Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 12 ноября 2021 г.
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Высокочастотное усреднение нестационарных периодических уравнений*†

Дородный М. А. ‡

Аннотация

Рассматривается действующий в $L_2(\mathbb{R})$ эллиптический дифференциальный оператор $A_\varepsilon = -\frac{d}{dx}g(x/\varepsilon)\frac{d}{dx} + \varepsilon^{-2}V(x/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, с периодическими коэффициентами. Для нестационарного уравнения Шрёдингера с гамильтонианом A_ε и гиперболического уравнения с участием A_ε изучаются аналоги задач усреднения, связанные с краями спектральных зон оператора A_ε (т. н. высокочастотное усреднение). Получены аппроксимации при малых ε по $L_2(\mathbb{R})$-норме решений задач Коши для этих уравнений со специальными начальными данными.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, уравнения типа Шрёдингера, гиперболические уравнения, спектральные зоны, усреднение, эффективный оператор, операторные оценки погрешности.

1. Введение

1.1. Усреднение. Изучение распространения волн в периодических структурах представляет значительный интерес как для приложений, так и в теоретическом плане. Численное моделирование таких процессов зачастую является трудоёмким, поэтому один из подходов к этим задачам — применение теории усреднения. Цель усреднения — свести изучение сильно неоднородной среды с быстро осциллирующими характеристиками к изучению некоторой эквивалентной однородной среды с эффективными параметрами, которая является хорошим приближением. Теории усреднения посвящена обширная литература; укажем в первую очередь книги [1–3].

Обсудим типичную задачу теории усреднения. Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решётки Γ. Для любой Γ-периодической функции $F(\mathbf{x})$ введём обозначение $F^\varepsilon(\mathbf{x}) \coloneqq F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$,

*Представлено Т. А. Суслиной.

†Работа выполнена при поддержке конкурса "Молодая математика России" и Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2019-1619.

‡Международный математический институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербургский государственный университет; Россия, 199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., 29Б; e-mail: mdorodni@yandex.ru.

$\varepsilon > 0$ — (малый) параметр. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим дифференциальный оператор (ДО), формально заданный выражением

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla, \tag{1.1}$$

где $g(\mathbf{x})$ — эрмитова $(d \times d)$-матрица-функция периодическая относительно решётки Γ, ограниченная и положительно определённая. Оператор (1.1) моделирует простейшие случаи микронеоднородных сред с $\varepsilon\Gamma$-периодической структурой. Пусть $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ — (слабое) решение эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{1.2}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. При $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится к решению u_0 "усреднённого" уравнения:

$$-\operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{1.3}$$

Оператор $\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} = -\operatorname{div} g^0\nabla$ называется эффективным оператором для $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Матрица g^0 определяется по хорошо известной процедуре (см., например, [1, глава 2, § 3], [4, глава 3, § 1]), согласно которой требуется решить вспомогательную краевую задачу на ячейке Ω. Помимо определения эффективных коэффициентов интерес представляют следующие вопросы. *Каков характер сходимости $u_\varepsilon \to u_0$? Какова оценка погрешности $u_\varepsilon - u_0$?*

1.2. Операторные оценки погрешности при усреднении. М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной (см. [4]) был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода), основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Пусть u_ε — решение уравнения (1.2), u_0 — решение уравнения (1.3). В [4] было доказано, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{1.4}$$

Поскольку $u_\varepsilon = (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}f$, $u_0 = (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}f$, оценку (1.4) можно переписать в операторных терминах:

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{1.5}$$

Для параболических уравнений имеет место аналогичный результат (см. [5,6]). В операторных терминах речь идёт об аппроксимации полугруппы $e^{-t\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$, $t > 0$:

$$\|e^{-t\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-t\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}, \qquad t > 0. \tag{1.6}$$

Оценки (1.5), (1.6) точны по порядку; константы C контролируются явно в терминах данных задачи. Такие оценки называются *операторными оценками погрешности* в задачах усреднения. Более точные аппроксимации резольвенты и экспоненты при учёте следующих членов асимптотики (т. н. корректоров) были найдены в работах [7,8].

Другой подход к получению операторных оценок погрешности ("метод сдвига") для эллиптических и параболических задач был предложен В. В. Жиковым и С. Е. Пастуховой в работах [9–11]. См. также обзор [12].

С усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа дело обстоит несколько иначе. Им были посвящены статьи [13–18]. В операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-it\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(t\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(t\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, где $t \in \mathbb{R}$. Для этих оператор-функций уже не удаётся получить аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$, а приходится рассматривать норму операторов, действующих из пространства Соболева $H^q(\mathbb{R}^d)$ (с подходящим q) в $L_2(\mathbb{R}^d)$. В [13] были получены точные по порядку оценки

$$\|e^{-it\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-it\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|t|)\varepsilon, \tag{1.7}$$

$$\|\cos(t\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(t(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|t|)\varepsilon. \tag{1.8}$$

В работе [14] был получен результат для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(t\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$:

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(t\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(t(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|t|)\varepsilon. \tag{1.9}$$

Кроме того, в [14] получена аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(t\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ при учёте корректора по $(H^2\to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ при фиксированном t. Далее, в [15–18] была доказана точность этих результатов как по типу операторной нормы, так и относительно зависимости от t (при больших t). С другой стороны, было установлено, что при некоторых дополнительных предположениях (например, если матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вещественные элементы) оценки (1.7)–(1.9) допускают улучшения:

$$\|e^{-it\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-it\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon, \tag{1.10}$$

$$\|\cos(t\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(t(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon, \tag{1.11}$$

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(t\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(t(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon. \tag{1.12}$$

Отметим, что в работах [4–8, 13–18] изучался гораздо более общий, чем (1.1), класс операторов (включающий в себя матричные ДО). В частности, рассматривались операторы вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div}\check{g}^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla + \varepsilon^{-2}V^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{1.13}$$

Здесь $\check{g}(\mathbf{x})$ — Г-периодическая положительно определённая и ограниченная $(d\times d)$-матрица-функция с вещественными элементами, потенциал $V(\mathbf{x})$ — Г-периодическая вещественнозначная функция, $V\in L_p(\Omega)$ с подходящим p (и предполагается, что $\inf\operatorname{spec}\mathcal{A}_1 = 0$). Для оператора (1.13) невозможно найти оператор с постоянными коэффициентами $\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}$ такой, чтобы соответствующие оператор-функции сходились к оператор-функциям от $\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}$. Однако, можно найти приближения, если "окаймить" оператор-функции от $\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}$ подходящими быстро осциллирующими множителями. Так, например, аналог (1.5) выглядит следующим образом:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - [\omega^\varepsilon](\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}[\omega^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon,$$

где $\omega(\mathbf{x})$ — положительное Г-периодическое решение уравнения

$$-\operatorname{div}\check{g}(\mathbf{x})\nabla\omega(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0$$

с нормировкой $\|\omega\|^2_{L_2(\Omega)} = |\Omega|$, а $\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}$ — эффективный оператор для оператора (1.1) с матрицей $g(\mathbf{x}) = \check{g}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})$.

Объясним метод на примере аппроксимации резольвенты оператора (1.1). Применение масштабного преобразования сводит вопрос об изучении поведения оператора $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$, $\varepsilon\to 0$, к изучению оператора $(\widehat{\mathcal{A}} + \varepsilon^2 I)^{-1}$, где $\widehat{\mathcal{A}} = \widehat{\mathcal{A}}_1 = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla$. Далее, с помощью теории Флоке–Блоха оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в пространстве $L_2(\Omega)$. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ задаётся дифференциальным выражением $-\operatorname{div}_{\mathbf{k}} g(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{k}}$, где $\nabla_{\mathbf{k}} = \nabla + i\mathbf{k}$, $\operatorname{div}_{\mathbf{k}} = \operatorname{div} + i\langle\mathbf{k},\cdot\rangle$, при периодических граничных условиях. Спектр оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ дискретен. Оказывается, что поведение оператора $(\widehat{\mathcal{A}} + \varepsilon^2 I)^{-1}$ описывается в терминах пороговых характеристик на краю спектра оператора $\widehat{\mathcal{A}}$, т. е. достаточно знать спектральное разложение $\widehat{\mathcal{A}}$ лишь вблизи нижнего края спектра. В частности, эффективная матрица g^0 — это гессиан первой зонной функции $E_1(\mathbf{k})$ в точке $\mathbf{k} = 0$.

1.3. Высокочастотное усреднение. Как было сказано выше, вклад в усреднение вносит только небольшая окрестность начала спектра (т. е. волны с низкой частотой). Можно, однако, рассматривать задачи о распространении волн в периодических структурах, частота которых пропорциональна ε^{-1} или ε^{-2} (высокочастотный режим). В таком случае даже старший порядок асимптотики решений быстро осциллирует. Эти задачи рассматривались в [2, глава 4] с использованием ВКБ-асимптотик.

Традиционные для теории усреднения методы, связанные с двухмасштабными асимптотическими разложениями, применялись к таким задачам в работах [19, 20]. Отметим также статью [21], где рассматривается применение результатов [19] к фотонным кристаллам. В [19] была получена асимптотика для решений уравнения

$$\operatorname{div} g^{\varepsilon}(\mathbf{x})\nabla u_{\varepsilon}(\mathbf{x}) + \nu^2\rho^{\varepsilon}(\mathbf{x})u_{\varepsilon}(\mathbf{x}) = 0,$$

являющихся возмущениями стоячих волн (функции $g(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ предполагаются достаточно гладкими и Γ-периодическими). В работе [20] рассматривается аналогичная задача для случая бегущих волн.

Обсудим теперь более подробно оценки погрешности при высокочастотном усреднении. Им были посвящены работы [22–24], где рассматривался одномерный случай $d = 1$, и [25, 26], где рассматривался случай произвольной размерности. Хорошо известно, что спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет зонную структуру и может иметь лакуны. Рассмотрим для простоты случай, когда $d = 1$ и $\Gamma = \mathbb{Z}$; при этом для оператора (1.13) будем использовать обозначение A_{ε}. Пусть $\sigma > 0$ — (невырожденный) левый край зоны с нечётным номером ($\geqslant 3$) в спектре оператора $A = A_1$. Тогда для оператора A_{ε} этот край "уезжает" в точку $\varepsilon^{-2}\sigma$ (в область высоких частот (энергий)). Рассмотрим вместо (1.2) уравнение

$$-\frac{d}{dx}g^{\varepsilon}(x)\frac{d}{dx}u_{\varepsilon}(x) - (\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2)u_{\varepsilon}(x) = f(x), \tag{1.14}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$. Предполагается, что $\varkappa > 0$ таково, что точка $\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2$ принадлежит лакуне спектра оператора A_{ε}. Аналогично (1.5), дело сводится к изучению оператора $(A_{\varepsilon} - (\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2)I)^{-1}$. В [22] был доказан следующий результат:

$$\|(A_{\varepsilon} - (\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_{\sigma}^{\varepsilon}](A_{\sigma}^{\mathrm{hom}} + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_{\sigma}^{\varepsilon}]\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon. \tag{1.15}$$

Здесь $A_{\sigma}^{\mathrm{hom}} = -b_{\sigma}\frac{d^2}{dx^2}$ — соответствующий эффективный оператор, $b_{\sigma} > 0$ — коэффициент в асимптотике зонной функции $E(k)$, отвечающей зоне, для которой σ — левый край: $E(k) \sim \sigma + b_{\sigma}k^2$, $k \sim 0$; а φ_{σ} — периодическое решение уравнения $A\varphi_{\sigma} = \sigma\varphi_{\sigma}$, нормированное в $L_2(0,1)$. Таким образом, возможность усреднения для уравнения (1.14) является пороговым эффектом вблизи края внутренней лакуны.

Оценка (1.15) была получена в [22] в случае, когда $V(x) = 0$. В работе [25] был доказан аналог оценки (1.15) для операторов (1.13) при произвольном $d \geqslant 1$. Более точные аппроксимации с корректорами были найдены в [23, 26].

В статье [24] изучались параболические уравнения в одномерном случае, была доказана оценка

$$\|e^{-tA_{\varepsilon}}\mathcal{E}_{A_{\varepsilon}}[\varepsilon^{-2}\sigma, \infty) - e^{-t\sigma/\varepsilon^2}[\varphi_{\sigma}^{\varepsilon}]e^{-tA_{\sigma}^{\mathrm{hom}}}[\varphi_{\sigma}^{\varepsilon}]\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant Ce^{-t\sigma/\varepsilon^2}\varepsilon(t+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad t > 0,$$

а также найдено более точное приближение с корректором. Здесь $\mathcal{E}_{A_{\varepsilon}}[\varepsilon^{-2}\sigma, \infty)$ — спектральный проектор оператора A_{ε}, отвечающий интервалу $[\varepsilon^{-2}\sigma, \infty)$.

1.4. Результаты работы. В настоящей работе мы изучаем операторные оценки погрешности при высокочастотном усреднении нестационарного уравнения типа Шрёдингера и гиперболического уравнения в одномерном случае ($d = 1$). Основные результаты работы приведены в п. 6. (Отметим, что в п. 6 нам удобно использовать несколько другие обозначения.) Во введении рассмотрим опять лишь случай, когда σ — (невырожденный) левый край зоны с нечётным номером s в спектре оператора A.

Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Рассматриваются задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}u_\varepsilon(x,t) = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(x,t), \\ u_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon f)(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}v_\varepsilon(x,t) = -(A_\varepsilon v_\varepsilon)(x,t) + \varepsilon^{-2}\sigma v_\varepsilon(x,t), \\ v_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon f)(x),\ (\partial_t v_\varepsilon)(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon g)(x), \end{cases} \tag{1.16}$$

где

$$(\Upsilon_\varepsilon f)(x) := (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(k) \sum_{j=s}^{\infty} e^{ikx}\varphi_j(x/\varepsilon, \varepsilon k)\chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(\varepsilon k)\, dk.$$

Здесь $\{e^{ikx}\varphi_j(x,k)\}_{j=s}^{\infty}$ — блоховские волны, отвечающие зонам с номерами $j \geqslant s$;

$$\widetilde{\Omega}_j = (-j\pi, -(j-1)\pi] \cup ((j-1)\pi, j\pi], \qquad j \in \mathbb{N}, \tag{1.17}$$

— зоны Бриллюэна. Начальные данные задач (1.16) представляют собой суперпозицию блоховских волн с амплитудой, равной Фурье-образу $(\Phi f)(k)$ функции $f(x)$, и принадлежат подпространству $\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma, \infty)L_2(\mathbb{R})$. Основные результаты работы — оценки вида

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma}\varphi_\sigma^\varepsilon u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon\|f\|_{H^2(\mathbb{R})}, \qquad f \in H^2(\mathbb{R}), \tag{1.18}$$

$$\|v_\varepsilon(\cdot,t) - \varphi_\sigma^\varepsilon v_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{1/2})\varepsilon(\|f\|_{H^{3/2}(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}), \quad f \in H^{3/2}(\mathbb{R}),\ g \in H^{1/2}(\mathbb{R}). \tag{1.19}$$

Здесь u_0 и v_0 — решения эффективных задач

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}u_0(x,t) = (A_\sigma^{\mathrm{hom}} u_0)(x,t), \\ u_0(x,0) = f(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}v_0(x,t) = -(A_\sigma^{\mathrm{hom}} v_0)(x,t), \\ v_0(x,0) = f(x),\ (\partial_t v_0)(x,0) = g(x), \end{cases}$$

а A_σ^{hom} и φ_σ — те же, что в (1.15).

Отметим, что оценки (1.18), (1.19) допускают формулировку в операторных терминах, но нам удобно отложить это до п. 6.

1.5. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}_1$ и $\mathfrak{H}_2$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Если $A\colon \mathfrak{H}_1 \to \mathfrak{H}_2$ — замкнутый линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ обозначается область определения оператора A, сопряжённый оператор обозначается через A^* . Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}_1\to\mathfrak{H}_2}$ означает норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}_1$ в $\mathfrak{H}_2$. Далее, если A — самосопряжённый оператор в некотором гильбертовом пространстве, то для спектра оператора A мы используем обозначение $\operatorname{spec} A$, а $\mathcal{E}_A(\delta)$ — спектральный проектор оператора A для борелевского множества $\delta \subset \mathbb{R}$.

Стандартные классы L_p функций, заданных на интервале $(a,b) \subset \mathbb{R}$, обозначаются через $L_p(a,b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Если f — измеримая функция, то $[f]$ или $[f(x)]$ — оператор умножения на функцию f в пространстве L_2. Далее, $H^s(\mathbb{R})$ — класс Соболева порядка $s \in \mathbb{R}$ с индексом суммирования 2; а $\widetilde{H}^1(0,1)$ — подпространство функций из $H^1(0,1)$, 1-периодическое продолжение которых принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Если $F(x)$ — 1-периодическая функция, то $F^\varepsilon(x) := F(\varepsilon^{-1}x)$. Через $\Phi := \Phi_{x\to k}$ обозначается преобразование Фурье в $\mathbb{R}$, определённое на классе Шварца формулой

$$(\Phi v)(k) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}v(x)\, dx, \qquad v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

и по непрерывности распространённое до унитарного оператора $\Phi\colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})$. Характеристическая функция множества $\delta \subset \mathbb{R}$ обозначается χ_δ. Для множества значений произвольной функции f будем использовать обозначение $R(f)$.

1.6. Благодарности. Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за полезные обсуждения и внимание к работе.

2. Оператор A

В $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается самосопряжённый оператор A, порождённый дифференциальным выражением

$$A = -\frac{d}{dx}\check{g}(x)\frac{d}{dx} + V(x), \tag{2.1}$$

где

$$\left.\begin{aligned} &\check{g} \text{ — измеримая вещественнозначная функция,} \\ &0 < \alpha_0 \leqslant \check{g}(x) \leqslant \alpha_1 < \infty,\ \check{g}(x+1) = \check{g}(x),\ x \in \mathbb{R}, \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

а потенциал $V \in L_1(0,1)$, $V(x+1) = V(x)$, $x \in \mathbb{R}$. Точное определение оператора A даётся через полуограниченную замкнутую квадратичную форму

$$\mathfrak{a}[u,u] = \int_{\mathbb{R}} (\check{g}(x)|u'(x)|^2 + V(x)|u(x)|^2)\,dx, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}). \tag{2.3}$$

За счёт добавления к V постоянной будем считать, что $\inf \operatorname{spec} A = 0$. При этом условии оператор A допускает удобную факторизацию (см., например, [27], [4, гл. 6, п. 1.1]). Для описания этой факторизации рассмотрим уравнение

$$-(\check{g}(x)\omega'(x))' + V(x)\omega(x) = 0$$

(уравнение понимается в слабом смысле). Существует 1-периодическое решение $\omega \in \widetilde{H}^1(0,1)$ этого уравнения, определённое с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, чтобы $\omega(x) > 0$ и

$$\|\omega\|_{L_2(0,1)} = 1. \tag{2.4}$$

Оказывается, что решение $\omega(x)$ положительно определено и ограничено:

$$0 < \beta_0 \leqslant \omega(x) \leqslant \beta_1 < \infty. \tag{2.5}$$

Функция ω — липшицева и является мультипликатором как в $H^1(\mathbb{R})$, так и в $\widetilde{H}^1(0,1)$. Подстановка $u = \omega\phi$ преобразует форму (2.3) к виду

$$\mathfrak{a}[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} \omega^2(x)\check{g}(x)|\phi'(x)|^2\,dx, \qquad u = \omega\phi, \quad \phi \in H^1(\mathbb{R}). \tag{2.6}$$

Это означает, что справедлива факторизация

$$A = -\omega(x)^{-1}\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx}\omega(x)^{-1}, \qquad g = \omega^2\check{g}. \tag{2.7}$$

Примем представление (2.7) оператора A за исходное определение, т. е. будем считать, что A — оператор, порождённый формой (2.6), а 1-периодические функции $\check{g}$ и ω удовлетворяют (2.2), (2.4), (2.5). Мы можем вернуться к представлению (2.1), полагая $V(x) = (\check{g}(x)\omega'(x))'/\omega(x)$. Однако, при этом потенциал $V(x)$ может оказаться сильно сингулярным.

3. Спектр оператора (2.7)

Нам понадобится описание спектра оператора (2.7). Для этого введём объекты, связанные со спектральным разложением оператора (2.7) (разложением Флоке–Блоха). Мы следуем работам [22–24], см. также [4, глава 2, §§ 1,2]. Рассмотрим в $L_2(0,1)$ семейство форм

$$\mathfrak{a}(k)[u,u] = \int_0^1 g(x)|\phi' + ik\phi|^2\,dx, \qquad \phi = \omega^{-1}u \in \widetilde{H}^1(0,1), \quad k \in \mathbb{R}. \tag{3.1}$$

Порождённый формой (3.1) оператор обозначим через $A(k)$. Параметр $k \in \mathbb{R}$ называют *квазиимпульсом*. Пусть $E_l(k)$, $l \in \mathbb{N}$, — последовательные (с учётом кратностей) собственные значения оператора $A(k)$ и $\varphi_l(\cdot,k)$, $l \in \mathbb{N}$, — соответствующие ортонормированные собственные функции. Функции $E_l(k)$ называются *зонными функциями*; они (2π)-периодичны. Далее, $\varphi_l(x+1,k) = \varphi_l(x,k)$, а функции $e^{ikx}\varphi_l(x,k)$ можно выбрать (2π)-периодическими по k.

Обозначим через $\widetilde{\Omega} = \widetilde{\Omega}_1 = (-\pi,\pi]$ центральную (первую) зону Бриллюэна. В силу периодичности функций $E_l(k)$ и $e^{ikx}\varphi_l(x,k)$ достаточно рассматривать только $k \in \widetilde{\Omega}$. Однако, иногда нам будет удобно считать, что $k \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим функцию $E_s(k)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Справедливы следующие утверждения:

1°. Функция E_s непрерывна (и даже липшицева) и чётна.

2°. Функция E_s — кусочно вещественно аналитическая, гладкость которой может нарушаться только в точках перемены кратности.

3°. Отображение $k \mapsto E_s(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, дважды покрывает зону $R(E_s)$.

4°. Равенство $E_{s+1}(k) = E_s(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, возможно только если $k = \pi$ (s — нечётное число).

5°. Равенство $E_{s-1}(k) = E_s(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, возможно только если $k = 0$ (s — нечётное число).

6°. При $0 \leqslant k \leqslant \pi$ функция $E_s(k)$ строго монотонна.

7°. Если номер s — нечётный, то при $k = 0$ функция $E_s(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, имеет минимум, а при $k = \pi$ — максимум.

8°. Если номер s — чётный, то при $k = 0$ функция $E_s(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, имеет максимум, а при $k = \pi$ — минимум.

Нам будут нужны оценки для зонных функций $E_l(k)$, $l \in \mathbb{N}$. Рассмотрим форму

$$\mathfrak{a}^\circ(k)[\phi,\phi] = \int_0^1 |\phi' + ik\phi|^2\,dx, \qquad \phi \in \widetilde{H}^1(0,1), \quad k \in \mathbb{R}.$$

Пусть $E_l^\circ(k)$, $l \in \mathbb{N}$, — последовательные (с учётом кратностей) собственные значения соответствующего оператора. Они (2π)-периодичны и на $\widetilde{\Omega}$ равны

$$E_1^\circ(k) = k^2, \qquad k \in \widetilde{\Omega},$$
$$E_{2j}^\circ(k) = (2\pi j - |k|)^2, \qquad E_{2j+1}^\circ(k) = (2\pi j + |k|)^2, \qquad k \in \widetilde{\Omega}, \quad j \in \mathbb{N}.$$

В силу периодичности функций $\{E_l^\circ(k)\}_{l\in\mathbb{N}}$ имеем

$$E_l^\circ(k)\chi_{\widetilde{\Omega}_l}(k) = k^2\chi_{\widetilde{\Omega}_l}(k), \qquad k \in \mathbb{R}, \quad l \in \mathbb{N}. \tag{3.2}$$

Здесь $\widetilde{\Omega}_l$ — зоны Бриллюэна (1.17). Далее, используя ряд Фурье, можно показать, что

$$\alpha_0\beta_0^2\mathfrak{a}^\circ(k)[\phi,\phi] \leqslant \mathfrak{a}(k)[u,u] \leqslant \alpha_1\beta_1^2\mathfrak{a}^\circ(k)[\phi,\phi], \qquad \phi=\omega^{-1}u\in\widetilde{H}^1(0,1), \quad k\in\mathbb{R},$$

откуда следует

$$\alpha_0\beta_0^2\beta_1^{-2}\frac{\mathfrak{a}^\circ(k)[\phi,\phi]}{\|\phi\|^2_{L_2(0,1)}} \leqslant \frac{\mathfrak{a}(k)[u,u]}{\|u\|^2_{L_2(0,1)}} \leqslant \alpha_1\beta_0^{-2}\beta_1^2\frac{\mathfrak{a}^\circ(k)[\phi,\phi]}{\|\phi\|^2_{L_2(0,1)}}, \qquad \phi=\omega^{-1}u\in\widetilde{H}^1(0,1), \quad k\in\mathbb{R}.$$

Используя вариационный принцип, периодичность функций $\{E_l(k)\}_{l\in\mathbb{N}}$ и (3.2), отсюда получаем, что

$$\alpha_0\beta_0^2\beta_1^{-2}k^2\chi_{\widetilde{\Omega}_l}(k) \leqslant E_l(k)\chi_{\widetilde{\Omega}_l}(k) \leqslant \alpha_1\beta_0^{-2}\beta_1^2k^2\chi_{\widetilde{\Omega}_l}(k), \qquad k\in\mathbb{R}, \quad l\in\mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Рассмотрим теперь интегральные операторы

$$\Psi_l\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{S}^1), \qquad l\in\mathbb{N}, \tag{3.4}$$

которые на классе Шварца определены следующим образом:

$$(\Psi_l v)(k) = (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}} e^{-ikx}\overline{\varphi_l(x,k)}v(x)\,dx, \qquad v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}), \quad l\in\mathbb{N}. \tag{3.5}$$

Точки окружности $k\in\mathbb{S}^1$ можно реализовать, например, точками из $\widetilde{\Omega}$. Однако, нам будет удобно использовать и другие реализации. Операторы (3.5) по непрерывности распространяются до частично изометрических отображений "на". Операторы $\Psi_l^*\Psi_l$ суть ортогональные проекторы на подпространства $\mathcal{E}_A(R(E_l))L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(\mathbb{R})$ и $\sum_{l\in\mathbb{N}}\Psi_l^*\Psi_l=I$. Справедливо представление (разложение Флоке–Блоха)

$$A=\sum_{l=1}^{\infty}\Psi_l^*[E_l]\Psi_l. \tag{3.6}$$

В силу (3.6) спектр оператора A представляет собой объединение отрезков (зон), которые являются образами функций $E_l(k)$:

$$\sigma(A)=\bigcup_{l=1}^{\infty}R(E_l)=[E_1(0),E_1(\pi)]\cup[E_2(\pi),E_2(0)]\cup[E_3(0),E_3(\pi)]\cup\dots.$$

В одномерном случае спектральные зоны не перекрываются. Интервалы

$$(-\infty,E_1(0)),(E_1(\pi),E_2(\pi)),(E_2(0),E_3(0)),\dots$$

называются лакунами в спектре. Отметим, что зоны могут касаться друг друга, т. е. возможно их пересечение по граничной точке. Это означает, что некоторые лакуны могут быть пустыми.

