Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 14.08.2023 Представлен А.И. Назаровым
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Оценки максимума для решений эллиптического и параболического уравнений на стратифицированном множестве вида "книжка"

Мироненко Ф.Д.*

1 Введение

Идея оценки максимума для решений эллиптических уравнений второго порядка в недивергентной форме с помощью анализа нормального изображения выпуклой оболочки берет начало в работах А.Д. Александрова [4] и И.Я. Бакельмана [9]. Аналогичной технике для параболического случая начало положил Н.В. Крылов [10], [11]. В дальнейшем данный подход развивался и использовался многими авторами. Обзор литературы по этой теме можно найти в [7] и в [5, §2.3].

Настоящая статья посвящена получению локальных оценок типа Александрова–Бакельмана–Крылова на простейшем стратифицированном мно-

*Санкт-Петербургский государственный университет, Университетский пр. 28, 198504, Санкт-Петербург, Россия; Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В.А. Стеклова РАН, Фонтанка 27, 191023, Санкт-Петербург, Россия.
Работа поддержана грантом Российского научного фонда N22-21-00027.

жестве. С общим понятием стратифицированного множества можно ознакомиться в работе [13]. Мы же будем рассматривать стратифицированное множество вида “книжка”, состоящее из нескольких n-мерных “листов”, пересекающихся по $(n-1)$-мерному “переплёту” (см. Рис. 1). Точное определение можно найти в §3.

Заметим, что если количество “листов” равно 1 или 2, то уравнения на таком стратифицированном множестве превращаются в задачу Вентцеля или двухфазную задачу Вентцеля соответственно. Оценки Александрова–Бакельмана–Крылова для задачи Вентцеля были получены в работах [3], [1] (эллиптический случай) и [8] (параболический случай), а для двухфазной задачи Вентцеля — в работе [2]. Однако в случае когда “листов” больше двух, такая “книжка” уже не вкладывается в $\mathbb{R}^n$, что значительно усложняет анализ нормального изображения.

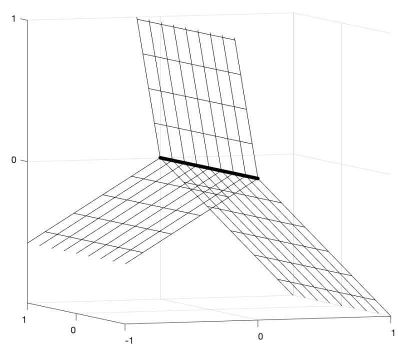


Рис. 1: Стратифицированное множество вида “книжка” с тремя “листами” размерности $n = 2$, вложенное в $\mathbb{R}^3$

Работа состоит из пяти параграфов. В §2 приводятся основные определения и леммы, связанные с понятиями выпуклой оболочки функции, нормального отображения и отображения Лежандра. В §3 даётся формальное определение стратифицированного шара. В §4 вводится понятие нормального отображения и отображения Лежандра для стратифицированного случая и доказываются ключевые геометрические леммы. Наконец, §5 и §6 посвящены оценке максимума для соответственно параболического и эллиптического уравнений на стратифицированном шаре.

Замечание. *Оценка максимума для эллиптического уравнения (Теорема 6.1) была анонсирована в кратком сообщении [6].*

1.1 Используемые обозначения

$(x', x_n) = x \in \mathbb{R}^n$, где $x' \in \mathbb{R}^{n-1}$

$B^n(R)$ — шар радиуса R в $\mathbb{R}^n$ с центром в начале координат.

$S^{n-1}(R)$ — граница $B^n(R)$.

$Q^n(T, R) := (0, T) \times B^n(R)$ — цилиндр над шаром $B^n(R)$.

$V_0 := V \cap \{x_n = 0\}$ — сечение множества $V \subset \mathbb{R}^n$ гиперплоскостью $x_n = 0$. В дальнейшем особую роль будут играть множества $B_0(R) = B^{n-1}(R) \times \{0\}$ и $Q_0(T, R) = (0, T) \times B_0(R)$.

