функции $w(\eta_1 + \eta_2)$ на множестве $\omega = \omega_1 \cup \omega_2$ можно применить лемму 3.1. Это дает

$$\begin{aligned} [v_1]_{\mathcal{N},\Omega}^2 + [v_2]_{\mathcal{N},\Omega}^2 &\leq C_s \mathcal{E}_\Omega(w(\eta_1 + \eta_2)) \leq C_s \mathcal{E}_\Omega(w) + o_d(1) \|v_1 + v_2\|_{H^s(\Omega)}^2 \\ &\leq [v_1 + v_2]_{\mathcal{N},\Omega}^2 + o_d(1) (\|v_1\|_{H^s(\Omega)}^2 + \|v_2\|_{H^s(\Omega)}^2). \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 3.3. *Рассмотрим произвольную последовательность функций $u_R \in H^s(\Omega_R)$, такую, что $\|u_R\|_{L^q(\Omega_R)} = 1$ и $\|u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2$ равномерно ограничены. Будем считать, что u_R продолжены нулем вне Ω_R .*

Пусть для некоторой подпоследовательности (которую мы для простоты также обозначим u_R) имеется последовательность концентрации x_R ; величины $\varepsilon > 0$, ρ и последовательность ρ_R определены в лемме 2.1 (с учетом замечания 2).

Определим срезающую функцию $\eta_R \in C^\infty(\Omega_R)$:

$$\eta_R(x) = \eta \left(\frac{8|x - x_R|}{7\rho + \rho_R} \right) + \left(1 - \eta \left(\frac{8|x - x_R|}{\rho + 7\rho_R} \right) \right).$$

Тогда при $R \rightarrow +\infty$ и $\varepsilon \rightarrow 0$ имеем

$$[\eta_R u_R]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 \leq [u_R]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + o_R(1), \quad (16)$$

$$\|\eta_R u_R\|_{L^q(\Omega_R)} \geq 1 - o_\varepsilon(1). \quad (17)$$

Доказательство. Неравенство (17) немедленно следует из (4).

Далее, обозначим через w СТ-продолжение функции u_R . Очевидно, что функция $w^*(x, t) = \eta_R(x)\eta(t/\rho_R)w(x, t)$ является допустимым \mathcal{N} -продолжением для $\eta_R u_R$. Далее, к ней можно применить лемму 3.1. Это дает

$$[\eta_R u_R]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 \leq C_s \mathcal{E}_{\Omega_R}(w^*) \leq C_s \mathcal{E}_{\Omega_R}(w) + o_R(1) \|u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 = [u_R]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + o_R(1),$$

так как по условию $\|u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2$ равномерно ограничены. \square

Замечание 3. Легко видеть, что умножение на срезку η_R не меняет функцию в окрестности точки концентрации и вдалеке от нее (т.е. там, где по лемме 2.1 сосредоточена почти вся ее масса), но обнуляет ее в кольце ширины $\frac{\rho+7\rho_R}{16} - \frac{7\rho+\rho_R}{8} = \frac{5\rho_R-13\rho}{16}$.

Отметим, что если последовательность u_R имеет несколько неэквивалентных последовательностей концентрации, то их можно “разделить” следующим образом. Пусть, например, x_R, y_R — последовательности концентрации, и $|x_R - y_R| \rightarrow \infty$ при $R \rightarrow \infty$.

Используя лемму 2.1, для произвольного $\varepsilon > 0$ можно определить величины ρ_x, ρ_y и последовательности $(\rho_R)_x, (\rho_R)_y$. Введем новые последовательности

$$(\rho'_R)_x = \min\left\{(\rho_R)_x, \frac{1}{4}|x_R - y_R|\right\}, \quad (\rho'_R)_y = \min\left\{(\rho_R)_y, \frac{1}{4}|x_R - y_R|\right\},$$

для которых также выполнено (4).

Если теперь для последовательностей x_R, y_R и новых значений радиусов $(\rho'_R)_x, (\rho'_R)_y$ построить срезающие функции η_x и η_y как в лемме 3.3, то носители функций $1 - \eta_x$ и $1 - \eta_y$ не пересекаются. Дословно повторяя доказательство леммы 3.3, получаем, что для срезающей функции $\eta_{xy} := \eta_x \eta_y$ также справедливы соотношения (16) и (17).

Такую функцию η_{xy} будем называть разделяющей последовательности концентрации x_R и y_R .

Следующая лемма дает нелокальный аналог леммы 2.2 [12], см. также [11, лемма 1.6].

Лемма 3.4. Пусть функции $a_R, b_R, c_R \in H^s(\Omega_R)$ при каждом R имеют непересекающиеся носители, $\|b_R\|_{L_q(\Omega_R)}$ и $\|c_R\|_{L_q(\Omega_R)}$ отделены от нуля, $\|a_R\|_{H^s(\Omega_R)}, \|b_R\|_{H^s(\Omega_R)}, \|c_R\|_{H^s(\Omega_R)}$ равномерно ограничены по R , и

$$\frac{\|b_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2}{\|b_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q} \geq \frac{\|c_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2}{\|c_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q}.$$

Обозначим

$$u_R = a_R + b_R + c_R, \quad U_R = a_R + \frac{(\|b_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q + \|c_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q)^{\frac{1}{q}}}{\|c_R\|_{L_q(\Omega_R)}} c_R.$$

Тогда $U_R \equiv a_R$ для всех $x \in \Omega_R \setminus \text{supp}(c_R)$,

$$\|U_R\|_{L_q(\Omega_R)} = \|u_R\|_{L_q(\Omega_R)},$$

и при достаточно больших d

$$\|U_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 < \|u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 - C$$

(здесь d — минимальное расстояние между носителями функций a_R, b_R и c_R).

Доказательство. Рассмотрим семейство функций с параметром

$$u_R(t) = a_R + \left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{1}{q}} b_R + \left(\frac{1-t}{1-t_0}\right)^{\frac{1}{q}} c_R, \quad t \in [0, t_0],$$

где

$$t_0 = \frac{\|b_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q}{\|b_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q + \|c_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q}.$$

Так как носители функций a_R, b_R и c_R разделены, то $\|u_R(t)\|_{L_q(\Omega_R)}^q = \|u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q$ для всех $t \in [0, t_0]$. А в силу леммы 3.2 при $d \rightarrow +\infty$ имеем

$$\|u_R(t)\|_{H^s(\Omega_R)}^2 = \|a_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 + \overbrace{\left(\frac{t}{t_0}\right)^{\frac{2}{q}} \|b_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 + \left(\frac{1-t}{1-t_0}\right)^{\frac{2}{q}} \|c_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2}^{f(t)} + o_d(1).$$

Прямое вычисление (см., напр., доказательство леммы 1.6 [11]) показывает, что функция $f(t)$ строго возрастает на $[0, t_0]$, причем $f(0) < f(t_0) - C(b_R, c_R)$, причем константа явно выражается через $\|b_R\|_{L_q(\Omega_R)}$, $\|c_R\|_{L_q(\Omega_R)}$, $\|b_R\|_{H^s(\Omega_R)}$, $\|c_R\|_{H^s(\Omega_R)}$ и отделена от нуля в условиях леммы. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|U_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 &= \|u_R(0)\|_{H^s(\Omega_R)}^2 = f(0) + o_d(1) < f(t_0) - C(b_R, c_R) + o_d(1) \\ &= \|u_R(t_0)\|_{H^s(\Omega_R)}^2 - C + o_d(1) \leq \|u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 - C/2 \end{aligned}$$

для достаточно больших d . □

4 Теорема о концентрации

Теорема 4.1. *Рассмотрим произвольную последовательность функций $u_R \in H^s(\Omega_R)$, такую, что $\|u_R\|_{L_q(\Omega_R)}$ равномерно отделены от нуля и $\|u_R\|_{H^s(\Omega_R)}$ равномерно ограничены. Тогда при $R \rightarrow +\infty$ ни для какой подпоследовательности u_R не имеет места размывание.*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что $\|u_R\|_{L_q(\Omega_R)} = 1$.

Будем доказывать от противного. Предположим, что для некоторой подпоследовательности u_R выполнено условие (5). Для фиксированного $\rho > 0$ рассмотрим разбиение пространства на ячейки Q_m , $m \in \mathbb{Z}^n$, кубической решетки с шагом ρ/\sqrt{n} и обозначим $\omega_m = \Omega_R \cap Q_m$, так что $\text{diam } \omega_m < \rho$. Положим $u_m := u_R|_{\omega_m}$. Тогда ввиду (5) имеем

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{\Omega_R} u_R^q dx = \sum_m \int_{\omega_m} u_m^q dx \\ &\leq \left(\sup_m \|u_m\|_{L_q(\omega_m)} \right)^{q-2} \sum_m \|u_m\|_{L_q(\omega_m)}^2 = o_R(1) \cdot \sum_m \|u_m\|_{L_q(\omega_m)}^2. \end{aligned} \quad (18)$$

Поскольку Ω_R — область с кусочно гладкой границей, сдвигая при необходимости решетку, можно добиться того, что все ω_m имеют размеры, сравнимые с ρ . Поэтому теорема вложения $H^s(\omega_m) \hookrightarrow L_q(\omega_m)$ дает

$$\|u_m\|_{L_q(\omega_m)}^2 \leq C(\rho) ([u_m]_{\mathcal{N}, \omega_m}^2 + \|u_m\|_{L_2(\omega_m)}^2).$$

Обозначим $w_R^{\mathcal{N}}$ СТ-продолжение функции u_R и положим $w_m(x, t) := w_R^{\mathcal{N}}|_{\omega_m \times \mathbb{R}_+}$. Нетрудно видеть, что w_m является допустимым \mathcal{N} -продолжением для функций u_m на множестве ω_m , откуда

$$\|u_m\|_{L_q(\omega_m)}^2 \leq C(\rho) \left(C_s \mathcal{E}_{\omega_m}(w_m) + \|u_m\|_{L_2(\omega_m)}^2 \right). \quad (19)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_m \|u_m\|_{L_q(\omega_m)}^2 &\leq C(\rho) \left(C_s \sum_m \mathcal{E}_{\omega_m}(w_m) + \|u_R\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \right) = C(\rho) \left(C_s \mathcal{E}_{\Omega_R}(w_R^{\mathcal{N}}) + \|u_R\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \right) \\ &= C(\rho) ([u_R]_{\mathcal{N}, \Omega_R}^2 + \|u_R\|_{L_2(\Omega_R)}^2) \leq C(\rho). \end{aligned} \quad (20)$$

Подставляя этот результат в (18), получаем противоречие. □

Замечание 4. Для дробного лапласиана Дирихле доказательство видоизменяется следующим образом. Обозначим $w_R^{\mathcal{D}}$ соответствующее СТ-продолжение функции u_R . Тогда функции $w_m(x, t) := w_R^{\mathcal{D}}|_{\omega_m \times \mathbb{R}_+}$ не являются допустимыми \mathcal{D} -продолжениями для функций u_m , но являются допустимыми \mathcal{N} -продолжениями u_m на ω_m . Так как вложение $H^s(\omega_m) \hookrightarrow L_q(\omega_m)$ непрерывно, то оценка (19) справедлива, откуда получаем неравенство (20) с заменой индекса \mathcal{N} на \mathcal{D} . Это вновь дает противоречие с (18).