4. Лакуна

Фиксируем некоторое $s\in\mathbb{N}$. Договоримся здесь и далее использовать обозначения $E(k)\coloneqq E_s(k)$, $\varphi(x,k)\coloneqq\varphi_s(x,k)$, $\Psi\coloneqq\Psi_s$. Положим

$$\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)\coloneqq\{f\colon \omega^{-1}f\in\widetilde{H}^1(0,1)\}, \qquad \|f\|_{\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)}\coloneqq\|\omega^{-1}f\|_{H^1(0,1)}.$$

Мы предполагаем, что выполнено одно из следующих четырёх условий.

Условие 1. *Пусть s нечётно. В спектре оператора A есть лакуна* $(E_{s-1}(0), E(0)) \neq \varnothing$.

Условие 2. *Пусть s чётно. В спектре оператора A есть лакуна* $(E(0), E_{s+1}(0)) \neq \varnothing$.

Предполагая, что выполнено условие 1 или условие 2, имеем

$$E(k) = \sigma_0 \pm b_0 k^2 + k^4 \gamma_0(k), \qquad |k| \leqslant \pi,\ b_0 > 0, \tag{4.1}$$

$$\varphi(x,k) = \varphi_0(x) + k\theta_0(x,k), \qquad |k| < \pi. \tag{4.2}$$

В равенстве (4.1) знак "+" отвечает случаю, когда выполнено условие 1, "−" — когда выполнено условие 2. Функция $\gamma_0(k)$ непрерывна, а при $|k| < \pi$ вещественно аналитична; $\sigma_0 \coloneqq E(0)$, $\varphi_0(x) \coloneqq \varphi(x,0)$; $\varphi(\cdot,k)$ и $\theta_0(\cdot,k)$ — вещественно аналитические по k функции со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$.

Условие 3. *Пусть s нечётно. В спектре оператора A есть лакуна* $(E(\pi), E_{s+1}(\pi)) \neq \varnothing$.

Условие 4. *Пусть s чётно. В спектре оператора A есть лакуна* $(E_{s-1}(\pi), E(\pi)) \neq \varnothing$.

В предположении выполнения условия 3 или условия 4

$$E(k) = \sigma_\pi \pm b_\pi (k-\pi)^2 + (k-\pi)^4 \gamma_\pi(k), \qquad 0 \leqslant k \leqslant 2\pi,\ b_\pi > 0, \tag{4.3}$$

$$\varphi(x,k) = \varphi_\pi(x) + (k-\pi)\theta_\pi(x,k), \qquad 0 < k < 2\pi. \tag{4.4}$$

В равенстве (4.3) знак "+" отвечает случаю, когда выполнено условие 4, "−" — когда выполнено условие 3. Функция $\gamma_\pi(k)$ непрерывна, а при $0 < k < 2\pi$ вещественно аналитична; $\sigma_\pi \coloneqq E(\pi)$, $\varphi_\pi(x) \coloneqq \varphi(x,\pi)$; $\varphi(\cdot,k)$ и $\theta_\pi(\cdot,k)$ — вещественно аналитические по k функции со значениями в $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$.

Замечание 5. *Чтобы в случае условия 1 не исключать полубесконечную лакуну* $(-\infty, 0)$, *формально положим* $E_0(0) = -\infty$.

Замечание 6. *Функции φ_0 и φ_π в (4.2), (4.4) принадлежат $\widetilde{\mathcal{H}}^1(0,1)$ и поэтому ограничены. Будем считать их продолженными 1-периодическим образом на $\mathbb{R}$.*

Замечание 7. *Коэффициенты b_0, b_π в (4.1) и (4.3) могут быть выражены в терминах решений некоторых задач на интервале периодичности $(0,1)$. См., например,* [24, замечания 2.2, 2.4].

5. Вспомогательные утверждения

Положим $k_0 \coloneqq 0$ в случае выполнения условий 1 или 2 и $k_0 \coloneqq \pi$, если выполнены условия 3 или 4. Здесь и далее будем предполагать, что

$$\gamma_{k_0}(k_0) \neq 0. \tag{5.1}$$

Пусть выполнено одно из условий 1, 4. Рассмотрим выражение $(E(k)-\sigma_{k_0})^{1/2}$. Используя формулу Тейлора для функции $\sqrt{1+x}$, имеем

$$(E(k) - \sigma_{k_0})^{1/2} = b_{k_0}^{1/2}|k-k_0| + |k-k_0|^3 \tilde{\gamma}_{k_0}(k), \tag{5.2}$$

где $\tilde{\gamma}_{k_0}(k) = \frac{1}{2} b_{k_0}^{-1/2} \gamma_{k_0}(k)(1 + O((k-k_0)^2))$, $k \sim k_0$. Аналогично, если выполнено одно из условий 2, 3, имеем

$$(\sigma_{k_0} - E(k))^{1/2} = b_{k_0}^{1/2}|k-k_0| - |k-k_0|^3 \tilde{\gamma}_{k_0}(k).$$

Фиксируем $0 < \kappa < \pi$ так, чтобы

$$\frac{1}{2}|\gamma_{k_0}(k_0)| \leqslant |\gamma_{k_0}(k)| \leqslant \frac{3}{2}|\gamma_{k_0}(k_0)|, \tag{5.3}$$
$$\frac{1}{2}|\tilde{\gamma}_{k_0}(k_0)| \leqslant |\tilde{\gamma}_{k_0}(k)| \leqslant \frac{3}{2}|\tilde{\gamma}_{k_0}(k_0)|, \tag{5.4}$$
$$(k-k_0)^2|\tilde{\gamma}_{k_0}(k)| \leqslant \frac{1}{2}b_{k_0}^{1/2}, \tag{5.5}$$

при $|k-k_0| \leqslant \kappa$ и введём обозначение $\mathfrak{K} := \{k\colon |k| \leqslant \kappa\}$.

Лемма 8. *Пусть выполнено одно из условий 1–4. Пусть $q \geqslant 0$, $r \geqslant -1$. При $0 < \varepsilon \leqslant 1$ справедливы оценки*

$$\big\|(\Psi^* - [\varphi_{k_0}]\Phi^*)[\varepsilon^q(|k-k_0|^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)]\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon^{\min(1,q)}, \tag{5.6}$$
$$\big\|(\Psi^* - [\varphi_{k_0}]\Phi^*)[\varepsilon^r(|k-k_0|^2+\varepsilon^2)^{-r/2}|k-k_0|^{-1}\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)]\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon^{\min(0,r)}. \tag{5.7}$$

В (5.6) константа C зависит от q, κ, $\|\theta_{k_0}\|_{M_\kappa(k_0)}$, в (5.7) — от r, κ, $\|\theta_{k_0}\|_{M_\kappa(k_0)}$; величина $\|\theta_{k_0}\|_{M_\kappa(k_0)}$ определена ниже в (5.9).

Доказательство. Докажем (5.6). Рассмотрим сопряжённый оператор

$$[\varepsilon^q(|k-k_0|^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)](\Psi - \Phi[\overline{\varphi_{k_0}}]).$$

В силу (4.2), (4.4) заключаем, что оператор $[\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)](\Psi - \Phi[\overline{\varphi_{k_0}}])$ является интегральным оператором с ядром

$$(2\pi)^{-1/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)e^{-ixk}(\overline{\varphi(x,k)} - \overline{\varphi_{k_0}(x)}) = (2\pi)^{-1/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)e^{-ixk}(k-k_0)\overline{\theta_{k_0}(x,k)}. \tag{5.8}$$

Ядро (5.8) отличается от ядра оператора Фурье множителем $(k-k_0)\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)\overline{\theta_{k_0}(x,k)}$. Функция $\overline{\theta_{k_0}(x,k)}$ является мультипликатором на множестве ядер ограниченных интегральных операторов, переводящих $L_2(\mathbb{R})$ в $L_2(k_0-\kappa, k_0+\kappa)$ (см. [22, § 2, п. 2]), и её норма в классе мультипликаторов равна

$$\|\theta_{k_0}\|_{M_\kappa(k_0)} := \operatorname*{ess\text{-}sup}_{x\in\mathbb{R}} \|\theta_{k_0}(x,\cdot)\|_{C^1[k_0-\kappa,k_0+\kappa]} < \infty. \tag{5.9}$$

Отсюда и из неравенств

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^q|k-k_0|\big((k-k_0)^2+\varepsilon^2\big)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0) \leqslant \kappa^{1-q}\varepsilon^q, && \text{если} \quad 0 \leqslant q \leqslant 1,\\
&\varepsilon^q|k-k_0|\big((k-k_0)^2+\varepsilon^2\big)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0) \leqslant \varepsilon, && \text{если} \quad q > 1,
\end{aligned}$$

следует (5.6).

Оценка (5.7) доказывается аналогичным образом с учётом неравенств

$$\begin{aligned}
&|k-k_0|\cdot|k-k_0|^{-1}\varepsilon^r\big((k-k_0)^2+\varepsilon^2\big)^{-r/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0) \leqslant (\kappa^2+1)^{-r/2}\varepsilon^r, && \text{если} \quad -1 \leqslant r < 0,\\
&|k-k_0|\cdot|k-k_0|^{-1}\varepsilon^r\big((k-k_0)^2+\varepsilon^2\big)^{-r/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0) \leqslant 1, && \text{если} \quad r \geqslant 0.
\end{aligned}$$

$\square$

Лемма 9. *Пусть выполнено одно из условий 1–4, а также условие (5.1). При $t \neq 0$ справедливы двусторонние оценки*

$$\begin{gathered}
\left\|\left[\frac{\varepsilon^q}{((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{q/2}}\sin\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-2}(k-k_0)^4\gamma_{k_0}(k)\right)\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)\right]\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
\asymp \begin{cases}
\dfrac{\varepsilon^{q/2}|t|^{q/4}}{(|\gamma_{k_0}(k_0)|^{-1/2}+\varepsilon|t|^{1/2})^{q/2}}, & \text{если} \quad 0 \leqslant q \leqslant 4 \quad (\text{и} \quad 0 < \varepsilon|t|^{-1/2} \leqslant \mathfrak{c}),\\
|\gamma_{k_0}(k_0)|\,\varepsilon^2|t|, & \text{если} \quad q > 4,
\end{cases}
\end{gathered} \tag{5.10}$$

$$\left\| \left[\frac{\varepsilon^q}{((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{q/2}} \sin\left(\frac{1}{2} t\varepsilon^{-1}|k-k_0|^3 \tilde{\gamma}_{k_0}(k)\right) \chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0) \right] \right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}$$
$$\asymp \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^{2q/3}|t|^{q/3}}{(|\tilde{\gamma}_{k_0}(k_0)|^{-2/3}+\varepsilon^{4/3}|t|^{2/3})^{q/2}}, & \textit{если} \quad 0 \leqslant q \leqslant 3 \quad (\textit{и} \quad 0<\varepsilon|t|^{-1} \leqslant \tilde{\mathfrak{e}}), \\ |\tilde{\gamma}_{k_0}(k_0)|\, \varepsilon^2 |t|, & \textit{если} \quad q > 3, \end{cases} \tag{5.11}$$

$$\left\| \left[\frac{\varepsilon^r}{((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{r/2}} |k-k_0|^{-1} \sin\left(\frac{1}{2} t\varepsilon^{-1}|k-k_0|^3 \tilde{\gamma}_{k_0}(k)\right) \chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0) \right] \right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}$$
$$\asymp \begin{cases} \dfrac{\varepsilon^{(2r-1)/3}|t|^{(r+1)/3}}{|\tilde{\gamma}_{k_0}(k_0)|^{-1/3}(|\tilde{\gamma}_{k_0}(k_0)|^{-2/3}+\varepsilon^{4/3}|t|^{2/3})^{r/2}}, & \textit{если} \ -1 \leqslant r \leqslant 2 \ (\textit{и} \ \ 0<\varepsilon|t|^{-1} \leqslant \tilde{\mathfrak{e}}), \\ |\tilde{\gamma}_{k_0}(k_0)|\, \varepsilon |t|, & \textit{если}\ r > 2. \end{cases} \tag{5.12}$$

Здесь обозначение $X \asymp Y$ *означает* $c_1 Y \leqslant X \leqslant c_2 Y$ *с некоторыми константами* c_1 *и* c_2*, зависящими разве лишь от* q *и* r*;* $\mathfrak{e} := (2\pi)^{-1/2}|\gamma_{k_0}(k_0)|^{1/2}\kappa^2$*,* $\tilde{\mathfrak{e}} := (2\pi)^{-1}|\tilde{\gamma}_{k_0}(k_0)|\kappa^3$*.*

