Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 3.08.2023
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Оценка Гельдера для решения дивергентного эллиптического уравнения на стратифицированном множестве*

К.М. Медведев, А.И. Назаров

1 Введение

Одной из наиболее важных задач теории уравнений в частных производных является задача априорной оценки решений. Фундаментальным результатом в этой области является гельдерова непрерывность, доказанная Э. Де Джорджи [3] для решений линейных равномерно эллиптических уравнений второго порядка дивергентного типа с измеримыми коэффициентами. Этот результат был обобщен О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой (см. [8, гл. III, §13–14]) для уравнений с младшими членами и квазилинейных уравнений.

В данной работе рассматривается равномерно эллиптическое уравнение второго порядка дивергентного типа на стратифицированном множестве[1]. Задачи такого вида в литературе также именуются "системами, связанными на многообразиях различных размерностей" [4]. По-видимому, впервые такая задача была поставлена Р. Курантом в 1926 году [2,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00027).

[1]В общем случае стратифицированное множество — это клеточный комплекс с некоторыми специальными свойствами (см., напр., [11]).

p. 60–61] как модель собственных колебаний мембраны, зажатой в сети эластичных нитей. Для недивергентных уравнений соответствующая задача была впервые исследована А.Д. Вентцелем [6].

В наиболее общем виде задача Вентцеля представляет собой краевую задачу для эллиптического уравнения второго порядка, в которой граничное условие задается интегро-дифференциальным оператором (также второго порядка)[2]. Таким образом, задачу Вентцеля можно рассматривать как уравнение второго порядка на "двухэтажном" стратифицированном множестве (со стратами двух размерностей — n (область) и $n-1$ (граница)). В работе [9] была получена локальная приграничная оценка Гельдера для решений дивергентной эллиптической задачи Вентцеля. Этот результат очевидным образом обобщается для дивергентного эллиптического уравнения второго порядка на произвольном "двухэтажном" стратифицированном множестве. Мы же рассматриваем соответствующее уравнение на "трехэтажном" множестве (со стратами трех размерностей: $n, n-1$ и $n-2$) с условием 2-связности: каждая пара стратов может быть связана связной цепочкой стратов, в которой размерности соседних стратов отличаются ровно на единицу (ср. [7]).

Мы ограничиваемся рассмотрением однородного уравнения простейшего вида. Это означает, что оператор на страте максимальной размерности не содержит младших членов, а операторы на остальных стратах включают конормальные производные с примыкающих "верхних этажей"[3]. Полученные результаты легко распространяются на уравнения более общего вида. Также несложно обобщить их для уравнений на 2-связном стратифицированном множестве с бóльшим числом "этажей".

Статья имеет следующую структуру. В §2 дается формальная постановка рассматриваемой задачи в основном модельном случае, вводятся понятия обобщенного решения и обобщенного субрешения, а также формулируется основной результат (теорема 1). §3 посвящен доказательству оценки типа Каччопполи и оценки максимума для субрешения. В §4 собраны некоторые вспомогательные утверждения. Доказательство теоремы 1 содержится в §5. В §6 кратко описаны необходимые изменения в доказательстве для второго модельного случая, а в §7 — общий случай.

В статье используются следующие обозначения:

[2]Подробное изложение постановки задачи и физического смысла членов в граничном условии можно найти, например, в [1].

[3]В терминах задачи о стационарном распределении температуры в неоднородной структуре тепловой баланс на страте определяется теплопередачей вдоль страта и потоком тепла с примыкающих стратов следующей размерности.

$x = (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x', x_n) = (x'', x_{n-1}, x_n)$ — точки в $\mathbb{R}^n$; $|x|$ — евклидова норма x.

Для (измеримого) множества $A \subset \mathbb{R}^k$ обозначим через $\overline{A}$ его замыкание, через $\lambda_k(A)$ меру Лебега соответствующей размерности, а через $\chi_{{}_A}$ — характеристическую функцию множества A:

$$\chi_{{}_A}(x) = 1, \quad x \in A; \qquad \chi_{{}_A}(x) = 0, \quad x \notin A.$$

Для измеримой функции f обозначим $\sup\limits_A f$ и $\inf\limits_A f$, соответственно, точные существенные верхнюю и нижнюю грань f на множестве A и положим

$$\operatorname*{osc}_A f = \sup_A f - \inf_A f.$$

Далее, $f_\pm = \max\{\pm f; 0\}$, а среднее значение функции f на A записывается как

$$\fint\limits_A f = \frac{1}{\lambda_k(A)} \int\limits_A f.$$

Всюду в работе применяется правило суммирования по повторяющимся индексам. При этом индексы i и j пробегают значения от 1 до n, индексы μ и τ — от 1 до $n-1$, а индексы l и m — от 1 до $n-2$.
D_i — оператор дифференцирования по переменной x_i;

$$Du = (D_1 u, \dots, D_{n-1} u, D_n u) = (D' u, D_n u) = (D'' u, D_{n-1} u, D_n u)$$

— градиент функции u.

Различные положительные постоянные обозначаются через C с индексами или без них. Параметры, от который зависит константа, указываются в скобках, при этом мы не отмечаем зависимость от размерности n и от константы эллиптичности ν.

2 Постановка модельной задачи

Поскольку гельдеровость решения — локальное свойство, его доказательство сводится к локальным оценкам в окрестности внутренних точек стратифицированного множества. Оценка в окрестности внутренней точки стратов размерности n и $n-1$ — это в точности результаты [3] и [9] соответственно. Поэтому мы установим локальную оценку в окрестности внутренней точки страта размерности $n-2$ (обозначим его Λ), к которому примыкают страты бо́льших размерностей. Основной модельный случай здесь — один n-мерный страт (Ω) и два $(n-1)$-мерных страта

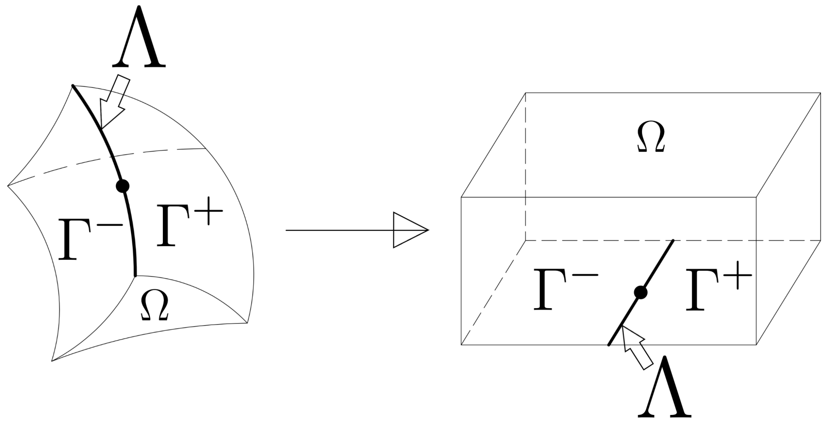

Рис. 1: Локальное распрямление в модельном случае

(Γ^+ и Γ^-), угол между которыми во всех точках страта Λ отделен от нуля (рис. 1). Для простоты будем считать все страты C^1-гладкими.

Рассматриваемое уравнение в этом случае формально записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}
&-D_i(\mathfrak{a}_{ij}D_ju) = 0 && \text{в } \Omega,\\
&-d_i^+(a_{ij}^+d_j^+u) + \mathfrak{a}_{ij}D_ju\mathfrak{n}_i^+ = 0 && \text{на } \Gamma^+,\\
&-d_i^-(a_{ij}^-d_j^-u) + \mathfrak{a}_{ij}D_ju\mathfrak{n}_i^- = 0 && \text{на } \Gamma^-,\\
&-\delta_i(\alpha_{ij}\delta_ju) + a_{ij}^+d_j^+u\mathbf{n}_i^+ + a_{ij}^-d_j^-u\mathbf{n}_i^- = 0 && \text{на } \Lambda.
\end{aligned} \tag{1}$$

Здесь $(\mathfrak{a}_{ij}) = (\mathfrak{a}_{ji})$, $(a_{ij}^\pm) = (a_{ji}^\pm)$, $(\alpha_{ij}) = (\alpha_{ji})$ — заданные матрицы-функции;
$\mathfrak{n}^\pm = (\mathfrak{n}_i^\pm)$ — единичные векторы нормалей к $\Gamma^\pm$, внешних по отношению к Ω;
$\mathbf{n}^+ = (\mathbf{n}_i^+)$ и $\mathbf{n}^- = (\mathbf{n}_i^-)$ — единичные векторы внешних нормалей к Λ на Γ^+ и Γ^- соответственно;
$d_i^\pm = D_i - \mathfrak{n}_i^\pm\mathfrak{n}_j^\pm D_j$ — касательные дифференциальные операторы на $\Gamma^\pm$;
$\delta_i = d_i^+ - \mathbf{n}_i^+\mathbf{n}_j^+d_j^+ = d_i^- - \mathbf{n}_i^-\mathbf{n}_j^-d_j^-$ — касательный дифференциальный оператор на Λ.