Введем обозначения

$$J_{s,q,\Omega}^{\mathcal{N}}(u) = \frac{[u]_{\mathcal{N},\Omega}^2 + \|u\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|u\|_{L_q(\Omega)}^2}, \quad \lambda_{s,q,\Omega}^{\mathcal{N}} = \inf_{u \in H^s(\Omega) \setminus \{0\}} J_{s,q,\Omega}^{\mathcal{N}}(u), \quad (21)$$

При $q < 2_s^*$ вложение $H^s(\Omega) \hookrightarrow L_q(\Omega)$ компактно, следовательно, в (21) инфимум положителен и достигается.

Аналогично определим функционал $J_{s,q,\Omega}^{\mathcal{D}}(u)$ и величину $\lambda_{s,q,\Omega}^{\mathcal{D}}$.

Теорема 4.2 (Теорема о концентрации). Пусть u_R — нормированные в $L_q(\Omega_R)$ минимайзеры функционала $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}$. Тогда последовательность u_R имеет ровно одну последовательность концентрации с весом $\lambda = 1$.

Доказательство. Прежде всего покажем, что $\|u_R\|_{H^s(\Omega_R)}$ равномерно ограничены. Зафиксируем $\rho > 0$ такое, что $\overline{B}_\rho \subset \Omega$, и функцию $v \in H^s(\Omega)$ с носителем \overline{B}_ρ , такую, что $\|v\|_{L_q(\Omega_R)} = \|v\|_{L_q(B_\rho)} = 1$. Определим функцию $w_0^{\mathcal{D}}$ как СТ-продолжение функции v для спектрального лапласиана Дирихле в области B_ρ (см. §2.2) и положим

$$w_0(x, t) = \begin{cases} w_0^{\mathcal{D}} & \text{в } B_\rho \times \mathbb{R}_+, \\ 0 & \text{в } (\Omega_R \setminus B_\rho) \times \mathbb{R}_+. \end{cases}$$

Тогда функция w_0 является \mathcal{N} -допустимым продолжением функции v в Ω_R , поэтому

$$[v]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 \leq C_s \mathcal{E}_{\Omega_R}(w_0) = C_s \mathcal{E}_{B_\rho}(w_0) = C(\rho, q).$$

Следовательно, $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_R) \leq J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}[v] \leq C(\rho, q)$. Применяя теорему 4.1, получаем, что функции u_R имеют хотя бы одну последовательность концентрации.

Предположим теперь, что для какой-то подпоследовательности u_R существуют две неэквивалентные последовательности концентрации x_R и y_R . Построим разделяющую их срезающую функцию η_{xy} (ее носитель имеет три компоненты связности).

Функция $\eta_{xy} u_R$ удовлетворяет условиям леммы 3.3, поэтому

$$[\eta_{xy} u_R]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 \leq [u_R]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + o_R(1), \quad \|\eta_{xy} u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^2 \geq 1 - o_\varepsilon(1). \quad (22)$$

Обозначим ω_x и ω_y компоненты связности $\text{supp}(\eta_{xy})$, содержащие соответственно x_R и y_R , и положим $\eta_x = \eta_{xy}|_{\omega_x}$, $\eta_y = \eta_{xy}|_{\omega_y}$ и $\eta_0 = \eta_{xy} - \eta_x - \eta_y$. Тогда функции $a = \eta_0 u_R$, $b = \eta_x u_R$ и $c = \eta_y u_R$ удовлетворяют условиям леммы 3.4, причем расстояния между их носителями неограниченно растут при $R \rightarrow \infty$. Следовательно, существует последовательность v_R , для которой

$$\|v_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 \leq \|\eta_{xy} u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 - C, \quad \|v_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q = \|\eta_{xy} u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q. \quad (23)$$

Объединяя (22) и (23), получим

$$\begin{aligned} J_{s,q,R}^{\mathcal{N}}(v_R) &= \frac{[v_R]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + \|v_R\|_{L_2(\Omega_R)}^2}{\|v_R\|_{L_q(\Omega_R)}^2} \\ &\leq ([u_R]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + \|u_R\|_{L_2(\Omega_R)}^2 - C + o_R(1))(1 + o_\varepsilon(1)) < \|u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 = J_{s,q,R}^{\mathcal{N}}(u_R), \end{aligned}$$

что противоречит минимальности $J_{s,q,R}^{\mathcal{N}}(u_R)$.

Таким образом, для последовательности u_R существует единственная последовательность концентрации x_R . Осталось показать, что ее вес равен 1.

Допустим, что $\lambda < 1$. Построим срезающую функцию η_R , как в лемме 3.3, и положим $\eta_{\mathbf{x}} = \eta_R|_{\omega_{\mathbf{x}}}$, $\eta_0 = \eta_R - \eta_{\mathbf{x}}$.

По формуле (4) имеем

$$\|\eta_0 u_R\|_{L^q(\Omega_R)}^q = 1 - \lambda + o_\varepsilon(1). \quad (24)$$

Кроме того, функция $\eta_0 u_R$ не имеет последовательностей концентрации и потому удовлетворяет условию (5).

Далее, леммы 3.2 и 3.3 дают

$$[\eta_0 u_R]_{\mathcal{N}, \Omega_R}^2 \leq [u_R]_{\mathcal{N}, \Omega_R}^2 + o_R(1) \|u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2,$$

откуда

$$\|\eta_0 u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 \leq \|u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2 (1 + o_R(1)) \leq C. \quad (25)$$

Но соотношения (25) и (24) означают, что для функции $\eta_0 u_R$ справедлива теорема 4.1, что противоречит (5). \square

5 Положительные периодические решения

5.1 Общая схема построения

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклый многогранник. Рассмотрим экстремальную задачу

$$J_{s,q,\Omega}^{\mathcal{N}}(u) \rightarrow \min, \quad u \in H^s(\Omega) \quad (26)$$

(напомним, что функционал $J_{s,q,\Omega}^{\mathcal{N}}(u)$ определен в (21)).

Как указано ранее, минимум в этой задаче достигается. Соответствующий минимайзер определен с точностью до мультипликативной постоянной и является обобщенным решением уравнения Эйлера–Лагранжа

$$(-\Delta)_{\mathcal{N}}^s u + u = \lambda |u|^{q-2} u \quad \text{в } \Omega, \quad (27)$$

где λ — множитель Лагранжа, зависящий от нормировки минимайзера.

Докажем вспомогательное утверждение.

Лемма 5.1. *Последовательность $\lambda_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}$, определенная в (21), ограничена и отделена от нуля при $R \rightarrow +\infty$.*

Доказательство. Ограниченность $\lambda_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}$ доказана в теореме 4.2. Для доказательства оценки снизу запишем предельную теорему вложения $H^s(\Omega) \hookrightarrow L_{2^*}(\Omega)$:

$$C(\Omega) \|v\|_{L_{2^*}(\Omega)}^2 \leq [v]_{\mathcal{N}, \Omega}^2 + \|v\|_{L_2(\Omega)}^2, \quad v \in H^s(\Omega).$$

После растяжения области получаем

$$R^{-\frac{2n}{2^*}} C(\Omega) \|v\|_{L_{2^*}(\Omega_R)}^2 \leq R^{-n+2s} [v]_{\mathcal{N}, \Omega_R}^2 + R^{-n} \|v\|_{L_2(\Omega_R)}^2, \quad v \in H^s(\Omega_R),$$

откуда при $R > 1$ получаем

$$C(\Omega)\|v\|_{L_{2^*}(\Omega_R)}^2 \leq [v]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + R^{-2s}\|v\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq [v]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + \|v\|_{L_2(\Omega_R)}^2, \quad v \in H^s(\Omega_R).$$

С учетом очевидного $\|v\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq [v]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + \|v\|_{L_2(\Omega_R)}^2$ неравенство Гельдера дает

$$\min\{1, C(\Omega)\} \cdot \|v\|_{L_q(\Omega_R)}^2 \leq [v]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + \|v\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \implies \lambda_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}} \geq \min\{1, C(\Omega)\}. \quad \square$$

Если нормировать минимайзер условием $\|u\|_{L_q(\Omega_R)} = (\lambda_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}})^{\frac{1}{q-2}}$, то в (27) $\lambda = 1$, и мы получаем обобщенное решение уравнения

$$(-\Delta)_{\mathcal{N}}^s u + u = |u|^{q-2}u \quad \text{в } \Omega_R. \quad (28)$$

Это решение мы будем называть **решением уравнения (28) с наименьшей энергией**.

Известно (см. [17, теорема 3]²), что при $s \in (0, 1)$ для любой знакопеременной функции $v \in H^s(\Omega)$ справедливо неравенство $[|v|]_{\mathcal{N},\Omega}^2 < [v]_{\mathcal{N},\Omega}^2$. Поэтому решение уравнения (28) с наименьшей энергией можно считать неотрицательным в Ω_R .

Доказательство следующей леммы, хотя и состоит из достаточно стандартных ингредиентов, но довольно длинно. Для удобства читателя оно приводится в Приложении.

Лемма 5.2. *Пусть u — неотрицательное решение уравнения (28) в Ω_R . Тогда в любой строго внутренней подобласти ω (т.е. такой, что $\bar{\omega} \subset \Omega_R$) функция u не обращается в нуль и является бесконечно гладкой.*

Таким образом, можно считать, что $u > 0$ в Ω_R .