Доказательство. Докажем оценку (5.10). Оценки (5.11), (5.12) доказываются вполне аналогично. Справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\left\| \left[\varepsilon^q((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2} \sin\left(\frac{1}{2} t\varepsilon^{-2}(k-k_0)^4 \gamma_{k_0}(k)\right) \chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0) \right] \right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \\ &\qquad = \left\| \varepsilon^q((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2} \sin\left(\frac{1}{2} t\varepsilon^{-2}(k-k_0)^4 \gamma_{k_0}(k)\right) \chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0) \right\|_{L_\infty}. \end{aligned} \tag{5.13}$$

Оценим норму в правой части (5.13). Для этого введём функции

$$h_1(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} y, & \text{при}\, y \in [0,\pi/2], \\ \dfrac{2}{\pi}(\pi - y), & \text{при}\, y \in (\pi/2, \pi], \end{cases} \qquad h_2(y) = \begin{cases} y, & \text{при}\, y \in [0,\pi/2], \\ \pi - y, & \text{при}\, y \in (\pi/2, \pi], \end{cases}$$

и продолжим их π-периодическим образом. Имеем

$$h_1(y) \leqslant |\sin y| \leqslant h_2(y). \tag{5.14}$$

Будем оценивать максимумы функций

$$\varepsilon^q((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2} h_j\left(\frac{1}{2} t\varepsilon^{-2}(k-k_0)^4 \gamma_{k_0}(k)\right) \chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0), \qquad j=1,2, \tag{5.15}$$

снизу (для $j=1$) и сверху (для $j=2$). Поскольку функция $\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}$ монотонно убывает по $k>0$, а h_1, h_2 — периодические, то максимумы функций (5.15) достигаются на множестве

$$K = \left\{ k\colon \frac{1}{2}|t|\varepsilon^{-2}(k-k_0)^4 |\gamma_{k_0}(k)| \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}.$$

Рассмотрим множества

$$K_1' = \left\{ k\colon \frac{3}{4}|t|\varepsilon^{-2} \cdot |\gamma_{k_0}(k_0)|(k-k_0)^4 \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}, \tag{5.16}$$

$$K_2' = \left\{ k\colon \frac{1}{4}|t|\varepsilon^{-2} \cdot |\gamma_{k_0}(k_0)|(k-k_0)^4 \leqslant \frac{\pi}{2} \right\}. \tag{5.17}$$

Из (5.3) следуют включения $K_1' \subset K \subset K_2'$. Пусть $\check{k} = \max K$ и $\check{k}_{1,2}' = \max K_{1,2}'$. Имеем

$$\check{k}_1' = k_0 + (2\pi/3)^{1/4}|\gamma_{k_0}(k_0)|^{-1/4}\varepsilon^{1/2}|t|^{-1/4}, \quad \check{k}_2' = k_0 + (2\pi)^{1/4}|\gamma_{k_0}(k_0)|^{-1/4}\varepsilon^{1/2}|t|^{-1/4}$$

(максимумы достигаются, когда в (5.16), (5.17) реализуются равенства) и

$$|\check{k}_1' - k_0| \leqslant |\check{k} - k_0| \leqslant |\check{k}_2' - k_0|. \tag{5.18}$$

Рассмотрим функцию (5.15) с $j = 2$. В силу верхнего неравенства (5.3)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^q((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}h_2\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-2}(k-k_0)^4\gamma_{k_0}(k)\right)\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)\\
&\qquad= \varepsilon^q((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\cdot\frac{1}{2}|t|\varepsilon^{-2}(k-k_0)^4|\gamma_{k_0}(k)|\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)\\
&\qquad\qquad\leqslant \varepsilon^q((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\cdot\frac{3}{4}|t|\varepsilon^{-2}|\gamma_{k_0}(k_0)|(k-k_0)^4\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0).
\end{aligned}$$

Функция $k^4(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}$ чётна и при $0 \leqslant q \leqslant 4$ монотонно растёт по $k \geqslant 0$. В правую часть полученного выше неравенства подставим $k = \check{k}$ и оценим, используя верхнее неравенство (5.18):

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^q((\check{k}-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\cdot\frac{3}{4}|t|\varepsilon^{-2}|\gamma_{k_0}(k_0)|(\check{k}-k_0)^4\\
&\quad\leqslant \varepsilon^q\left((2\pi)^{1/2}|\gamma_{k_0}(k_0)|^{-1/2}\varepsilon|t|^{-1/2}+\varepsilon^2\right)^{-q/2}\cdot\frac{3}{4}|t|\varepsilon^{-2}|\gamma_{k_0}(k_0)|\cdot(2\pi)|\gamma_{k_0}(k_0)|^{-1}\varepsilon^2|t|^{-1}\\
&= \frac{3\pi}{2}\cdot\varepsilon^q\left((2\pi)^{1/2}|\gamma_{k_0}(k_0)|^{-1/2}\varepsilon|t|^{-1/2}+\varepsilon^2\right)^{-q/2} = \frac{3\pi}{2}\cdot\frac{\varepsilon^{q/2}|t|^{q/4}}{\left((2\pi)^{1/2}|\gamma_{k_0}(k_0)|^{-1/2}+\varepsilon|t|^{1/2}\right)^{q/2}},\\
&\qquad\qquad 0 < \varepsilon|t|^{-1/2} \leqslant \mathfrak{e}, \quad 0 \leqslant q \leqslant 4.
\end{aligned}$$

Здесь учитывается включение $K_2' \subset (k_0 - \kappa, k_0 + \kappa)$, следующее из $0 < \varepsilon|t|^{-1/2} \leqslant \mathfrak{e}$. При $q > 4$ функция $k^4(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}$, $k \geqslant 0$, имеет максимум $16q^{-q/2}(q-4)^{q/2-2}\varepsilon^{4-q}$. Тогда

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^q((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\cdot\frac{3}{4}|t|\varepsilon^{-2}|\gamma_{k_0}(k_0)|(k-k_0)^4\\
&\qquad\qquad\leqslant 12q^{-q/2}(q-4)^{q/2-2}|\gamma_{k_0}(k_0)|\varepsilon^2|t|, \qquad q > 4.
\end{aligned}$$

В итоге мы получили верхнюю оценку (5.10).

Теперь рассмотрим функцию (5.15) с $j = 1$. В силу нижнего неравенства (5.3)

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^q((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}h_1\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-2}(k-k_0)^4\gamma_{k_0}(k)\right)\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0)\\
&\qquad\qquad\geqslant \varepsilon^q((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\cdot\frac{1}{2\pi}|t|\varepsilon^{-2}|\gamma_{k_0}(k_0)|(k-k_0)^4\chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0).
\end{aligned}$$

При $0 \leqslant q \leqslant 4$ в правую часть этого неравенства подставим $k = \check{k}$ и оценим, используя нижнее неравенство (5.18):

$$\begin{aligned}
&\varepsilon^q((\check{k}-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\cdot\frac{1}{2\pi}|t|\varepsilon^{-2}|\gamma_{k_0}(k_0)|(\check{k}-k_0)^4\\
&\qquad\geqslant \frac{1}{3}\cdot\frac{\varepsilon^{q/2}|t|^{q/4}}{\left((2\pi/3)^{1/2}|\gamma_{k_0}(k_0)|^{-1/2}+\varepsilon|t|^{1/2}\right)^{q/2}}, \qquad 0 < \varepsilon|t|^{-1/2} \leqslant \mathfrak{e}, \quad 0 \leqslant q \leqslant 4,
\end{aligned}$$

а при $q > 4$ получаем

$$\max_k \varepsilon^q ((k-k_0)^2+\varepsilon^2)^{-q/2} h_1 \left(\frac{1}{2} t\varepsilon^{-2}(k-k_0)^4 \gamma_{k_0}(k)\right) \chi_{\mathfrak{K}}(k-k_0) \\ \geqslant \frac{8}{\pi} q^{-q/2}(q-4)^{q/2-2} |\gamma_{k_0}(k_0)| \varepsilon^2 |t|, \qquad q > 4.$$

Тем самым доказана нижняя оценка (5.10). $\square$

6. Основные результаты работы

В этом пункте приводятся основные результаты работы. Мы подробно рассматриваем случаи, когда выполнены условия 1, 3; а для случаев, когда выполнены условия 2, 4, мы приводим лишь формулировки.

6.1. Случай, когда выполнено условие 1. Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R})$ оператор, формально заданный дифференциальным выражением

$$A_\varepsilon = -(\omega^\varepsilon)^{-1} \frac{d}{dx} g^\varepsilon \frac{d}{dx} (\omega^\varepsilon)^{-1}, \quad g = \check{g}\omega^2. \tag{6.1}$$

Здесь 1-периодические функции $\check{g}$ и ω удовлетворяют условиям (2.2), (2.4), (2.5). Точное определение оператора A_ε даётся в терминах соответствующей квадратичной формы (ср. (2.6)). Операторы (2.7) и (6.1) связаны между собой соотношением

$$A_\varepsilon = \varepsilon^{-2} T_\varepsilon^* A T_\varepsilon, \tag{6.2}$$

где T_ε — оператор масштабного преобразования: $(T_\varepsilon u)(x) = \varepsilon^{1/2} u(\varepsilon x)$.

Сейчас нам удобно реализовать точки окружности в (3.4) так, что

$$\Psi_l \colon L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\widetilde{\Omega}_{l-s+1}), \qquad l \geqslant s.$$

Напомним, что $\widetilde{\Omega}_j$, $j \in \mathbb{N}$, были определены в (1.17). Пусть $f \in L_2(\mathbb{R})$. Изучается поведение решения $u_\varepsilon(x,t)$ при $\varepsilon \to 0$ следующей задачи Коши для уравнения типа Шрёдингера

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon(x,t) = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(x,t), \\ u_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon^{(+)} f)(x), \end{cases} \tag{6.3}$$

где

$$(\Upsilon_\varepsilon^{(+)} f)(x) \coloneqq (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(k) \sum_{j=s}^{\infty} e^{ikx} \varphi_j(x/\varepsilon, \varepsilon k) \chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(\varepsilon k)\, dk,$$
$$\Upsilon_\varepsilon^{(+)} f \in \mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma_0, \infty) L_2(\mathbb{R}).$$

В $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор $A_0^{\mathrm{hom}} = -b_0 \frac{d^2}{dx^2}$, $\operatorname{Dom} A_0^{\mathrm{hom}} = H^2(\mathbb{R})$, который назовём *эффективным оператором на левом краю* $\sigma_0 = E(0)$ *зоны* $R(E)$. Пусть $u_0(x,t)$ — решение соответствующей "усреднённой" задачи

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t} u_0(x,t) = (A_0^{\mathrm{hom}} u_0)(x,t), \\ u_0(x,0) = f(x). \end{cases} \tag{6.4}$$

Решения задач (6.3) и (6.4) можно записать следующим образом:

$$u_\varepsilon = e^{-itA_\varepsilon} \Upsilon_\varepsilon^{(+)} f, \qquad u_0 = e^{-itA_0^{\mathrm{hom}}} f, \tag{6.5}$$

где $\Upsilon_\varepsilon^{(+)} \coloneqq \sum_{j=s}^{\infty} T_\varepsilon^* \Psi_j^* R_{j-s+1} \Phi T_\varepsilon$, а R_l — оператор сужения на $\widetilde{\Omega}_l$.

Теорема 10. *Предположим, что выполнены условие 1 и (5.1). Пусть u_ε — решение задачи (6.3), u_0 — решение задачи (6.4) и пусть $t \neq 0$, $f \in H^q(\mathbb{R})$, $0 \leqslant q \leqslant 2$. Справедлива оценка*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}\varphi_0^\varepsilon u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{q/4})\varepsilon^{q/2}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})}, \qquad 0<\varepsilon|t|^{-1/2} \leqslant \mathfrak{e}, \tag{6.6}$$

с константой $C = C(q, \kappa, \|\varphi_0\|_{L_\infty}, |\gamma_0(0)|, \|\theta_0\|_{M_\kappa(0)})$.