Коэффициенты $\mathfrak{a}_{ij}$ измеримы и удовлетворяю условию равномерной эллиптичности ($\nu = \mathrm{const} > 0$):

$$\nu|\zeta|^2 \le \mathfrak{a}_{ij}\zeta_i\zeta_j \le \nu^{-1}|\zeta|^2, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Далее, матрицы $(a_{ij}^\pm)$ и (α_{ij}) порождают операторы, действующие в касательных пространствах к $\Gamma^\pm$ и Λ соответственно:

$$a_{ij}^\pm\zeta_j\mathfrak{n}_i^\pm = 0, \qquad \alpha_{ij}\zeta_j\mathbf{n}_i^+ = \alpha_{ij}\zeta_j\mathbf{n}_i^- = 0, \qquad \zeta \in \mathbb{R}^n;$$

элементы этих матриц измеримы относительно соответствующих поверхностных мер и удовлетворяют условию равномерной эллиптичности:

$$\begin{aligned} &\nu|\zeta|^2 \le a^+_{ij}\zeta_i\zeta_j \le \nu^{-1}|\zeta|^2, \qquad \zeta\in\mathbb{R}^n, \quad \zeta\perp\mathfrak{n}^+;\\ &\nu|\zeta|^2 \le a^-_{ij}\zeta_i\zeta_j \le \nu^{-1}|\zeta|^2, \qquad \zeta\in\mathbb{R}^n, \quad \zeta\perp\mathfrak{n}^-;\\ &\nu|\zeta|^2 \le \alpha_{ij}\zeta_i\zeta_j \le \nu^{-1}|\zeta|^2, \qquad \zeta\in\mathbb{R}^n, \quad \zeta\perp\mathbf{n}^\pm. \end{aligned} \tag{3}$$

Для краткости мы будем употреблять обозначения

$$\Gamma=\Gamma^-\cup\Gamma^+, \qquad a_{ij}=\begin{cases} a^+_{ij}, & x\in\Gamma^+,\\ a^-_{ij}, & x\in\Gamma^-, \end{cases} \qquad d_i=\begin{cases} d^+_i, & x\in\Gamma^+,\\ d^-_i, & x\in\Gamma^-. \end{cases}$$

Обобщенным решением формальной задачи (1) называется функция u из композитного пространства Соболева

$$\mathcal{W}=W^1_2(\Omega)\cap W^1_2(\Gamma)\cap W^1_2(\Lambda),$$

которая удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int\limits_\Omega \mathfrak{a}_{ij}D_juD_i\xi+\int\limits_\Gamma a_{ij}d_jud_i\xi+\int\limits_\Lambda \alpha_{ij}\delta_ju\delta_i\xi=0 \tag{4}$$

(все интегралы берутся по естественным мерам на соответствующих стратах) для всех пробных функций $\xi\in\mathcal{W}$ таких, что $\xi=0$ на $\partial\Omega\backslash\Gamma$, на $\partial\Gamma\backslash\Lambda$ и на $\partial\Lambda$ почти всюду по естественным мерам. Аналогично, обобщенным субрешением назовем функцию $u\in\mathcal{W}$, удовлетворяющую интегральному неравенству

$$\int\limits_\Omega \mathfrak{a}_{ij}D_juD_i\xi+\int\limits_\Gamma a_{ij}d_jud_i\xi+\int\limits_\Lambda \alpha_{ij}\delta_ju\delta_i\xi\le 0 \tag{5}$$

для всех *неотрицательных* пробных функций $\xi\in\mathcal{W}$ таких, что $\xi=0$ на $\partial\Omega\setminus\Gamma$, на $\partial\Gamma\setminus\Lambda$ и на $\partial\Lambda$ почти всюду.

Замечание 1. *Несложно видеть, что если u — классическое решение формальной задачи (1) с гладкими коэффициентами, то оно является обобщенным решением.*

Замечание 2. *Композитное пространство Соболева $\mathcal{W}$ определяется следующим образом. Функция $u\in W^1_2(\Omega)$ имеет следы на $\Gamma^\pm$, на которые накладывается требование $u|_{\Gamma^\pm}\in W^1_2(\Gamma^\pm)$. После этого корректно определены следы функций $u|_{\Gamma^+}$ и $u|_{\Gamma^-}$ на Λ. Эти следы должны совпадать и лежать в $W^1_2(\Lambda)$.*

С помощью локального распрямления стратов мы можем свести нашу модельную задачу к случаю (рис. 1)

$$\begin{aligned}
\Lambda = \Lambda_1 &:= \{x \mid |x''| < 1, \quad x_{n-1} = x_n = 0\};\\
\Gamma^{\pm} = \Gamma_1^{\pm} &:= \{x \mid |x''| < 1, \quad 0 < \pm\, x_{n-1} < 1, \quad x_n = 0\};\\
\Omega = \Omega_1 &:= \{x \mid |x''| < 1, \quad -1 < x_{n-1} < 1, \quad 0 < x_n < 1\}.
\end{aligned}$$

Заметим, что преобразование координат, осуществляющее распрямление, является липшицевым. Задача (1) при этом преобразовании перепишется так:

$$\begin{aligned}
&- D_i(\mathfrak{a}_{ij} D_j u) = 0 && \text{в } \Omega,\\
&- D_\mu(a^{\pm}_{\mu\tau} D_\tau u) - \mathfrak{a}_{nj} D_j u = 0 && \text{на } \Gamma^{\pm},\\
&- D_l(\alpha_{lm} D_m u) - a^{+}_{n-1,\tau} D^{+}_\tau u + a^{-}_{n-1,\tau} D^{-}_\tau u = 0 && \text{на } \Lambda,
\end{aligned} \tag{6}$$

где $D^{\pm}_\tau u$ — предельные значения на Λ производных $D_\tau u$ со стороны $\Gamma^{\pm}$. Заметим, что при $\tau = 1, \ldots, n-2$ эти значения совпадают, но $D^{+}_{n-1} u$ и $D^{-}_{n-1} u$ могут отличаться.

За коэффициентами уравнений в новых координатах мы сохраним старые обозначения. Отметим еще, что знаки членов первого порядка в (6) определяются направлениями соответствующих нормалей в новых координатах.

Условия равномерной эллиптичности в новых координатах выполняются с новой константой эллиптичности, зависящей от "старой" константы и от постоянной Липшица преобразования координат. За новой константой мы сохраним старое обозначение ν. Таким образом, условия (2)–(3) принимают вид

$$\begin{aligned}
\nu|\zeta|^2 &\le \mathfrak{a}_{ij}\zeta_i\zeta_j \le \nu^{-1}|\zeta|^2, && \zeta \in \mathbb{R}^n;\\
\nu|\zeta'|^2 &\le a_{\mu\tau}\zeta_\mu\zeta_\tau \le \nu^{-1}|\zeta'|^2, && \zeta' \in \mathbb{R}^{n-1};\\
\nu|\zeta''|^2 &\le \alpha_{lm}\zeta_l\zeta_m \le \nu^{-1}|\zeta''|^2, && \zeta'' \in \mathbb{R}^{n-2}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Интегральное тождество (4) в новых координатах перепишется так:

$$\int\limits_\Omega \mathfrak{a}_{ij} D_j u D_i \xi \, dx + \int\limits_\Gamma a_{\mu\tau} D_\tau u D_\mu \xi \, dx' + \int\limits_\Lambda \alpha_{lm} D_m u D_l \xi \, dx'' = 0, \tag{8}$$

а интегральное неравенство (5) — как

$$\int\limits_\Omega \mathfrak{a}_{ij} D_j u D_i \xi \, dx + \int\limits_\Gamma a_{\mu\tau} D_\tau u D_\mu \xi \, dx' + \int\limits_\Lambda \alpha_{lm} D_m u D_l \xi \, dx'' \le 0. \tag{9}$$

Сформулируем теперь основной результат статьи.