Лемма 5.3. *Пусть u — произвольное решение уравнения (28) в Ω_R , $w^{\mathcal{N}}$ — СТ-продолжение функции u . Рассмотрим “удвоенную” область $\tilde{\Omega}_R$, получающуюся объединением Ω_R с одной из граней Γ и с областью, полученной из Ω_R зеркальным отражением относительно Γ .*

Определим функцию \tilde{u} , продолжив u на $\tilde{\Omega}_R$ четным отражением относительно Γ . Тогда СТ-продолжением функции \tilde{u} является функция $\tilde{w}^{\mathcal{N}}$, получающаяся из $w^{\mathcal{N}}$ четным отражением относительно $\Gamma \times \mathbb{R}_+$, а функция \tilde{u} является решением уравнения (28) в $\tilde{\Omega}_R$.

Доказательство. В силу условия Неймана на $\Gamma \times \mathbb{R}_+$ функция $\tilde{w}^{\mathcal{N}}$ имеет вторые соболевские производные в полуцилиндре $\tilde{\Omega}_R \times \mathbb{R}_+$. Отсюда легко видеть, что она является обобщенным, а ввиду эллиптической регулярности — и классическим решением задачи Неймана для уравнения (8) в этом полуцилиндре, и потому является СТ-продолжением функции \tilde{u} .

Теперь уравнение (28) для \tilde{u} в $\tilde{\Omega}_R$ следует из (11). □

Предположим теперь, что многогранник Ω обладает следующим свойством: пространство может быть заполнено его отражениями, раскрашенными в шахматном порядке³. Такую область будем называть фундаментальной.

Несложно видеть, что если Ω — фундаментальная область, то и Ω_R — фундаментальная область, и четными отражениями, описанными в лемме 5.3, решение уравнения (28) с наименьшей энергией в Ω_R продолжается до функции в \mathbb{R}^n (обозначим ее \mathbf{u}).

²Эта теорема доказана для лапласианов Дирихле (спектрального и суженного), но, как указано в [28, предложение 1], доказательство без изменений проходит для спектрального лапласиана Неймана.

³Например, в \mathbb{R}^2 этому условию удовлетворяют следующие фигуры: прямоугольники, правильные треугольники, равнобедренные прямоугольные треугольники и прямоугольные треугольники с острым углом $\pi/6$.

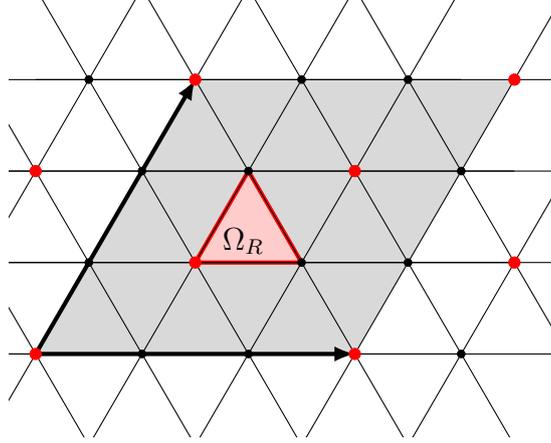


Рис. 1: Ячейка периодичности Ω выделена серым цветом.

Теорема 5.1. *Функция \mathbf{u} является положительным решением уравнения (1) в \mathbb{R}^n .*

Доказательство. Группа симметрий, порождаемая отражениями фундаментальной области, является кристаллографической и, согласно теореме Шёнфлиса-Бибераха [3, Гл. 3, § 1], содержит n линейно независимых параллельных переносов. Поэтому функция \mathbf{u} будет периодической. Очевидно, что в качестве периодической ячейки Ω можно выбрать многогранник, состоящей из конечного числа отраженных фундаментальных областей, объединенных с внутренними гранями (см. рис. 1 для равностороннего треугольника в \mathbb{R}^2)⁴.

В силу леммы 5.3 функция $v := \mathbf{u}|_{\Omega}$ — решение уравнения (28) в Ω . Применяя лемму 5.2 в Ω , получим, что $u_R > 0$ в $\bar{\Omega}_R$, т.е. \mathbf{u} бесконечно гладкая и положительная в \mathbb{R}^n .

Пусть μ_j и φ_j — собственные числа и ортонормированные собственные функции оператора Лапласа в области Ω . Так как функция v получена из u_R отражениями, в ее разложении по системе функций φ_j , участвуют только те φ_j , которые получены отражениями из собственных функций в исходной области Ω_R и потому удовлетворяют периодическим граничным условиям. Поэтому они представимы в виде линейных комбинаций мнимых экспонент:

$$\varphi_j(x) = \sum_{k=1}^{N_j} c_k \exp(i\langle x, a_k \rangle),$$

где $|a_k|^2 = \mu_j$ не зависит от k .

Таким образом, ряд Фурье для функции v по системе $\{\varphi_j\}$ можно переразложить по экспонентам. Поскольку v инвариантна относительно сдвигов, порождающих Ω , соответствующие экспоненты также инвариантны относительно этих сдвигов, и потому ряд Фурье для v продолжается до разложения \mathbf{u} в \mathbb{R}^n :

$$v = \sum_{j=0}^{+\infty} (v, \varphi_j)_{\Omega} \varphi_j \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{u} = \sum_{j=0}^{+\infty} (v, \varphi_j)_{\Omega} \varphi_j. \quad (29)$$

Заметим теперь, что

$$\mathcal{F}[\exp(i\langle x, a_k \rangle)](\xi) = \mathfrak{C} \delta(\xi - a_k)$$

⁴В общем случае Ω не обязана быть параллелепипедом.

(константа \mathfrak{C} зависит от нормировки преобразования Фурье), и потому

$$|\xi|^{2s} \mathcal{F}\varphi_j(\xi) = \mathfrak{C}|\xi|^{2s} \sum_{k=1}^{N_j} c_k \delta(\xi - a_k) = \mathfrak{C}\mu_j^s \sum_{k=1}^{N_j} c_k \delta(\xi - a_k) = \mu_j^s \mathcal{F}\varphi_j(\xi).$$

Отсюда и из (29) получаем

$$((-\Delta)^s \mathbf{u})|_{\Omega} = \sum_{j=0}^{+\infty} (v, \varphi_j)_{\Omega} \mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{2s} \mathcal{F}\varphi_j)|_{\Omega} = \sum_{j=1}^{+\infty} (v, \varphi_j)_{\Omega} \mu_j^s \varphi_j|_{\Omega} = (-\Delta)_{\mathcal{N}}^s v$$

(возможность почленного применения оператора гарантируется гладкостью функции \mathbf{u}), что и доказывает теорему. \square

Замечание 5. Так как функция \mathbf{u} гладкая и ограниченная, для нее справедливо хорошо известное представление

$$((-\Delta)^s \mathbf{u})(x) \equiv \frac{2^{2s} s}{\pi^{\frac{n}{2}}} \frac{\Gamma(\frac{n+2s}{2})}{\Gamma(1-s)} \cdot V.P. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathbf{u}(x) - \mathbf{u}(y)}{|x-y|^{n+2s}} dy.$$

Таким образом, начав с решения уравнения (28) в фундаментальной области, мы можем построить периодическое решение уравнения (1) в \mathbb{R}^n .

Как устроено полученное решение? В работе [27] показано, что для любой липшицевой области Ω при малых значениях R решение уравнения (28) в Ω_R с наименьшей энергией — константа, но при достаточно больших R это решение не постоянно.

В следующих пунктах мы покажем, как изложенным методом получать решения с различными периодическими структурами. При этом мы отчасти следуем рассуждениям из [12].

5.2 Прямоугольные и треугольные структуры в \mathbb{R}^2

Для произвольного фиксированного $\alpha \geq 1$ рассмотрим задачу (28) в прямоугольнике Ω_R со сторонами R и αR . Согласно теореме 4.2, при $R \rightarrow +\infty$ последовательность решений с наименьшей энергией имеет единственную последовательность концентрации x_R с единичным весом. Переходя при необходимости к подпоследовательности, получаем три возможных варианта:

1. Расстояние между x_R и одной из вершин прямоугольника ограничено.
2. Расстояние между x_R и вершинами прямоугольника не ограничено, но ограничено расстояние между x_R и одной из сторон прямоугольника.
3. Расстояние между x_R и $\partial\Omega_R$ не ограничено.

В силу замечания 1 мы можем перейти к эквивалентной последовательности концентрации. В первом случае будем считать, что x_R совпадает с одной из вершин, а во втором — лежит на стороне прямоугольника. Кроме того, будем считать, что во втором случае $\rho_R \rightarrow +\infty$ меньше, чем расстояние до ближайшей вершины прямоугольника. В третьем случае считаем, что $\rho_R < \text{dist}(x_R, \partial\Omega_R)$. Таким образом, множество $B_{\rho_R}(x_R) \cap \Omega_R$ представляет собой четверть круга в первом случае, половину круга во втором случае, целый круг в третьем случае (рис. 2).

Доказательство следующей леммы проводится по схеме [12, §3.2]. Для удобства читателя оно приводится в Приложении.

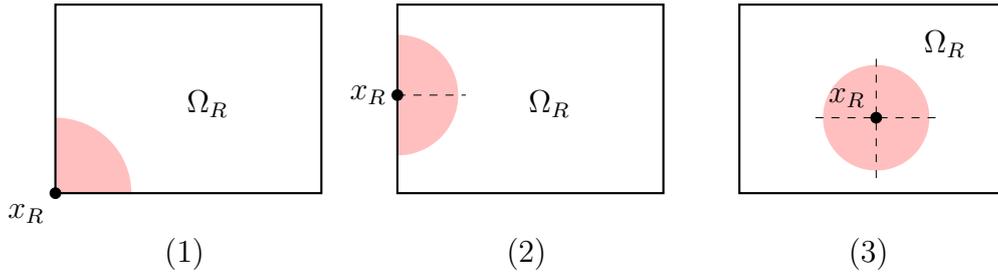


Рис. 2:

Лемма 5.4. При $R \rightarrow +\infty$ для любой подпоследовательности реализуется вариант 1, т.е. при достаточно больших R точки концентрации расположены в углу прямоугольника.

Описанным в п.5.1 методом распространим функцию u_R на всю плоскость. Тогда соответствующая функция \mathbf{u} будет положительным периодическим решением уравнения (1) с прямоугольной структурой, изображенной на рис. 3 (здесь и далее красным цветом отмечены точки концентрации).