Доказательство. В силу (6.5) оценка (6.6) допускает переформулировку в операторных терминах

$$\left\| e^{-itA_\varepsilon}\Upsilon_\varepsilon^{(+)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}[\varphi_0^\varepsilon]e^{-itA_0^{\mathrm{hom}}}\right\|_{H^q(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{q/4})\varepsilon^{q/2}, \tag{6.7}$$

где $t \neq 0$, $0<\varepsilon|t|^{-1/2} \leqslant \mathfrak{e}$, $0 \leqslant q \leqslant 2$. Таким образом, наша цель — доказать (6.7). Поскольку

$$\left.\begin{array}{l}\text{оператор } (-d_x^2+I)^{q/2} \text{ осуществляет изометрический}\\ \text{изоморфизм пространства Соболева } H^q(\mathbb{R}) \text{ на } L_2(\mathbb{R}),\end{array}\right\} \tag{6.8}$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned}&\left\| e^{-itA_\varepsilon}\Upsilon_\varepsilon^{(+)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}[\varphi_0^\varepsilon]e^{-itA_0^{\mathrm{hom}}}\right\|_{H^q(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\ &\qquad = \left\| \left(e^{-itA_\varepsilon}\Upsilon_\varepsilon^{(+)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}[\varphi_0^\varepsilon]e^{-itA_0^{\mathrm{hom}}}\right)(-d_x^2+I)^{-q/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

В силу унитарности оператора масштабного преобразования имеем

$$\begin{aligned}&\left\| \left(e^{-itA_\varepsilon}\Upsilon_\varepsilon^{(+)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}[\varphi_0^\varepsilon]e^{-itA_0^{\mathrm{hom}}}\right)(-d_x^2+I)^{-q/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\ &\qquad = \left\| \left(e^{-it\varepsilon^{-2}A}\Upsilon^{(+)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}[\varphi_0]e^{-it\varepsilon^{-2}A_0^{\mathrm{hom}}}\right)\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})},\end{aligned} \tag{6.9}$$

где $\Upsilon^{(+)} := \sum_{j=s}^{\infty}\Psi_j^* R_{j-s+1}\Phi$. Введём проектор $F_{\mathfrak{K}} = \Phi^*[\chi_{\mathfrak{K}}]\Phi$. Очевидно,

$$\|\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}(I-F_{\mathfrak{K}})\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant \kappa^{-q}\varepsilon^q. \tag{6.10}$$

а потому

$$\begin{aligned}&\left\| \left(e^{-it\varepsilon^{-2}A}\Upsilon^{(+)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}[\varphi_0]e^{-it\varepsilon^{-2}A_0^{\mathrm{hom}}}\right)\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}(I-F_{\mathfrak{K}})\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\ &\qquad \leqslant (1+\|\varphi_0\|_{L_\infty})\kappa^{-q}\varepsilon^q.\end{aligned} \tag{6.11}$$

Рассмотрим оператор $\left(e^{-it\varepsilon^{-2}A}\Upsilon^{(+)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}[\varphi_0]e^{-it\varepsilon^{-2}A_0^{\mathrm{hom}}}\right)\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}F_{\mathfrak{K}}$. Справедливы равенства

$$e^{-it\varepsilon^{-2}A}\Upsilon^{(+)}\,\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}F_{\mathfrak{K}} = \Psi^*[e^{-it\varepsilon^{-2}E(k)}\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi, \tag{6.12}$$

$$[\varphi_0]e^{-it\varepsilon^{-2}A_0^{\mathrm{hom}}}\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}F_{\mathfrak{K}} = [\varphi_0]\Phi^*[e^{-it\varepsilon^{-2}b_0k^2}\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi. \tag{6.13}$$

Из (5.6) следует оценка

$$\|(\Psi^* - [\varphi_0]\Phi^*)[e^{-it\varepsilon^{-2}b_0k^2}\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi\| \leqslant C\varepsilon^{\min(1,q)}. \tag{6.14}$$

Остаётся оценить $\|\Psi^*[(e^{-it\varepsilon^{-2}E(k)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}e^{-it\varepsilon^{-2}b_0k^2})\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}$. В силу (4.1) имеем

$$\begin{aligned}e^{-it\varepsilon^{-2}E(k)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}e^{-it\varepsilon^{-2}b_0k^2} &= e^{-it\varepsilon^{-2}(\sigma_0+b_0k^2)}(e^{-it\varepsilon^{-2}k^4\gamma_0(k)}-1)\\ &= -e^{-it\varepsilon^{-2}(\sigma_0+b_0k^2)}e^{-\frac{1}{2}it\varepsilon^{-2}k^4\gamma_0(k)}\cdot 2i\sin\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-2}k^4\gamma_0(k)\right).\end{aligned} \tag{6.15}$$

Применяя верхнюю оценку (5.10), с учётом $|e^{-it\varepsilon^{-2}(\sigma_0+b_0k^2)}|=1$, $\left|e^{-\frac{1}{2}it\varepsilon^{-2}k^4\gamma_0(k)}\right|=1$ получаем

$$\begin{aligned}\Big\|\Psi^*[(e^{-it\varepsilon^{-2}E(k)}-e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}e^{-it\varepsilon^{-2}b_0k^2})\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\ \leqslant\frac{C\varepsilon^{q/2}|t|^{q/4}}{(|\gamma_{k_0}(k_0)|^{-1/2}+\varepsilon|t|^{1/2})^{q/2}},\qquad 0<\varepsilon|t|^{-1/2}\leqslant\mathfrak{e}.\end{aligned}\tag{6.16}$$

Из (6.9), (6.11)–(6.14), (6.16) следует (6.7). Теорема доказана. □

Пусть $f,g\in L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим теперь поведение решения $v_\varepsilon(x,t)$ при $\varepsilon\to0$ задачи Коши для гиперболического уравнения

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}v_\varepsilon(x,t)=-(A_\varepsilon v_\varepsilon)(x,t)+\varepsilon^{-2}\sigma_0v_\varepsilon(x,t),\\ v_\varepsilon(x,0)=(\Upsilon_\varepsilon^{(+)}f)(x),\ (\partial_tv_\varepsilon)(x,0)=(\Upsilon_\varepsilon^{(+)}g)(x).\end{cases}\tag{6.17}$$

Пусть $v_0(x,t)$ — решение соответствующей "усреднённой" задачи

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}v_0(x,t)=-(A_0^{\mathrm{hom}}v_0)(x,t),\\ v_0(x,0)=f(x),\ (\partial_tv_0)(x,0)=g(x).\end{cases}\tag{6.18}$$

Для решений задач (6.17) и (6.18) справедливы представления

$$\left.\begin{aligned}v_\varepsilon&=\cos\big(tA_{\sigma_0,\varepsilon}^{1/2}\big)\Upsilon_\varepsilon^{(+)}f+A_{\sigma_0,\varepsilon}^{-1/2}\sin\big(tA_{\sigma_0,\varepsilon}^{1/2}\big)\Upsilon_\varepsilon^{(+)}g,\\ v_0&=\cos(t(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})f+(A_0^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(t(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})g,\end{aligned}\right\}\tag{6.19}$$

где $A_{\sigma_0,\varepsilon}:=(A_\varepsilon-\varepsilon^{-2}\sigma_0)\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma_0,\infty)$.

Теорема 11. *Предположим, что выполнены условие 1 и (5.1). Пусть v_ε — решение задачи (6.17), v_0 — решение задачи (6.18) и пусть $t\neq0$, $f\in H^q(\mathbb{R})$, $g\in H^r(\mathbb{R})$. Справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|v_\varepsilon(\cdot,t)-\varphi_0^\varepsilon v_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})}\\ &\qquad\leqslant C\big((1+|t|^{q/3})\varepsilon^{2q/3}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})}+(1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3}\|g\|_{H^r(\mathbb{R})}\big),\\ &\qquad\qquad 0<\varepsilon|t|^{-1}\leqslant\tilde{\mathfrak{e}},\quad 0<\varepsilon\leqslant1,\quad 0\leqslant q\leqslant3/2,\quad 0\leqslant r\leqslant1/2,\end{aligned}\tag{6.20}$$

$$\begin{aligned}&\|v_\varepsilon(\cdot,t)-\varphi_0^\varepsilon v_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})}\\ &\leqslant C\big((1+|t|^{q/3})\varepsilon^{2q/3}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})}+((1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3}+|t|^{1/3}\varepsilon^{2/3})\|g\|_{H^r(\mathbb{R})}\big),\\ &\qquad\qquad 0<\varepsilon|t|^{-1}\leqslant\tilde{\mathfrak{e}},\quad 0<\varepsilon\leqslant1,\quad 0\leqslant q\leqslant3/2,\quad -1\leqslant r<0,\end{aligned}\tag{6.21}$$

с константами $C=C(q,r,\kappa,\alpha_0,\beta_0,\beta_1,\sigma_0,b_0,\|\varphi_0\|_{L_\infty},|\tilde{\gamma}_0(0)|,\|\theta_0\|_{M_\kappa(0)})$.

Доказательство. В силу (6.19) мы должны доказать оценки

$$\begin{aligned}\Big\|\cos\big(tA_{\sigma_0,\varepsilon}^{1/2}\big)\Upsilon_\varepsilon^{(+)}-[\varphi_0^\varepsilon]\cos(t(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Big\|_{H^q(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\leqslant C(1+|t|^{q/3})\varepsilon^{2q/3},\\ 0\leqslant q\leqslant3/2,\end{aligned}\tag{6.22}$$

$$\begin{aligned}\Big\|A_{\sigma_0,\varepsilon}^{-1/2}\sin\big(tA_{\sigma_0,\varepsilon}^{1/2}\big)\Upsilon_\varepsilon^{(+)}-[\varphi_0^\varepsilon](A_0^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(t(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Big\|_{H^r(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\ \leqslant C(1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3},\qquad 0\leqslant r\leqslant1/2,\end{aligned}\tag{6.23}$$

$$\begin{aligned}\Big\|A_{\sigma_0,\varepsilon}^{-1/2}\sin\big(tA_{\sigma_0,\varepsilon}^{1/2}\big)\Upsilon_\varepsilon^{(+)}-[\varphi_0^\varepsilon](A_0^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(t(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Big\|_{H^r(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\ \leqslant C((1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3}+|t|^{1/3}\varepsilon^{2/3}),\qquad -1\leqslant r<0,\end{aligned}\tag{6.24}$$

где $t \neq 0$, $0 < \varepsilon|t|^{-1} \leqslant \tilde{\mathfrak{c}}$. Используя (6.8) и унитарность масштабного преобразования, имеем равенства

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\cos\big(tA_{\sigma_0,\varepsilon}^{1/2}\big)\Upsilon_\varepsilon^{(+)} - [\varphi_0^\varepsilon]\cos(t(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Big\|_{H^q(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \\
&\quad = \Big\|\Big(\cos\big(t\varepsilon^{-1}A_{\sigma_0}^{1/2}\big)\Upsilon^{(+)} - [\varphi_0]\cos(t\varepsilon^{-1}(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Big)\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}
\end{aligned}
\tag{6.25}
$$

и

$$
\begin{aligned}
&\Big\|A_{\sigma_0,\varepsilon}^{-1/2}\sin\big(tA_{\sigma_0,\varepsilon}^{1/2}\big)\Upsilon_\varepsilon^{(+)} - [\varphi_0^\varepsilon](A_0^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(t(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Big\|_{H^r(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \\
&= \Big\|\varepsilon\Big(A_{\sigma_0}^{-1/2}\sin\big(t\varepsilon^{-1}A_{\sigma_0}^{1/2}\big)\Upsilon^{(+)} \\
&\qquad - [\varphi_0](A_0^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(t\varepsilon^{-1}(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Big)\varepsilon^r(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-r/2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})},
\end{aligned}
\tag{6.26}
$$

где $A_{\sigma_0} \coloneqq (A-\sigma_0)\mathcal{E}_A[\sigma_0,\infty)$.

Оценим (6.25). Аналогично доказательству теоремы 10 имеем

$$
\begin{gathered}
\Big\|\Big(\cos\big(t\varepsilon^{-1}A_{\sigma_0}^{1/2}\big)\Upsilon^{(+)} - [\varphi_0]\cos(t\varepsilon^{-1}(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Big)\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}(I-F_{\mathfrak{K}})\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \\
\leqslant (1+\|\varphi_0\|_{L_\infty})\kappa^{-q}\varepsilon^q, \\
\cos\big(t\varepsilon^{-1}A_{\sigma_0}^{1/2}\big)\Upsilon^{(+)}\ \varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}F_{\mathfrak{K}} = \Psi^*[\cos\big(t\varepsilon^{-1}(E(k)-\sigma_0)^{1/2}\big)\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi, \\
[\varphi_0]\cos\big(t\varepsilon^{-1}(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2}\big)\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}F_{\mathfrak{K}} = [\varphi_0]\Phi^*[\cos\big(t\varepsilon^{-1}(b_0k^2)^{1/2}\big)\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi, \\
\|(\Psi^*-[\varphi_0]\Phi^*)[\cos\big(t\varepsilon^{-1}(b_0k^2)^{1/2}\big)\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi\| \leqslant C\varepsilon^{\min(1,q)}.
\end{gathered}
$$

Остаётся оценить

$$
\Big\|\Psi^*[(\cos(t\varepsilon^{-1}(E(k)-\sigma_0)^{1/2}) - \cos(t\varepsilon^{-1}(b_0k^2)^{1/2}))\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.
$$

Преобразуем разность косинусов под знаком нормы с помощью тождества

$$
\begin{aligned}
&\cos\big(t\varepsilon^{-1}(E(k)-\sigma_0)^{1/2}\big) - \cos\big(t\varepsilon^{-1}(b_0k^2)^{1/2})\big) \\
&\quad = -2\sin\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-1}\big((E(k)-\sigma_0)^{1/2}+(b_0k^2)^{1/2}\big)\right)\sin\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-1}\big((E(k)-\sigma_0)^{1/2}-(b_0k^2)^{1/2}\big)\right).
\end{aligned}
$$

Очевидно, $\left|\sin\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-1}((E(k)-\sigma_0)^{1/2}+(b_0k^2)^{1/2})\right)\right| \leqslant 1$. Применяя верхнюю оценку (5.11), с учётом (5.2) получаем

$$
\begin{aligned}
&\Big\|\Psi^*[(\cos(t\varepsilon^{-1}(E(k)-\sigma_0)^{1/2}) - \cos(t\varepsilon^{-1}(b_0k^2)^{1/2}))\varepsilon^q(k^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \\
&\qquad \leqslant \frac{C\varepsilon^{2q/3}|t|^{q/3}}{(|\tilde{\gamma}_{k_0}(k_0)|^{-2/3}+\varepsilon^{4/3}|t|^{2/3})^{q/2}}, \qquad 0<\varepsilon|t|^{-1}\leqslant\tilde{\mathfrak{c}},
\end{aligned}
$$

что завершает доказательство (6.22).