Теорема 1. *Если функция $u \in \mathcal{W}$ является обобщенным решением задачи (6), то она (имеет непрерывного представителя, который) удовлетворяет условию Гельдера на любом подмножестве $\overline{\Omega}$, отделенном от $\partial\Omega \setminus \Gamma$. При этом показатель Гельдера зависит только от ν и n.*

Замечание 3. *При $n = 3$ множество Λ есть интервал, поэтому из теоремы вложения сразу следует, что $u|_\Lambda$ удовлетворяет условию Гельдера с показателем $\frac{1}{2}$, что упрощает рассуждения. В связи с этим далее мы считаем, что $n \geq 4$.*

Замечание 4. *Важно отметить, что соотношения (8)–(9) не инвариантны относительно растяжений, что не дает возможности применять технику Де Джорджи напрямую. Мы обобщаем схему доказательства из [9], которая, в свою очередь, является модификацией идеи из работы [5]. Как уже упоминалось во введении, эта схема допускает дальнейшее обобщение на произвольное число "этажей".*

Введем обозначения (здесь и далее $R \leq 1$)

$$\begin{aligned}
\Lambda_R &:= \{x \mid |x''| < R, \quad x_{n-1} = x_n = 0\};\\
\Gamma_R &:= \{x \mid |x''| < R, \quad 0 < |x_{n-1}| < R, \quad x_n = 0\};\\
\Omega_R &:= \{x \mid |x''| < R, \quad -R < x_{n-1} < R, \quad 0 < x_n < R\}.
\end{aligned}$$

Определим следующие вспомогательные функции:

$$\begin{gathered}
u_1(x) = u_1(x', x_n) := u(x', 0); \qquad u_2(x) = u_2(x'', x_{n-1}, x_n) := u(x'', 0, 0);\\
v(x) := \max\{u(x), u_1(x), u_2(x)\}; \qquad v_1(x) := \max\{u_1(x), u_2(x)\}.
\end{gathered}$$

Отметим, что функции u_1, u_2, v и v_1 принадлежат пространству $\mathcal{W}$.

3 Оценка максимума для субрешений модельной задачи

Лемма 1 (Неравенство типа Каччопполи). *Пусть u — обобщенное субрешение задачи (6). Если $\varepsilon \leq R$ и $R + \varepsilon \leq 1$, то для всех $h \geq 0$ верно неравенство*

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} |D(v-h)_+|^2 \eta^2\, dx + R \int\limits_{\Gamma} |D'(v-h)_+|^2 \eta^2\, dx' + R^2 \int\limits_{\Lambda} |D''(v-h)_+|^2 \eta^2\, dx''\\
&\quad \leq \frac{C}{\varepsilon^2} \Big(\int\limits_{\Omega_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\, dx + R \int\limits_{\Gamma_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\, dx' + R^2 \int\limits_{\Lambda_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\, dx'' \Big),
\end{aligned} \tag{10}$$

где срезка η имеет вид $\eta(x) = \widetilde{\eta}(|x''|)\widetilde{\eta}(|x_{n-1}|)\widetilde{\eta}(x_n)$, причем $0 \le \widetilde{\eta} \le 1$, $\widetilde{\eta} \equiv 1$ на $[0, R]$, $\widetilde{\eta} \equiv 0$ на $[R+\varepsilon; 1]$, и $|D\eta| \le \frac{3}{\varepsilon}$.

Доказательство. Общая схема доказательства такова: каждый интеграл в левой части (10), кроме последнего, оценивается через интегралы по стратам меньших размерностей и правую часть (10). Последний же интеграл прямо оценивается через правую часть (10). Таким образом, доказательство разбивается на три шага.

Шаг 1. Рассмотрим пробную функцию

$$\xi = (u-h)_+\eta^2,$$

где η удовлетворяет условиям леммы, и подставим ее в интегральное неравенство (9), сгруппировав подынтегральные выражения:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \mathfrak{a}_{ij} D_j u D_i (u-h)_+\eta^2\,dx &+ \int\limits_{\Gamma} a_{\mu\tau} D_\tau u D_\mu (u-h)_+\eta^2\,dx' \\ &+ \int\limits_{\Lambda} \alpha_{lm} D_m u D_l (u-h)_+\eta^2\,dx'' \le \int\limits_{\Omega} \mathfrak{a}_{ij}(-2\eta D_j u)((u-h)_+ D_i\eta)\,dx \\ &\qquad + \int\limits_{\Gamma} a_{\mu\tau}(-2\eta D_\tau u)((u-h)_+ D_\mu\eta)\,dx' \\ &\qquad\qquad + \int\limits_{\Lambda} \alpha_{lm}(-2\eta D_m u)((u-h)_+ D_l\eta)\,dx''. \end{aligned} \tag{11}$$

Заметим, что если $u < h$, то $\xi = 0$, а если $u \ge h$, то $Du = D(u-h)_+$. Поэтому левую часть (11) можно оценить снизу по неравенству эллиптичности (7) через

$$\nu\Big(\int\limits_{\Omega} |D(u-h)_+|^2\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma} |D'(u-h)_+|^2\eta^2\,dx' + \int\limits_{\Lambda} |D''(u-h)_+|^2\eta^2\,dx''\Big).$$

Первый интеграл в правой части оценим сверху по неравенству Коши:

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} \mathfrak{a}_{ij}(-2\eta D_j u)((u-h)_+ D_i\eta)\,dx \\ \le \frac{\nu}{2}\int\limits_{\Omega} |D(u-h)_+|^2\eta^2\,dx + C\int\limits_{\Omega} (u-h)_+^2|D\eta|^2\,dx.\end{aligned}$$

Аналогично оценим остальные члены в правой части (11). Перенося градиентные члены в левую часть и сокращая, приходим к оценке

$$\int\limits_{\Omega} |D(u-h)_+|^2\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma} |D'(u-h)_+|^2\eta^2\,dx' + \int\limits_{\Lambda} |D''(u-h)_+|^2\eta^2\,dx''$$
$$\le C\Big(\int\limits_{\Omega} (u-h)_+^2|D\eta|^2\,dx + \int\limits_{\Gamma} (u-h)_+^2|D'\eta|^2\,dx' + \int\limits_{\Lambda} (u-h)_+^2|D''\eta|^2\,dx''\Big).$$

Отбросим в левой части первые два слагаемых и домножим оставшееся неравенство на R^2. Учитывая, что $R \le 1$, $|D\eta| \le \frac{3}{\varepsilon}$, и $\eta = 0$ вне $\overline{\Omega}_{R+\varepsilon}$, получим

$$R^2\int\limits_{\Lambda} |D''(u-h)_+|^2\eta^2\,dx''$$
$$\le \frac{C}{\varepsilon^2}\Big(\int\limits_{\Omega_{R+\varepsilon}} (u-h)_+^2\,dx + R\int\limits_{\Gamma_{R+\varepsilon}} (u-h)_+^2\,dx' + R^2\int\limits_{\Lambda_{R+\varepsilon}} (u-h)_+^2\,dx''\Big).$$

Осталось заметить, что $u \le v$, и $u = v$ на Λ. Это дает требуемую оценку последнего слагаемого в левой части (10).

Шаг 2. Для оценки интеграла по страту размерности $n-1$ возьмем пробную функцию

$$\xi = ((u-h)_+ - (u_2-h)_+)_+\eta^2 = ((u-h)_+ - (u_2-h)_+)\chi_{\{u>u_2\}}\eta^2,$$

где η удовлетворяет условиям леммы. Подставим ξ в интегральное неравенство (9) и заметим, что $\xi = 0$ на Λ. Это дает

$$\int\limits_{\Omega\cap\{u>u_2\}} \mathfrak{a}_{ij}D_juD_i(u-h)_+\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma\cap\{u>u_2\}} a_{\mu\tau}D_\tau uD_\mu(u-h)_+\eta^2\,dx'$$
$$\le \int\limits_{\Omega\cap\{u>u_2\}} \mathfrak{a}_{ij}D_juD_i(u_2-h)_+\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma\cap\{u>u_2\}} a_{\mu\tau}D_\tau uD_\mu(u_2-h)_+\eta^2\,dx'$$
$$+ \int\limits_{\Omega\cap\{u>u_2\}} \mathfrak{a}_{ij}D_ju[-((u-h)_+ - (u_2-h)_+)]2\eta D_i\eta\,dx$$
$$+ \int\limits_{\Gamma\cap\{u>u_2\}} a_{\mu\tau}D_\tau u[-((u-h)_+ - (u_2-h)_+)]2\eta D_\mu\eta\,dx'. \quad (12)$$

Аналогично шагу 1, оценим левую часть (12) снизу по неравенству (7) с учетом соотношения $Du = D(u-h)_+$, выполненного на множестве интегрирования, а правую часть сверху по неравенству Коши. Сокращая градиентные члены, приходим к оценке

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega\cap\{u>u_2\}} |D(u-h)_+|^2\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma\cap\{u>u_2\}} |D'(u-h)_+|^2\eta^2\,dx' \\ \le C\Big(\int\limits_{\Omega\cap\{u>u_2\}} |D(u_2-h)_+|^2\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma\cap\{u>u_2\}} |D'(u_2-h)_+|^2\eta^2\,dx' \\ + \int\limits_{\Omega\cap\{u>u_2\}} (u-h)_+^2|D\eta|^2\,dx + \int\limits_{\Gamma\cap\{u>u_2\}} (u-h)_+^2|D'\eta|^2\,dx'\Big). \quad (13)\end{aligned}$$