Важно отметить, что при фиксированном α построенные решения с различными (достаточно большими) R существенно различны, т.е. не могут быть получены друг из друга растяжением координат и домножением на константу (поскольку уравнение (1) не инвариантно относительно таких преобразований).

Теперь рассмотрим случай, когда Ω_R — правильный треугольник со стороной R . Повторяя доказательство леммы 5.4, получим, что при достаточно больших R точка концентрации для решений u_R расположена в вершине треугольника.

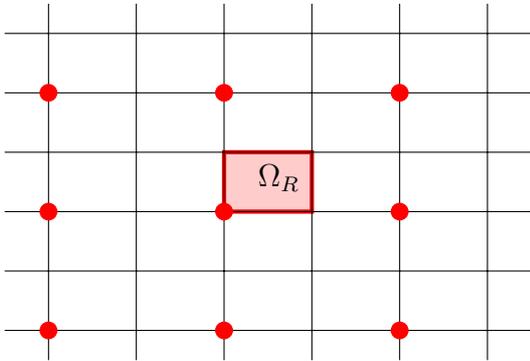


Рис. 3:

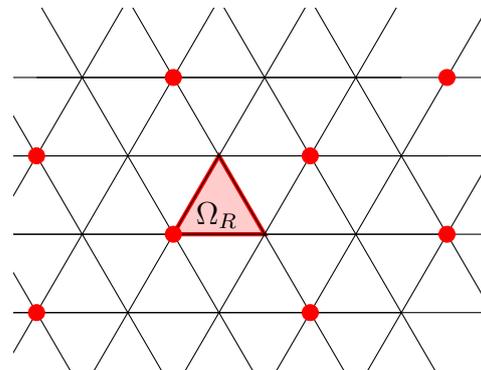


Рис. 4:

Распространяя функцию u_R на всю плоскость, получим положительное периодическое решение уравнения (1) с треугольной структурой, изображенной на рис. 4. Для различных (достаточно больших) R построенные решения существенно различны.

Заметим, что если в качестве Ω_R взять равнобедренный прямоугольный треугольник с катетом R , соответствующее решение совпадает с решением, полученным из квадрата.

5.3 Гексагональные структуры в \mathbb{R}^2

Другие структуры можно получить, если в качестве Ω_R взять треугольник с углами $X = \pi/6$, $Y = \pi/3$, $Z = \pi/2$ и гипотенузой длины R . При этом метод, изложенный ра-

нее, требует модификации, поскольку решения уравнения (28) с наименьшей энергией при $R \rightarrow +\infty$ концентрируются в вершине треугольника X , соответствующей наименьшему углу. Распространяя это решение в \mathbb{R}^2 , мы получили бы такую же периодическую структуру, что и для равностороннего треугольника (рис. 4).

Следуя методу, предложенному в [12] для локальной задачи ($s = 1$), рассмотрим экстремальную задачу (26) с дополнительным ограничением

$$\int_{X_R} |u|^q dx \leq \theta_q \int_{\Omega_R} |u|^q dx, \quad (30)$$

где $X_R = \Omega_R \cap B_{R/4}(X)$ (см. рис. 5) и $\theta_q \in (0, 1)$ — некоторое фиксированное значение, зависящее только от q .

Те же аргументы, что и ранее, позволяют заключить, что в этом случае минимизирующая функция существует, определена с точностью до мультипликативной постоянной и неотрицательна в Ω_R ⁵.

Лемма 5.5. Пусть u_R — минимайзеры функционала J_{s,q,Ω_R}^N , удовлетворяющие дополнительному условию (30). Существует θ_q такое, что при $R \rightarrow +\infty$ функции u_R имеют единственную последовательность концентрации $x_R = Y$ с весом $\lambda = 1$.

Доказательство этой леммы проводится по схеме [12, §3.4] и также приводится в Приложении.

Из леммы 5.5 немедленно следует, что $\int_{X_R} |u|^q dx \rightarrow 0$ при $R \rightarrow +\infty$. Это означает, что при больших R ограничение (30) в экстремальной задаче неактивно, и минимизирующая функция является решением уравнения Эйлера–Лагранжа (27), а после соответствующей перенормировки — решением уравнения (28).

Теперь можно применить лемму 5.2, а затем распространить решение в \mathbb{R}^2 . Мы получим положительное периодическое решение уравнения (1) с гексагональной структурой, изображенной на рис. 6.

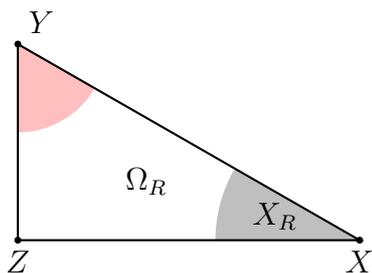


Рис. 5:

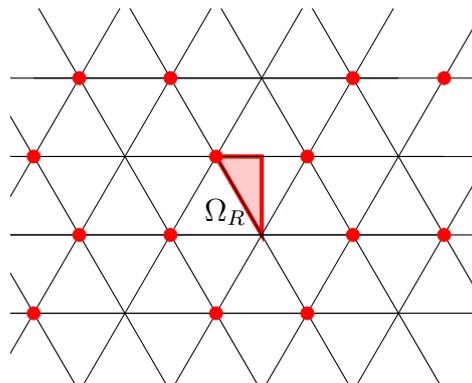


Рис. 6:

Аналогично, если рассмотреть вариационную задачу (21) с двумя дополнительными ограничениями

$$\int_{X_R} |u|^q dx \leq \theta_q \int_{\Omega_R} |u|^q dx, \quad \int_{Y_R} |u|^q dx \leq \theta_q \int_{\Omega_R} |u|^q dx,$$

⁵Лемма 5.2 пока что не применима, поскольку минимайзер в задаче с ограничением (30) не обязан быть решением уравнения (28).

то существует такое значение $\theta_q \in (0, 1)$, что при достаточно больших R точка концентрации минимизирующих функций u_R с весом $\lambda = 1$ находится в углу Z (рис. 7). Это приводит к положительному решению уравнения (1), структура которого изображена на рис. 8.

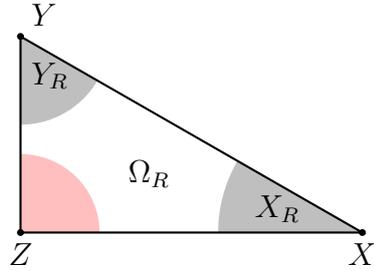


Рис. 7:

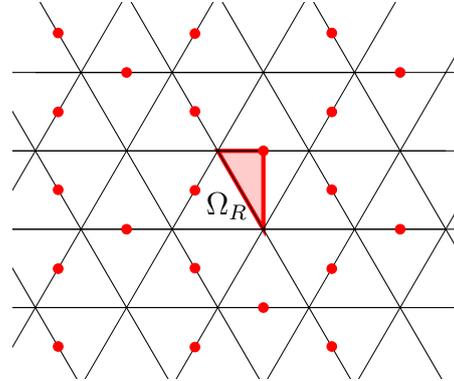


Рис. 8:

Для обеих структур при различных (достаточно больших) R построенные решения существенно различны.

5.4 Периодические структуры в \mathbb{R}^n

Метод, изложенный выше, проходит в пространстве любой размерности $n \geq 2$. В качестве Ω_R при этом можно взять декартово произведение фундаментальных областей в пространствах меньших размерностей.

На рис. 9 и 10 приведены схемы положительных решений уравнения (1) в \mathbb{R}^3 , которые получаются для фундаментальной области — прямоугольного параллелепипеда и правильной треугольной призмы соответственно.

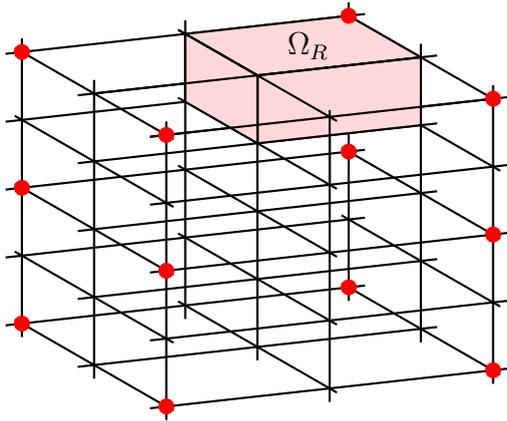


Рис. 9:

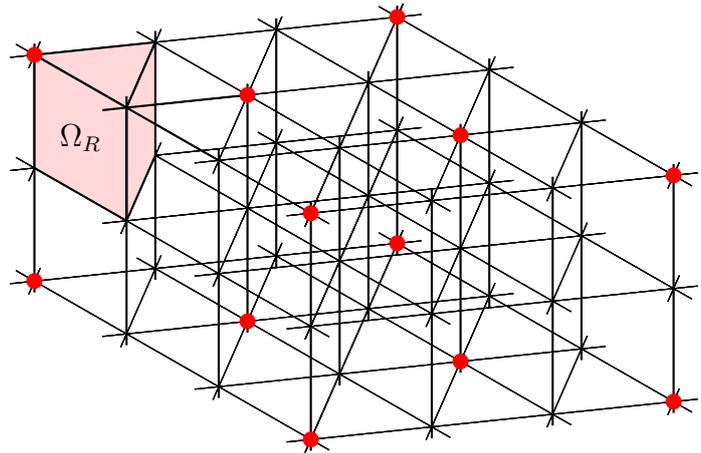


Рис. 10:

6 Другие решения

6.1 Бризеры

Бризерами (breathers, “дышащие” решения) называют решения, локализованные (убывающие на бесконечности) в одном направлении и периодические в другом. Для построения таких решений в \mathbb{R}^2 мы рассмотрим экстремальную задачу (26) в полосе $\Omega_R = (-R, R) \times \mathbb{R}$.

Поскольку вложение $H^s(\Omega_R) \hookrightarrow L_q(\Omega_R)$ некомпактно, для начала убедимся, что при фиксированном R минимум достигается. Доказательство этого факта стандартно, но мы приведем его для полноты изложения.

Пусть u_j — минимизирующая последовательность, нормированная в $L_q(\Omega_R)$. Повторяя доказательство теорем 4.1 и 4.2, получаем, что u_j имеют единственную последовательность x_j концентрации с весом $\lambda = 1$.