$V_\pm := \big\{x \in V \;\big|\; x_n \gtrless 0\big\}, \quad V_{0,\pm} := V_0 \cup V_\pm$.

$u_+ := \max\{0, u\}$ — положительная часть функции u.

$\Omega_u := \{x \in \Omega \mid u(x) > 0\}$

$\mathcal{U}(u) := \left\{(x, h) \in \mathbb{R}^{n+1} \middle| \; x \in \mathrm{dom}(u),\ h \leqslant u(x)\right\}$ — подграфик функции u.

$\mathrm{conv}(E) \subset \mathbb{R}^m$ — выпуклая оболочка множества $E \subset \mathbb{R}^m$.

$\overline{1:K} := \{1, 2, \ldots, K\}$ — начальный отрезок натурального ряда для числа $K \in \mathbb{N}$.

Элементы последовательностей точек векторного пространства мы будем нумеровать верхними индексами: x^k, а компоненты вектора $x \in \mathbb{R}^n$ — нижними: x_i. Везде далее мы больше будем пользоваться правилом суммирования по повторяющимся индексам. Индексы i и j пробегают значения от 1 до n, а l и m — от 1 до $n-1$. Различные константы будут обозначаться буквой N с индексом или без. Запись $N(...)$ означает, что N зависит только от параметров, указанных в скобках.

2 Выпуклые и выпукло-монотонные оболочки функций

Для доказательства основных теорем нам понадобится несколько вспомогательных фактов, связанных с понятием выпуклой оболочки функции. Рассмотрим выпуклое множество $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Выпуклой оболочкой функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$ называется функция $z := \mathrm{conv}[u]$, поточечно наименьшая из всех функций, выпуклых вверх на Ω и мажорирующих u. Иными словами, график z является "верхней границей" $\mathrm{conv}(\mathcal{U}(u))$. Заметим, что выполнено соотношение: $\mathcal{U}\big(\mathrm{conv}[u]\big) = \mathrm{conv}\big(\mathcal{U}(u)\big)$, то есть подграфик выпуклой оболочки равен выпуклой оболочке подграфика.

Лемма 2.1. *Рассмотрим функции $u_1, u_2 \in \mathcal{C}\big(B_{0,+}(R)\big)$. Тогда:*

$$u_1|_{B_0(R)} \equiv u_2|_{B_0(R)} \Longrightarrow conv[u_1]|_{B_0(R)} \equiv conv[u_2]|_{B_0(R)}.$$

Иными словами, сужение выпуклой оболочки непрерывной функции на $B_0(R)$ зависит лишь от значений функции на $B_0(R)$.

Доказательство
Заметим, что график $\mathrm{conv}[u_i]|_{B_0(R)}$ это то же самое что "верхняя граница" множества $\mathrm{conv}\big(\mathcal{U}(u_i)\big) \cap \{x_n = 0\}$. Тогда достаточно доказать равенство

$$\mathrm{conv}\big(\mathcal{U}(u_1)\big) \cap \{x_n = 0\} = \mathrm{conv}\big(\mathcal{U}(u_2)\big) \cap \{x_n = 0\}.$$

По теореме Каратеодори (см. [14, §17]) каждую точку из $\mathrm{conv}\big(\mathcal{U}(u_i)\big) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ можно представить в виде выпуклой комбинации $m \leqslant n+2$ различных точек (y^s, h^s) из $\mathcal{U}(u_i)$. Рассмотрим такое представление для точки $(x, h) \in \mathrm{conv}\big(\mathcal{U}(u_1)\big) \cap \{x_n = 0\}$, где $x \in \mathbb{R}^n, h \in \mathbb{R}$:

$$(x, h) = a_s(y^s, h^s).$$

Поскольку $a_s > 0,\ y_n^s \geqslant 0,\ x_n = 0$, то для любого $s :\ y_n^s = 0$. Таким образом, $(y^s, h^s) \in \mathcal{U}(u_1) \cap \{x_n = 0\}$. Учитывая что $u_1|_{B_0(R)} \equiv u_2|_{B_0(R)}$, получаем $(y^s, h^s) \in \mathcal{U}(u_2) \cap \{x_n = 0\}$ и следовательно, $(x, h) \in \mathrm{conv}\big(\mathcal{U}(u_2)\big) \cap \{x_n = 0\}$. Обратное включение доказывается аналогично. $\square$

Аналогом выпуклой оболочки для нестационарных задач является выпукло-монотонная оболочка. Для функции $u(t, x) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ выпукло-монотонная оболочка $z(t, x) : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ определяется как функция, поточечно наименьшая из всех функций, выпуклых вверх по x, неубывающих по t и мажорирующих u. В [12] было показано, что в каждый момент времени $t \in [0, T]$ выпукло-монотонная оболочка является выпуклой оболочкой по пространственным переменным от $\max_{\tau\in[0,t]} u(\tau, x)$:

$$z(t, \cdot) = \operatorname*{conv}_{x}\Big[\max_{\tau\in[0,t]} u(\tau, \cdot)\Big].$$

Из данного представления тривиальным образом следует аналог Леммы 2.1 для выпукло-монотонных оболочек:

Лемма 2.2. *Рассмотрим функции $u_1, u_2 \in \mathcal{C}\big(Q_{0,+}(T, R)\big)$. Тогда:*

$$u_1|_{Q_0(T,R)} \equiv u_2|_{Q_0(T,R)} \Longrightarrow conv[u_1]|_{Q_0(T,R)} \equiv conv[u_2]|_{Q_0(T,R)}.$$

Иными словами, сужение выпукло-монотонной оболочки непрерывной функции на $Q_0(T, R)$ зависит лишь от значений функции на $Q_0(T, R)$.

С понятиями выпуклой и выпукло-монотонной оболочек тесно связано понятие множества контакта. Для функции $u : \Omega \to \mathbb{R}$, множество контакта $\mathcal{Z}_u$ определяется как множество точек, в которых u касается выпуклой оболочки $z = \operatorname{conv}[u_+]$:

$$\mathcal{Z}_u = \big\{x \in \Omega \ \big|\ u(x) = z(x)\big\}.$$

Для функции $u : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}$ и выпукло-монотонной оболочки z от положительной части u_+, множество контакта определяется аналогично:

$$\mathcal{Z}_u = \big\{(t, x) \in [0, T] \times \Omega \ \big|\ u_+(t, x) = z(t, x)\big\}.$$

Выясним теперь ещё два важных свойства, касающихся выпуклой оболочки и её множества касания.

Лемма 2.3. *Пусть $u \in \mathcal{C}\big(\overline{B_{0,+}(R)}\big)$, такая что $u|_{\partial B_+(R)\setminus B_0(R)} < 0$ и $M = \max u(x) > 0$. Обозначим $z := \operatorname{conv}[u_+]$. Рассмотрим вектор $p \in \mathbb{R}^n_{0,-}$. Тогда если плоскость π с градиентом p является опорной к подграфику z с точкой касания $x^0 \in B_{0,+}(R)$, то у этой же опорной плоскости можно выбрать другую точку касания x^1, лежащую в множестве контакта $\mathcal{Z}_u$. При этом, если $x^0 \in B_0(R)$, то и x^1 может быть выбрана из $B_0(R)$.*