Отбросим в левой части первое слагаемое и учтем, что $u \le v$, $|D\eta| \le \frac{3}{\varepsilon}$, и $\eta = 0$ вне $\overline{\Omega}_{R+\varepsilon}$. Получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Gamma\cap\{u>u_2\}} |D'(u-h)_+|^2\eta^2\,dx' \\ \le C\Big(\int\limits_{\Omega\cap\{u>u_2\}} |D(u_2-h)_+|^2\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma\cap\{u>u_2\}} |D'(u_2-h)_+|^2\eta^2\,dx'\Big) \\ + \frac{C}{\varepsilon^2}\Big(\int\limits_{\Omega_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\,dx + \int\limits_{\Gamma_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\,dx'\Big).\end{aligned}$$

Прибавим к обеим частям этого неравенства интеграл

$$\int\limits_{\Gamma\cap\{u\le u_2\}} |D'(u_2-h)_+|^2\eta^2\,dx'.$$

Поскольку $u = u_1$ на Γ, в левой части получится в точности интеграл $\int\limits_\Gamma |D'(v-h)_+|^2\eta^2\,dx'$. В правой же части второе слагаемое превратится в интеграл по Γ. Увеличивая еще множество интегрирования в первом слагаемом, имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_\Gamma |D'(v-h)_+|^2\eta^2\,dx' \le C\Big(\int\limits_\Omega |D(u_2-h)_+|^2\eta^2\,dx + \int\limits_\Gamma |D'(u_2-h)_+|^2\eta^2\,dx'\Big) \\ + \frac{C}{\varepsilon^2}\Big(\int\limits_{\Omega_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\,dx + \int\limits_{\Gamma_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\,dx'\Big).\end{aligned}$$

Примем теперь во внимание, что функция u_2 не зависит от x_{n-1} и x_n. Поэтому первые два интеграла в правой части сводятся к интегралу по Λ. Домножая неравенство на R и учитывая, что $R \le 1$, получим

$$R\int\limits_{\Gamma^\pm} |D'(v-h)_+|^2\eta^2\,dx' \le CR^2\int\limits_{\Lambda} |D''(u_2-h)_+|^2\eta^2\,dx'' + \frac{C}{\varepsilon^2}\Big(\int\limits_{\Omega_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\,dx + R\int\limits_{\Gamma_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\,dx'\Big).$$

Вспоминая, что $u_2 = v$ на Λ, и используя оценку, полученную на первом шаге, мы получаем оценку второго слагаемого в левой части (10).

Шаг 3. Для оценки первого слагаемого в (10) рассмотрим следующую пробную функцию:

$$\xi = ((u-h)_+ - (v_1-h)_+))_+\eta^2 = ((u-h)_+ - (v_1-h)_+)\chi_{\{u>v_1\}}\eta^2,$$

Подставим ξ в интегральное неравенство (9) и заметим, что $\xi = 0$ на Γ и на Λ. Это дает

$$\int\limits_{\Omega\cap\{u>v_1\}} \mathfrak{a}_{ij}D_juD_i(u-h)_+\eta^2\,dx \le \int\limits_{\Omega\cap\{u>v_1\}} \mathfrak{a}_{ij}D_juD_i(v_1-h)_+\eta^2\,dx + \int\limits_{\Omega\cap\{u>v_1\}} \mathfrak{a}_{ij}D_ju[-((u-h)_+ - (v_1-h)_+)]2\eta D_i\eta\,dx.$$

Аналогично предыдущим шагам, оценим левую часть снизу по неравенству (7) с учетом соотношения $Du = D(u-h)_+$, выполненного на множестве интегрирования, а правую часть сверху по неравенству Коши. Сокращая градиентные члены и учитывая, что $u \le v$, $|D\eta| \le \frac{3}{\varepsilon}$, и $\eta = 0$ вне $\overline{\Omega}_{R+\varepsilon}$, приходим к оценке

$$\int\limits_{\Omega\cap\{u>v_1\}} |D(u-h)_+|^2\eta^2\,dx \le C\int\limits_{\Omega\cap\{u>v_1\}} |D(v_1-h)_+|^2\eta^2\,dx + \frac{C}{\varepsilon^2}\int\limits_{\Omega_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\,dx.$$

Прибавим к обеим частям этого неравенства интеграл

$$\int\limits_{\Omega\cap\{u\le v_1\}} |D(v_1-h)_+|^2\eta^2\,dx.$$

В левой части получим $\int\limits_{\Omega} |D(v-h)_+|^2\eta^2\,dx$. В правой части первое слагаемое превратится в интеграл по Ω, и мы получим

$$\int\limits_{\Omega} |D(v-h)_+|^2\eta^2 \le C\int\limits_{\Omega} |D(v_1-h)_+|^2\eta^2\,dx + \frac{C}{\varepsilon^2}\int\limits_{\Omega_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\,dx.$$

Заметим теперь, что функция v_1 не зависит от x_n. Поэтому первый интеграл в правой части сводятся к интегралу по Γ:

$$\int\limits_{\Omega} |D(v-h)_+|^2\eta^2 \le CR\int\limits_{\Gamma} |D'(v_1-h)_+|^2\eta^2\,dx' + \frac{C}{\varepsilon^2}\int\limits_{\Omega_{R+\varepsilon}} (v-h)_+^2\,dx.$$

Вспоминая, что $v_1 = v$ на Γ, и используя оценку, полученную на втором шаге, мы получаем оценку первого слагаемого в левой части (10), что заканчивает доказательство леммы. □

Лемма 2. *В условиях леммы 1 для любого* $R \le \frac{1}{2}$ *имеем*

$$\sup_{\Omega_R} v_+^2 \le C\Big(\ \fint\limits_{\Omega_{2R}} v_+^2 dx + \fint\limits_{\Gamma_{2R}} v_+^2 dx' + \fint\limits_{\Lambda_{2R}} v_+^2 dx''\Big). \tag{14}$$

Доказательство. Оценка (14) получается из (10) с помощью известных рассуждений (см. [8, Гл. II, §5]; для "двухэтажной" задачи эта оценка была получена в Лемме 2 [9]). Введем последовательности

$$r_k := R + \frac{R}{2^k}, \quad r_k \searrow R \text{ при } k\to\infty,$$
$$h_k := H - \frac{H}{2^k}, \quad h_k \nearrow H \text{ при } k\to\infty,$$
$$A_k := \{x|\ v(x) > h_k\}, \quad A_{k+1}\subset A_k \subset \ldots \subset A_0$$

(здесь $H > 0$ — некоторое число, которое мы определим позже).

Рассмотрим интегралы

$$I_k^{\Omega} = \int\limits_{\Omega_{r_k}} (v-h_k)_+^2\,dx = \int\limits_{A_k\cap\Omega_{r_k}} (v-h_k)^2\,dx;$$

$$I_k^{\Gamma} = \int\limits_{\Gamma_{r_k}} (v-h_k)_+^2\,dx' = \int\limits_{A_k\cap\Gamma_{r_k}} (v-h_k)^2\,dx';$$

$$I_k^\Lambda = \int\limits_{\Lambda_{r_k}} (v-h_k)_+^2\, dx'' = \int\limits_{A_k\cap\Lambda_{r_k}} (v-h_k)^2\, dx'';$$

$$I_k = I_k^\Omega + RI_k^\Gamma + R^2 I_k^\Lambda.$$

Определим срезку $\eta_k(x) = \widetilde{\eta}_k(|x''|)\widetilde{\eta}_k(|x_{n-1}|)\widetilde{\eta}_k(x_n)$, где $0 \le \widetilde{\eta}_k \le 1$, $\widetilde{\eta}_k \equiv 1$ на $[0, r_k]$, $\widetilde{\eta}_k \equiv 0$ на $[r_{k-1}; 1]$, и $|D\eta_k| \le \frac{3}{\varepsilon_k}$, $\varepsilon_k = r_{k-1} - r_k = \frac{R}{2^k}$.

