Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 16 ноября 2022 г.
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Высокоэнергетическое усреднение многомерного нестационарного уравнения Шрёдингера [1, 2]

Дородный М. А. [3]

Аннотация

Рассматривается действующий в $L_2(\mathbb{R}^d)$ эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla + \varepsilon^{-2}V(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, с периодическими коэффициентами. Для нестационарного уравнения Шрёдингера с гамильтонианом $\mathcal{A}_\varepsilon$ изучается аналог задач усреднения, связанный с произвольной точкой дисперсионного соотношения оператора $\mathcal{A}_1$ (т. н. высокоэнергетическое усреднение). Получены аппроксимации при малых ε по $L_2(\mathbb{R}^d)$-норме решений задач Коши для этих уравнений со специальными начальными данными.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, уравнения типа Шрёдингера, спектральные зоны, усреднение, эффективный оператор, операторные оценки погрешности.

Введение

0.1. Усреднение. Изучение распространения волн в периодических структурах представляет значительный интерес как для приложений, так и в теоретическом плане. Численное моделирование таких процессов зачастую является трудоёмким, поэтому один из подходов к этим задачам — применение теории усреднения. Цель усреднения — свести изучение сильно неоднородной среды с быстро осциллирующими характеристиками к изучению некоторой эквивалентной однородной среды с эффективными параметрами, которая является хорошим приближением. Теории усреднения посвящена обширная литература; укажем в первую очередь книги [1–3].

Обсудим типичную задачу теории усреднения. Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решётки Γ. Для любой Γ-периодической функции $F(\mathbf{x})$ введём обозначение $F^\varepsilon(\mathbf{x}) := F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$ — (малый) параметр. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим дифференциальный оператор (ДО), формально заданный выражением

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla, \tag{0.1}$$

где $g(\mathbf{x})$ — эрмитова $(d \times d)$-матрица-функция периодическая относительно решётки Γ, ограниченная и положительно определённая. Оператор (0.1) моделирует простейшие случаи

[1]Представлено Т. А. Суслиной.

[2]Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-15-2022-287.

[3]Международный математический институт им. Л. Эйлера, Санкт-Петербургский государственный университет; Россия, 199178, Санкт-Петербург, 14-я линия В.О., 29Б; e-mail: mdorodni@yandex.ru.

микронеоднородных сред с $\varepsilon\Gamma$-периодической структурой. Пусть $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ — (слабое) решение эллиптического уравнения

$$- \operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{0.2}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. При $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится к решению u_0 "усреднённого" уравнения:

$$- \operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{0.3}$$

Оператор $\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} = -\operatorname{div} g^0\nabla$ называется эффективным оператором для $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Матрица g^0 определяется по хорошо известной процедуре (см., например, [1, глава 2, § 3], [4, глава 3, § 1]), согласно которой требуется решить вспомогательную краевую задачу на ячейке Ω. Помимо определения эффективных коэффициентов интерес представляют следующие вопросы. *Каков характер сходимости $u_\varepsilon \to u_0$? Какова оценка погрешности $u_\varepsilon - u_0$?*

0.2. Операторные оценки погрешности при усреднении. М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной (см. [4]) был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода), основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Пусть u_ε — решение уравнения (0.2), u_0 — решение уравнения (0.3). В [4] было доказано, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.4}$$

Поскольку $u_\varepsilon = (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}f$, $u_0 = (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}f$, оценку (0.4) можно переписать в операторных терминах:

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.5}$$

Для параболических уравнений имеет место аналогичный результат (см. [5, 6]). В операторных терминах речь идёт об аппроксимации полугруппы $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$, $\tau > 0$:

$$\|e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(\tau + \varepsilon^2)^{-1/2}, \qquad \tau > 0. \tag{0.6}$$

Оценки (0.5), (0.6) точны по порядку; константы C контролируются явно в терминах данных задачи. Такие оценки называются *операторными оценками погрешности* в задачах усреднения. Более точные аппроксимации резольвенты и экспоненты при учёте следующих членов асимптотики (т. н. корректоров) были найдены в работах [7, 8].

Другой подход к получению операторных оценок погрешности ("метод сдвига") для эллиптических и параболических задач был предложен В. В. Жиковым и С. Е. Пастуховой в работах [9–11]. См. также обзор [12].

С усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа дело обстоит несколько иначе. Им были посвящены статьи [13–20]. В операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, где $\tau \in \mathbb{R}$, соответственно. Для этих оператор-функций уже не удаётся получить аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$, а приходится рассматривать норму операторов, действующих из пространства Соболева $H^q(\mathbb{R}^d)$ (с подходящим q) в $L_2(\mathbb{R}^d)$. В [13] были получены точные по порядку оценки

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon, \tag{0.7}$$

$$\|\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon. \tag{0.8}$$

В работе [14] был получен аналогичный результат для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$:

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.9}$$

Кроме того, в [14] получена аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ при учёте корректора по $(H^2\to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ при фиксированном τ. Далее, в [15–18] была доказана точность этих результатов как по типу операторной нормы, так и относительно зависимости от τ (при больших τ). С другой стороны, было установлено, что при некоторых дополнительных предположениях (например, если матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вещественные элементы) оценки (0.7)–(0.9) допускают улучшения:

$$\begin{aligned} \|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon, \\ \|\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon, \qquad (0.10) \\ \|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon. \qquad (0.11) \end{aligned}$$

Более точные аппроксимации с учётом корректоров для нестационарных уравнений типа Шрёдингера были получены в [19] (см. также [20]).

Отметим, что в работах [4–8,13–20] изучался гораздо более общий, чем (0.1), класс операторов (включающий в себя матричные ДО). В частности, рассматривались операторы вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div}\check{g}^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla + \varepsilon^{-2}V^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{0.12}$$

Здесь $\check{g}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая положительно определённая и ограниченная $(d\times d)$-матрица-функция с вещественными элементами, потенциал $V(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая вещественнозначная функция, $V\in L_p(\Omega)$ с подходящим p (и предполагается, что $\inf\operatorname{spec}\mathcal{A}_1 = 0$). Для оператора (0.12) невозможно найти оператор с постоянными коэффициентами $\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}$ такой, чтобы соответствующие оператор-функции сходились к оператор-функциям от $\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}$. Однако, можно найти приближения, если "окаймить" оператор-функции от $\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}$ подходящими быстро осциллирующими множителями. Так, например, аналог оценки (0.5) выглядит следующим образом:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon+I)^{-1} - [\omega^\varepsilon](\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}+I)^{-1}[\omega^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon,$$

где $\omega(\mathbf{x})$ — положительное Γ-периодическое решение уравнения

$$-\operatorname{div}\check{g}(\mathbf{x})\nabla\omega(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0$$

с нормировкой $\|\omega\|^2_{L_2(\Omega)} = |\Omega|$, а $\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}$ — эффективный оператор для оператора (0.1) с матрицей $g(\mathbf{x}) = \check{g}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})$.

Объясним метод на примере аппроксимации резольвенты оператора (0.1). Применение масштабного преобразования сводит вопрос об изучении поведения оператора $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon+I)^{-1}$, $\varepsilon\to 0$, к изучению оператора $(\widehat{\mathcal{A}}+\varepsilon^2 I)^{-1}$, где $\widehat{\mathcal{A}} := \widehat{\mathcal{A}}_1 = -\operatorname{div}g(\mathbf{x})\nabla$. Далее, с помощью теории Флоке–Блоха оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в пространстве $L_2(\Omega)$. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ задаётся дифференциальным выражением $-\operatorname{div}_{\mathbf{k}} g(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{k}}$, где $\nabla_{\mathbf{k}} = \nabla + i\mathbf{k}$, $\operatorname{div}_{\mathbf{k}} = \operatorname{div} + i\langle\mathbf{k},\cdot\rangle$, при периодических граничных условиях. Параметр $\mathbf{k}$ называют *квазиимпульсом.* Спектр оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ дискретен. Оказывается, что поведение оператора $(\widehat{\mathcal{A}}+\varepsilon^2 I)^{-1}$ описывается в терминах пороговых характеристик на краю спектра оператора $\widehat{\mathcal{A}}$, т. е. достаточно знать спектральное разложение $\widehat{\mathcal{A}}$ лишь вблизи нижнего края спектра. В частности, эффективная матрица g^0 — это гессиан первой зонной функции $E_1(\mathbf{k})$ в точке $\mathbf{k}=0$.

Наконец, отметим недавнюю статью [21], где авторы изучали скорость сходимости для решений начально-краевой задачи Дирихле для волнового уравнения; получены аналоги оценок (0.10), (0.11), а также результаты с корректором.

0.3. Высокочастотное усреднение. Как было сказано выше, вклад в усреднение вносит только небольшая окрестность начала спектра (т. е. волны с низкой частотой). Можно, однако, рассматривать задачи о распространении волн в периодических структурах, частота которых пропорциональна ε^{-1} или ε^{-2} (высокочастотный режим). В таком случае даже старший порядок асимптотики решений быстро осциллирует. Эти задачи рассматривались в [2, глава 4] с использованием ВКБ-асимптотик.

Традиционные для теории усреднения методы, связанные с двухмасштабными асимптотическими разложениями, применялись к таким задачам в работах [22, 23]. Отметим также статью [24], где рассматривалось применение результатов [22] к фотонным кристаллам. В [22] была получена асимптотика для решений уравнения

$$\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + \nu^2\rho^\varepsilon(\mathbf{x})u_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0,$$

являющихся возмущениями стоячих волн (функции $g(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ предполагаются достаточно гладкими и Γ-периодическими). В работе [23] рассматривается аналогичная задача для случая бегущих волн.

Для нестационарного уравнения Шрёдингера результаты такого рода называются теоремами об эффективных массах (см., например, курс [25] и ссылки там). В работе [26] при помощи техники двухмасштабной сходимости и подходящих осциллирующих пробных функций изучалось усреднение задачи Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера со специальным начальным данным, "сконцентрированном" на блоховской собственной функции. Получен математически строгий вывод теорем об эффективных массах (в терминах сильной двухмасштабной сходимости). В [27] обсуждались приближение эффективных масс и $k\cdot p$ модели, хорошо известные в физике твёрдого тела. Доказано, что эти модели близки (в сильном смысле) к истинной динамике.

Наконец, также упомянем статьи [28, 29], где изучалась асимптотика функции Грина при различных значениях спектрального параметра.