Перейдём к доказательству оценок (6.23), (6.24). Сперва оценим оператор под знаком нормы в правой части (6.26), домноженный справа на проектор $(I-F_{\mathfrak{K}})$:

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\Big(A_{\sigma_0}^{-1/2}\sin\big(t\varepsilon^{-1}A_{\sigma_0}^{1/2}\big)\Upsilon^{(+)} \\
&\qquad - [\varphi_0](A_0^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(t\varepsilon^{-1}(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Big)\varepsilon^r(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-r/2}(I-F_{\mathfrak{K}}) \\
&= \varepsilon\Big(\sum_{j=s}^{\infty}\Psi_j^* R_{j-s+1}\big[\big(E_j(k)-\sigma_0\big)^{-1/2}\sin\big(t\varepsilon^{-1}(E_j(k)-\sigma_0)^{1/2}\big)\chi_{\tilde{\Omega}_{j-s+1}}(k)\big] \\
&\qquad - [\varphi_0]\Phi^*\big[(b_0k^2)^{-1/2}\sin(t\varepsilon^{-1}(b_0k^2)^{1/2})\big]\Big)\big[\varepsilon^r(k^2+\varepsilon^2)^{-r/2}(1-\chi_{\mathfrak{K}}(k))\big]\Phi.
\end{aligned}
\tag{6.27}
$$

Для этого воспользуемся элементарным неравенством $|\sin x| \leqslant 1$, $x \in \mathbb{R}$; а также оценками

$$\big(E_j(k) - \sigma_0\big)^{-1/2} \chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(k)(1 - \chi_{\mathfrak{K}}(k)) \leqslant \big(E(\kappa) - \sigma_0\big)^{-1/2}, \qquad j \geqslant s,$$
$$(b_0 k^2)^{-1/2}(1 - \chi_{\mathfrak{K}}(k)) \leqslant b_0^{-1/2}\kappa^{-1}.$$

Далее, если $r \geqslant 0$, то $\varepsilon^r(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant 1$ и $(L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}))$-норма оператора (6.27) оценивается через $C\varepsilon$. Рассмотрим теперь случай, когда $-1 \leqslant r < 0$. Пусть $N \geqslant 1$. Тогда

$$\varepsilon^r(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2}\chi_{[-N,N]}(k) \leqslant \varepsilon^r(N^2 + 1)^{-r/2}, \qquad -1 \leqslant r < 0,$$
$$(b_0 k^2)^{-1/2}\varepsilon^r(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2}(1 - \chi_{[-N,N]}(k)) \leqslant b_0^{-1/2} N^{-1}(N^2 + 1)^{-r/2}\varepsilon^r, \qquad -1 \leqslant r < 0.$$

Здесь мы учли, что функция $(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2}$ чётна и монотонно растёт по $k \geqslant 0$, а функция $|k|^{-1}(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2}$ чётна и монотонно убывает по $k \geqslant 1$. Затем, из нижней оценки (3.3) и периодичности функций $E_j(k)$ следует, что

$$E_j(k)\chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(k) \geqslant \alpha_0\beta_0^2\beta_1^{-2}(|k| + \pi(s-1))^2\chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(k) \geqslant \alpha_0\beta_0^2\beta_1^{-2}k^2\chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(k), \qquad j \geqslant s,$$

и поэтому

$$\begin{aligned} &\big(E_j(k) - \sigma_0\big)^{-1/2}(1 - \chi_{[-N,N]}(k))\chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(k)\varepsilon^r(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \\ &\qquad \leqslant (\alpha_0\beta_0^2\beta_1^{-2}k^2 - \sigma_0)^{-1/2}(1 - \chi_{[-N,N]}(k))\varepsilon^r(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2} \leqslant C\varepsilon^r, \\ &\qquad\qquad C = (\alpha_0\beta_0^2\beta_1^{-2}N^2 - \sigma_0)^{-1/2}(N^2 + 1)^{-r/2}, \qquad j \geqslant s, \quad -1 \leqslant r < 0. \end{aligned} \tag{6.28}$$

Тут учтено, что функция в средней части (6.28) монотонно убывает по $k \geqslant N$. Число N выбирается так, чтобы $\alpha_0\beta_0^2\beta_1^{-2}N^2 - \sigma_0 > 0$. Таким образом, при $-1 \leqslant r < 0$ оператор (6.27) оценивается по $(L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}))$-норме через $C\varepsilon^{r+1}$.

Рассмотрим теперь

$$\varepsilon\Big(A_{\sigma_0}^{-1/2}\sin\big(t\varepsilon^{-1}A_{\sigma_0}^{1/2}\big)\Upsilon^{(+)} - [\varphi_0](A_0^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin\big(t\varepsilon^{-1}(A_0^{\mathrm{hom}})^{1/2}\big)\Big)\varepsilon^r(-d_x^2 + \varepsilon^2 I)^{-r/2}F_{\mathfrak{K}}. \tag{6.29}$$

Аналогично (6.12), (6.13), получаем, что оператор (6.29) равен

$$\varepsilon\Big(\Psi^*\big[\big(E(k) - \sigma_0\big)^{-1/2}\sin\big(t\varepsilon^{-1}(E(k) - \sigma_0)^{1/2}\big)\big] - [\varphi_0]\Phi^*\big[(b_0k^2)^{-1/2}\sin\big(t\varepsilon^{-1}(b_0k^2)^{1/2}\big)\big]\Big)$$
$$\times\big[\varepsilon^r(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)\big]\Phi.$$

В силу (5.2), (5.4) и (5.5) справедлива оценка

$$\begin{aligned} \big|\big(E(k) - \sigma_0\big)^{-1/2} - (b_0k^2)^{-1/2}\big|\chi_{\mathfrak{K}}(k) &= \frac{|k|^3|\tilde{\gamma}_0(k)|}{b_0^{1/2}|k|\big|b_0^{1/2}|k| + |k|^3\tilde{\gamma}_0(k)\big|}\chi_{\mathfrak{K}}(k) \\ &\leqslant \frac{3|k||\tilde{\gamma}_0(0)|}{2b_0^{1/2}\big|b_0^{1/2} + k^2\tilde{\gamma}_0(k)\big|}\chi_{\mathfrak{K}}(k) \leqslant 3b_0^{-1}|k||\tilde{\gamma}_0(0)|\chi_{\mathfrak{K}}(k) \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\big|\big(E(k) - \sigma_0\big)^{-1/2} - (b_0k^2)^{-1/2}\big|\varepsilon^{r+1}(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k) \leqslant 3b_0^{-1}|\tilde{\gamma}_0(0)|\varepsilon^{r+1}\kappa(\kappa^2 + \varepsilon^2)^{-r/2}.$$

Здесь мы учли, что функция $k(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2}$ монотонно растёт при $k \geqslant 0$. Далее, применяя (5.7), получаем

$$\varepsilon\|(\Psi^* - [\varphi_0]\Phi^*)[(b_0k^2)^{-1/2}\sin(t\varepsilon^{-1}(b_0k^2)^{1/2})\varepsilon^r(k^2 + \varepsilon^2)^{-r/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)]\Phi\| \leqslant C\varepsilon^{\min(1,r+1)}.$$

Остаётся оценить норму

$$\varepsilon\Big\|\Psi^*\Big[(b_0k^2)^{-1/2}\Big(\sin\big(t\varepsilon^{-1}(E(k)-\sigma_0)^{1/2}\big) \\ -\sin\big(t\varepsilon^{-1}(b_0k^2)^{1/2}\big)\Big)\varepsilon^r(k^2+\varepsilon^2)^{-r/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k)\Big]\Phi\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.$$

Справедливо тождество

$$(b_0k^2)^{-1/2}\left(\sin(t\varepsilon^{-1}(E(k)-\sigma_0)^{1/2})-\sin(t\varepsilon^{-1}(b_0k^2)^{1/2})\right) \\ =2(b_0k^2)^{-1/2}\cos\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-1}((E(k)-\sigma_0)^{1/2}+(b_0k^2)^{1/2})\right) \\ \times\sin\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-1}((E(k)-\sigma_0)^{1/2}-(b_0k^2)^{1/2})\right).$$

Очевидно, $\left|\cos\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-1}\big((E(k)-\sigma_0)^{1/2}+(b_0k^2)^{1/2}\big)\right)\right|\leqslant 1$. Применение верхней оценки (5.12) с учётом (5.2) завершает доказательство неравенств (6.23), (6.24). □

6.2. Случай, когда выполнено условие 3. Сейчас нам удобно реализовать точки окружности в (3.4) так, что

$$\Psi_l\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\widetilde{\Omega}'_{s-l+1}),\qquad l=1,\dots,s,$$

где $\widetilde{\Omega}'_j=\widetilde{\Omega}_j+\pi$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения типа Шрёдингера

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}w_\varepsilon(x,t)=(A_\varepsilon w_\varepsilon)(x,t), \\ w_\varepsilon(x,0)=(\widetilde{\Upsilon}^{(-)}_\varepsilon f)(x), \end{cases}\tag{6.30}$$

где

$$(\widetilde{\Upsilon}^{(-)}_\varepsilon f)(x):=(2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}(\Phi f)(k-\varepsilon^{-1}\pi)\sum_{j=1}^{s}e^{ikx}\varphi_j(x/\varepsilon,\varepsilon k)\chi_{\widetilde{\Omega}'_{s-j+1}}(\varepsilon k)\,dk,$$
$$\widetilde{\Upsilon}^{(-)}_\varepsilon f\in\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[0,\varepsilon^{-2}\sigma_\pi]L_2(\mathbb{R}),$$

и соответствующую "усреднённую" задачу

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial t}w_0(x,t)=-(A^{\mathrm{hom}}_\pi w_0)(x,t), \\ w_0(x,0)=f(x). \end{cases}\tag{6.31}$$

Здесь $A^{\mathrm{hom}}_\pi=-b_\pi\frac{d^2}{dx^2}$, $\operatorname{Dom}A^{\mathrm{hom}}_\pi=H^2(\mathbb{R})$, — действующий в $L_2(\mathbb{R})$ оператор, который мы назовём *эффективным оператором на правом краю* $\sigma_\pi=E(\pi)$ *зоны* $R(E)$.

Решения задач (6.30) и (6.31) можно записать следующим образом:

$$w_\varepsilon=e^{-itA_\varepsilon}\widetilde{\Upsilon}^{(-)}_\varepsilon f,\qquad w_0=e^{-it(-A^{\mathrm{hom}}_\pi)}f,\tag{6.32}$$

где $\widetilde{\Upsilon}^{(-)}_\varepsilon:=\sum_{j=1}^{s}T^*_\varepsilon\Psi^*_jR'_{s-j+1}\Phi T_\varepsilon[e^{i\pi x/\varepsilon}]$, а R'_l — оператор сужения на $\widetilde{\Omega}'_l$.

Теорема 12. *Предположим, что выполнены условие 3 и (5.1). Пусть w_ε — решение задачи (6.30), w_0 — решение задачи (6.31) и пусть $t \neq 0$, $f \in H^q(\mathbb{R})$, $0 \leqslant q \leqslant 2$. Справедлива оценка*

$$\|w_\varepsilon(\cdot,t) - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}\varphi_\pi^\varepsilon e^{i\pi(\cdot/\varepsilon)}w_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{q/4})\varepsilon^{q/2}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})}, \qquad 0<\varepsilon|t|^{-1/2}\leqslant \mathfrak{e}, \tag{6.33}$$

с константой $C = C(q, \kappa, \|\varphi_\pi\|_{L_\infty}, |\gamma_\pi(\pi)|, \|\theta_\pi\|_{M_\kappa(\pi)})$.