С помощью неравенств Соболева и Гельдера получаем

$$\begin{aligned}
I_{k+1}^\Omega \le &\int\limits_{A_{k+1}\cap\Omega_{r_k}} (v-h_{k+1})^2\eta_{k+1}^2\, dx \\
&\le C_0(n)\lambda_n^{\frac{2}{n}}(A_{k+1}\cap\Omega_{r_k}) \int\limits_{\Omega_{r_k}} |D[(v-h_{k+1})_+\eta_{k+1}]|^2\, dx \\
&\le C_0(n)\lambda_n^{\frac{2}{n}}(A_{k+1}\cap\Omega_{r_k}) \Big(\int\limits_{\Omega_{r_k}} 2|D(v-h_{k+1})_+|^2\eta_{k+1}^2\, dx \\
&\qquad + \frac{18}{\varepsilon_{k+1}^2} \int\limits_{\Omega_{r_k}} (v-h_{k+1})_+^2\, dx \Big).
\end{aligned}$$

Интегралы I_k^Γ и I_k^Λ оцениваются аналогично. Применение неравенства (10) дает

$$\begin{aligned}
I_{k+1} \le C\, \frac{M_k}{\varepsilon_{k+1}^2} \Big(&\int\limits_{\Omega_{r_k}} (v-h_{k+1})_+^2\, dx \\
&+ R \int\limits_{\Gamma_{r_k}} (v-h_{k+1})_+^2\, dx' + R^2 \int\limits_{\Lambda_{r_k}} (v-h_{k+1})_+^2\, dx'' \Big),
\end{aligned}$$

где $M_k = \max\big\{\lambda_n^{\frac{2}{n}}(A_{k+1}\cap\Omega_{r_k}),\ \lambda_{n-1}^{\frac{2}{n-1}}(A_{k+1}\cap\Gamma_{r_k}),\ \lambda_{n-2}^{\frac{2}{n-2}}(A_{k+1}\cap\Lambda_{r_k})\big\}$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned}
I_{k+1} &\le C\, \frac{M_k 4^{k+1}}{R^2} \Big(\int\limits_{A_{k+1}\cap\Omega_{r_k}} + R \int\limits_{A_{k+1}\cap\Gamma_{r_k}} + R^2 \int\limits_{A_{k+1}\cap\Lambda_{r_k}} \Big)(v-h_{k+1})^2 \\
&\le C\, \frac{M_k 4^{k+1}}{R^2} \Big(\int\limits_{A_k\cap\Omega_{r_k}} + R \int\limits_{A_k\cap\Gamma_{r_k}} + R^2 \int\limits_{A_k\cap\Lambda_{r_k}} \Big)(v-h_k)^2 = C\, \frac{M_k 4^{k+1}}{R^2}\, I_k. \quad (15)
\end{aligned}$$

Теперь оценим меры в M_k, пользуясь тем, что $(h_{k+1}-h_k)^2 = \frac{H^2}{4^{k+1}}$:

$$\lambda_n(A_{k+1}\cap\Omega_{r_k})\frac{H^2}{4^{k+1}} \le \int\limits_{A_{k+1}\cap\Omega_{r_k}} (v-h_k)^2\,dx \le \int\limits_{A_k\cap\Omega_{r_k}} (v-h_k)^2\,dx = I_k^{\Omega};$$

$$\lambda_{n-1}(A_{k+1}\cap\Gamma_{r_k})\frac{H^2}{4^{k+1}} \le \int\limits_{A_{k+1}\cap\Gamma_{r_k}} (v-h_k)^2\,dx' \le \int\limits_{A_k\cap\Gamma_{r_k}} (v-h_k)^2\,dx' = \frac{1}{R}\,I_k^{\Gamma};$$

$$\lambda_{n-2}(A_{k+1}\cap\Lambda_{r_k})\frac{H^2}{4^{k+1}} \le \int\limits_{A_{k+1}\cap\Lambda_{r_k}} (v-h_k)^2\,dx'' \le \int\limits_{A_k\cap\Lambda_{r_k}} (v-h_k)^2\,dx'' = \frac{1}{R^2}\,I_k^{\Lambda},$$

и потому

$$M_k \le \max\left\{\left(\frac{4^{k+1}I_k}{H^2}\right)^{\frac{2}{n}}, \left(\frac{4^{k+1}I_k}{RH^2}\right)^{\frac{2}{n-1}}, \left(\frac{4^{k+1}I_k}{R^2H^2}\right)^{\frac{2}{n-2}}\right\}. \tag{16}$$

Заметим, что если $\frac{I_k}{R^nH^2} \le 1$, то

$$\left(\frac{I_k}{RH^2}\right)^{\frac{2}{n-1}} = \left(\frac{I_k}{H^2}\right)^{\frac{2}{n}} \left(\frac{I_k}{R^nH^2}\right)^{\frac{2}{n(n-1)}} \le \left(\frac{I_k}{H^2}\right)^{\frac{2}{n}},$$

и аналогично $\left(\frac{I_k}{R^2H^2}\right)^{\frac{2}{n-2}} \le \left(\frac{I_k}{H^2}\right)^{\frac{2}{n}}$. Поэтому из (15) и (16) имеем

$$\frac{I_{k+1}}{R^nH^2} \le C\,\frac{4^{k+1}}{R^2}\,4^{\frac{2(k+1)}{n-2}}\left(\frac{I_k}{H^2}\right)^{\frac{2}{n}}\frac{I_k}{R^nH^2} = C\,4^{(1+\frac{2}{n-2})k}\left(\frac{I_k}{R^nH^2}\right)^{1+\frac{2}{n}}.$$

Согласно Лемме 4.7 из [8, Гл. II], из последнего неравенства следует, что $I_k \to 0$ при $k\to\infty$, если выполнено условие:

$$\frac{I_0}{R^nH^2} \le c_0(n,\nu) := C^{-\frac{n}{2}}4^{-(1+\frac{2}{n-2})\frac{n^2}{4}} \tag{17}$$

(не умаляя общности, можно считать $c_0 \le 1$).

Теперь положим $H^2 = \frac{I_0}{c_0R^n}$ (что в точности равно правой части (14)). Это дает (17), а потому и $\frac{I_k}{R^nH^2} \le 1$. Следовательно, $\lim\limits_k I_k = 0$, т.е.

$$\int\limits_{\Omega_{\frac{R}{2}}} (v-H)_+^2\,dx = \int\limits_{\Gamma_{\frac{R}{2}}} (v-H)_+^2\,dx' = \int\limits_{\Lambda_{\frac{R}{2}}} (v-H)_+^2\,dx'' = 0,$$

что дает $\sup\limits_{\Omega_R} v \le H$ и доказывает лемму. $\square$

4 Вспомогательные леммы

Для дальнейших оценок нам потребуются следующие неравенства.

Лемма 3. *Пусть* $1 \le p < \infty$.

1. *Предположим, что* $u \in W_p^1(\mathcal{B}_R^n)$, *где* $\mathcal{B}_R^n$ — *шар в* $\mathbb{R}^n$ *радиуса* R. *Пусть* $u(x) = 0$ *на* $E_0 \subset \mathcal{B}_R^n$, *и* $\lambda_n(E_0) > 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{B}_R^n} |u(x)|^p\,dx \le C\Big(\frac{pR^{n+1}}{\lambda_n(E_0)}\Big)^p \int\limits_{\mathcal{B}_R^n} |Du(x)|^p\,dx. \tag{18}$$

2. *Пусть* $u \in W_p^1(\mathcal{C}_R^n) \cap W_p^1(\mathcal{B}_R^{n-1})$, *где* $\mathcal{C}_R^n = \mathcal{B}_R^{n-1} \times (-R; R)$. *Пусть* $u(x', 0) = 0$ *на* $E_0 \subset \mathcal{B}_R^{n-1}$, *и* $\lambda_{n-1}(E_0) > 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{C}_R^n} |u(x)|^p\,dx$$

$$\le C(p)\bigg(\Big(\frac{R^n}{\lambda_{n-1}(E_0)}\Big)^p R \int\limits_{\mathcal{B}_R^{n-1}} |D'u(x', 0)|^p\,dx' + R^p \int\limits_{\mathcal{C}_R^n} |Du(x)|^p\,dx\bigg) \tag{19}$$

3. *Предположим, что* $u \in W_p^1(\mathcal{D}_R^n) \cap W_p^1(\mathcal{C}_R^{n-1}) \cap W_p^1(\mathcal{B}_R^{n-2})$, *где* $\mathcal{D}_R^n = \mathcal{C}_R^{n-1} \times [0, R)$. *Пусть* $u(x'', 0, 0) = 0$ *на* $E_0 \subset \mathcal{B}_R^{n-2}$, *и* $\lambda_{n-2}(E_0) > 0$. *Тогда*

$$\int\limits_{\mathcal{D}_R^n} |u(x)|^p\,dx \le C(p)\bigg(\Big(\frac{R^{n-1}}{\lambda_{n-2}E_0}\Big)^p R^2 \int\limits_{\mathcal{B}_R^{n-2}} |D''u(x'', 0, 0)|^p\,dx''$$

$$+ R^{p+1} \int\limits_{\mathcal{C}_R^{n-1}} |D'u(x', 0)|^p\,dx' + R^p \int\limits_{\mathcal{D}_R^n} |Du(x)|^p\,dx\bigg). \tag{20}$$

Доказательство. **1**. Это утверждение хорошо известно. При $p = 1$ это в точности лемма 3.8 из [8, Гл. II]:

$$\int\limits_{\mathcal{B}_R^n} |u(x)|\,dx \le C\,\frac{R^n}{\lambda_n(E_0)}\,\lambda_n^{\frac{1}{n}}(\mathcal{B}_R^n) \int\limits_{\mathcal{B}_R^n} |Du(x)|\,dx. \tag{21}$$

При $p > 1$ надо применить оценку (21) к $|u|^p$ и воспользоваться неравенством Гельдера.