Обсудим теперь более подробно оценки погрешности при высокочастотном усреднении. Им были посвящены работы [30–33], где рассматривался одномерный случай $d = 1$, и [34, 35], где рассматривался случай произвольной размерности. Хорошо известно, что спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет зонную структуру и может иметь лакуны. Рассмотрим для простоты случай, когда $d = 1$ и $\Gamma = \mathbb{Z}$; при этом для оператора (0.12) будем использовать обозначение A_ε. Пусть $\sigma > 0$ — (невырожденный) левый край зоны с нечётным номером ($\geqslant 3$) в спектре оператора $A = A_1$. Тогда для оператора A_ε этот край "уезжает" в точку $\varepsilon^{-2}\sigma$ (в область высоких частот (энергий)). Рассмотрим вместо (0.2) уравнение

$$-\frac{d}{dx}g^\varepsilon(x)\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x) - (\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2)u_\varepsilon(x) = f(x), \tag{0.13}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$. Предполагается, что $\varkappa > 0$ таково, что точка $\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2$ принадлежит лакуне спектра оператора A_ε. Аналогично (0.5), дело сводится к изучению оператора $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2)I)^{-1}$. В [30] был доказан следующий результат:

$$\|(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_\sigma^\varepsilon](A_\sigma^{\mathrm{hom}} + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_\sigma^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.14}$$

Здесь $A_\sigma^{\mathrm{hom}} = -b_\sigma\frac{d^2}{dx^2}$ — соответствующий эффективный оператор, $b_\sigma > 0$ — коэффициент в асимптотике зонной функции $E(k)$, отвечающей зоне, для которой σ — левый край: $E(k) \sim$

$\sigma + b_\sigma k^2$, $k \sim 0$; а φ_σ — периодическое решение уравнения $A\varphi_\sigma = \sigma\varphi_\sigma$, нормированное в $L_2(0,1)$. Таким образом, возможность усреднения для уравнения (0.13) является пороговым эффектом вблизи края внутренней лакуны.

Оценка (0.14) была получена в [30] в случае, когда $V(x) = 0$. В работе [34] был доказан аналог оценки (0.14) для операторов (0.12) при произвольном $d \geqslant 1$. Более точные аппроксимации с корректорами были найдены в [31, 35].

В статье [32] изучались параболические уравнения в одномерном случае, была доказана оценка

$$\|e^{-\tau A_\varepsilon}\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty) - e^{-\tau\sigma/\varepsilon^2}[\varphi_\sigma^\varepsilon]e^{-\tau A_\sigma^{\mathrm{hom}}}[\varphi_\sigma^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant Ce^{-\tau\sigma/\varepsilon^2}\varepsilon(\tau+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad \tau > 0,$$

а также найдено более точное приближение с корректором. Здесь $\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty)$ — спектральный проектор оператора A_ε, отвечающий интервалу $[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty)$.

В работе [33] изучались операторные оценки погрешности при высокочастотном усреднении нестационарного уравнения Шрёдингера и гиперболического уравнения в одномерном случае ($d = 1$). Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Рассматривались задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}u_\varepsilon(x,\tau) = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(x,\tau), \\ u_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon f)(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}v_\varepsilon(x,\tau) = -(A_\varepsilon v_\varepsilon)(x,\tau) + \varepsilon^{-2}\sigma v_\varepsilon(x,t), \\ v_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon f)(x),\ (\partial_\tau v_\varepsilon)(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon g)(x), \end{cases} \tag{0.15}$$

где

$$(\Upsilon_\varepsilon f)(x) := (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}(\Phi f)(k)\sum_{j=s}^{\infty} e^{ikx}\varphi_j(x/\varepsilon,\varepsilon k)\chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(\varepsilon k)\,dk.$$

Здесь $\{e^{ikx}\varphi_j(x,k)\}_{j=s}^{\infty}$ — блоховские волны, отвечающие зонам с номерами $j \geqslant s$;

$$\widetilde{\Omega}_j = (-j\pi, -(j-1)\pi] \cup ((j-1)\pi, j\pi], \qquad j \in \mathbb{N},$$

— зоны Бриллюэна. Начальные данные задач (0.15) представляют собой суперпозицию блоховских волн с амплитудой, равной Фурье-образу $(\Phi f)(k)$ функции $f(x)$, и принадлежат подпространству $\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty)L_2(\mathbb{R})$. Были получены оценки вида

$$\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\sigma}\varphi_\sigma^\varepsilon u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon\|f\|_{H^2(\mathbb{R})}, \qquad f \in H^2(\mathbb{R}), \tag{0.16}$$

$$\begin{gathered}\|v_\varepsilon(\cdot,\tau) - \varphi_\sigma^\varepsilon v_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon(\|f\|_{H^{3/2}(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}), \\ f \in H^{3/2}(\mathbb{R}),\ g \in H^{1/2}(\mathbb{R}).\end{gathered} \tag{0.17}$$

Здесь u_0 и v_0 — решения эффективных задач

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}u_0(x,\tau) = (A_\sigma^{\mathrm{hom}}u_0)(x,\tau), \\ u_0(x,0) = f(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}v_0(x,\tau) = -(A_\sigma^{\mathrm{hom}}v_0)(x,\tau), \\ v_0(x,0) = f(x),\ (\partial_\tau v_0)(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Оценки (0.16), (0.17) также допускают формулировку в операторном виде; см. [33, (6.6), (6.21)–(6.23)].

0.4. Основные результаты. В настоящей статье мы изучаем высокоэнергетическое усреднение для нестационарного уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (0.12) в случае произвольной размерности. Пусть $(\mathbf{k}^\circ, \lambda_0)$ — произвольная точка дисперсионного соотношения оператора $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$. В частности, это может быть точка экстремума зонной функции или точка, где "встречаются" две ветви дисперсионного соотношения (часто в таком случае образуется так называемый конус Дирака, см. [36, п. 5.10]). Пусть $\{e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x}\rangle}\varsigma_j(\mathbf{k}^\circ, \mathbf{x})\}_{j=1}^n$ — отвечающие ей блоховские волны; мы считаем, что $\big(\varsigma_j(\mathbf{k}^\circ, \cdot), \varsigma_k(\mathbf{k}^\circ, \cdot)\big)_{L_2(\Omega)} = \delta_{jk}$. Нас интересует поведение при $\varepsilon \to 0$ решений $u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)$, $j = 1, \dots, n$, следующих задач Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial \tau} u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau) = (\mathcal{A}_\varepsilon u_{j,\varepsilon})(\mathbf{x}, \tau), \\ u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x}\rangle}\varsigma_j^\varepsilon(\mathbf{x}) f_j(\mathbf{x}), \end{cases}$$

где $f_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, n$ — заданные функции. *Основной результат работы* — оценки

$$\|u_{j,\varepsilon}(\cdot, \tau) - u_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot, \tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1 + |\tau|)\varepsilon \|f_j\|_{H^3(\mathbb{R}^d)}, \qquad j = 1, \dots, n,$$

где

$$u_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}, \tau) := e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x}\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l^\varepsilon(\mathbf{x}) v_{jl,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}, \tau)$$

и $\mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}, \tau) = (v_{j1,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}, \tau), \dots, v_{jn,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}, \tau))^{\mathrm{t}}$ — решение "эффективной" системы

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}, \tau) = \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff}} \mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}, \tau), \\ \mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x}, 0) = f_j(\mathbf{x})\mathbf{e}_j. \end{cases}$$

Здесь $\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff}}$ — *эффективный оператор* с *постоянными коэффициентами*; он определён в (4.4).

0.5. План работы. Работа состоит из четырёх параграфов. В § 1 приведено точное определение оператора $\mathcal{A}$, описана его факторизация. Далее, в § 2 описано его спектральное разложение (частичная диагонализация при помощи преобразования Гельфанда). Затем, в § 3 получены приближения для спектра оператора $\mathcal{A}$ в некоторой окрестности точки $(\mathbf{k}^\circ, \lambda_0)$ дисперсионного соотношения, вычислены эффективные характеристики. Наконец, § 4 посвящён формулировке и доказательству основного результаты работы.

0.6. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot, \cdot)_{\mathfrak{H}}$ и $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы. Через $I = I_{\mathfrak{H}}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $A\colon \mathfrak{H} \to \mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ и $\operatorname{Ran} A$ обозначаются область определения и образ A, соответственно. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp := \mathfrak{H} \ominus \mathfrak{N}$. Если P — ортогональный проектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp$ — ортогональный проектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}^\perp$. Далее, если A — самосопряжённый оператор в некотором гильбертовом пространстве, то для спектра оператора A мы используем обозначение $\operatorname{spec} A$.

Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$. Для $z \in \mathbb{C}$ через z^* обозначается комплексно-сопряжённое число. Для $(m \times n)$-матрицы a обозначение a^{t} означает транспонированную матрицу, a^* — эрмитово сопряжённую $(n \times m)$-матрицу.

Стандартные классы L_p функций, заданных на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, обозначаются через $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для классов Соболева порядка $q \in \mathbb{R}$ с индексом суммирования 2 используется обозначение $H^q(\mathbb{R}^d)$. Если f — измеримая функция, то оператор умножения на функцию f в пространстве L_2 обозначается тем же символом.

Далее, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$.

Через $\Phi := \Phi_{\mathbf{x}\to\mathbf{k}}$ обозначается преобразование Фурье в $\mathbb{R}^d$, определённое на классе Шварца формулой

$$(\Phi v)(k) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle} v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

и по непрерывности распространённое до унитарного оператора $\Phi\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$. Наконец, для характеристической функции множества $\delta \subset \mathbb{R}$ мы используем обозначение χ_δ.

0.7. Благодарности. Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за полезные обсуждения и внимание к работе. Автор является победителем конкурса "Молодая математика России" и выражает благодарность жюри и спонсорам.