Доказательство. В силу (6.32) нужно доказать оценку

$$\Big\|e^{-itA_\varepsilon}\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(-)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}\varphi_\pi^\varepsilon[e^{i\pi\varepsilon^{-1}x}]e^{-it(-A_\pi^{\mathrm{hom}})}\Big\|_{H^q(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{q/4})\varepsilon^{q/2},$$

где $t\neq 0$, $0<\varepsilon|t|^{-1/2}\leqslant\mathfrak{e}$, $0\leqslant q\leqslant 2$. Из (6.8) и унитарности масштабного преобразования следует равенство

$$\Big\|e^{-itA_\varepsilon}\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(-)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}\varphi_\pi^\varepsilon[e^{i\pi\varepsilon^{-1}x}]e^{-it(-A_\pi^{\mathrm{hom}})}\Big\|_{H^q(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} = \Big\|\Big(e^{-it\varepsilon^{-2}A}\widetilde{\Upsilon}^{(-)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}[\varphi_\pi][e^{i\pi x}]e^{-it\varepsilon^{-2}(-A_\pi^{\mathrm{hom}})}\Big)\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.$$

Здесь $\widetilde{\Upsilon}^{(-)} = \sum_{j=1}^s \Psi_j^* R'_{s-j+1}\Phi[e^{i\pi x}]$. Далее, справедливы тождества

$$\Phi^*[\varepsilon^q((k-\pi)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}]\Phi[e^{i\pi x}] = [e^{i\pi x}]\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2},$$
$$\Phi^*[e^{it\varepsilon^{-2}b_\pi(k-\pi)^2}\varepsilon^q((k-\pi)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}]\Phi[e^{i\pi x}] = [e^{i\pi x}]e^{-it\varepsilon^{-2}(-A_\pi^{\mathrm{hom}})}\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2},$$

поэтому

$$\Big\|\Big(e^{-it\varepsilon^{-2}A}\widetilde{\Upsilon}^{(-)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}[\varphi_\pi][e^{i\pi x}]e^{-it\varepsilon^{-2}(-A_\pi^{\mathrm{hom}})}\Big)\varepsilon^q(-d_x^2+\varepsilon^2 I)^{-q/2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}$$
$$= \Big\|\Big(e^{-it\varepsilon^{-2}A}\sum_{j=1}^s\Psi_j^*R'_{s-j+1} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}[\varphi_\pi]\Phi^*[e^{it\varepsilon^{-2}b_\pi(k-\pi)^2}]\Big)[\varepsilon^q((k-\pi)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}]\Phi\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.$$

Очевидно, $\varepsilon^q((k-\pi)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}(1-\chi_{\mathfrak{K}}(k-\pi)) \leqslant \kappa^{-q}\varepsilon^q$, а потому

$$\Big\|\Big(e^{-it\varepsilon^{-2}A}\sum_{j=1}^s\Psi_j^*R'_{s-j+1} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}[\varphi_\pi]\Phi^*[e^{it\varepsilon^{-2}b_\pi(k-\pi)^2}]\Big) \times[\varepsilon^q((k-\pi)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}(1-\chi_{\mathfrak{K}}(k-\pi))]\Phi\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant (1+\|\varphi_\pi\|_{L_\infty})\kappa^{-q}\varepsilon^q. \tag{6.34}$$

Таким образом, принимая во внимание равенство

$$e^{-it\varepsilon^{-2}A}\sum_{j=1}^s\Psi_j^*R'_{s-j+1}[\varepsilon^q((k-\pi)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-\pi)]\Phi = \Psi^*[e^{-it\varepsilon^{-2}E(k)}\varepsilon^q((k-\pi)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-\pi)]\Phi,$$

а также следующую из (5.6) оценку

$$\|(\Psi^*-[\varphi_\pi]\Phi^*)[e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}e^{it\varepsilon^{-2}b_\pi(k-\pi)^2}\varepsilon^q((k-\pi)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-\pi)]\Phi\| \leqslant C\varepsilon^{\min(1,q)},$$

заключаем, что для доказательства теоремы нам остаётся только оценить норму

$$\left\|\Psi^*[(e^{-it\varepsilon^{-2}E(k)}-e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}e^{it\varepsilon^{-2}b_\pi(k-\pi)^2})\varepsilon^q((k-\pi)^2+\varepsilon^2)^{-q/2}\chi_{\mathfrak{K}}(k-\pi)]\Phi\right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.$$

В силу (4.3) справедливо равенство

$$\begin{aligned}e^{-it\varepsilon^{-2}E(k)}-e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}e^{it\varepsilon^{-2}b_\pi(k-\pi)^2}&=e^{-it\varepsilon^{-2}(\sigma_\pi-b_\pi(k-\pi)^2)}(e^{-it\varepsilon^{-2}(k-\pi)^4\gamma_\pi(k)}-1)\\&=-e^{-it\varepsilon^{-2}(\sigma_\pi-b_\pi(k-\pi)^2)}e^{-\frac12 it\varepsilon^{-2}(k-\pi)^4\gamma_\pi(k)}\cdot 2i\sin\left(\frac12 t\varepsilon^{-2}(k-\pi)^4\gamma_\pi(k)\right).\end{aligned}$$

Применение оценки (5.10) с учётом $\left|e^{-it\varepsilon^{-2}(\sigma_\pi-b_\pi(k-\pi)^2)}\right|=1$, $\left|e^{-\frac12 it\varepsilon^{-2}k^4\gamma_\pi(k)}\right|=1$ завершает доказательство. $\square$

Пусть $f,g\in L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим задачу Коши для гиперболического уравнения

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}z_\varepsilon(x,t)=(A_\varepsilon z_\varepsilon)(x,t)-\varepsilon^{-2}\sigma_\pi z_\varepsilon(x,t),\\ z_\varepsilon(x,0)=(\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(-)}f)(x),\quad(\partial_t z_\varepsilon)(x,0)=(\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(-)}g)(x),\end{cases}\tag{6.35}$$

и соответствующую усреднённую задачу

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}z_0(x,t)=-(A_\pi^{\mathrm{hom}}z_0)(x,t),\\ z_0(x,0)=f(x),\quad(\partial_t z_0)(x,0)=g(x).\end{cases}\tag{6.36}$$

Для решений задач (6.35) и (6.36) справедливы представления

$$\begin{aligned}z_\varepsilon&=\cos\bigl(tA_{\sigma_\pi,\varepsilon}^{1/2}\bigr)\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(-)}f+A_{\sigma_\pi,\varepsilon}^{-1/2}\sin\bigl(tA_{\sigma_\pi,\varepsilon}^{1/2}\bigr)\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(-)}g,\\ z_0&=\cos(t(A_\pi^{\mathrm{hom}})^{1/2})f+(A_\pi^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(t(A_\pi^{\mathrm{hom}})^{1/2})g,\end{aligned}$$

где $A_{\sigma_\pi,\varepsilon}:=(\varepsilon^{-2}\sigma_\pi-A_\varepsilon)\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[0,\varepsilon^{-2}\sigma_\pi]$. Аналогично доказательству теорем 11 и 12 можно доказать следующее утверждение.

Теорема 13. *Предположим, что выполнены условие 3 и (5.1). Пусть z_ε — решение задачи (6.35), z_0 — решение задачи (6.36) и пусть $t\neq 0$, $f\in H^q(\mathbb{R})$, $g\in H^r(\mathbb{R})$. Справедливы оценки*

$$\begin{aligned}&\|z_\varepsilon(\cdot,t)-\varphi_\pi^\varepsilon e^{i\pi(\cdot/\varepsilon)}z_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})}\\&\qquad\leqslant C\bigl((1+|t|^{q/3})\varepsilon^{2q/3}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})}+(1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3}\|g\|_{H^r(\mathbb{R})}\bigr),\\&\qquad\qquad 0<\varepsilon|t|^{-1}\leqslant\tilde{\mathfrak{e}},\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\quad 0\leqslant q\leqslant 3/2,\quad 0\leqslant r\leqslant 1/2,\end{aligned}\tag{6.37}$$

$$\begin{aligned}&\|z_\varepsilon(\cdot,t)-\varphi_\pi^\varepsilon e^{i\pi(\cdot/\varepsilon)}z_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})}\\&\leqslant C\bigl((1+|t|^{q/3})\varepsilon^{2q/3}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})}+((1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3}+|t|^{1/3}\varepsilon^{2/3})\|g\|_{H^r(\mathbb{R})}\bigr),\\&\qquad\qquad 0<\varepsilon|t|^{-1}\leqslant\tilde{\mathfrak{e}},\quad 0<\varepsilon\leqslant 1,\quad 0\leqslant q\leqslant 3/2,\quad -1\leqslant r<0,\end{aligned}\tag{6.38}$$

с константами $C=C(q,r,\kappa,\alpha_0,\beta_0,\beta_1,\sigma_\pi,b_\pi,\|\varphi_\pi\|_{L_\infty},|\tilde{\gamma}_\pi(\pi)|,\|\theta_\pi\|_{M_\kappa(\pi)})$.

6.3. Случай, когда выполнено условие 2. В $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор $A_0^{\mathrm{hom}}=-b_0\frac{d^2}{dx^2}$, $\operatorname{Dom}A_0^{\mathrm{hom}}=H^2(\mathbb{R})$, который назовём *эффективным оператором на правом краю $\sigma_0=E(0)$ зоны $R(E)$*. Пусть $f,g\in L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим следующую задачу Коши для нестационарного уравнения типа Шрёдингера и отвечающую ей усреднённую задачу:

$$\begin{cases}i\dfrac{\partial}{\partial t}\tilde{u}_\varepsilon(x,t)=(A_\varepsilon\tilde{u}_\varepsilon)(x,t),\\ \tilde{u}_\varepsilon(x,0)=(\Upsilon_\varepsilon^{(-)}f)(x),\end{cases}\qquad\begin{cases}i\dfrac{\partial}{\partial t}\tilde{u}_0(x,t)=-(A_0^{\mathrm{hom}}\tilde{u}_0)(x,t),\\ \tilde{u}_0(x,0)=f(x),\end{cases}\tag{6.39}$$

где

$$
\begin{aligned}
&(\Upsilon_\varepsilon^{(-)} f)(x) := (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(k) \sum_{j=1}^{s} e^{ikx} \varphi_j(x/\varepsilon, \varepsilon k) \chi_{\widetilde{\Omega}_{s-j+1}}(\varepsilon k)\, dk,\\
&\Upsilon_\varepsilon^{(-)} f \in \mathcal{E}_{A_\varepsilon}[0, \varepsilon^{-2}\sigma_0] L_2(\mathbb{R}),
\end{aligned}
$$

а также аналогичные задачи Коши для гиперболического уравнения:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{v}_\varepsilon(x,t) = (A_\varepsilon \tilde{v}_\varepsilon)(x,t) - \varepsilon^{-2}\sigma_0 \tilde{v}_\varepsilon(x,t),\\
\tilde{v}_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon^{(-)} f)(x),\\
(\partial_t \tilde{v}_\varepsilon)(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon^{(-)} g)(x),
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{v}_0(x,t) = -(A_0^{\mathrm{hom}} \tilde{v}_0)(x,t),\\
\tilde{v}_0(x,0) = f(x),\\
(\partial_t \tilde{v}_0)(x,0) = g(x).
\end{cases}
\tag{6.40}
$$

Теорема 14. *Предположим, что выполнены условие 2 и (5.1). Пусть $\tilde{u}_\varepsilon$, $\tilde{u}_0$ — решения задач (6.39) и пусть $t \neq 0$, $f \in H^q(\mathbb{R})$, $0 \leqslant q \leqslant 2$. Справедлива оценка*

$$
\|\tilde{u}_\varepsilon(\cdot,t) - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0} \varphi_0^\varepsilon \tilde{u}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{q/4})\varepsilon^{q/2} \|f\|_{H^q(\mathbb{R})}, \qquad 0 < \varepsilon |t|^{-1/2} \leqslant \mathfrak{e}, \tag{6.41}
$$

с константой $C = C(q, \kappa, \|\varphi_0\|_{L_\infty}, |\gamma_0(0)|, \|\theta_0\|_{M_\kappa(0)})$.

Теорема 15. *Предположим, что выполнены условие 2 и (5.1). Пусть $\tilde{v}_\varepsilon$, $\tilde{v}_0$ — решения задач (6.40) и пусть $t \neq 0$, $f \in H^q(\mathbb{R})$, $g \in H^r(\mathbb{R})$. Справедливы оценки*

$$
\begin{aligned}
&\|\tilde{v}_\varepsilon(\cdot,t) - \varphi_0^\varepsilon \tilde{v}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})}\\
&\qquad \leqslant C\big((1+|t|^{q/3})\varepsilon^{2q/3}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})} + (1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3}\|g\|_{H^r(\mathbb{R})}\big),\\
&\qquad\qquad 0 < \varepsilon|t|^{-1} \leqslant \tilde{\mathfrak{e}}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad 0 \leqslant q \leqslant 3/2, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1/2,
\end{aligned}
\tag{6.42}
$$

$$
\begin{aligned}
&\|\tilde{v}_\varepsilon(\cdot,t) - \varphi_0^\varepsilon \tilde{v}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})}\\
&\leqslant C\big((1+|t|^{q/3})\varepsilon^{2q/3}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})} + ((1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3} + |t|^{1/3}\varepsilon^{2/3})\|g\|_{H^r(\mathbb{R})}\big),\\
&\qquad\qquad 0 < \varepsilon|t|^{-1} \leqslant \tilde{\mathfrak{e}}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1, \quad 0 \leqslant q \leqslant 3/2, \quad -1 \leqslant r < 0,
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

с константами $C = C(q, r, \kappa, \alpha_0, \beta_0, \beta_1, \sigma_0, b_0, \|\varphi_0\|_{L_\infty}, |\tilde{\gamma}_0(0)|, \|\theta_0\|_{M_\kappa(0)})$.