2. Напишем очевидную оценку

$$|u(x)|^p \le 2^{p-1}(|u(x', 0)|^p + |u(x) - u(x', 0)|^p). \tag{22}$$

Оценка (18) с заменой n на $n-1$ дает

$$\int\limits_{\mathcal{C}_R^n} |u(x',0)|^p\,dx = 2R \int\limits_{\mathcal{B}_R^{n-1}} |u(x',0)|^p\,dx' \le$$

$$\le C\biggl(\frac{pR^n}{\lambda_{n-1}(E_0)}\biggr)^p R \int\limits_{\mathcal{B}_R^{n-1}} |D'u(x',0)|^p\,dx'.$$

Поскольку второе слагаемое в правой части (22) обращается в нуль при $x_n = 0$, интеграл от нее оценивается по неравенству Фридрихса:

$$\int\limits_{\mathcal{C}_R^n} |u(x',x_n) - u(x',0)|^p\,dx \le (2R)^p \int\limits_{\mathcal{C}_R^n} |Du(x)|^p\,dx,$$

что дает (19).

3. Эта оценка получается итерацией рассуждения части 2. Применяя неравенство (19) с заменой n на $n-1$ к интегралу от первого слагаемого в правой части (22), получим

$$\int\limits_{\mathcal{D}_R^n} |u(x',0)|^p\,dx \le C(p)R$$

$$\times\biggl(\Bigl(\frac{R^{n-1}}{\lambda_{n-2}(E_0)}\Bigr)^p R \int\limits_{\mathcal{B}_R^{n-2}} |D''u(x'',0,0)|^p\,dx'' + R^p \int\limits_{\mathcal{C}_R^{n-1}} |D'u(x',0)|^p\,dx'\biggr).$$

Интеграл от второго слагаемого в (22) оценивается по неравенству Фридрихса, что дает (20). □

Замечание 5. *Доказательство леммы 3 очевидным образом распространяется на функции из композитных соболевских пространств на стратифицированном множестве с любым количеством "этажей" при условии 2-связности.*

Лемма 4. *Пусть u — ограниченное обобщенное субрешение задачи (6) в Ω_R. Пусть ϕ — дважды дифференцируемая, выпуклая и возрастающая на множестве значений функции u. Тогда $\phi(u)$ — также обобщенное субрешение задачи (6) в Ω_R.*

Доказательство. Для обычного дивергентного эллиптического уравнения в области этот факт хорошо известен (см., напр., [10, §2]). Доказательство для уравнения на стратифицированном множестве ведется по той же схеме. Мы приводим его для удобства читателя.

Пусть сначала ξ — неотрицательная *липшицева* функция, равная нулю на $\partial\Omega_R \setminus \Gamma_R$. Тогда несложно видеть, что в (9) можно взять в качестве пробной функции $\phi'(u)\xi$:

$$\int\limits_{\Omega_R} \mathfrak{a}_{ij} D_j u D_i(\phi'(u)\xi)\, dx + \int\limits_{\Gamma_R} a_{\mu\tau} D_\tau u D_\mu(\phi'(u)\xi)\, dx' + \int\limits_{\Lambda_R} \alpha_{lm} D_m u D_l(\phi'(u)\xi)\, dx'' \le 0. \quad (23)$$

Первый интеграл в (23) преобразуется так:

$$\int\limits_{\Omega_R} \mathfrak{a}_{ij} D_j u D_i(\phi'(u)\xi)\, dx = \int\limits_{\Omega_R} \mathfrak{a}_{ij} D_j(\phi(u)) D_i\xi\, dx + \int\limits_{\Omega_R} \phi''(u)\mathfrak{a}_{ij} D_j u D_i u\, \xi\, dx.$$

Последний интеграл здесь очевидно неотрицателен, поэтому, отбросив его, мы сохраним неравенство в (23). Повторяя эту операцию с другими интегралами в (23), получим неравенство (9) для функции $\phi(u)$.

Для произвольной функции $\xi \in \mathcal{W}$, фигурирующей в определении субрешения, результат получается сглаживанием и предельным переходом. □

5 Гельдеровская оценка решения для модельной задачи

Теорема 2. *Пусть u — обобщенное решение задачи (6). Тогда для любой точки $x^0 \in \Lambda$ и для любого $R > 0$, такого, что $x^0 + \Omega_{2R} \subset \Omega$, справедлива оценка*

$$\operatorname*{osc}_{x^0+\Omega_{\frac{R}{2}}} u \le c(n,\nu) \operatorname*{osc}_{x^0+\Omega_R} u, \quad (24)$$

где $c(n,\nu) < 1$.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать $x_0 = 0$. Лемма 2, примененная к $\pm u$, обеспечивает нам ограниченность u в $\overline{\Omega}_R$. Поэтому с помощью линейного преобразования можно добиться выполнения соотношений

$$\sup_{\Omega_R} u = 1, \quad \inf_{\Omega_R} u = -1, \quad \lambda_{n-2}(\{u \le 0\} \cap \Lambda_R) \ge \frac{1}{2}\lambda_{n-2}(\Lambda_R). \quad (25)$$

Определим вспомогательные функции (здесь $0 < \delta < 1$)

$$U = 1 - (1-\delta)u; \qquad U_1 = 1 - (1-\delta)u_1; \qquad U_2 = 1 - (1-\delta)u_2;$$
$$V = 1 - (1-\delta)v; \qquad V_1 = 1 - (1-\delta)v_1.$$

Согласно Лемме 4 функция $-\ln(U) = -\ln(1-(1-\delta)u)$ является обобщенным субрешением задачи (6) в Ω_R. С учетом соотношения $-\ln(V) = \max\{-\ln(U), -\ln(U_1), -\ln(U_2)\}$ мы можем написать неравенство (14):

$$\sup_{\Omega_{\frac{R}{2}}}(-\ln(V))_+^2 \leq C\Big(\fint_{\Omega_R}(-\ln(V))_+^2\,dx + \fint_{\Gamma_R}(-\ln(V))_+^2\,dx' + \fint_{\Lambda_R}(-\ln(V))_+^2\,dx''\Big). \quad (26)$$

Заметим, что

$$\{u \leq 0\} \cap \Lambda_R = \{(-\ln(V))_+ = 0\} \cap \Lambda_R.$$

Из (25) следует, что к функции $-(\ln(V))_+$ применимы оценки из леммы 3. Тем самым правая часть неравенства (26) оценивается сверху через

$$CR^{2-n}\Big(\int_{\Omega_R}\Big|\frac{DV}{V}\Big|^2 dx + R\int_{\Gamma_R}\Big|\frac{D'V}{V}\Big|^2 dx' + R^2\int_{\Lambda_R}\Big|\frac{D''V}{V}\Big|^2 dx''\Big). \qquad (27)$$

Для оценки слагаемых в (27) вновь применим схему из леммы 1.

Шаг 1. Заметим, что U — обобщенное решение задачи (6), и рассмотрим пробную функцию $\xi = \frac{\eta^2}{U}$, где η — срезка из леммы 1 с $\varepsilon = R$. Тогда тождество (8) можно переписать так:

$$\int_{\Omega_{2R}} \mathfrak{a}_{ij}\,\frac{D_jUD_iU}{U^2}\,\eta^2\,dx + \int_{\Gamma_{2R}} a_{\mu\tau}\,\frac{D_\tau UD_\mu U}{U^2}\,\eta^2\,dx' + \int_{\Lambda_{2R}} \alpha_{lm}\,\frac{D_mUD_lU}{U^2}\,\eta^2\,dx''$$
$$= \int_{\Omega_{2R}} \mathfrak{a}_{ij}\,\frac{D_jU}{U}2\eta D_i\eta\,dx + \int_{\Gamma_{2R}} a_{\mu\tau}\,\frac{D_\tau U}{U}2\eta D_\mu\eta\,dx' + \int_{\Lambda_{2R}} \alpha_{lm}\,\frac{D_mU}{U}2\eta D_l\eta\,dx''.$$

Интегралы в левой части оценим снизу по неравенству (7), а интегралы в правой части — сверху по неравенству Коши. Перенося слагаемые вида $\int\frac{|DU|^2}{U^2}\eta^2$ с малым множителем в левую часть и сокращая, получим

$$\int\limits_{\Omega_{2R}} \frac{|DU|^2}{U^2}\,\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma_{2R}} \frac{|D'U|^2}{U^2}\,\eta^2\,dx' + \int\limits_{\Lambda_{2R}} \frac{|D''U|^2}{U^2}\,\eta^2\,dx''$$
$$\le C\Big(\int\limits_{\Omega_{2R}} |D\eta|^2\,dx + \int\limits_{\Gamma_{2R}} |D'\eta|^2\,dx' + \int\limits_{\Lambda_{2R}} |D''\eta|^2\,dx''\Big).$$