§1. Оператор $\mathcal{A}$

Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, порождённая базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$:

$$\Gamma = \Big\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{a} = \sum_{j=1}^{d} n^j \mathbf{a}_j,\ n^j \in \mathbb{Z} \Big\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решётки Γ:

$$\Omega := \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{x} = \sum_{j=1}^{d} \xi^j \mathbf{a}_j,\ 0 < \xi^j < 1 \Big\}.$$

Базис $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^d$, двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\big\langle \mathbf{b}^l, \mathbf{a}_j \big\rangle = 2\pi \delta^l_j$. Этот базис порождает решётку $\widetilde{\Gamma}$, *двойственную* к решётке Γ. Через $\widetilde{\Omega}$ обозначим *центральную зону Бриллюэна* решётки $\widetilde{\Gamma}$:

$$\widetilde{\Omega} = \big\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \colon |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|,\ 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma} \big\}. \tag{1.1}$$

Через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

В $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, рассматривается самосопряжённый оператор Шрёдингера $\mathcal{A}$, порождённый дифференциальным выражением

$$\mathcal{A} = -\operatorname{div} \check{g}(\mathbf{x}) \nabla + V(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} + V(\mathbf{x}) \tag{1.2}$$

с Γ-периодическими метрикой $\check{g}(\mathbf{x})$ и потенциалом $V(\mathbf{x})$. Предполагается, что

$$\left.\begin{aligned} &\check{g} \text{ — измеримая симметричная матрица-функция с вещественными элементами,}\\ &\qquad\qquad\qquad \alpha_0 \mathbf{1} \leqslant \check{g}(\mathbf{x}) \leqslant \alpha_1 \mathbf{1}, \qquad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty, \end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

и $V(\mathbf{x})$ — вещественная функция, причём

$$V \in L_q(\Omega), \qquad q > d/2 \quad \text{при} \quad d \geqslant 2, \qquad q = 1 \quad \text{при} \quad d = 1.$$

Точное определение оператора $\mathcal{A}$ даётся через полуограниченную замкнутую квадратичную форму

$$\mathfrak{a}[u,u] = \int_{\mathbb{R}} (\langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}u, \mathbf{D}u\rangle + V(\mathbf{x})|u(\mathbf{x})|^2)\, d\mathbf{x}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.4}$$

За счёт добавления к V постоянной будем считать, что $\inf \operatorname{spec} \mathcal{A} = 0$. При этом условии оператор $\mathcal{A}$ допускает удобную факторизацию (см., например, [37], [4, гл. 6, п. 1.1]). Для описания этой факторизации рассмотрим уравнение

$$\mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0$$

(уравнение понимается в слабом смысле). Существует (строго) положительное Γ-периодическое решение $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ этого уравнения, определённое с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, чтобы

$$\|\omega\|^2_{L_2(\Omega)} = |\Omega|. \tag{1.5}$$

Оказывается, что $\omega \in C^\varkappa$ при некотором $\varkappa > 0$. Кроме того, функция ω — мультипликатор как в $H^1(\mathbb{R}^d)$, так и в $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Подстановка $u = \omega\psi$ преобразует форму (1.4) к виду

$$\mathfrak{a}[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\mathbf{x})\, \langle \check{g}(\mathbf{x})\mathbf{D}\psi, \mathbf{D}\psi\rangle\, d\mathbf{x}, \qquad u = \omega\psi, \quad \psi \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.6}$$

Это означает, что справедлива факторизация

$$\mathcal{A} = \omega(\mathbf{x})^{-1}\mathbf{D}^* g(\mathbf{x})\mathbf{D}\omega(\mathbf{x})^{-1}, \qquad g = \omega^2(\mathbf{x})\check{g}(\mathbf{x}). \tag{1.7}$$

Примем представление (1.7) оператора $\mathcal{A}$ за исходное определение, т. е. будем считать, что $\mathcal{A}$ — оператор, порождённый формой (1.6), а Γ-периодические функции $\check{g}$ и ω удовлетворяют (1.3), (1.5) и условиям $\omega(\mathbf{x}) > 0$; $\omega, \omega^{-1} \in L_\infty$. Мы можем вернуться к представлению (1.2), полагая $V = -\omega^{-1}(\mathbf{D}^*\check{g}\mathbf{D}\omega)$. Однако, при этом потенциал V может оказаться сильно сингулярным.

§2. Спектр оператора $\mathcal{A}$

Нам понадобится описание спектра оператора (1.7). Введём объекты, связанные со спектральным разложением оператора (1.7). Положим

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{O}) = \{f \colon \omega^{-1} f \in H^1(\mathcal{O})\}, \qquad \text{где} \quad \mathcal{O} = \mathbb{R}^d \ \text{ или } \ \Omega,$$
$$\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) = \{f \colon \omega^{-1} f \in \widetilde{H}^1(\Omega)\}, \qquad \|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{O})} = \|\omega^{-1} f\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Рассмотрим в $L_2(\Omega)$ семейство форм

$$\mathfrak{a}(\mathbf{k})[u,u] = \int_\Omega \left\langle g(\mathbf{x})(\mathbf{D}+\mathbf{k})\omega^{-1}u, (\mathbf{D}+\mathbf{k})\omega^{-1}u \right\rangle d\mathbf{x}, \qquad u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

Порождённый формой (2.1) оператор обозначим через $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Формально можно записать

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D}+\mathbf{k})\omega(\mathbf{x})^{-1}.$$

Параметр $\mathbf{k} \in \mathbb{R}$ называют *квазиимпульсом.* Пусть $E_l(\mathbf{k})$, $l \in \mathbb{N}$, — последовательные (с учётом кратностей) собственные значения оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\varphi_l(\cdot, \mathbf{k})$, $l \in \mathbb{N}$, — соответствующие ортонормированные собственные функции:

$$\omega(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D}+\mathbf{k})\omega(\mathbf{x})^{-1}\varphi_l(\mathbf{x},\mathbf{k}) = E_l(\mathbf{k})\varphi_l(\mathbf{x},\mathbf{k}), \qquad l \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Функции $E_l(\mathbf{k})$ называются *зонными функциями*; они $\widetilde{\Gamma}$-периодичны и непрерывны (и даже липшицевы). Далее, $\varphi_l(\mathbf{x},\mathbf{k})$ являются Γ-периодическими по $\mathbf{x}$, а функции $e^{i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}\varphi_l(\mathbf{x},\mathbf{k})$ можно выбрать $\widetilde{\Gamma}$-периодическими по $\mathbf{k}$.

Замечание 2.1. *Домножая* (2.2) *слева на* $\omega(\mathbf{x})$ *и вводя* $\phi_l(\mathbf{x},\mathbf{k}) := \omega(\mathbf{x})^{-1}\varphi_l(\mathbf{x},\mathbf{k})$, *приходим к следующему уравнению на* $\phi_l(\mathbf{x},\mathbf{k})$:

$$(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D}+\mathbf{k})\phi_l(\mathbf{x},\mathbf{k}) - E_l(\mathbf{k})\omega(\mathbf{x})^2\phi_l(\mathbf{x},\mathbf{k}) = 0, \qquad l \in \mathbb{N}. \tag{2.3}$$

Разделяя в (2.3) *вещественную и мнимую части, получим вещественную систему двух уравнений с одинаковыми главными частями. В* [38, гл. VII, § 3, теорема 3.1] *была доказана гёльдеровость решений таких систем при условиях Дирихле. Однако, доказательство без существенных изменений переносится на случай периодических граничных условий. С учётом того, что* $\omega \in L_\infty$, *отсюда следует, что* $\varphi_l \in L_\infty$, $l \in \mathbb{N}$. *См. также* [39, § 4, п. 9] *и* [34, § 1, п. 1].

Преобразование Гельфанда $\mathscr{G}$ первоначально определяется на функциях из класса Шварца $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ формулой

$$\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k}) = (\mathscr{G}v)(\mathbf{x},\mathbf{k}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2}\sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle \mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle} v(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \qquad \mathbf{x}\in\Omega, \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega};$$

формула

$$v(\mathbf{x}) = (\mathscr{G}^{-1}\tilde{v})(\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2}\int_{\widetilde{\Omega}} \tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})e^{i\langle \mathbf{x},\mathbf{k}\rangle}\,d\mathbf{k}, \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \tag{2.4}$$

восстанавливает v по $\tilde{v}$. При этом $\int_{\widetilde{\Omega}}\int_{\Omega} |\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})|^2 d\mathbf{x}\,d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^d}|v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ и $\mathscr{G}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathscr{G}\colon L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n) \to \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus L_2(\Omega;\mathbb{C}^n)\,d\mathbf{k} =: \mathcal{K}.$$

Включение $v \in H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ равносильно тому, что $\tilde{v}(\cdot,\mathbf{k}) \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ при п.в. $\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}$ и

$$\int_{\widetilde{\Omega}}\int_{\Omega}\left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})|^2 + |\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})|^2\right)\,d\mathbf{x}\,d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d)$ под действием $\mathscr{G}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$. Действие оператора $\mathbf{D}$ на $v \in H^1(\mathbb{R}^d)$ переходит в послойное действие оператора $\mathbf{D}+\mathbf{k}$ на $\tilde{v}(\cdot,\mathbf{k}) \in \widetilde{H}^1(\Omega)$.

Под действием преобразования Гельфанда $\mathscr{G}$ оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$:

$$\mathscr{G}\mathcal{A}\mathscr{G}^{-1} = \int_{\widetilde{\Omega}} \oplus \mathcal{A}(\mathbf{k})\,d\mathbf{k}. \tag{2.5}$$

Говоря подробнее, имеется ввиду следующее. Пусть $v \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$, тогда

$$\tilde{v}(\cdot,\mathbf{k}) \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) \quad \text{при п.в.} \quad \mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}, \tag{2.6}$$

$$\mathfrak{a}[v,v] = \int_{\widetilde{\Omega}} \mathfrak{a}(\mathbf{k})[\tilde{v}(\cdot,\mathbf{k}),\tilde{v}(\cdot,\mathbf{k})]\,d\mathbf{k}. \tag{2.7}$$

Обратно, если для $\tilde{v} \in \mathcal{K}$ выполнено (2.6) и интеграл в (2.7) конечен, тогда $v \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ и выполнено (2.7). Из (2.5) следует, что спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадает с объединением отрезков (зон) $\operatorname{Ran} E_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Введём оператор P_0, который действует как усреднение по ячейке Ω:

$$P_0 u = |\Omega|^{-1} \int_\Omega u(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad u \in L_2(\Omega).$$

Оператор P_0 является ортопроектором на подпространство констант

$$\mathfrak{N}_0 = \{u \in L_2(\Omega) \colon u = c \in \mathbb{C}\}.$$

Справедливо следующее соотношение (см., например, [7, § 6, п. 6.1]):

$$([P_0]\mathscr{G}u)(\mathbf{k}) = |\Omega|^{-1/2}(\Phi u)(\mathbf{k}), \qquad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}. \tag{2.8}$$

Здесь $[P_0]$ — проектор в $\mathcal{K}$, действующий послойно как оператор P_0. Наоборот, если $\operatorname{supp} c \subset \widetilde{\Omega}$ и $c(\mathbf{k}) \in \mathfrak{N}_0$, $\mathbf{k} \in \widetilde{\Omega}$, то из (2.4) и соотношения $|\Omega||\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$ следует, что

$$(\mathscr{G}^{-1}c)(\mathbf{x}) = |\Omega|^{1/2}(\Phi^* c)(\mathbf{x}). \tag{2.9}$$

Фиксируем некоторую точку $\mathbf{k}^\circ \in \widetilde{\Omega}$ и число $s \in \mathbb{N}$. Положим $\lambda_0 := E_s(\mathbf{k}^\circ)$. Пусть n — кратность собственного числа λ_0 для оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)$, а d_0 — расстояние от λ_0 до остального спектра оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)$. В силу непрерывности зонных функций можно выбрать $\varkappa > 0$ такое, что при $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa$, $\delta\mathbf{k} := \mathbf{k} - \mathbf{k}^\circ$, на отрезке $[\lambda_0 - d_0/3, \lambda_0 + d_0/3]$ имеется n собственных чисел (с учётом кратности) оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и

$$\bigl([\lambda_0 - 2d_0/3, \lambda_0 - d_0/3] \cup [\lambda_0 + d_0/3, \lambda_0 + 2d_0/3]\bigr) \cap \operatorname{spec} \mathcal{A}(\mathbf{k}) = \varnothing.$$

Введём обозначение $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker}(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ) - \lambda_0 I)$, и пусть P — ортопроектор пространства $L_2(\Omega)$ на $\mathfrak{N}$; через $F(\mathbf{k})$ обозначим спектральный проектор оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, отвечающий отрезку $[\lambda_0 - d_0/3, \lambda_0 + d_0/3]$.