6.4. Случай, когда выполнено условие 4. В $L_2(\mathbb{R})$ рассмотрим оператор $A_\pi^{\mathrm{hom}} = -b_\pi \frac{d^2}{dx^2}$, $\operatorname{Dom} A_\pi^{\mathrm{hom}} = H^2(\mathbb{R})$, который назовём *эффективным оператором на левом краю* $\sigma_\pi = E(\pi)$ *зоны* $R(E)$. Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Рассмотрим следующую задачу Коши для нестационарного уравнения типа Шрёдингера и отвечающую ей усреднённую задачу:

$$
\begin{cases}
i\dfrac{\partial}{\partial t} \tilde{w}_\varepsilon(x,t) = (A_\varepsilon \tilde{w}_\varepsilon)(x,t),\\
\tilde{w}_\varepsilon(x,0) = (\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(+)} f)(x),
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
i\dfrac{\partial}{\partial t} \tilde{w}_0(x,t) = (A_\pi^{\mathrm{hom}} \tilde{w}_0)(x,t),\\
\tilde{w}_0(x,0) = f(x),
\end{cases}
\tag{6.44}
$$

где

$$
\begin{aligned}
&(\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(+)} f)(x) := (2\pi)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} (\Phi f)(k - \varepsilon^{-1}\pi) \sum_{j=s}^{\infty} e^{ikx} \varphi_j(x/\varepsilon, \varepsilon k) \chi_{\widetilde{\Omega}'_{j-s+1}}(\varepsilon k)\, dk,\\
&\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(+)} f \in \mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma_\pi, \infty) L_2(\mathbb{R}),
\end{aligned}
$$

а также аналогичные задачи Коши для гиперболического уравнения:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{z}_\varepsilon(x,t) = -(A_\varepsilon \tilde{z}_\varepsilon)(x,t) + \varepsilon^{-2}\sigma_\pi \tilde{z}_\varepsilon(x,t),\\
\tilde{z}_\varepsilon(x,0) = (\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(+)} f)(x),\\
(\partial_t \tilde{z}_\varepsilon)(x,0) = (\widetilde{\Upsilon}_\varepsilon^{(+)} g)(x),
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2}{\partial t^2} \tilde{z}_0(x,t) = -(A_\pi^{\mathrm{hom}} \tilde{z}_0)(x,t),\\
\tilde{z}_0(x,0) = f(x),\\
(\partial_t \tilde{z}_0)(x,0) = g(x).
\end{cases}
\tag{6.45}
$$

Теорема 16. *Предположим, что выполнены условие 4 и (5.1). Пусть $\tilde{w}_\varepsilon$, $\tilde{w}_0$ — решения задач (6.44) и пусть $t \neq 0$, $f \in H^q(\mathbb{R})$, $0 \leqslant q \leqslant 2$. Справедлива оценка*

$$\|\tilde{w}_\varepsilon(\cdot,t) - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_\pi}\varphi_\pi^\varepsilon e^{i\pi(\cdot/\varepsilon)}\tilde{w}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|t|^{q/4})\varepsilon^{q/2}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})}, \\ 0 < \varepsilon|t|^{-1/2} \leqslant \mathfrak{e}, \tag{6.46}$$

с константой $C = C(q,\kappa,\|\varphi_\pi\|_{L_\infty},|\gamma_\pi(\pi)|,\|\theta_\pi\|_{M_\kappa(\pi)})$.

Теорема 17. *Предположим, что выполнены условие 4 и (5.1). Пусть $\tilde{z}_\varepsilon$, $\tilde{z}_0$ — решения задач (6.45) и пусть $t \neq 0$, $f \in H^q(\mathbb{R})$, $g \in H^r(\mathbb{R})$. Справедливы оценки*

$$\|\tilde{z}_\varepsilon(\cdot,t) - \varphi_\pi^\varepsilon e^{i\pi(\cdot/\varepsilon)}\tilde{z}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ \leqslant C\big((1+|t|^{q/3})\varepsilon^{2q/3}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})} + (1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3}\|g\|_{H^r(\mathbb{R})}\big), \\ 0<\varepsilon|t|^{-1} \leqslant \tilde{\mathfrak{e}}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad 0\leqslant q\leqslant 3/2, \quad 0 \leqslant r \leqslant 1/2, \tag{6.47}$$

$$\|\tilde{z}_\varepsilon(\cdot,t) - \varphi_\pi^\varepsilon e^{i\pi(\cdot/\varepsilon)}\tilde{z}_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \\ \leqslant C\big((1+|t|^{q/3})\varepsilon^{2q/3}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})} + ((1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3} + |t|^{1/3}\varepsilon^{2/3})\|g\|_{H^r(\mathbb{R})}\big), \\ 0<\varepsilon|t|^{-1} \leqslant \tilde{\mathfrak{e}}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1, \quad 0\leqslant q\leqslant 3/2, \quad -1 \leqslant r < 0, \tag{6.48}$$

с константами $C = C(q,r,\kappa,\alpha_0,\beta_0,\beta_1,\sigma_\pi,b_\pi,\|\varphi_\pi\|_{L_\infty},|\tilde{\gamma}_\pi(\pi)|,\|\theta_\pi\|_{M_\kappa(\pi)})$.

7. Заключительные замечания

7.1. В условиях теорем 10, 12, 14, 16 при $q = 2$ и в условиях теорем 11, 13, 15, 17 при $q = 3/2$, $r = 1/2$ имеем оценки погрешности порядка $O((1+|t|^{1/2})\varepsilon)$. Первая степень ε — точный порядок.

7.2. Оценки (6.21), (6.38), (6.43), (6.48) представляют интерес, когда правая часть мала (т. е. когда $\varepsilon|t|^{1/2}$ мало). Если $\varepsilon|t|^{1/2} \leqslant 1$, то нормы в левых частях (6.21), (6.38), (6.43), (6.48) при тех же предположениях можно оценить через

$$C\big((1+|t|^{q/3})\varepsilon^{2q/3}\|f\|_{H^q(\mathbb{R})} + ((1+|t|^{(r+1)/3})\varepsilon^{(2r+2)/3})\|g\|_{H^r(\mathbb{R})}\big).$$

7.3. С помощью сформулированных в лемме 9 оценок снизу можно доказать, что результаты теорем 10–17 являются точными как относительно типа нормы, так и относительно зависимости от t (при больших t). Покажем это на примере результата теоремы 10 (при $q = 2$).

Теорема 18. *Предположим, что выполнены условие 1 и (5.1). Пусть u_ε — решение задачи (6.3), u_0 — решение задачи (6.4). Пусть $t \neq 0$ и $0 \leqslant q' < 2$. Тогда не существует такой константы $\mathcal{C}(t) > 0$, чтобы оценка*

$$\|u_\varepsilon(\cdot,t) - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}\varphi_0^\varepsilon u_0(\cdot,t)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \mathcal{C}(t)\varepsilon\|f\|_{H^{q'}(\mathbb{R})} \tag{7.1}$$

выполнялась при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Доказательство проведём от противного. Без ограничения общности можно считать, что $1 \leqslant q' < 2$. Предположим, что (7.1) выполнено. В силу (6.5) это означает, что справедлива оценка

$$\Big\| e^{-itA_\varepsilon}\Upsilon_\varepsilon^{(+)} - e^{-it\varepsilon^{-2}\sigma_0}[\varphi_0^\varepsilon]e^{-itA_0^{\mathrm{hom}}}\Big\|_{H^{q'}(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant \mathcal{C}(t)\varepsilon$$

при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. В силу (6.8)–(6.15) (с заменой q на q') заключаем, что

$$\left\| \Psi^* \left[2ie^{-it\varepsilon^{-2}(\sigma_0+b_0k^2+(1/2)k^4\gamma_0(k))} \sin\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-2}k^4\gamma_0(k)\right) \varepsilon^{q'}(k^2+\varepsilon^2)^{-q'/2}\chi_{\mathfrak{R}}(k)\right] \Phi \right\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant \check{\mathcal{C}}(t)\varepsilon$$

с константой $\check{\mathcal{C}}(t) > 0$ при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$. Заметим, что область изометричности оператора Ψ^* совпадает с $\operatorname{Ran}\Psi = L_2(\widetilde{\Omega})$. Очевидно, что область значений оператора $\left[2ie^{-it\varepsilon^{-2}(\sigma_0+b_0k^2+(1/2)k^4\gamma_0(k))} \sin\left(\frac{1}{2}t\varepsilon^{-2}k^4\gamma_0(k)\right)\varepsilon^{q'}(k^2+\varepsilon^2)^{-q'/2}\chi_{\mathfrak{R}}(k)\right]\Phi$ содержится в области изометричности Ψ^*. Поэтому отсюда и из нижней оценки (5.10) с учётом $|e^{-it\varepsilon^{-2}(\sigma_0+b_0k^2+(1/2)k^4\gamma_0(k))}| = 1$ следует, что

$$\frac{\varepsilon^{q'/2}|t|^{q'/4}}{(|\gamma_0(0)|^{-1/2}+\varepsilon|t|^{1/2})^{q'/2}} \leqslant \check{\mathcal{C}}(t)\varepsilon$$

при всех достаточно малых ε, что, очевидно, невозможно, если $q' < 2$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Теорема 19. *Предположим, что выполнены условие 1 и (5.1). Пусть u_ε — решение задачи (6.3), u_0 — решение задачи (6.4). Пусть $q' \geqslant 2$. Тогда не существует положительной функции $\mathcal{C}(t)$ такой, что $\lim_{t\to\infty}\mathcal{C}(t)/|t|^{1/2} = 0$ и выполнена оценка (7.1).*

Доказательство также проведём от противного. Используя те же рассуждения, что и при доказательстве теоремы 18, получаем, что выполнены неравенства

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{q'/2}|t|^{q'/4}}{(|\gamma_0(0)|^{-1/2}+\varepsilon|t|^{1/2})^{q'/2}} &\leqslant \check{\mathcal{C}}(t)\varepsilon, &\quad &\text{если} \quad 2 \leqslant q' \leqslant 4,\\ |\gamma_0(0)|\varepsilon^2|t| &\leqslant \check{\mathcal{C}}(t)\varepsilon, &\quad &\text{если} \quad q' > 4, \end{aligned}$$

при $t \neq 0$ и всех достаточно малых ε, которые можно записать как

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{q'/2-1}|t|^{q'/4-1/2}}{(|\gamma_0(0)|^{-1/2}+\varepsilon|t|^{1/2})^{q'/2}} &\leqslant \frac{\check{\mathcal{C}}(t)}{|t|^{1/2}}, &\quad &\text{если} \quad 2 \leqslant q' \leqslant 4,\\ |\gamma_0(0)|\varepsilon|t|^{1/2} &\leqslant \frac{\check{\mathcal{C}}(t)}{|t|^{1/2}}, &\quad &\text{если} \quad q' > 4, \end{aligned}$$

где $\check{\mathcal{C}}(t)$ — положительная функция такая, что $\lim_{t\to\infty}\check{\mathcal{C}}(t)/|t|^{1/2} = 0$. Но эта оценка не может выполняться при больших $|t|$ и достаточно малых $\varepsilon = O(|t|^{-1/2})$. □

7.4. Наконец, мы предполагали выполненным условие (5.1). Это случай общего положения. Предположим теперь, что

$$\gamma_{k_0}(k) = (k-k_0)^{2m}\check{\gamma}_{k_0}(k), \qquad \check{\gamma}_{k_0}(k_0) \neq 0, \quad m \geqslant 1.$$

Тогда утверждения теорем 10–17 допускают улучшения. В частности, при $f \in H^{q_1}(\mathbb{R})$, $q_1 = (m+2)/(m+1)$, можно оценить нормы в левых частях (6.6), (6.33), (6.41), (6.46) через

$$C(1+|t|^{1/(2m+2)})\varepsilon\|f\|_{H^{q_1}(\mathbb{R})};$$

а при $f \in H^{q_2}(\mathbb{R})$, $g \in H^{q_3}(\mathbb{R})$, $q_2 = (2m+3)/(2m+2)$, $q_3 = 1/(2m+2)$, оценить нормы в левых частях (6.20), (6.37), (6.42), (6.47) через

$$C(1+|t|^{1/(2m+2)})\varepsilon(\|f\|_{H^{q_2}(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^{q_3}(\mathbb{R})}).$$

Список литературы

[1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[2] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analisys for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. **5**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[3] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 1–108.

[5] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 86–90.

[6] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. **220**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233.

[7] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ, **17**:6 (2005), 1–104.

[8] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ, **21**:1 (2009), 3–60.

[9] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН, **406**:5 (2006), 597–601.

[10] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys., **12**:4 (2005), 515–524.

[11] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys., **13**:2 (2006), 224–237.

[12] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН, **71**:3(429) (2016), 27–122.

[13] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ, **20**:6 (2008), 30–107.

[14] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients*, J. Spectr. Theory, **11**:2 (2021), 587–660.

[15] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Differ. Equ., **264**:12 (2018), 7463–7522.

[16] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. and Appl., **446**:2 (2017), 1466–1523.

[17] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$: точность результатов*, Алгебра и анализ, **32**:4 (2020), 3–136.

[18] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results*, Appl. Anal., (2021), `DOI: 10.1080/00036811.2021.1901886`.

[19] Craster R. V., Kaplunov J., Pichugin A. V., *High-frequency homogenization for periodic media*, Proc. R. Soc. A., **466**:2120 (2010), 2341–2362.

[20] Harutyunyan D., Milton G.W., Craster R.V., *High-frequency homogenization for travelling waves in periodic media*, Proc. R. Soc. A, **472**:2191 (2016), 20160066.

[21] Ceresoli L. et al., *Dynamic effective anisotropy: Asymptotics, simulations, and microwave experiments with dielectric fibers*, Phys. Rev. B, **92**:17 (2015), 174307.

[22] М. Ш. Бирман, *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны*, Алгебра и анализ, **15**:4 (2003), 61–71.

[23] Суслина Т. А., Харин А. А., *Усреднение с учётом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*, Проблемы мат. анализа, **41** (2009), 127–141.

[24] Akhmatova A. R., Aksenova E. S., Sloushch V. A., Suslina T. A., *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap*, Complex Var. Elliptic Equ., (2021), `DOI: 10.1080/17476933.2021.1947259`.

[25] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **318** (2004), 60–74.

[26] Суслина Т. А., Харин А. А., *Усреднение с учётом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*, Проблемы мат. анализа, **59** (2011), 177–193.

[27] Kirsch W., Simon B., *Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators*, J. Funct. Anal., **75**:2 (1987), 396–410.