Отбросим в левой части первые два слагаемых и домножим оставшееся неравенство на R^2. Учитывая, что $U = V$ на Λ, $R \le 1$ и $|D\eta| \le \frac{3}{R}$, получаем

$$R^2 \int\limits_{\Lambda_{2R}} \frac{|D''V|^2}{V^2}\eta^2\,dx'' \le C(R^n + R^{n-1} + R^{n-2}) \le CR^{n-2}. \tag{28}$$

Шаг 2. Для оценки интеграла по страту размерности $n-1$ возьмем пробную функцию

$$\xi = \Big(\frac{1}{U} - \frac{1}{U_2}\Big)_+ \eta^2 = \Big(\frac{1}{U} - \frac{1}{U_2}\Big)\chi_{\{U<U_2\}}\eta^2.$$

Поскольку $\xi = 0$ на Λ, тождество (8) перепишется так:

$$\int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<U_2\}} \mathfrak{a}_{ij}\,\frac{D_jUD_iU}{U^2}\,\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma_{2R}\cap\{U<U_2\}} a_{\mu\tau}\,\frac{D_\tau UD_\mu U}{U^2}\,\eta^2\,dx'$$
$$= \int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<U_2\}} \mathfrak{a}_{ij}\,\frac{D_jUD_iU_2}{U_2^2}\,\eta^2\,dx + \int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<U_2\}} \mathfrak{a}_{ij}D_jU\Big(\frac{1}{U} - \frac{1}{U_2}\Big)2\eta D_i\eta\,dx$$
$$+ \int\limits_{\Gamma_{2R}\cap\{U<U_2\}} a_{\mu\tau}\,\frac{D_\tau UD_\mu U_2}{U_2^2}\,\eta^2\,dx' + \int\limits_{\Gamma_{2R}\cap\{U<U_2\}} a_{\mu\tau}D_\tau\Big(\frac{1}{U} - \frac{1}{U_2}\Big)2\eta D_\mu\eta\,dx'.$$

Аналогично шагу 1, оценим левую часть снизу по неравенству (7). Два первых интеграла в правой части оценятся по неравенству Коши через

$$\frac{\nu}{4}\int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<U_2\}} \Big(\frac{|DU|^2}{U_2^2} + \frac{|DU|^2}{U^2}\Big)\eta^2\,dx + C\int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<U_2\}} \Big(\frac{|DU_2|^2}{U_2^2}\,\eta^2 + |D\eta|^2\Big)dx.$$

Интегралы по $\Gamma_{2R}\cap\{U < U_2\}$ оцениваются аналогично. Заметив еще, что на множестве интегрирования $\frac{1}{U_2^2} < \frac{1}{U^2}$, и сокращая градиентные члены, приходим к оценке

$$\int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<U_2\}} \frac{|DU|^2}{U^2}\,\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma_{2R}\cap\{U<U_2\}} \frac{|D'U|^2}{U^2}\,\eta^2\,dx'$$
$$\le C\Big(\int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<U_2\}} \frac{|DU_2|^2}{U_2^2}\,\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma_{2R}\cap\{U<U_2\}} \frac{|D'U_2|^2}{U_2^2}\,\eta^2\,dx'$$
$$+ \int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<U_2\}} |D\eta|^2\,dx + \int\limits_{\Gamma_{2R}\cap\{U<U_2\}} |D'\eta|^2\,dx'\Big).$$

Отбросим в левой части первое слагаемое и прибавим к обеим частям неравенства интеграл

$$\int\limits_{\Gamma_{2R}\cap\{U\ge U_2\}} \frac{|D'U_2|^2}{U_2^2}\,\eta^2\,dx'.$$

Поскольку на Γ выполнено соотношение $\min\{U, U_2\} = V$, в левой части получится в точности интеграл $\int\limits_{\Gamma_{2R}} \frac{|D'V|^2}{V^2}\,\eta^2\,dx'$. В правой же части второе слагаемое превратится в интеграл по Γ_{2R}. Увеличивая еще множество интегрирования в первом слагаемом и учитывая, что $|D\eta| \le \frac{3}{R}$, имеем

$$\int\limits_{\Gamma_{2R}} \frac{|DV|^2}{V^2}\,\eta^2\,dx' \le C\Big(\int\limits_{\Omega_{2R}} \frac{|DU_2|^2}{U_2^2}\,\eta^2\,dx + \int\limits_{\Gamma_{2R}} \frac{|D'U_2|^2}{U_2^2}\,\eta^2\,dx' + R^{n-2} + R^{n-3}\Big).$$

Поскольку U_2 не зависит от x_{n-1} и x_n, интегралы в правой части сводятся к интегралу по Λ_{2R}. Домножая неравенство на R и учитывая, что $R \le 1$, получим

$$R\int\limits_{\Gamma_{2R}} \frac{|DV|^2}{V^2}\,\eta^2\,dx' \le C\Big(R^2\int\limits_{\Lambda_{2R}} \frac{|D''U_2|^2}{U_2^2}\,\eta^2\,dx'' + R^{n-2}\Big).$$

Вспоминая, что $U_2 = V$ на Λ_{2R}, и используя (28), в итоге имеем:

$$R\int\limits_{\Gamma_{2R}} \frac{|DV|^2}{V^2}\,\eta^2\,dx' \le CR^{n-2}. \tag{29}$$

Шаг 3. Для оценки первого слагаемого в (27) рассмотрим следующую пробную функцию (напомним, что $V_1 = \min\{U_1, U_2\}$):

$$\xi = \Big(\frac{1}{U} - \frac{1}{V_1}\Big)_+\eta^2 = \Big(\frac{1}{U} - \frac{1}{V_1}\Big)\chi_{\{U<V_1\}}\eta^2.$$

Снова напишем интегральное тождество (8), учитывая, что $\xi = 0$ на Γ и на Λ:

$$\int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<V_1\}} \mathfrak{a}_{ij}\,\frac{D_jUD_iU}{U^2}\,\eta^2\,dx$$
$$= \int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<V_1\}} \mathfrak{a}_{ij}\,\frac{D_jUD_iV_1}{V_1^2}\,\eta^2\,dx + \int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<V_1\}} \mathfrak{a}_{ij}\,D_jU\Big(\frac{1}{U}-\frac{1}{V_1}\Big)2\eta D_i\eta\,dx.$$

Аналогично предыдущим шагам, оценим левую часть снизу по неравенству (7), а правую часть сверху по неравенству Коши. Заметив, что на множестве интегрирования $\frac{1}{V_1^2} < \frac{1}{U^2}$, и сокращая градиентные члены, приходим к оценке

$$\int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<V_1\}} \frac{|DU|^2}{U^2}\,\eta^2\,dx \le C\Big(\int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<V_1\}} \frac{|DV_1|^2}{V_1^2}\,\eta^2\,dx + \int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U<V_1\}} |D\eta|^2\,dx\Big).$$

Прибавим к обеим частям неравенства интеграл

$$\int\limits_{\Omega_{2R}\cap\{U\ge V_1\}} \frac{|DV_1|^2}{V_1^2}\,\eta^2\,dx.$$

С учетом $|D\eta| \le \frac{3}{R}$ это даст

$$\int\limits_{\Omega_{2R}} \frac{|DV|^2}{V^2}\,\eta^2\,dx \le C\Big(\int\limits_{\Omega_{2R}} \frac{|DV_1|^2}{V_1^2}\,\eta^2\,dx + R^{n-2}\Big).$$

Поскольку V_1 не зависит от x_n, интеграл в правой части сводятся к интегралу по Γ_{2R}. Вспоминая, что $V_1 = V$ на Γ_{2R}, и используя (29), получим

$$\int\limits_{\Omega_{2R}} \frac{|DV|^2}{V^2}\,\eta^2\,dx \le CR^{n-2}. \tag{30}$$

Подставляя оценки (28)–(30) в (27), мы заключаем, что

$$\sup_{\Omega_{\frac{R}{2}}}(-\ln(V)) \le C \quad\Longrightarrow\quad \sup_{\Omega_{\frac{R}{2}}}(1-\delta)v \le 1-\exp(-C) =: 1-\varkappa(n,\nu).$$

Теперь устремим δ к нулю и заметим, что константа в правой части не зависит от δ. В итоге имеем

$$\sup_{\Omega_{\frac{R}{2}}} u \le \sup_{\Omega_{\frac{R}{2}}} v \le 1-\varkappa \quad\Longrightarrow\quad \operatorname*{osc}_{\Omega_{\frac{R}{2}}} u \le 2-\varkappa.$$

Поскольку (25) влечет $\operatorname*{osc}_{\Omega_R} u = 2$, это доказывает теорему. $\square$

Доказательство теоремы 1. Из Теоремы 2 и Леммы 4.8 в [8, Гл. II] следует гельдеровская оценка колебания функции u в достаточно малой окрестности любой точки $x_0 \in \Lambda$, отделенной от $\partial\Lambda$. При этом показатель Гельдера зависит только от n и ν.