§3. Пороговые аппроксимации

3.1. Приближение для $F(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})$. В этом пункте мы хотим найти приближение для операторов $F(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})$ при $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa$. Для этого мы будем интегрировать разность резольвент операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)$ по подходящему контуру (см., например, [4, глава 1, п. 1.7, §§ 2, 3], [40, § 4, п. 4.2, третий метод]). Здесь мы применяем метод из [40]. Однако, в нашем случае возникает осложнение, связанное с тем, что (стандартное) второе резольвентное тождество сейчас неприменимо, так как разность $\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)$ может не иметь смысла. Чтобы обойти это препятствие, мы используем следующую лемму. (Здесь и далее в этом параграфе мы опускаем индекс у скалярного произведения и нормы в $L_2(\Omega)$.)

Лемма 3.1. *Справедливо тождество*

$$\begin{gathered}\bigl(\bigl((\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \zeta I)^{-1} - (\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ) - \zeta I)^{-1}\bigr)\eta, \vartheta\bigr) \\ = -\bigl(\mathfrak{a}(\mathbf{k}) - \mathfrak{a}(\mathbf{k}^\circ)\bigr)[(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \zeta I)^{-1}\eta, (\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ) - \zeta^* I)^{-1}\vartheta], \\ \eta, \vartheta \in L_2(\Omega), \ \zeta \in \rho(\mathcal{A}(\mathbf{k})) \cap \rho(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)).\end{gathered} \tag{3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим форму $(\mathfrak{a}(\mathbf{k}) - \mathfrak{a}(\mathbf{k}^\circ))[u, v]$ на $u = (\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \zeta I)^{-1}\eta$ и $v = (\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ) - \zeta^* I)^{-1}\vartheta$, где $\eta, \vartheta \in L_2(\Omega)$, $\zeta \in \rho(\mathcal{A}(\mathbf{k})) \cap \rho(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ))$. Очевидно, $(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \zeta I)^{-1}\eta \in$

$\operatorname{Dom}\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k})(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\zeta I)^{-1} = I + \zeta(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\zeta I)^{-1}$. Имеем

$$\begin{aligned}(\mathfrak{a}(\mathbf{k})-\mathfrak{a}(\mathbf{k}^\circ))[u,v] = (\mathcal{A}(\mathbf{k})u,v)-(u,\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)v) = (\eta,(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)-\zeta^* I)^{-1}\vartheta) - ((\mathcal{A}(\mathbf{k})-\zeta I)^{-1}\eta,\vartheta)\\ + (\zeta(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\zeta I)^{-1}\eta,(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)-\zeta^* I)^{-1}\vartheta) - ((\mathcal{A}(\mathbf{k})-\zeta I)^{-1}\eta,\zeta^*(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)-\zeta^* I)^{-1}\vartheta).\end{aligned}$$

Последние два слагаемых сокращаются, откуда следует (3.1). $\square$

Введём обозначения

$$R(\mathbf{k},\zeta) := (\mathcal{A}(\mathbf{k})-\zeta I)^{-1}, \qquad R_0(\zeta) := R(\mathbf{k}^\circ,\zeta) = (\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)-\zeta I)^{-1}.$$

Далее, пусть γ — контур, эквидистантно охватывающий отрезок $[\lambda_0 - d_0/3, \lambda_0 + d_0/3]$ и проходящий через точку $\lambda_0 + d_0/2$. Его длина равна

$$l_\gamma = \frac{\pi+4}{3} d_0,$$

для резольвенты на этом контуре справедливы оценки

$$\|R(\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant 6d_0^{-1}, \qquad \|R_0(\zeta)\| \leqslant 6d_0^{-1}, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \quad \zeta\in\gamma. \tag{3.2}$$

Переходя от форм к операторам, тождество (3.1) можно записать в виде

$$R(\mathbf{k},\zeta) = R_0(\zeta) - \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta) - \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) - \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta), \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta) &= g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R(\mathbf{k},\zeta), \qquad \mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) = g^{1/2}(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R(\mathbf{k},\zeta),\\ \mathcal{X}_0(\zeta) &= g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta), \qquad \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta) = g^{1/2}(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0(\zeta).\end{aligned} \tag{3.4}$$

Оценим нормы операторов $\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)$, $\mathcal{X}_0(\zeta)$, $\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ и $\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)$ при $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa$, $\zeta\in\gamma$. Очевидно,

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant C_1|\delta\mathbf{k}|, \qquad \|\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant C_1|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \quad \zeta\in\gamma;\\ &C_1 := 6\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\omega^{-1}\|_{L_\infty} d_0^{-1}.\end{aligned} \tag{3.5}$$

Далее, используя тождество $\mathcal{A}(\mathbf{k})R(\mathbf{k},\zeta) = I + \zeta R(\mathbf{k},\zeta)$, с учётом (3.2) имеем

$$\begin{aligned}&\|\mathcal{A}(\mathbf{k})R(\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant 1 + (\lambda_0 + d_0/2)(6d_0^{-1}) = 4 + 6\lambda_0 d_0^{-1}, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \quad \zeta\in\gamma;\\ &\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}R(\mathbf{k},\zeta)u\|^2 = (\mathcal{A}(\mathbf{k})R(\mathbf{k},\zeta)u, R(\mathbf{k},\zeta)u) \leqslant (24d_0^{-1} + 36\lambda_0 d_0^{-2})\|u\|^2,\\ &\qquad\qquad u\in L_2(\Omega),\ |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa,\ \zeta\in\gamma;\end{aligned} \tag{3.6}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}\|\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)\| &\leqslant \|g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k})\omega^{-1}R(\mathbf{k},\zeta)\| + \|g^{1/2}(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R(\mathbf{k},\zeta)\|\\ &= \|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}R(\mathbf{k},\zeta)\| + \|g^{1/2}(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R(\mathbf{k},\zeta)\|\\ &\leqslant (24d_0^{-1} + 36\lambda_0 d_0^{-2})^{1/2} + 6\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}\varkappa d_0^{-1} =: \check{C}_2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa,\ \zeta\in\gamma;\end{aligned} \tag{3.7}$$

$$\|\mathcal{X}_0(\zeta)\| \leqslant (24d_0^{-1} + 36\lambda_0 d_0^{-2})^{1/2} =: C_2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa,\ \zeta\in\gamma. \tag{3.8}$$

Теперь, итерируя, применим тождество (3.3) для резольвенты $R(\mathbf{k},\zeta)$, содержащейся в слагаемых $\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)$ и $\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ в (3.3). Таким образом, члены порядка $|\delta\mathbf{k}|$ не будут содержать $R(\mathbf{k},\zeta)$:

$$R(\mathbf{k},\zeta) = R_0(\zeta) - \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta) - \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta) + \mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta). \tag{3.9}$$

Здесь $\mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ задано выражением

$$\mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)=\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)+\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$$
$$+\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)+\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)$$
$$+\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)+\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)-\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta).$$

Мы ввели обозначения

$$\check{\mathcal{X}}_0(\zeta):=g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\big(g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta^*)\big)^*,\qquad \check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k}):=g^{1/2}(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}. \tag{3.10}$$

Оценим нормы операторов $\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)$ и $\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})$. Запишем $\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)$ как

$$\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)=g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\big(g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta^*)\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)^{1/2}\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)^{-1/2}\big)^*$$
$$=g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)^{-1/2}\big(g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta^*)\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)^{1/2}\big)^*$$
$$=g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)^{-1/2}\big(g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)^{-1/2}\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)R_0(\zeta^*)\big)^*.$$

Имеем
$$\|\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\|\leqslant\|g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)^{-1/2}\|^2\|\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)R_0(\zeta^*)\|.$$
Из (3.6) и $\|g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)^{-1/2}\|=1$ получаем

$$\|\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\|\leqslant 4+6\lambda_0 d_0^{-1}=:C_3,\qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa,\ \zeta\in\gamma. \tag{3.11}$$

Далее, очевидно,

$$\|\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\|\leqslant C_4|\delta\mathbf{k}|,\quad C_4:=\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\|\omega^{-1}\|_{L_\infty},\qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa,\quad \zeta\in\gamma. \tag{3.12}$$

Применим тождество (3.3) ещё раз так, чтобы слагаемые порядка $|\delta\mathbf{k}|^2$ не содержали резольвенты $R(\mathbf{k},\zeta)$:

$$\begin{aligned}R(\mathbf{k},\zeta)&=R_0(\zeta)-\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)-\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)-\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\\&+\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}_0(\zeta)+\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\\&+\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}_0(\zeta)+\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)+\mathscr{R}_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta),\end{aligned} \tag{3.13}$$

где

$$\mathscr{R}_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)=\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)+\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$$
$$-\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)-\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$$
$$-\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)-\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)$$
$$-\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)-\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$$
$$-\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)-\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$$
$$-\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)-\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)$$
$$-\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)-\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$$
$$+\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)+\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$$
$$+\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta).$$

Операторы $\mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ и $\mathscr{R}_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ допускают оценки

$$\|\mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\|\leqslant C_5|\delta\mathbf{k}|^2,\qquad \|\mathscr{R}_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\|\leqslant C_6|\delta\mathbf{k}|^3,\qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa,\ \zeta\in\gamma; \tag{3.14}$$

$$
\begin{aligned}
C_5 &= 2C_1C_2\check{C}_2C_4 + C_1^2C_3 + 2C_1^2C_2C_4\varkappa + C_1C_2^2C_4 + C_1^2,\\
C_6 &= 3C_1^2C_2C_4 + 3C_1C_2^2\check{C}_2C_4^2 + 3C_1^2C_2C_3C_4 + 3C_1^2C_2^2C_4^2\varkappa\\
&\quad + C_1^2\check{C}_2C_3C_4 + C_1^3C_3C_4\varkappa + C_1C_2^3C_4^2 + C_1^2\check{C}_2C_4 + C_1^3C_4\varkappa.
\end{aligned}
$$

Наша цель в этом пункте — получить аппроксимации для $F(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})$. Начнём с оператора $F(\mathbf{k})$. В силу операторного исчисления Рисса–Данфорда

$$
F(\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma (\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \zeta I)^{-1} d\zeta. \tag{3.15}
$$

Подставляя (3.3) в (3.15), учитывая соотношения (3.5), (3.7), (3.8) и принимая во внимание равенство $P = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma (\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ) - \zeta I)^{-1} d\zeta$, получаем следующий результат:

$$
\begin{gathered}
\|F(\mathbf{k}) - P\| \leqslant C_7|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa; \\
C_7 = (2\pi)^{-1} l_\gamma (C_1C_2 + C_1\check{C}_2 + C_1^2\varkappa).
\end{gathered} \tag{3.16}
$$