Поскольку функционал $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}$ инвариантен относительно сдвига вдоль полосы, можно считать, что $x_j = 0$. Из (4) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\rho > 0$ такое, что

$$\limsup_j \|u_j\|_{L_q(\Omega_R \setminus B_\rho)} < \varepsilon.$$

Далее, переходя к подпоследовательности, можно считать, что $u_j \rightarrow u_R$ слабо в $H^s(\Omega_R)$. Ввиду локальной компактности вложения $u_j \rightarrow u_R$ сильно в $L_q(\Omega_R \cap B_\rho)$. Увеличив при необходимости ρ , можно считать, что $\|u_R\|_{L_q(\Omega_R \setminus B_\rho)} < \varepsilon$. Поэтому в силу неравенства треугольника

$$\limsup_j \|u_j - u_R\|_{L_q(\Omega_R)} < 2\varepsilon \implies \|u_R\|_{L_q(\Omega_R)} = 1.$$

Осталось заметить, что числитель выражения для $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}$ — выпуклая функция, и поэтому

$$J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_R) = [u_R]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + \|u_R\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq \liminf_j ([u_j]_{\mathcal{N},\Omega_R}^2 + \|u_j\|_{L_2(\Omega_R)}^2) = \liminf_j J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_j),$$

т.е. u_R — минимайзер $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}$.

Аналогично лемме 5.4 показывается, что при $R \rightarrow +\infty$ точки концентрации для u_R лежат на краю полосы (см. рис. 11). Нормируя минимайзеры подходящим образом и распространяя решение в \mathbb{R}^2 , мы получим положительное решение-бризер уравнения (1), структура которого изображена на рис. 12.

Замечание 6. Несложно видеть, что полученное решение имеет две оси симметрии.

Аналогично строятся решения типа бризера в \mathbb{R}^n . При этом, например, в \mathbb{R}^3 можно построить как решения, периодические по одной переменной и локализованные по двум другим, так и решения, образующие одну из рассмотренных выше периодических структур по двум переменным и локализованные по третьей.

6.2 Знакопеременные решения

Рассмотрим теперь в фундаментальной области Ω_R экстремальную задачу

$$J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{D}}(u) \rightarrow \min, \quad u \in \tilde{H}^s(\Omega_R),$$

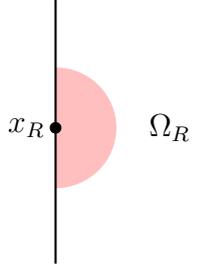


Рис. 11:

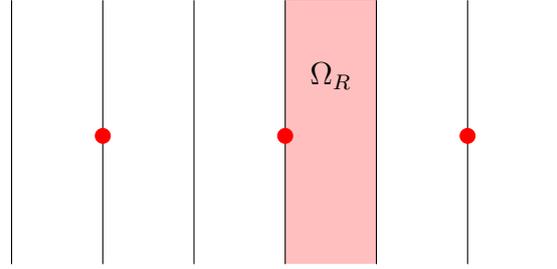


Рис. 12:

(напомним, что функционал $J_{s,q,\Omega}^{\mathcal{D}}(u)$ определен перед теоремой 4.2). Аналогично п.5.1, минимум в этой задаче достигается, минимайзер положителен в Ω_R и после домножения на подходящую константу является решением (с наименьшей энергией) уравнения

$$(-\Delta)_{\mathcal{D}}^s u + u = |u|^{q-2}u \quad \text{в } \Omega_R. \quad (31)$$

Несложно видеть, что для уравнения (31) справедлив следующий аналог леммы 5.3.

Лемма 6.1. Пусть u — произвольное решение уравнения (31) в Ω_R , $w^{\mathcal{D}}$ — соответствующее СТ-продолжение функции u . Рассмотрим “удвоенную” область $\tilde{\Omega}_R$, получающаяся объединением Ω_R с одной из граней Γ и с областью, полученной из Ω_R зеркальным отражением относительно Γ .

Определим функцию \tilde{u} , продолжив u на $\tilde{\Omega}_R$ нечетным отражением относительно Γ . Тогда СТ-продолжением функции \tilde{u} является функция $\tilde{w}^{\mathcal{D}}$, получающаяся из $w^{\mathcal{D}}$ нечетным отражением относительно $\Gamma \times \mathbb{R}_+$, а функция \tilde{u} является решением уравнения (31) в Ω_R .

Продолжая процесс нечетного отражения, можно распространить решение уравнения (31) с наименьшей энергией на все пространство. Повторяя доказательство теоремы 5.1, видим, что полученная функция \mathbf{u} будет периодическим знакопеременным решением уравнения (1) в \mathbb{R}^n .

Отметим, что в данном случае для различных фундаментальных областей получаются различные структуры независимо от наличия и локализации точек концентрации у решения в фундаментальной области. Однако, поскольку теорема 4.2 верна для дробного лапласиана Дирихле, можно показать, что решение с наименьшей энергией имеет единственную точку концентрации в Ω_R при достаточно больших R .

На рис. 13–16 изображены схемы решений в \mathbb{R}^2 для прямоугольных и треугольных фундаментальных областей. Эти решения образуют соответственно прямоугольные, шести-, восьми- и двенадцатиугольные структуры.

Аналогично п.6.1, исходя из уравнения (31) в полосе, можно построить знакопеременное решение уравнения (1) типа бризера. Его схема приведена на рис. 17 (здесь красным и синим цветом отмечены точки концентрации соответственно в областях положительности и отрицательности решения).

Для прямоугольной области возникает дополнительная возможность⁶. Введем оператор $(-\Delta)_{\mathcal{D}\mathcal{N}}^s$ как s -ю степень оператора Лапласа с условием Дирихле на двух противоположных сторонах прямоугольника Ω_R и условием Неймана на двух других сторонах.

⁶Несложно показать (ср. [12, п. 3.6]), что для треугольной фундаментальной области, взяв смешанные граничные условия, мы либо не сможем распространить полученное решение в \mathbb{R}^2 , либо получим одну из указанных ранее структур.

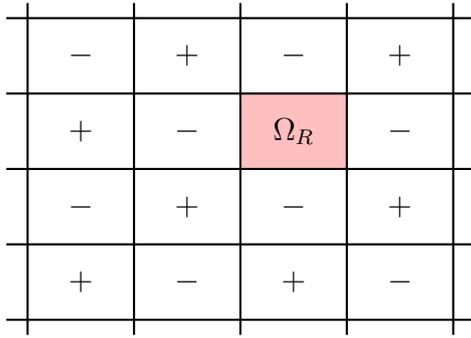


Рис. 13:

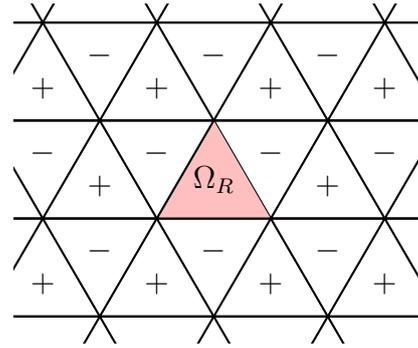


Рис. 14:

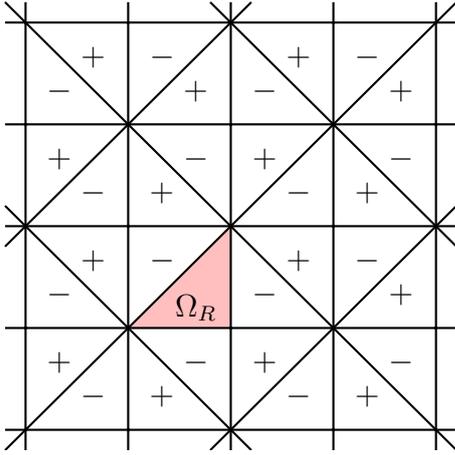


Рис. 15:

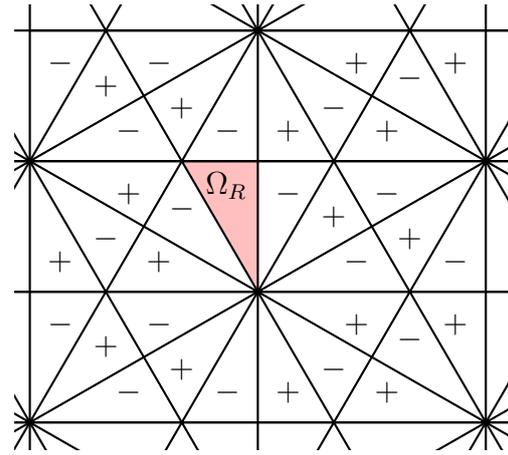


Рис. 16:

Построим решение уравнения

$$(-\Delta)_{\mathcal{DN}}^s u + u = |u|^{q-2}u \quad \text{в } \Omega_R$$

с наименьшей энергией и распространим его на \mathbb{R}^2 чётно-нечётными отражениями. Получится решение уравнения (1) со структурой, изображенной на рис. 18.

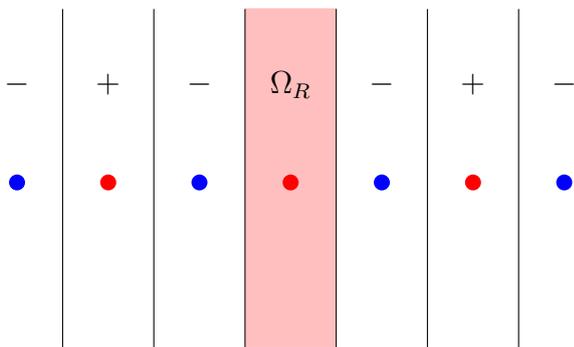


Рис. 17:

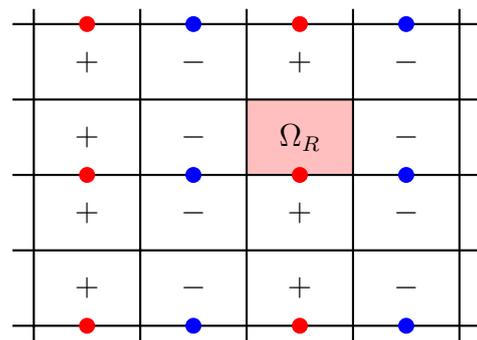


Рис. 18:

Знакопеременные решения уравнения (1) в \mathbb{R}^n строятся аналогично п.5.4.