Аналогичные оценки для точек $x_0 \in \Gamma$, отделенных от $\partial\Gamma$, были получены в [9], а для точек $x_0 \in \Omega$, отделенных от $\partial\Omega$, — в [3]. В совокупности эти оценки дают утверждение теоремы. $\square$

6 Оценки решения модельной задачи в случае $\Gamma^+ = \Gamma^-$

Рассмотрим теперь ситуацию, когда страты Λ и Ω связаны лишь через один $(n-1)$-мерный страт Γ. В этом случае легко видеть, что страт Ω должен примыкать к Γ с двух сторон (можно сказать, что $\Gamma = \Gamma^+ = \Gamma^-$), и с помощью локального распрямления стратов задача сводится к случаю

$$\Lambda = \widehat{\Lambda}_1; \quad \Gamma = \widehat{\Gamma}_1; \quad \Omega = \widehat{\Omega}_1,$$

где (рис. 2)

$$\begin{aligned}
&\widehat{\Lambda}_R := \{x \mid |x''| < R, \quad x_{n-1} = x_n = 0\};\\
&\widehat{\Gamma}_R := \{x \mid |x''| < R, \quad 0 < x_{n-1} < R, \quad x_n = 0\};\\
&\widehat{\Omega}_R := \{x \mid |x''| < R,\ |x_{n-1}| < R,\ \ (x_{n-1})_+ - R < x_n < R - (x_{n-1})_+\} \setminus \overline{\widehat{\Gamma}_R}.
\end{aligned}$$

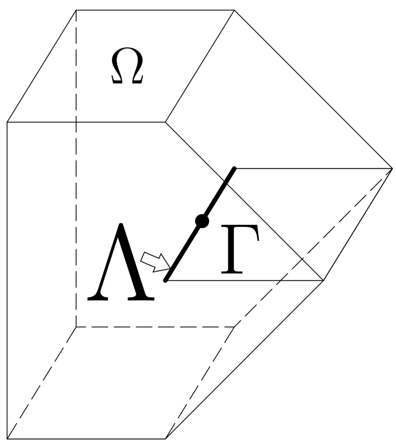

Рис. 2: Второй модельный случай

Рассматриваемая задача в этом случае формально записывается так:

$$
\begin{aligned}
&- D_i(\mathfrak{a}_{ij} D_j u) = 0 && \text{в } \Omega,\\
&- D_\mu(a_{\mu\tau} D_\tau u) - \mathfrak{a}^+_{nj} D^+_j u + \mathfrak{a}^-_{nj} D^-_j u = 0 && \text{на } \Gamma,\\
&- D_l(\alpha_{lm} D_m u) - a_{n-1,\tau} D_\tau u = 0 && \text{на } \Lambda.
\end{aligned} \tag{31}
$$

Здесь $D^\pm_j u$ — предельные значения на Γ производных $D_j u$ при $x_n \to \pm 0$ (при $j = 1, \dots, n-1$ эти значения совпадают, но $D^+_n u$ и $D^-_n u$ могут отличаться). Коэффициенты $\mathfrak{a}^\pm_{nj}$ определяются аналогично.

Обобщенное решение формальной задачи (31) по-прежнему определяется с помощью интегрального тождества (8), а обобщенное субрешение — с помощью интегрального неравенства (9). Несложно видеть, что если u — классическое решение формальной задачи (31) с гладкими коэффициентами, то оно является обобщенным решением.

Основное отличие доказательства теоремы 1 в этом случае заключается в построении вспомогательной функции u_1. Именно, положим

$$
\begin{gathered}
u_1(x'', x_{n-1}, x_n) := u(x'', |x_n| + (x_{n-1})_+, 0); \quad u_2(x'', x_{n-1}, x_n) := u(x'', 0, 0);\\
v(x) := \max\{u(x), u_1(x), u_2(x)\}; \qquad v_1(x) := \max\{u_1(x), u_2(x)\}.
\end{gathered}
$$

После этого формулировки и доказательства леммы 1, леммы 2 и теоремы 2 сохраняются полностью.

7 Общий случай

В общем случае к $(n-2)$-мерному страту Λ примыкают n-мерные страты $\Omega^{\mathfrak{k}}$, $\mathfrak{k} = 1, 2, \dots, \mathfrak{N}$, каждый из которых соединяется с Λ одним или двумя $(n-1)$-мерными стратами $\Lambda^{\mathbf{k}}$, $\mathbf{k} = 1, 2, \dots, N$. Отметим, что такое стратифицированное множество вкладывается в $\mathbb{R}^{n+1}$, но, вообще говоря, не в $\mathbb{R}^n$. На рис. 3 изображен пример локального сечения такого стратифицированного множества. Это сечение проходит через внутреннюю точку $(n-2)$-мерного страта, к которому примыкают три $(n-1)$-мерных и три n-мерных страта. Обратите внимание, что страты Ω_1 и Ω_2 связаны с Λ через два $(n-1)$-мерных страта, а Ω_3 — через один.

Композитное пространство Соболева для такого множества выглядит так:

$$
\mathcal{W} = \bigcap_{\mathfrak{k}=1}^{\mathfrak{N}} W^1_2(\Omega^{\mathfrak{k}}) \cap \bigcap_{\mathbf{k}=1}^{N} W^1_2(\Gamma^{\mathbf{k}}) \cap W^1_2(\Lambda),
$$

а интегральное тождество (неравенство), определяющее обобщенное решение (субрешение) задачи, отличается от (4) (соответственно, от (5))

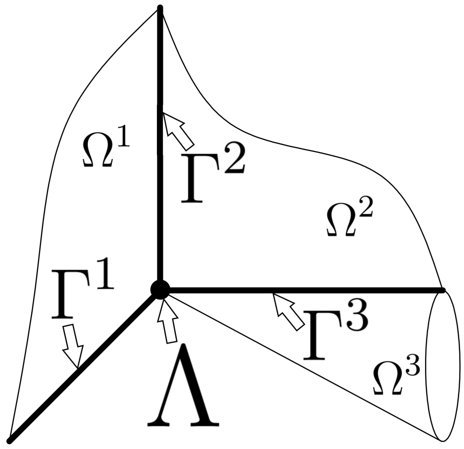

Рис. 3: Сечение стратифицированного множества

лишь тем, что в левой части стоят суммы интегралов по всем $\Omega^{\mathfrak{k}}$, интегралов по всем $\Gamma^{\mathbf{k}}$ и интеграла по Λ. Доказательство теоремы 1 и всех промежуточных утверждений распространяется на общий случай с очевидными изменениями.

Список литературы

[1] D.E. Apushkinskaya, A.I. Nazarov, D.K. Palagachev, L.G. Softova, L^p-theory of Venttsel BVPs with discontinuous data, *Atti della Accad. Peloritana dei Pericolanti, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 98 (2020), Suppl. N2, A1, p. 1-16.

[2] R. Courant, Über die Anwendung der Variationsrechnung in der Theorie der Eigenschwingungen und über neue Klassen von Funktionalgleichungen, *Acta Math.* 49 (1926), p. 1-68.

[3] E. De Giorgi, Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari, *Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat.* 3 (1957), p. 25-43.

[4] S. Nazarov, K. Pileckas, On noncompact free boundary problems for the plane stationary Navier-Stokes equations, *J. Reine Angew. Math.* 438 (1993), p. 103-141.

[5] Ю.А. Алхутов, В.В. Жиков, О гельдеровости решений вырождающихся эллиптических уравнений, *Доклады РАН*, 378 (2001), N5, с. 583-588.

[6] А.Д. Вентцель, О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов, *Теор. вер. и ее примен.* 4 (1959), N2, с. 172-185.

[7] Н.С. Даирбеков, О.М. Пенкин, Л.О. Сарыбекова, Неравенство Пуанкаре и p-связность стратифицированного множества, *Сиб. матем. журнал*, 59 (2018), N6, с. 1291–1302.

[8] О.А. Ладыженская, Н.Н. Уральцева, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М.: Наука. 1973.

[9] А.И. Назаров, А.А. Палецких, О гельдеровости решений эллиптической задачи Вентцеля, *Доклады РАН*, 465 (2015), N5, с. 532-536.

[10] А.И. Назаров, Н.Н. Уральцева, Неравенство Гарнака и связанные с ним свойства решений эллиптических и параболических уравнений с бездивергентными младшими коэффициентами, *Алгебра и анализ*, 23 (2011), N1, с. 136-168.

[11] С.Н. Ощепкова, О.М. Пенкин, Д.В. Савастеев, Сильный принцип максимума для эллиптического оператора на стратифицированном множестве, *Матем. заметки*, 92 (2012), N2, с. 276-290.