Нам также понадобится более точная аппроксимация для проектора $F(\mathbf{k})$. Для этого подставим (3.9) в (3.15). Имеем

$$
F(\mathbf{k}) = P + F_1(\delta\mathbf{k}) + \Phi(\delta\mathbf{k}, \mathbf{k}), \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa; \tag{3.17}
$$

$$
F_1(\delta\mathbf{k}) := \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \bigl(\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k}, \zeta^*)^* \mathcal{X}_0(\zeta) + \mathcal{X}_0(\zeta^*)^* \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k}, \zeta)\bigr) d\zeta, \tag{3.18}
$$

$$
\Phi(\delta\mathbf{k}, \mathbf{k}) := \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma \mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k}, \mathbf{k}, \zeta) d\zeta.
$$

Вычислим интеграл в выражении для $F_1(\delta\mathbf{k})$. Вспомним обозначения (3.4), примем во внимание разложение резольвенты

$$
R_0(\zeta) = R_0(\zeta)P + R_0(\zeta)P^\perp = (\lambda_0 - \zeta)^{-1}P + R_0(\zeta)P^\perp, \qquad \zeta \in \gamma, \tag{3.19}
$$

и воспользуемся тем, что оператор-функция $R_0^\perp(\zeta) := R_0(\zeta)P^\perp$ голоморфна внутри контура γ, равенством $\oint_\gamma (\lambda_0 - \zeta)^{-2} d\zeta = 0$, а также тем фактом, что интеграл по γ от функции, голоморфной внутри контура, равен нулю:

$$
\begin{aligned}
F_1(\delta\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \Bigl(\Bigl(\frac{1}{\lambda_0 - \zeta}P + R_0^\perp(\zeta)\Bigr)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D} + \mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\Bigl(\frac{1}{\lambda_0 - \zeta}P + R_0^\perp(\zeta)\Bigr)\\
+ \Bigl((\mathbf{D} + \mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\Bigl(\frac{1}{\lambda_0 - \zeta^*}P + R_0^\perp(\zeta^*)\Bigr)\Bigr)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\Bigl(\frac{1}{\lambda_0 - \zeta}P + R_0^\perp(\zeta)\Bigr)\Bigr) d\zeta\\
= F_1^\times(\delta\mathbf{k}) + F_1^\times(\delta\mathbf{k})^*,
\end{aligned} \tag{3.20}
$$

где оператор $F_1^\times(\delta\mathbf{k})$ переводит $\mathfrak{N}^\perp$ в $\mathfrak{N}$ и задаётся выражением

$$
\begin{aligned}
&F_1^\times(\delta\mathbf{k})\\
&= \tfrac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \Bigl(\tfrac{1}{\lambda_0 - \zeta}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D} + \mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\zeta) + \Bigl((\mathbf{D} + \mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\tfrac{1}{\lambda_0 - \zeta^*}P\Bigr)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\zeta)\Bigr) d\zeta\\
&\qquad = -P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D} + \mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0) - ((\mathbf{D} + \mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0).
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Благодаря (3.14) остаток $\Phi(\delta\mathbf{k}, \mathbf{k})$ допускает оценку

$$
\|\Phi(\delta\mathbf{k}, \mathbf{k})\| \leqslant C_8|\delta\mathbf{k}|^2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa; \qquad C_8 := (2\pi)^{-1} l_\gamma C_5; \tag{3.22}
$$

а оператор $F_1^\times(\delta\mathbf{k})$ в силу интегрального представления (3.18) и (3.5), (3.8), а также соотношения $F_1^\times(\delta\mathbf{k}) = PF_1(\delta\mathbf{k})P^\perp$ оценивается следующим образом:

$$\|F_1^\times(\delta\mathbf{k})\| \leqslant \pi^{-1} l_\gamma C_1 C_2 |\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa. \tag{3.23}$$

Отметим также соотношения

$$F_1^\times(\delta\mathbf{k})P = 0, \qquad PF_1^\times(\delta\mathbf{k})^* = 0, \qquad P^\perp F_1^\times(\delta\mathbf{k}) = 0. \tag{3.24}$$

Кроме того, нам понадобится рассмотреть оператор $F_1^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k})$. Применяя (3.17), (3.20), (3.22), (3.23), первое и третье равенства (3.24), получаем

$$\begin{aligned} F_1^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k}) &= F_1^\times(\delta\mathbf{k})(F(\mathbf{k}) - P)F(\mathbf{k}) \\ &= F_1^\times(\delta\mathbf{k})F_1^\times(\delta\mathbf{k})^* F(\mathbf{k}) + F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}); \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\|F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k})\| \leqslant C_9|\delta\mathbf{k}|^3, \quad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa; \qquad C_9 := 2^{-1}\pi^{-2} l_\gamma^2 C_1 C_2 C_5. \tag{3.26}$$

Оператор $F_1^\times(\delta\mathbf{k})F_1^\times(\delta\mathbf{k})^*$ имеет вид

$$\begin{aligned} &F_1^\times(\delta\mathbf{k})F_1^\times(\delta\mathbf{k})^* \\ &\quad = P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P \\ &\qquad + P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)^2\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P \\ &\quad + \big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P \\ &\qquad + \big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)^2\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Перейдём теперь к пороговой аппроксимации для оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})$. Справедливо представление

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma \zeta(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \zeta I)^{-1} d\zeta. \tag{3.28}$$

Подставляя (3.13) в (3.28), имеем

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) = \lambda_0 P + G_1(\delta\mathbf{k}) + G_2(\delta\mathbf{k}) + \Xi(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}), \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \tag{3.29}$$

где

$$G_1(\delta\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \zeta\big(\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta) + \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\big)d\zeta,$$

$$G_2(\delta\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma \zeta T(\delta\mathbf{k},\zeta)d\zeta, \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} T(\delta\mathbf{k},\zeta) :=\ & \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}_0(\zeta) + \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta) \\ &+ \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}_0(\zeta) + \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta) \\ &- \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta), \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$\Xi(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma \zeta\mathscr{R}_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)d\zeta. \tag{3.32}$$

Вспомним определения операторов (3.4), (3.10), разложение резольвенты (3.19) и рассмотрим сначала представление для $G_1(\delta\mathbf{k})$:

$$G_1(\delta\mathbf{k}) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \zeta\Big(\Big(\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P + R_0^\perp(\zeta)\Big)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P + R_0^\perp(\zeta)\Big)$$

$$+\Big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda_0-\zeta^*}P+R_0^\perp(\zeta^*)\Big)\Big)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\Big(\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P+R_0^\perp(\zeta)\Big)\Big)\,d\zeta.$$

Аналогично (3.21), вычисляя интеграл с применением формулы для производной интеграла Коши $f'(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(\zeta)(\zeta-z)^{-2}d\zeta$ (где f — аналитическая функция в области, ограниченной контуром γ), получаем

$$G_1(\delta\mathbf{k})=\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\lambda_0\big(F_1^\times(\delta\mathbf{k})+F_1^\times(\delta\mathbf{k})^*\big), \tag{3.33}$$

$$\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}):=P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P+((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P,\qquad \mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\colon\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}. \tag{3.34}$$

Напомним, что $F_1^\times(\delta\mathbf{k})$ был вычислен в (3.21). В силу (3.29)

$$G_1(\delta\mathbf{k})=0,\qquad \text{если форма } \big((\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0P)u,u\big),\ u\in L_2(\Omega),\ |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa, \text{ знакоопределена.} \tag{3.35}$$

В силу (3.16), (3.21), второго равенства (3.24), (3.25), (3.26) и (3.33) отсюда следует, что

$$PG_1(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k})=P\big(\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\lambda_0F_1^\times(\delta\mathbf{k})F_1^\times(\delta\mathbf{k})^*+\lambda_0F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\big)F(\mathbf{k})$$
$$=P\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})P+O(|\delta\mathbf{k}|^2)=0,$$

если выполнено условие в (3.35). Поэтому

$$\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})=0,\qquad \text{если форма } \big((\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0P)u,u\big),\ u\in L_2(\Omega),\ |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa, \text{ знакоопределена.}$$

Перейдём теперь к выражению (3.30) для $G_2(\delta\mathbf{k})$. Запишем оператор (3.31) как

$$T(\delta\mathbf{k},\zeta)=T^\circ(\delta\mathbf{k},\zeta)+T^\times(\delta\mathbf{k},\zeta)+T^\times(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*+T^\perp(\delta\mathbf{k},\zeta), \tag{3.36}$$

где

$$\begin{aligned}
T^\circ(\delta\mathbf{k},\zeta)&=PT(\delta\mathbf{k},\zeta)P\\
&=\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\\
&+\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta^*)\big)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\\
&+\Big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta^*}P\Big)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0(\zeta)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\\
&+\Big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta^*}P\Big)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta^*)\big)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\\
&-\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P,\\
T^\times(\delta\mathbf{k},\zeta)&=PT(\delta\mathbf{k},\zeta)P^\perp,\qquad T^\perp(\delta\mathbf{k},\zeta)=P^\perp T(\delta\mathbf{k},\zeta)P^\perp.
\end{aligned}$$

Подставляя (3.36) в (3.30), имеем

$$G_2(\delta\mathbf{k})=G_2^\circ(\delta\mathbf{k})+G_2^\times(\delta\mathbf{k})+G_2^\times(\delta\mathbf{k})^*+G_2^\perp(\delta\mathbf{k}), \tag{3.37}$$

$$G_2^r(\delta\mathbf{k})=\frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma\zeta T^r(\delta\mathbf{k},\zeta)\,d\zeta,\qquad r\in\{\circ,\times,\perp\}. \tag{3.38}$$

Оператор $G_2^\circ(\delta\mathbf{k})$ действует в $\mathfrak{N}$, его вычисление с использованием элементарного равенства $\frac{\zeta}{(\zeta-\lambda_0)^2} = \frac{1}{\zeta-\lambda_0} + \frac{\lambda_0}{(\zeta-\lambda_0)^2}$ и формулы для производной интеграла Коши даёт

$$
\begin{aligned}
G_2^\circ(\delta\mathbf{k}) &= P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P \\
&\quad - P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\bigl(R_0^\perp(\lambda_0) + \lambda_0 (R_0^\perp)'(\lambda_0)\bigr)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P \\
&\quad - P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\Bigl((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\bigl(R_0^\perp(\lambda_0) + \lambda_0 (R_0^\perp)'(\lambda_0)\bigr)\Bigr)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P \\
&\quad - \bigl((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\bigr)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\bigl(R_0^\perp(\lambda_0) + \lambda_0 (R_0^\perp)'(\lambda_0)\bigr)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P \\
&\quad - \bigl((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\bigr)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\Bigl((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\bigl(R_0^\perp(\lambda_0) + \lambda_0 (R_0^\perp)'(\lambda_0)\bigr)\Bigr)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P.
\end{aligned}
$$