Доказательство
Пусть $x^0 \in B_{0,+}(R)$, $x^0 \notin \mathcal{Z}_u$. Опорная плоскость имеет вид $\pi(x) = \langle p, x - x^0 \rangle + z(x^0)$. Заметим во-первых, что $z(x^0) > 0$, поскольку x^0 не лежит на сферической границе. Далее, плоскость π касается подграфика $\mathcal{U}(z)$ функции z, и для подграфика справедливы равенства:

$$\mathcal{U}(z) \,=\, \mathcal{U}\big(\mathrm{conv}[u_+]\big) \,=\, \mathrm{conv}\big(\mathcal{U}(u_+)\big).$$

По теореме Каратеодори точка $\big(x^0, z(x^0)\big) \in \mathcal{U}(z) = \mathrm{conv}\big(\mathcal{U}(u_+)\big)$ является выпуклой комбинацией $m \leqslant n+2$ точек $(y^s, h^s) \in \mathcal{U}(u_+)$. Подграфик u_+ лежит ниже опорной плоскости π, поэтому из того, что $\pi(x^0) = z(x^0) = \alpha_s h^s$, следует $h^s = \pi(y^s)$ для любого s. Тогда $\pi(y^s) = u_+(y^s)$, и хотя бы одно из значений $h^s = u_+(y^s)$ положительно, поскольку $z(x^0) > 0$. Соотвествующий y^s является искомой точкой касания. При этом, если $x^0 \in B_0(R)$, то аналогичным образом доказывается, что $y^s_n = 0$. □

Основным инструментом в доказательстве принципа максимума для эллиптического оператора является нормальное отображение $\Phi_z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, определяемое для выпуклой вверх функции $z : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ как многозначное отображение, заданное формулой

$$\Phi_z(x_0) = \Big\{ p \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; \langle p, x - x_0 \rangle + z(x_0) - \text{опорная плоскость к } \mathcal{U}(z) \text{ в точке } x_0 \Big\}.$$

В точках дифференцируемости функции z значение Φ_z определено однозначно и равняется Dz. Однако вообще говоря, образом точки является множество.

Аналогом нормального отображения для функций, определённых на цилиндре, является отображение Лежандра Ψ_z. Для выпукло-монотонной функции $z(t,x)$ в точке (t^0, x^0) отображение Лежандра определяется как множество всевозможных пар $(q,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, таких что плоскость $\pi_{q,p}(x) = q + \langle p, x - \check{x} \rangle$ является опорной к подграфику $z(t^0, \cdot)$ в точке x^0. Здесь $\check{x}$ – произвольная фиксированная точка, называющаяся центром отображения Лежандра.

Лемма 2.4. *Пусть $u \in \mathcal{C}\big(\overline{B_{0,+}(R)}\big)$, такая что $u|_{\partial B_+(R) \setminus B_0(R)} < 0$ и $M = \max u(x) > 0$. Обозначим $z := conv[u_+]$. Тогда $B_{0,-}(M/2R) \subseteq \Phi_z(B_{0,+}(R))$.*

Данная Лемма хорошо известна для случая когда в качестве области выступает шар B^n. Однако доказательство приведено ниже для удобства чтения.

Доказательство
Рассмотрим $p \in B_{0,-}\big(M/2R\big)$ и плоскость $\pi_h(x) = \langle p, x\rangle + h$. Нетрудно видеть, что существует число h^0, при котором плоскость π_{h^0} является опорной к подграфику z в некоторой точке $x^0 \in \overline{B_{0,+}(R)}$. Тогда если $x^0 \notin B_{0,+}(R)$, то есть $x^0 \in \partial B_+(R) \setminus B_0(R)$, то в этой точке $z(x^0) = 0$. Можно переписать: $\pi_{h^0}(x) = \langle p, x - x^0\rangle + z(x^0)$. Обозначив через x^1 точку максимума u на $\overline{B_+(R)}$, мгновенно приходим к противоречию:

$$M = u(x^1) = z(x^1) \ \leqslant\ \langle p, x^1 - x^0\rangle + z(x^0) \ \leqslant\ |p| \cdot |x^1 - x^0| + 0 < \frac{M}{2R} \cdot 2R.$$