6.3 Косоугольные квазипериодические структуры

Новые классы решений (вообще говоря, комплекснозначных), обобщающие прямоугольные структуры из п.5.2, можно получить, выбрав в качестве Ω произвольный параллелограмм в \mathbb{R}^2 и используя другие дробные лапласианы в Ω_R .

Пусть h_1 и h_2 – векторы, на которые натянут параллелограмм Ω_R . Построим в Ω_R семейство лапласианов $(-\Delta)_z$ с **квазипериодическими** граничными условиями, зависящими от комплексного векторного параметра $z = (z_1, z_2)$, где $|z_1| = |z_2| = 1$:

$$u(x + h_k) = z_k u(x), \quad \frac{\partial u(x + h_k)}{\partial h_k} = z_k \frac{\partial u(x)}{\partial h_k}, \quad k = 1, 2. \quad (32)$$

Очевидно, что все эти операторы положительно определены, за исключением случая $z_1 = z_2 = 1$, когда условия (32) периодические.

Введем оператор $(-\Delta)_z^s$ как s -ю степень оператора Лапласа с граничными условиями (32) и рассмотрим решение уравнения

$$(-\Delta)_z^s u + u = |u|^{q-2} u \quad \text{в } \Omega_R \quad (33)$$

с наименьшей энергией⁷. Согласно общему результату [25], для оператора $(-\Delta)_z^s$ также существует продолжение Стинга–Торреа (см. также [22], где рассмотрен дробный лапласиан на торе), и доказательства из §4 проходят без существенных изменений. Таким образом, при достаточно больших R в Ω_R имеется единственная точка концентрации. Сдвигая при необходимости параллелограмм периодов, мы можем считать, что эта точка расположена внутри области Ω_R . Продолжая это решение квазипериодически на всю плоскость, мы получим решение уравнения (1).

Заметим, что при $z_1 = z_2 = 1$ мы получаем периодическое решение, которое можно считать положительным аналогично лемме 5.2. Его структура изображена на рис. 19 (если Ω_R – прямоугольник, то она совпадает со структурой на рис. 4).

Аналогично, если $z_1 = z_2 = -1$, то получается знакопеременное решение, структура которого изображена на рис. 20 (если Ω_R – прямоугольник, то она совпадает со структурой на рис. 13). Мы предполагаем, что области постоянного знака на рис. 20 являются параллелограммами, но в общем случае этот вопрос открыт.

В случае $z_1 = 1, z_2 = -1$ получается знакопеременное решение со структурой, изображенной на рис. 21 (для прямоугольника она совпадает со структурой на рис. 18).

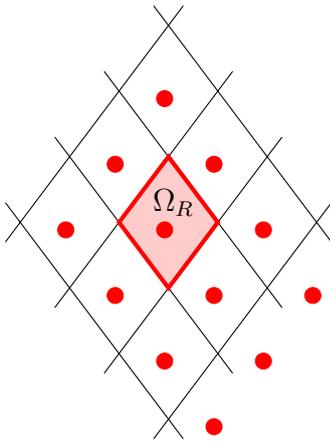


Рис. 19:

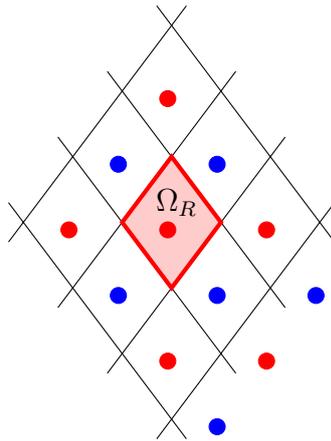


Рис. 20:

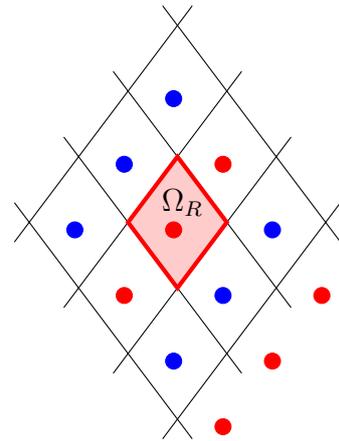


Рис. 21:

Аналогичным способом на плоскости можно построить (однопараметрическое) семейство квазипериодических решений типа бризера.

⁷Уравнение (33) представляет интерес даже в простейшем (локальном и одномерном) случае $n = 1, s = 1$. В этом случае оно исследовалось в нескольких работах, см. недавний обзор [18] и цитируемую там литературу.

В пространстве размерности $n \geq 3$ для любого параллелепипеда Ω_R можно построить n -параметрическое семейство квазипериодических решений, а также комбинировать различные структуры в пространствах меньших размерностей.

6.4 Радиальные решения

Как упоминалось во введении, существование и свойства радиальных решений уравнения (1) (в основном положительных) исследовались многими авторами. Для полноты картины мы докажем здесь существование одного положительного и счетного числа знакопеременных решений.

Следующее утверждение доказывается в Приложении.

Лемма 6.2. *Пространство \mathcal{H}^s радиальных функций из $H^s(\mathbb{R}^n)$ компактно вложено в $L_q(\mathbb{R}^n)$ при $q \in (2, 2_s^*)$.*

Из леммы 6.2 следует, что функционал $I_q[u] = \|u\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}^q$ слабо непрерывен в \mathcal{H}^s . Поэтому он достигает максимума на сфере

$$\mathcal{S}_{s,a} = \{u \in \mathcal{H}^s \mid \|u\|_{\mathcal{H}^s} = a\}$$

при любом $a > 0$. Более того, очевидно, что I_q удовлетворяет и остальным условиям леммы 2.2 и потому имеет по крайней мере счетное число критических точек на сфере $\mathcal{S}_{s,a}$. Любая такая критическая точка удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{q-2} u h \, dx = \lambda \int_{\mathbb{R}^n} (|\xi|^{2s} + 1) \mathcal{F}u(\xi) \overline{\mathcal{F}h(\xi)} \, d\xi = \lambda ((-\Delta)^s u + u, h)_{\mathbb{R}^n}, \quad h \in \mathcal{H}^s, \quad (34)$$

где λ — множитель Лагранжа, который с помощью подходящего выбора a можно сделать равным 1.

По принципу симметричной критичности (см. [20]) тождество (34) выполнено для всех $h \in H^s(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, u является обобщенным (а потому и классическим) решением уравнения (1).

Осталось заметить, что согласно [17, теорема 3] решение, соответствующее максимальному значению I_q , не может менять знак. Аналогично лемме 5.2, оно бесконечно гладкое и не обращается в нуль в \mathbb{R}^n .

Приложение

Доказательство леммы 5.2

Обозначим $w^{\mathcal{N}}$ СТ-продолжение функции u и построим еще одно продолжение следующим образом. Продолжим функцию u на все пространство до функции $\bar{u} \in H^s(\mathbb{R}^n)$ с носителем в шаре достаточно большого радиуса и определим \hat{u} как решение уравнения $(-\Delta)^s \hat{u} = \bar{u}^{q-1} - \bar{u}$ в \mathbb{R}^n :

$$\hat{u}(x) = C_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{(\bar{u}^{q-1}(z) - \bar{u}(z)) \, dz}{|x - z|^{n-2s}}. \quad (35)$$

Теперь построим обобщенное гармоническое продолжение (продолжение Каффарелли–Сильвестра, см. [4]) \widehat{w} для функции \widehat{u} :

$$\widehat{w}(x, t) = \widehat{C}_{n,s} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{t^{2s} \widehat{u}(z) dz}{(|x - z|^2 + t^2)^{\frac{n+2s}{2}}}.$$

Это продолжение удовлетворяет уравнению (8) в полупространстве $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ и граничному условию $\widehat{w}|_{t=0} = \widehat{u}$. Кроме того, аналогично (11),

$$(-\Delta)^s \widehat{u} = -C_s \cdot \lim_{t \rightarrow +0} t^{1-2s} \partial_t \widehat{w}(\cdot, t) \quad \text{в } \mathbb{R}^n. \quad (36)$$

Таким образом, для разности $w^{\mathcal{N}} - \widehat{w}$ справедливы соотношения

$$-\operatorname{div} (t^{1-2s} (\nabla w^{\mathcal{N}}(x, t) - \nabla \widehat{w}(x, t))) = 0 \quad \text{в } \Omega_R \times \mathbb{R}_+,$$

$$\lim_{t \rightarrow +0} t^{1-2s} \partial_t (w^{\mathcal{N}}(x, t) - \widehat{w}(x, t)) = C_s^{-1} ((\bar{u}^{q-1} - \bar{u}) - (u^{q-1} - u)) = 0 \quad \text{в } \Omega_R,$$

и потому разность $u - \widehat{u} = (w^{\mathcal{N}} - \widehat{w})|_{t=0}$ есть бесконечно гладкая функция в любой строго внутренней подобласти.

Обратимся теперь к представлению (35). По теореме вложения имеем $u \in L_{2_s^*}(\Omega_R)$, и потому $\bar{u}^{q-1} - \bar{u} \in L_p(\Omega_R)$, где $p = \frac{2_s^*}{q-1} > \frac{2n}{n+2s}$. Неравенство Харди–Литтлвуда–Соболева (см., напр., [24, Ч. V, теорема 1]) дает $\widehat{u} \in L_{m,\text{loc}}(\Omega_R)$, где $m = \frac{np}{n-2sp} > 2_s^*$. Но тогда и $u \in L_{m,\text{loc}}(\Omega_R)$, и потому $\bar{u}^{q-1} - \bar{u} \in L_{p_1,\text{loc}}(\Omega_R)$, где $p_1 > p$.

Повторяя это рассуждение, за конечное число шагов получаем $\bar{u}^{q-1} - \bar{u} \in L_{p_k,\text{loc}}(\Omega_R)$ с некоторым $p_k > \frac{n}{2s}$ (если $2s > 1$, то можно не умаляя общности считать, что $p_k < \frac{n}{2s-1}$). Согласно [24, Ч. V, теорема 5] и [24, Ч. V, 6.7a)] отсюда следует, что \widehat{u} (а потому и u) удовлетворяет условию Гельдера в любой строго внутренней подобласти.