Здесь $(R_0^\perp)'(\lambda_0) := \frac{d}{d\lambda} R_0^\perp(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0}$. Из первого резольвентного тождества, очевидно, следует равенство $(R_0^\perp)'(\lambda_0) = R_0^\perp(\lambda_0)^2$. Далее, отметим соотношения

$$
G_2^\times(\delta\mathbf{k})P = 0, \qquad PG_2^\times(\delta\mathbf{k})^* = 0, \qquad PG_2^\perp(\delta\mathbf{k}) = 0 \tag{3.39}
$$

и равенство

$$
\begin{aligned}
G_2^\circ(\delta\mathbf{k}) + \lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k}) F_1^\times(\delta\mathbf{k})^* &= P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P \\
&\quad - P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1} R_0^\perp(\lambda_0)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P \\
&\quad - P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\bigl((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\bigr)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P \\
&\quad - \bigl((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\bigr)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1} R_0^\perp(\lambda_0)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P \\
&\quad - \bigl((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\bigr)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\bigl((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\bigr)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P =: \mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}).
\end{aligned} \tag{3.40}
$$

Для вывода (3.40) мы воспользовались (3.27). Кроме того, нам будет нужна оценка для оператора $G_2^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k})$. Из (3.5), (3.8), (3.11), (3.12) и (3.31) следует оценка для оператора $T(\delta\mathbf{k},\zeta)$:

$$
\|T(\delta\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant (3C_1C_2^2C_4 + C_1^2C_3 + C_1^2)|\delta\mathbf{k}|^2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \quad \zeta \in \gamma,
$$

откуда вместе с (3.38) получаем

$$
\begin{gathered}
\|G_2^\times(\delta\mathbf{k})\| \leqslant C_{10}|\delta\mathbf{k}|^2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa; \\
C_{10} = (2\pi)^{-1}(\lambda_0 + d_0/2) l_\gamma (3C_1C_2^2C_4 + C_1^2C_3 + C_1^2).
\end{gathered} \tag{3.41}
$$

Используя (3.16), первое равенство (3.39) и (3.41), имеем

$$
\|G_2^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k})\| = \|G_2^\times(\delta\mathbf{k})(F(\mathbf{k}) - P)\| \leqslant C_7C_{10}|\delta\mathbf{k}|^3, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa. \tag{3.42}
$$

В заключение этого пункта укажем оценку для остатка $\Xi(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$. Из (3.14), (3.32) следует, что

$$
\|\Xi(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| \leqslant (2\pi)^{-1}(\lambda_0 + d_0/2) l_\gamma C_6 |\delta\mathbf{k}|^3, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa. \tag{3.43}
$$

3.2. Приближение для операторной экспоненты. Положим

$$
\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k}) := \lambda_0 P + \mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}), \qquad \mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})\colon \mathfrak{N} \to \mathfrak{N}. \tag{3.44}
$$

Здесь операторы $\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})$ и $\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})$ определены в (3.34) и (3.40). В этом пункте мы хотим приблизить оператор $e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}P$, $\tau \in \mathbb{R}$, с помощью $e^{-i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}P$. Рассмотрим разность

$$
\bigl(e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})} - e^{-i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}\bigr)P
$$

$$= P\big(e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}F(\mathbf{k}) - e^{-i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}P\big) + e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}(P - F(\mathbf{k})) + (F(\mathbf{k}) - P)e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}F(\mathbf{k}).$$

В силу (3.16) последние два слагаемых допускают оценки

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}(P - F(\mathbf{k}))\| \leqslant C_7|\delta\mathbf{k}|, \quad \|(F(\mathbf{k}) - P)e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}F(\mathbf{k})\| \leqslant C_7|\delta\mathbf{k}|, \quad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa.$$

Далее (ср. [13, доказательство теоремы 2.1]),

$$P\big(e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}F(\mathbf{k}) - e^{-i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}P\big) = Pe^{-i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}\Sigma(\mathbf{k},\tau),$$

где $\Sigma(\mathbf{k},\tau) := e^{i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}F(\mathbf{k})e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})} - P$. Справедливо равенство

$$\Sigma(\mathbf{k},\tau) = \Sigma(\mathbf{k},0) + \int_0^\tau \Sigma'(\mathbf{k},\tilde{\tau})d\tilde{\tau}.$$

Очевидно, $\Sigma(\mathbf{k},0) = F(\mathbf{k}) - P$, и, в силу (3.16), $\|Pe^{-i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}\Sigma(\mathbf{k},0)\| \leqslant C_7|\delta\mathbf{k}|$, $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa$. Затем,

$$\Sigma'(\mathbf{k},\tau) := \frac{d\Sigma}{d\tau}(\mathbf{k},\tau) = -ie^{i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P\big)F(\mathbf{k})e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})}F(\mathbf{k}).$$

Рассмотрим оператор $P\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P\big)F(\mathbf{k})$. Используя второе тождество (3.24), (3.25), (3.29), (3.33), (3.37), второе и третье тождества в (3.39) и (3.40), (3.44), имеем

$$\begin{aligned} &P\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P\big)F(\mathbf{k}) \\ &\quad = P\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \lambda_0 P - G_1(\delta\mathbf{k}) - G_2(\delta\mathbf{k})\big)F(\mathbf{k}) + \lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + G_2^\times(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) \\ &\quad = P\Xi(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + \lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + G_2^\times(\mathbf{k})F(\mathbf{k}), \end{aligned}$$

откуда с учётом (3.26), (3.42), (3.43) следуют оценки

$$\begin{gathered} \big\|P\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P\big)F(\mathbf{k})\big\| \leqslant C_{11}|\delta\mathbf{k}|^3, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa; \\ \left\|Pe^{-i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}\int_0^\tau \Sigma'(\mathbf{k},\tilde{\tau})\,d\tilde{\tau}\right\| \leqslant C_{11}|\tau||\delta\mathbf{k}|^3, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa; \\ C_{11} = \lambda_0 C_9 + C_7 C_{10} + (2\pi)^{-1}(\lambda_0 + d_0/2)l_\gamma C_6. \end{gathered}$$

Вспоминая выражения для констант, из сказанного выше получаем следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть $\tau \in \mathbb{R}$ и $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa$. Справедлива оценка*

$$\big\|\big(e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})} - e^{-i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}\big)P\big\| \leqslant 3C_7|\delta\mathbf{k}| + C_{11}|\tau||\delta\mathbf{k}|^3,$$

где константы C_7 и C_{11} заданы выражениями

$$\begin{aligned} C_7 &= (2\pi)^{-1}l_\gamma(C_1C_2 + C_1\check{C}_2 + C_1^2\varkappa), \\ C_{11} &= 2^{-1}\pi^{-2}\lambda_0 l_\gamma^2 C_1C_2\big(2C_1C_2\check{C}_2C_4 + C_1^2C_3 + 2C_1^2C_2C_4\varkappa + C_1C_2^2C_4 + C_1^2\big) \\ &\quad + (2\pi)^{-2}(\lambda_0 + d_0/2)l_\gamma^2\big(C_1C_2 + C_1\check{C}_2 + C_1^2\varkappa\big)\big(3C_1C_2^2C_4 + C_1^2C_3 + C_1^2\big) \\ &\quad + (2\pi)^{-1}(\lambda_0 + d_0/2)l_\gamma\big(3C_1^2C_2C_4 + 3C_1C_2^2\check{C}_2C_4^2 + 3C_1^2C_2C_3C_4 + 3C_1^2C_2^2C_4^2\varkappa \\ &\qquad + C_1^2\check{C}_2C_3C_4 + C_1^3C_3C_4\varkappa + C_1C_2^3C_4^2 + C_1^2\check{C}_2C_4 + C_1^3C_4\varkappa\big). \end{aligned}$$

3.3. Вычисление оператора $\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})$ в базисе в $\mathfrak{N}$. Пусть $\{\varsigma_p\}_{p=1}^n$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Наша цель в этом пункте — вычислить матричные элементы оператора (3.44) в этом базисе.

Прежде всего, очевидно, $(\lambda_0 P\varsigma_p, \varsigma_l) = \lambda_0\delta_{lp}$. Перейдём к вычислению $(\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\varsigma_p, \varsigma_l)$. Имеем

$$(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\varsigma_p = -i\big\{\big(\tfrac{\partial}{\partial x_1}+ik_1^\circ\big)(\omega^{-1}\varsigma_p),\dots,\big(\tfrac{\partial}{\partial x_d}+ik_d^\circ\big)(\omega^{-1}\varsigma_p)\big\}^{\mathrm{t}},$$
$$(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\varsigma_p = \big\{(\delta k_1)\omega^{-1}\varsigma_p,\dots,(\delta k_d)\omega^{-1}\varsigma_p\big\}^{\mathrm{t}}, \qquad p=1,\dots,n,$$

поэтому

$$\begin{aligned}&(P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\varsigma_p,\varsigma_l)\\ &\quad= (g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\varsigma_p,(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P\varsigma_l) = i\sum_{r=1}^d(\delta k_r)\tilde{\mathfrak{g}}_r^{1,lp}, \quad p,l=1,\dots,n,\\ &\tilde{\mathfrak{g}}_r^{1,lp} := -\sum_{s=1}^d\int_\Omega g_{rs}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*\left(\tfrac{\partial}{\partial x_s}+ik_s^\circ\right)\big(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\big)\,d\mathbf{x}.\end{aligned} \tag{3.45}$$

Далее, так как оператор $\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P$ сопряжён к $P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P$, то

$$\Big(\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P\varsigma_p,\varsigma_l\Big) = -i\sum_{r=1}^d(\delta k_r)(\tilde{\mathfrak{g}}_r^{1,pl})^*, \qquad p,l=1,\dots,n. \tag{3.46}$$

Таким образом, из (3.34), (3.45), (3.46) вытекает, что

$$(\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\varsigma_p,\varsigma_l) = \big\langle \mathfrak{g}^{1,lp},\delta\mathbf{k}\big\rangle, \qquad p,l=1,\dots,n, \tag{3.47}$$

где $\mathfrak{g}^{1,lp} = (\mathfrak{g}_1^{1,lp},\dots,\mathfrak{g}_d^{1,lp})^{\mathrm{t}}$ — вектор-столбец с элементами

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}_r^{1,lp} &= i\big(\tilde{\mathfrak{g}}_r^{1,lp} - (\tilde{\mathfrak{g}}_r^{1,pl})^*\big)\\ &= i\sum_{s=1}^d\int_\Omega g_{rs}(\mathbf{x})\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_s}\big(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*\big) - \omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*\frac{\partial}{\partial x_s}\big(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\big)\right)d\mathbf{x}\\ &\qquad + 2\sum_{s=1}^d k_s^\circ\int_\Omega g_{rs}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-2}\varsigma_p(\mathbf{x})\varsigma_l(\mathbf{x})^*d\mathbf{x}, \qquad r=1,\dots,d.\end{aligned}$$

Перейдём теперь к вычислению матричных элементов оператора $\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})$, определённого в (3.40). Этот оператор удобно записать как

$$\begin{aligned}\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}) = &-\big(P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1} + \big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\big)\\ &\times\big(R_0^\perp(\lambda_0)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P + \big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\big)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P\big)\\ &+ P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P.\end{aligned}$$

Обозначим через $\Lambda^p(\delta\mathbf{k})$ результат действия оператора

$$\big(R_0^\perp(\lambda_0)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P + \big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\big)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P\big)$$

на элемент базиса ς_p. Очевидно, $\Lambda^p(\delta\mathbf{k}) \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ является (слабым) решением уравнения

$$\big(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)-\lambda_0 I\big)\Lambda^p(\delta\mathbf{k}) = \omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\varsigma_p + \omega^{-1}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\varsigma_p, \qquad \Lambda^p(\delta\mathbf{k})\perp\mathfrak{N}.$$

Правая часть этого уравнения линейна по $\delta\mathbf{k}$ и имеет следующий вид:

$$-i\sum_{r,s=1}^{d}\omega(\mathbf{x})^{-1}(\delta k_r)g_{rs}(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial x_s}+ik_s^\circ\right)\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\right)$$
$$-i\sum_{r,s=1}^{d}\omega(\mathbf{x})^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_s}+ik_s^\circ\right)\left(g_{sr}(\mathbf{x})(\delta k_r)\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\right).$$

Поэтому $\Lambda^p(\delta\mathbf{k})$ можно записать в виде $\Lambda^p(\delta\mathbf{k})=-i\sum_{r=1}^{d}(\delta k_r)\Lambda_r^p$, где $\Lambda_r^p\in\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ — решение уравнения

$$\left(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)-\lambda_0 I\right)\Lambda_r^p(\mathbf{x})=\sum_{s=1}^{d}\omega(\mathbf{x})^{-1}g_{rs}(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial x_s}+ik_s^\circ\right)\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\right)$$
$$+\sum_{s=1}^{d}\omega(\mathbf{x})^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_s}+ik_s^\circ\right)\left(g_{sr}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\right),\qquad \Lambda_r^p\perp\mathfrak{N}.$$

Далее, вычислим скалярное произведение

$$-\left(\left(P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}+\left((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\right)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\right)\Lambda^p(\delta\mathbf{k}),\varsigma_l\right),\qquad p,l=1,\dots,n.$$

Аналогично (3.45), (3.46) получаем

$$-\left(\left(P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}+\left((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\right)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\right)\Lambda^p(\delta\mathbf{k}),\varsigma_l\right)=-\sum_{q,r,s=1}^{d}(\delta k_r)(\delta k_q)$$
$$\times\int_\Omega g_{qs}(\mathbf{x})\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\Lambda_r^p(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*\right)-\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\Lambda_r^p(\mathbf{x})\right)\right)d\mathbf{x}$$
$$+2i\sum_{q,r,s=1}^{d}(\delta k_r)(\delta k_q)k_s^\circ\int_\Omega g_{qs}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-2}\Lambda_r^p(\mathbf{x})\varsigma_l(\mathbf{x})^*d\mathbf{x},\qquad p,l=1,\dots,n.$$

Наконец,

$$\left(P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P\varsigma_p,\varsigma_l\right)=\left(g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P\varsigma_p,(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P\varsigma_l\right)$$
$$=\sum_{r,q=1}^{d}(\delta k_r)(\delta k_q)\int_\Omega g_{qr}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-2}\varsigma_p(\mathbf{x})\varsigma_l(\mathbf{x})^*d\mathbf{x},\qquad p,l=1,\dots,n.$$

Таким образом, для матричных элементов оператора $\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})$ мы получили следующие выражения:

$$\left(\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})\varsigma_p,\varsigma_l\right)=\left\langle\mathfrak{g}^{2,lp}(\delta\mathbf{k}),(\delta\mathbf{k})\right\rangle,\qquad p,l=1,\dots,n,\tag{3.48}$$

где $\mathfrak{g}^{2,lp}$ — $(d\times d)$-матрица с элементами

$$\mathfrak{g}_{rq}^{2,lp}=-\sum_{s=1}^{d}\int_\Omega g_{qs}(\mathbf{x})\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\Lambda_r^p(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*\right)-\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*\frac{\partial}{\partial x_s}\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\Lambda_r^p(\mathbf{x})\right)\right)d\mathbf{x}$$
$$+2i\sum_{s=1}^{d}k_s^\circ\int_\Omega g_{qs}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-2}\Lambda_r^p(\mathbf{x})\varsigma_l(\mathbf{x})^*d\mathbf{x}+\int_\Omega g_{qr}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-2}\varsigma_p(\mathbf{x})\varsigma_l(\mathbf{x})^*d\mathbf{x},\qquad r,q=1,\dots,d.$$

В итоге, оператор (3.44) в базисе $\{\varsigma_p\}_{p=1}^n$ изображается матрицей

$$\mathfrak{g}(\delta\mathbf{k}) := \left\{\lambda_0\delta_{lp} + \left\langle \mathfrak{g}^{1,lp}, \delta\mathbf{k}\right\rangle + \left\langle \mathfrak{g}^{2,lp}(\delta\mathbf{k}), (\delta\mathbf{k})\right\rangle\right\}_{l,p=1}^n.$$

В заключение этого пункта рассмотрим действие экспоненты $e^{-i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})}$ на вектор ς_j. Нетрудно проверить, что

$$e^{-i\tau\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})}\varsigma_j = \sum_{l=1}^n c_{jl}(\tau)\varsigma_l, \tag{3.49}$$

где $\{c_{j1}(\tau), \dots, c_{jn}(\tau)\}^{\mathrm{t}} =: \mathbf{c}_j(\tau) = e^{-i\tau\mathfrak{g}(\delta\mathbf{k})}\mathbf{e}_j$ — решение системы

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{c}_j(\tau) = (\mathfrak{g}(\delta\mathbf{k})\mathbf{c}_j)(\tau), \qquad \mathbf{c}_j(0) = \mathbf{e}_j. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{e}_j$ — элемент стандартного базиса в $\mathbb{C}^n$.

§4. Основные результаты работы

В этом параграфе приводится основной результат работы. Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Если $F(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция, то $F^\varepsilon(\mathbf{x}) := F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператор, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\omega^\varepsilon(\mathbf{x})^{-1} \operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla\omega^\varepsilon(\mathbf{x})^{-1}, \quad g(\mathbf{x}) = \check{g}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^2. \tag{4.1}$$

Здесь Γ-периодические функции $\check{g}$ и ω удовлетворяют (1.3), (1.5) и условиям $\omega(\mathbf{x}) > 0$; $\omega, \omega^{-1} \in L_\infty$. Точное определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ даётся в терминах соответствующей квадратичной формы (ср. (1.6)). Операторы (1.7) и (4.1) связаны между собой соотношением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2}T_\varepsilon^*\mathcal{A}T_\varepsilon, \tag{4.2}$$

где T_ε — оператор масштабного преобразования: $(T_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2}u(\varepsilon\mathbf{x})$.

Пусть $\{\varsigma_j\}_{j=1}^n$ — (произвольный) ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$ и пусть $f_j \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $j = 1, \dots, n$. Функции $\varsigma_j(\mathbf{x})$, $j = 1, \dots, n$, будем считать Γ-периодически продолженными на всё $\mathbb{R}^d$. Мы изучаем поведение при $\varepsilon \to 0$ решений $u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau)$, $j = 1, \dots, n$, следующих задач Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x}, \tau) = (\mathcal{A}_\varepsilon u_{j,\varepsilon})(\mathbf{x}, \tau), \\ u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x}, 0) = e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ, \mathbf{x}\rangle}\varsigma_j^\varepsilon(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{4.3}$$

В $L_2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff}} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},11} & \dots & \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},n1} & \dots & \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},nn} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Dom} \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff}} = H^2(\mathbb{R}^d; \mathbb{C}^n), \tag{4.4}$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},lp} := \varepsilon^{-2}\lambda_0 I - i\varepsilon^{-1}\left\langle\mathfrak{g}^{1,lp}, \nabla\right\rangle - \operatorname{div} \mathfrak{g}^{2,lp}\nabla, \tag{4.5}$$

который назовём *эффективным оператором*. Напомним, что $\mathfrak{g}^{1,lp}$ и $\mathfrak{g}^{2,lp}$ были определены в (3.47) и (3.48). Пусть $\mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)$ — решение соответствующей "эффективной" системы

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)=\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}_{\varepsilon}\mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau),\\ \mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},0)=J_jf_j(\mathbf{x}).\end{cases} \tag{4.6}$$

Здесь оператор $J_j\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}^n$ действует по правилу $a\mapsto a\mathbf{e}_j$. Положим

$$u^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau):=e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma_l^{\varepsilon}(\mathbf{x})v^{\mathrm{eff}}_{jl,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau). \tag{4.7}$$

Для решений задач (4.3), (4.6), а также для $u^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}$ справедливы операторные представления

$$\begin{gathered} u_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau)=e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^{\varepsilon}f_j,\qquad \mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau)=e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}_{\varepsilon}}J_jf_j,\\ u^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau)=e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma_l^{\varepsilon}\tilde{J}_le^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}_{\varepsilon}}J_jf_j,\end{gathered} \tag{4.8}$$

где $\tilde{J}_l\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ задаётся формулой $\tilde{J}_l\mathbf{c}=\langle\mathbf{c},\mathbf{e}_l\rangle$.

Теорема 4.1. *Пусть $u_{j,\varepsilon}$ — решение задачи (4.3), $u^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}$ определено в (4.7). Пусть $\varepsilon>0$, $\tau\in\mathbb{R}$, $f_j\in H^3(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$. Справедливы оценки*

$$\|u_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau)-u^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon\|f_j\|_{H^3(\mathbb{R}^d)},\qquad j=1,\dots,n, \tag{4.9}$$

с константой $\mathcal{C}$, зависящей от λ_0, $\varkappa$, d_0, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\|\varsigma_l\|_{L_\infty}$, $l=1,\dots,n$.