Продолжая итерации с использованием свойств потенциалов Рисса [24, Ч. V, теорема 4], мы увеличиваем гладкость u . Заметим, что при q близких к 2 негладкость функции $u \mapsto u^{q-1}$ пока что не дает получить высокую гладкость. Однако за конечное число шагов мы достигнем $\bar{u}^{q-1} - \bar{u} \in \mathcal{C}_{\text{loc}}^{1,\varepsilon}(\Omega_R)$ с некоторым $\varepsilon > 0$, откуда $\widehat{u} \in \mathcal{C}_{\text{loc}}^{1,2s+\varepsilon}(\Omega_R)$, если $2s < 1$, и $\widehat{u} \in \mathcal{C}_{\text{loc}}^{2,2s-1+\varepsilon}(\Omega_R)$, если $2s \geq 1$ (ср. [23, Proposition 2.8]).

Согласно [4, п. 3.1], этой гладкости достаточно, чтобы соотношение (36), а потому и первое из соотношений (11), в области Ω_R выполнялось поточечно.

Заметим теперь, что по принципу максимума $w^{\mathcal{N}} > 0$ на $\Omega_R \times \mathbb{R}_+$. Если u обращается в нуль в точке $x \in \Omega_R$, то ввиду (28) имеем $(-\Delta)_{\mathcal{N}}^s u(x) = 0$. Однако применяя к функции $w^{\mathcal{N}}(x, y^{\frac{1}{2s}})$ лемму о нормальной производной (см. [9]), в силу (11) получим противоречие:

$$0 < 2s \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{w^{\mathcal{N}}(x, t) - w^{\mathcal{N}}(x, 0)}{t^{2s}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} t^{1-2s} \partial_t w^{\mathcal{N}}(x, t) = -C_s^{-1} (-\Delta)_{\mathcal{N}}^s u(x).$$

Наконец, поскольку функция $u \mapsto u^{q-1}$ гладкая при $u > 0$, мы можем продолжить повышение гладкости и закончить доказательство. \square

Доказательство леммы 5.4

Допустим, что для некоторой подпоследовательности реализуется вариант 3. Обозначим u_R нормированный в $L_q(\Omega_R)$ минимайзер $J_{s,q}^{\mathcal{N}}(\Omega_R)$. Определим срезающие функции

$$\eta_1(x) = \eta\left(\frac{|x - x_R|}{\rho_R}\right), \quad \eta_2(x, t) = \eta_1(x) \eta\left(\frac{t}{\rho_R}\right).$$

Положим $h_R = \eta_1 u_R$ и обозначим w_R^N СТ-продолжение функции u_R . Далее, пусть \widehat{h}_R — симметричная перестановка функции h_R относительно точки x_R , а \widehat{w}_R^N — соответствующая симметричная перестановка функции $\eta_2 w_R^N$ по переменной x .

Заметим, что функция \widehat{w}_R^N является допустимым \mathcal{N} -продолжением функции \widehat{h}_R в Ω_R . Далее, хорошо известно (см., напр., [10, II.9, теорема 2.31]), что симметричная перестановка уменьшает интеграл энергии, т.е. $\mathcal{E}_{\Omega_R}(\widehat{w}_R^N) \leq \mathcal{E}_{\Omega_R}(\eta_2 w_R^N)$. Используя лемму 3.1, имеем

$$[\widehat{h}_R]_{\mathcal{N}, \Omega_R}^2 \leq C_s \mathcal{E}_{\Omega_R}(\widehat{w}_R^N) \leq C_s \mathcal{E}_{\Omega_R}(\eta_2 w_R^N) \leq [u_R]_{\mathcal{N}, \Omega_R}^2 + o_R(1).$$

С другой стороны, $\|\widehat{h}_R\|_{L_2(\Omega_R)} = \|h_R\|_{L_2(\Omega_R)} \leq \|u_R\|_{L_2(\Omega_R)}$ и

$$\|\widehat{h}_R\|_{L_q(\Omega_R)} = \|h_R\|_{L_q(\Omega_R)} \geq \|u_R\|_{L_q(\Omega_R)} - o_\varepsilon(1),$$

так как последовательность концентрации x_R имеет вес 1.

Рассмотрим четверть носителя функции h_R и сдвинем в один из углов прямоугольника. Полученную “четвертушку” \widehat{h}_R обозначим v_R . Тогда “четвертушка” функции \widehat{w}_R^N с аналогичным сдвигом является допустимым \mathcal{N} -продолжением v_R и

$$[v_R]_{H^s(\Omega_R)}^2 \leq \frac{1}{4} C_s \mathcal{E}_{\Omega_R}(\widehat{w}_R^N) \leq \frac{1}{4} [u_R]_{\mathcal{N}, \Omega_R}^2 + o_R(1),$$

$$\|v_R\|_{L_2(\Omega_R)}^2 \leq \frac{1}{4} \|u_R\|_{L_2(\Omega_R)}^2, \quad \|v_R\|_{L_q(\Omega_R)}^2 \geq 4^{-\frac{2}{q}} \|u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^2 - o_\varepsilon(1),$$

откуда

$$J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(v_R) \leq 4^{\frac{2}{q}-1} J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_R) + o_R(1) + o_\varepsilon(1).$$

Это противоречит минимальности $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_R)$ при достаточно больших R , т.к. в силу леммы 5.1 $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_R) = \lambda_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}$ отделены от нуля.

Вариант 2 аналогичным рассуждением приводится к неравенству

$$J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(v_R) \leq 2^{\frac{2}{q}-1} J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_R) + o_R(1) + o_\varepsilon(1),$$

что также дает противоречие. \square

Доказательство леммы 5.5

Обозначим u_R нормированный в $L_q(\Omega_R)$ минимайзер $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}$. Наличие последовательности концентрации для u_R гарантирует теорема 4.1. Допустим, что существуют две неэквивалентные последовательности концентрации x_R и y_R . Будем считать, что радиусы ρ и ρ_R , определенные в лемме 2.1, одинаковы для x_R и y_R (см. замечание 2).

Построим разделяющую функцию η_{xy} . Ее носитель имеет компоненты связности η_x , η_y и $\eta_0 = \eta_{xy} - \eta_x - \eta_y$ (см. доказательство теоремы 4.2).

Предположим, что носители функций η_x и η_y лежат в $\Omega_R \setminus X_R$. Тогда, используя лемму 3.4 аналогично доказательству теоремы 4.2, построим функцию v_R , которая также удовлетворяет условию (30) и для которой $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(v_R) < J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_R)$. Это противоречит минимальности $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_R)$, что невозможно. По тем же причинам невозможен случай, когда носители функций η_x и η_y лежат в X_R .

Предположим теперь, что носитель η_x лежит в X_R , а носитель η_y — в $\Omega_R \setminus X_R$. Тогда, повторяя доказательство леммы 5.4, можем считать, что $x_R = X$ и $y_R = Y$, а функции $\eta_x u_R$ и $\eta_y u_R$ зависят только от расстояний до точек X и Y соответственно, т.е.

$$\eta_x u_R(x) = h_1(|x - X|), \quad \eta_y u_R(x) = h_2(|x - Y|); \quad h_1(t), h_2(t) \equiv 0 \text{ при } t > \rho_R.$$

Сравним теперь “горбы” в вершинах X и Y . Именно, рассмотрим функцию

$$v(x) := \frac{\|\eta_Y u_R\|_{L_q(\Omega_R)}}{\|\eta_X u_R\|_{L_q(\Omega_R)}} \cdot \left(\frac{\pi/6}{\pi/3}\right)^{\frac{1}{q}} \cdot h_1(|x - Y|).$$

Нетрудно видеть, что $\|v\|_{L_q(\Omega_R)} = \|\eta_Y u_R\|_{L_q(\Omega_R)}$. Так как u_R — минимайзер, то (с учетом лемм 3.3 и 3.2) замена $\eta_Y u_R$ на v невыгодна (с точностью до $o_R(1)$ и $o_\varepsilon(1)$), т.е.

$$\|\eta_Y u_R\|_{H^s(\Omega_R)} \leq \|v\|_{H^s(\Omega_R)} + o_R(1) + o_\varepsilon(1) \leq \frac{\|\eta_Y u_R\|_{L_q(\Omega_R)}}{\|\eta_X u_R\|_{L_q(\Omega_R)}} \cdot 2^{\frac{1}{q}} \cdot \|\eta_X u_R\|_{H^s(\Omega_R)} + o_R(1) + o_\varepsilon(1)$$

(последнее неравенство доказывается переходом к СТ-продолжениям, аналогично лемме 3.2). Кроме того, в силу условия (30) и неравенства (17) имеем

$$\|\eta_X u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q \leq \theta_q; \quad \|\eta_Y u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q \geq 1 - \theta_q - o_\varepsilon(1).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{\|\eta_Y u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2}{\|\eta_Y u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q} &\leq \frac{\|\eta_Y u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^2}{\|\eta_X u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^2} \cdot 2^{\frac{2}{q}} \cdot \frac{\|\eta_X u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2}{\|\eta_Y u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q} + o_R(1) + o_\varepsilon(1) \\ &\leq \left(\frac{\theta_q}{1 - \theta_q}\right)^{1 - \frac{2}{q}} 2^{\frac{2}{q}} \cdot \frac{\|\eta_X u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2}{\|\eta_X u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q} + o_R(1) + o_\varepsilon(1). \end{aligned}$$

Выберем теперь θ_q настолько малым, что

$$\left(\frac{\theta_q}{1 - \theta_q}\right)^{1 - \frac{2}{q}} 2^{\frac{2}{q}} < 1.$$

Тогда при достаточно больших R и достаточно малом ε имеем

$$\frac{\|\eta_Y u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2}{\|\eta_Y u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q} < \frac{\|\eta_X u_R\|_{H^s(\Omega_R)}^2}{\|\eta_X u_R\|_{L_q(\Omega_R)}^q},$$

и потому к функциям $b_R = \eta_X u_R$, $c_R = \eta_Y u_R$ и $a_R = (\eta_{XY} - \eta_X - \eta_Y)u_R$ можно применить лемму 3.4. Таким образом, существует функция U_R , которая также удовлетворяет ограничению (30) и для которой $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(U_R) < J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_R)$, что вновь противоречит минимальности $J_{s,q,\Omega_R}^{\mathcal{N}}(u_R)$.

Осталось рассмотреть случай, когда носитель одной из функций, например η_Y , пересекается с $(\partial X_R) \cap \Omega_R$. По построению (см. лемму 3.3) диаметр носителя η_Y не превосходит $\frac{\rho_R + 7\rho}{4}$, а ширина кольца, окружающего носитель η_Y , в котором $\eta_{XY} \equiv 0$, не менее $\frac{5\rho_R - 13\rho}{16}$ (см. Замечание 3). Поэтому мы можем сдвинуть “горб” $\eta_Y u_R$ так, чтобы при достаточно больших R его носитель лежал в $(\Omega_R \setminus X_R)$, и таким образом свести дело к одному из рассмотренных случаев.