Доказательство. В силу (4.8) оценка (4.9) допускает переформулировку в операторных терминах:

$$\Big\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^{\varepsilon}-e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma_l^{\varepsilon}\tilde{J}_le^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}_{\varepsilon}}J_j\Big\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant\mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{4.10}$$

где $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. Таким образом, наша цель — доказать (4.10). Поскольку оператор $(-\Delta+I)^{3/2}$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^3(\mathbb{R}^d)$ на $L_2(\mathbb{R}^d)$, справедливо равенство

$$\begin{aligned} &\Big\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^{\varepsilon}-e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma_l^{\varepsilon}\tilde{J}_le^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}_{\varepsilon}}J_j\Big\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad=\Big\|\Big(e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^{\varepsilon}-e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma_l^{\varepsilon}\tilde{J}_le^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}_{\varepsilon}}J_j\Big)(-\Delta+I)^{-3/2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Затем, в силу унитарности оператора масштабного преобразования имеем

$$\begin{aligned} &\Big\|\Big(e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^{\varepsilon}-e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma_l^{\varepsilon}\tilde{J}_le^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}_{\varepsilon}}J_j\Big)(-\Delta+I)^{-3/2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &=\Big\|\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}}e^{i\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j-e^{i\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma_l\tilde{J}_le^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}}J_j\Big)\varepsilon^3(-\Delta+\varepsilon^2I)^{-3/2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)},\end{aligned} \tag{4.11}$$

где

$$\mathcal{A}^{\mathrm{eff}} = \{\mathcal{A}^{\mathrm{eff},lp}\}_{l,p=1}^{n}, \qquad \mathcal{A}^{\mathrm{eff},lp} := \lambda_0 I - i\left\langle \mathfrak{g}^{1,lp}, \nabla\right\rangle - \operatorname{div} \mathfrak{g}^{2,lp}\nabla.$$

Далее, нам понадобятся следующие операторные тождества:

$$\Phi^* \varepsilon^3(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\Phi e^{i\langle \mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle} = e^{i\langle \mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\varepsilon^3(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-3/2}, \tag{4.12}$$

$$\Phi^* \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathfrak{g}(\delta\mathbf{k})} J_j \varepsilon^3(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\Phi e^{i\langle \mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle} = e^{i\langle \mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\tilde{J}_l e^{-i\varepsilon^{-2}\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}} J_j \varepsilon^3(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-3/2}. \tag{4.13}$$

Введём проектор $F_\varkappa := \Phi^*\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\mathbf{k})\Phi$. Здесь $\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\mathbf{k})$ — характеристическая функция шара $\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})$ радиуса $\varkappa$ с центром в нуле. Очевидно, $\varepsilon^3(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2}(1-\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k})) \leqslant \varkappa^{-1}\varepsilon$, и ввиду (4.12) с учётом замечания 2.1 имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}} e^{i\langle \mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j - e^{i\langle \mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}} J_j\Big)\varepsilon^3(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-3/2}(I-F_\varkappa)\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &\qquad\qquad \leqslant \Big(\|\varsigma_j\|_{L_\infty} + \sum_{l=1}^n \|\varsigma_l\|_{L_\infty}\Big)\varkappa^{-1}\varepsilon. \end{aligned}$$

Рассмотрим оператор

$$\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}} e^{i\langle \mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j - e^{i\langle \mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}} J_j\Big)\varepsilon^3(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-3/2}F_\varkappa,$$

который в силу тождеств (4.12), (4.13) можно записать как

$$\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}}\varsigma_j - \sum_{l=1}^n \varsigma_l \Phi^* \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathfrak{g}(\delta\mathbf{k})} J_j \Phi\Big)\Phi^*\varepsilon^3(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k})\Phi e^{i\langle \mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}.$$

Напомним, что оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл (2.5). Принимая во внимание также соотношения (2.8) и (2.9), получаем равенство

$$\begin{aligned} &\left\| \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}}\varsigma_j - \sum_{l=1}^n \varsigma_l \Phi^* \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathfrak{g}(\delta\mathbf{k})} J_j \Phi\Big)\Phi^*\varepsilon^3(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k})\Phi\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\mathbf{k}\in\widetilde{\Omega}} \left\| \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}\varsigma_j - \sum_{l=1}^n \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathfrak{g}(\delta\mathbf{k})} J_j\Big)\varepsilon^3(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k})P_0\right\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Учитывая включение $\operatorname{Ran}\varsigma_j P_0 \subset \mathfrak{N}$ и (3.49), получаем, что

$$\begin{aligned} &\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})}\varsigma_j - \sum_{l=1}^n \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathfrak{g}(\delta\mathbf{k})} J_j\Big)\varepsilon^3(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k})P_0 \\ &\qquad\qquad = \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}\Big)P\varsigma_j\varepsilon^3(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k})P_0. \end{aligned}$$

Применение теоремы 3.2 (с заменой τ на $\tau\varepsilon^{-2}$) с учётом равенства $\|\varsigma_j\|_{L_2(\Omega)} = 1$ даёт оценку с независящими от $\mathbf{k}$ постоянными

$$\begin{aligned} &\big\|\big(e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathcal{A}(\mathbf{k})} - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\mathfrak{G}^\circ(\delta\mathbf{k})P}\big)P\varsigma_j\varepsilon^3(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2}\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k})P_0\big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\qquad\qquad \leqslant \big(3C_7|\delta\mathbf{k}| + C_{11}\varepsilon^{-2}|\tau||\delta\mathbf{k}|^3\big)\varepsilon^3(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-3/2} \leqslant (3C_7 + C_{11}|\tau|)\varepsilon, \end{aligned}$$

что завершает доказательство. □

Замечание 4.2. *Интерполируя между* (4.10) *и оценкой*

$$\Big\| e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle} \varsigma_j^\varepsilon - e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle} \sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff}}} J_j \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \|\varsigma_j\|_{L_\infty} + \sum_{l=1}^n \|\varsigma_l\|_{L_\infty},$$

получаем, что

$$\Big\| e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle} \varsigma_j^\varepsilon - e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle} \sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff}}} J_j \Big\|_{H^q(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}$$
$$\leqslant \left(\|\varsigma_j\|_{L_\infty} + \sum_{l=1}^n \|\varsigma_l\|_{L_\infty} \right)^{1-q/3} \mathcal{C}^{q/3} (1+|\tau|)^{q/3} \varepsilon^{q/3}, \qquad 0 \leqslant q \leqslant 3, \quad j = 1,\dots,n.$$

Применительно к задаче Коши (4.3) *это означает, что при* $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $f_j \in H^q(\mathbb{R}^d)$, $0 \leqslant q \leqslant 3$, *справедлива оценка*

$$\|u_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau) - u_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \left(\|\varsigma_j\|_{L_\infty} + \sum_{l=1}^n \|\varsigma_l\|_{L_\infty} \right)^{1-q/3} \mathcal{C}^{q/3} (1+|\tau|)^{q/3} \varepsilon^{q/3} \|f_j\|_{H^q(\mathbb{R}^d)},$$
$$j = 1,\dots,n.$$

Список литературы

[1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[2] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analisys for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. **5**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[3] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 1–108.

[5] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 86–90.

[6] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. **220**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233.

[7] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ, **17**:6 (2005), 1–104.

[8] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ, **21**:1 (2009), 3–60.

[9] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН, **406**:5 (2006), 597–601.

[10] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys., **12**:4 (2005), 515–524.

[11] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys., **13**:2 (2006), 224–237.

[12] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН, **71**:3(429) (2016), 27–122.

[13] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ, **20**:6 (2008), 30–107.

[14] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients*, J. Spectr. Theory, **11**:2 (2021), 587–660.

[15] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Differ. Equ., **264**:12 (2018), 7463–7522.

[16] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. and Appl., **446**:2 (2017), 1466–1523.

[17] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в* $\mathbb{R}^d$: *точность результатов*, Алгебра и анализ, **32**:4 (2020), 3–136.

[18] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results*, Appl. Anal., **101**:16 (2022), 5582–5614.

[19] Суслина Т. А., *Усреднение уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами: результаты с корректорами*, Препринт ПОМИ # 04/2022, https://pdmi.ras.ru/preprint/2022/22-04.html.

[20] Суслина Т.А., *Усреднение уравнений типа Шрёдингера: операторные оценки при учёте корректоров*, Функ. анализ и его прил., **56**:3 (2022), 93–99.

[21] Lin F., Shen Zh., *Uniform boundary controllability and homogenization of wave equations*, J. Eur. Math. Soc., (2021), https://doi.org/10.4171/JEMS/1137.

[22] Craster R. V., Kaplunov J., Pichugin A. V., *High-frequency homogenization for periodic media*, Proc. R. Soc. A., **466**:2120 (2010), 2341–2362.

[23] Harutyunyan D., Milton G.W., Craster R.V., *High-frequency homogenization for travelling waves in periodic media*, Proc. R. Soc. A, **472**:2191 (2016), 20160066.

[24] Ceresoli L. et al., *Dynamic effective anisotropy: Asymptotics, simulations, and microwave experiments with dielectric fibers*, Phys. Rev. B, **92**:17 (2015), 174307.

[25] Allaire G., *Periodic homogenization and effective mass theorems for the Schrödinger equation*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1946**, Quantum Transport, pp. 1–44. Springer, Berlin, Heidelberg (2008).

[26] Allaire G., Piatnitski A., *Homogenization of the Schrödinger equation and effective mass theorems*, Comm. Math. Phys., **258**:1 (2005), 1–22.

[27] Barletti L., Ben Abdallah N., *Quantum transport in crystals: effective mass theorem and $k \cdot p$ Hamiltonians*, Comm. Math. Phys., **307**:3 (2011), 567–607.

[28] Kuchment P., Raich A., *Green's function asymptotics near the internal edges of spectra of periodic elliptic operators. Spectral edge case*, Math. Nachr., **285**:14-15 (2012), 1880–1894.

[29] Kha M., Kuchment P., Raich A., *Green's function asymptotics near the internal edges of spectra of periodic elliptic operators. Spectral gap interior*, J. Spectr. Theory, **7**:4 (2017), 1171–1233.

[30] Бирман М. Ш., *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны*, Алгебра и анализ, **15**:4 (2003), 61–71.

[31] Суслина Т. А., Харин А. А., *Усреднение с учётом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*, Проблемы мат. анализа, **41** (2009), 127–141.

[32] Akhmatova A. R., Aksenova E. S., Sloushch V. A., Suslina T. A., *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap*, Complex Var. Elliptic Equ., (2021), `DOI: 10.1080/17476933.2021.1947259`.

[33] Dorodnyi M. A., *High-frequency homogenization of nonstationary periodic equations*, `arXiv:2202.03919 [math.AP]`.

[34] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **318** (2004), 60–74.

[35] Суслина Т. А., Харин А. А., *Усреднение с учётом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*, Проблемы мат. анализа, **59** (2011), 177–193.

[36] Kuchment P., *An overview of periodic elliptic operators*, Bull. Amer. Math. Soc., **53**:3 (2016), 343–414.

[37] Kirsch W., Simon B., *Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators*, J. Funct. Anal., **75**:2 (1987), 396–410.

[38] Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н., *Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа*, Наука, М., 1964.

[39] Бирман М. Ш., *Дискретный спектр в лакунах возмущённого периодического оператора Шредингера. II. Нерегулярные возмущения*, Алгебра и анализ, **9**:6 (1997), 62–89.

[40] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On operator estimates in homogenization of non-local operators of convolution type*, `arXiv:2204.13771v1 [math-ph]`.