Итак, мы показали, что последовательность концентрации единственна. То, что она лежит в углу Y , доказывается так же, как в лемме 5.4, а то, что ее вес $\lambda = 1$ — как в теореме 4.2. \square

Доказательство леммы 6.2

Рассмотрим сначала случай $s = 1$ (ср. [12, п. 4.2]). Для $u \in \mathcal{H}^1$ имеем

$$\|u\|_{\mathcal{H}^1}^2 = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} r^{n-1} (|u'|^2 + |u|^2) dr; \quad \|u\|_{L_q(\mathbb{R}^n)}^q = \frac{2\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma(\frac{n}{2})} \int_0^{+\infty} r^{n-1} |u|^q dr. \quad (37)$$

Из очевидного неравенства

$$\|u\|_{L_q(R, R+1)} \leq C \|u\|_{W_2^1(R, R+1)}$$

получаем для любого $R \geq 1$

$$\begin{aligned} \left(\int_R^{R+1} r^{n-1} |u|^q dr \right)^{\frac{2}{q}} &\leq (R+1)^{\frac{2(n-1)}{q}} C R^{-(n-1)} \int_R^{R+1} r^{n-1} (|u'|^2 + |u|^2) dr \\ &= C \left(\frac{R+1}{R^{\frac{q}{2}}} \right)^{\frac{2(n-1)}{q}} \int_R^{R+1} r^{n-1} (|u'|^2 + |u|^2) dr. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_R^{+\infty} r^{n-1} |u|^q dr &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{R+k}^{R+k+1} r^{n-1} |u|^q dr \\ &\leq \left(\sup_k \int_{R+k}^{R+k+1} r^{n-1} |u|^q dr \right)^{1-\frac{2}{q}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\int_{R+k}^{R+k+1} r^{n-1} |u|^q dr \right)^{\frac{2}{q}} \\ &\leq \left(\int_R^{+\infty} r^{n-1} |u|^q dr \right)^{1-\frac{2}{q}} \cdot C \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{R+k+1}{(R+k)^{\frac{q}{2}}} \right)^{\frac{2(n-1)}{q}} \int_{R+k}^{R+k+1} r^{n-1} (|u'|^2 + |u|^2) dr, \end{aligned}$$

т.е.

$$\left(\int_R^{+\infty} r^{n-1} |u|^q dr \right)^{\frac{2}{q}} \leq C \left(\frac{R+1}{R^{\frac{q}{2}}} \right)^{\frac{2(n-1)}{q}} \int_R^{+\infty} r^{n-1} (|u'|^2 + |u|^2) dr. \quad (38)$$

Из компактности вложения $H^1(B_R) \hookrightarrow L_q(B_R)$ при $q < 2_1^*$ выводим, что отображение $u \mapsto u|_{B_R}$ компактно как оператор из \mathcal{H}^1 в $L_q(\mathbb{R}^n)$. Неравенство (38) с учетом (37) показывает, что при $q \in (2, 2_1^*)$ вложение $\mathcal{H}^1 \hookrightarrow L_q(\mathbb{R}^n)$ приближается по норме компактными операторами и потому само компактно.

Пусть теперь $s \in (0, 1)$. Теорема 1.17.1.1 и замечание 2.4.2.2(d) в [26] показывают, что \mathcal{H}^s — интерполяционное пространство между \mathcal{H}^0 и \mathcal{H}^1 , т.е. $\mathcal{H}^s = [\mathcal{H}^0, \mathcal{H}^1]_s$. Далее, $\frac{1-s}{2} + \frac{s}{2_1^*} = \frac{1}{2_s^*}$ влечет (см., напр., [26, теорема 1.18.4]) $L_{2_s^*}(\mathbb{R}^n) = [L_2(\mathbb{R}^n), L_{2_1^*}(\mathbb{R}^n)]_s$, и потому для любого $q \in (2, 2_s^*)$ найдется $\tilde{q} \in (2, 2_1^*)$ такое, что $L_q(\mathbb{R}^n) = [L_2(\mathbb{R}^n), L_{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)]_s$.

Теорема 1.9.3(a) в [26] показывает, что для операторов вложения справедливо неравенство

$$\|id : \mathcal{H}^s \rightarrow L_q(\mathbb{R}^n)\| \leq \|id : \mathcal{H}^0 \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)\|^{1-s} \cdot \|id : \mathcal{H}^1 \rightarrow L_{\tilde{q}}(\mathbb{R}^n)\|^s. \quad (39)$$

Первое из вложений в правой части (39) непрерывно (напомним, что \mathcal{H}^0 — подпространство радиальных функций в $L_2(\mathbb{R}^n)$), а второе компактно по доказанному выше. Поэтому компактно и вложение в левой части. \square

Благодарности. Мы весьма признательны Н.Д. Филонову за указание, благодаря которому мы смогли построить квазипериодические решения п.б.3, а также за советы, которые помогли нам улучшить изложение доказательства теоремы 5.1. Мы также благодарны участникам семинара по вариационному исчислению в ПОМИ РАН, и особенно Н.С. Устинову, за многочисленные замечания по тексту работы.

Работа поддержана грантом РФФИ 20-01-00630.

Список литературы

- [1] Бирман М.Ш., Соломяк М.З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. СПб.: Лань, 2010.
- [2] Bonder J.F., Saintier N., Silva A. The concentration-compactness principle for fractional order Sobolev spaces in unbounded domains and applications to the generalized fractional Brezis–Nirenberg problem. *Nonlin. Diff. Eq. Appl.*, **25** (2018), paper N52.
- [3] Винберг Э.Б., Шварцман О. В. Дискретные группы движений пространств постоянной кривизны. *Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления*, **29**, 1988, 147–259.
- [4] Caffarelli L., Silvestre L. An extension problem related to the fractional Laplacian, *Comm. Part. Diff. Eqs.*, **32** (2007), no. 7–9, 1245–1260.
- [5] Dipierro S., Palatucci G., Valdinoci E. Existence and symmetry results for a Schrödinger type problem involving the fractional Laplacian. *Matematiche*, **68** (2013), 201–216.
- [6] Fall M.M., Valdinoci E. Uniqueness and nondegeneracy of positive solutions of $(-\Delta)^s u + u = u^p$ in \mathbb{R}^N when s is close to 1. *Comm. Math. Phys.*, **329** (2014), 383–404.
- [7] Frank R.L., Lenzmann E. Uniqueness of non-linear ground states for fractional Laplacians in \mathbb{R} . *Acta Math.*, **210** (2013), no. 2, 261–318.
- [8] Frank R.L., Lenzmann E., Silvestre L. Uniqueness of radial solutions for the fractional Laplacian. *Comm. Pure Appl. Math.*, **69** (2016), 1671–1726.
- [9] Камынин Л.И., Химченко Б.Н. Теоремы типа Жиро для уравнений 2-го порядка со слабо вырождающейся неотрицательной характеристической частью. *Сиб. матем. журн.*, **18** (1977), no. 1, 103–121.
- [10] Kawohl B. Rearrangements and convexity of level sets in PDE, *Springer Lecture Notes in Math.*, V. 1150 (1985).
- [11] Kolonitskii S.B. Multiplicity of 1D-concentrated positive solutions to the Dirichlet problem for an equation with p -Laplacian. Preprint, arXiv:1206.0787 (2012).
- [12] Lerman L.M., Naryshkin P.E., Nazarov A.I. Abundance of entire solutions to nonlinear elliptic equations by the variational method. *Nonlin. Analysis*, **190** (2020), paper N111590.

- [13] Lions P.L. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. *Ann. Inst. H. Poincaré. Anal. Nonlin.*, **1** (1984), p. 109–145, 223–283.
- [14] Mosconi S., Perera K., Squassina M., Yang Y. The Brezis–Nirenberg problem for the fractional p -Laplacian. *Calc. Var. Part. Differ. Eqs.*, **55** (2016), no. 4, 105–25.
- [15] Musina R., Nazarov A.I. On fractional Laplacians. *Comm. Part. Diff. Eqs.*, **39** (2014), no. 9, 1780–1790.
- [16] Musina R., Nazarov A.I. On fractional Laplacians 2. Preprint, arXiv:1408.3568 (2015).
- [17] Musina R., Nazarov A.I. On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian. *Nonlin. Analysis*, **121** (2015), 123–129.
- [18] Nazarov A.I., Shcheglova A.P. Steklov-type 1D inequalities (a survey). Preprint, arXiv:2101.10752 (2021).
- [19] Осмоловский В.Г. Нелинейная задача Штурма–Лиувилля. Изд-во СПб. ун-та, СПб., 2003, 230 с.
- [20] Palais R.S. The principle of symmetric criticality. *Comm. Math. Phys.*, **69** (1979), no. 1, 19–30.
- [21] Palatucci G., Pisante A. Improved Sobolev embeddings, profile decomposition, and concentration-compactness for fractional Sobolev spaces. *Calc. Var. Part. Diff. Eqs.*, **50** (2014), no. 3–4, 799–829.
- [22] Roncal L., Stinga P.R. Fractional Laplacian on the torus. *Comm. Contemp. Math.*, **18** (2016), no. 3, paper N1550033.
- [23] Silvestre L. Regularity of the Obstacle Problem for a Fractional Power of the Laplace Operator. *Comm. Pure Appl. Math.*, **60** (2007), 67–112.
- [24] Стейн И.М., Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций, М., Мир, 1973.
- [25] Stinga P.R., Torrea J.L. Extension problem and Harnack’s inequality for some fractional operators. *Comm. Part. Diff. Eqs.*, **35** (2010), no. 11, 2092–2122.
- [26] Трибель Х. Теория интерполяции, Функциональные пространства, дифференциальные операторы. М.: Мир, 1980.
- [27] Устинов Н.С. О постоянстве экстремали в теореме вложения дробного порядка. *Функц. анализ и его прил.*, **54** (2020), no. 4, 85–97.
- [28] Устинов Н.С. О разрешимости полулинейной задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана и критической правой частью. *Алгебра и анализ*, **33** (2021), no. 1, 194–212.