□

3 Стратифицированное множество

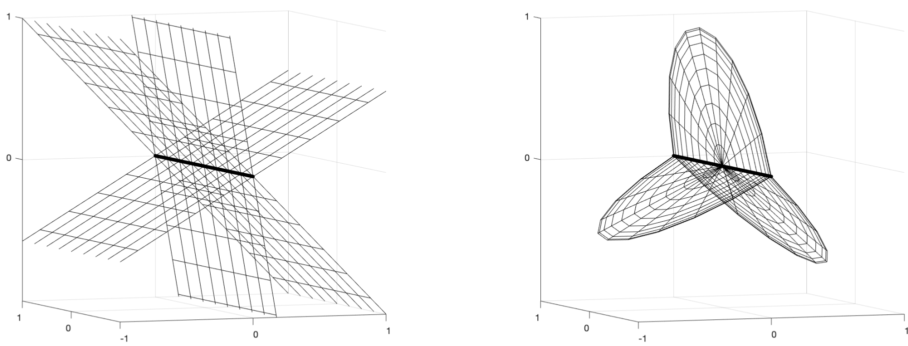
С общим понятием стратифицированного множества можно ознакомиться, например, в статье [13]. В нашей работе рассматривается стратифицированное множество специального вида, а именно, стратифицированное множество типа “книжка”.

Выберем и фиксируем натуральное число K – количество стратов. Рассмотрим K копий n-мерного евклидова пространства, занумеровав их числами $k \in \overline{1:K}$ и получив набор $\mathbb{R}^{n,[k]}$. В каждом из этих пространств выделим n-ю координату $x_n^{[k]}$, а первые $n-1$ для всех пространств положим общими, получив $\bigcap_k \mathbb{R}^{n,[k]} = \mathbb{R}^{n-1} \times \{0\}$. Данная конструкция может быть представлена как набор из K n-мерных гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{n+1}$, пересекающихся по $\mathbb{R}^{n-1} \times \{(0,0)\}$, однако в уравнениях удобнее пользоваться предыдущим определением. Введём обозначения

$$\mathbb{R}^{\circledast} := \bigcup_{k=1}^{K} \mathbb{R}^{n,[k]}; \qquad \mathbb{R}^{\circledast}_{+} := \bigcup_{k=1}^{K} \mathbb{R}^{n,[k]}_{0,+}; \qquad \mathbb{R}^{\circledast}_{-} := \bigcup_{k=1}^{K} \mathbb{R}^{n,[k]}_{0,-}.$$

Множества $\mathbb{R}^{\circledast}_{+}$ и $\mathbb{R}^{\circledast}_{-}$ мы будем называть стратифицированными множествами вида “книжка”, что обусловлено интуитивными аналогиями, вызываемыми случаем $n = 2$ (в этом случае $\mathbb{R}^{\circledast}$ можно увидеть на Рис. (2a), а $\mathbb{R}^{\circledast}_{+}$ — на Рис. (1)). Стратифицированным шаром будем называть шар в $\mathbb{R}^{\circledast}_{+}$ (Рис. (2b))

$$\mathbb{B}_{+}(R) := \left\{ x \in \mathbb{R}^{\circledast}_{+} \,\middle|\, |x| < R \right\} = \bigcup_{k=1}^{K} B^{[k]}_{0,+}(R).$$



(a) Стратифицированное пространство $\mathbb{R}^{\circledast}$ при $n = 2$ и $K = 3$

(b) Стратифицированный шар $\mathbb{B}_{+}(R)$ при $n = 2$ и $K = 3$

Рис. 2

Центрально симметричный к нему шар из $\mathbb{R}^{\circledast}_{-}$ будем обозначать $\mathbb{B}_{-}(R)$. Границу шара $\mathbb{B}_{+}(R)$ в $\mathbb{R}^{\circledast}_{+}$ можно явно записать как $\partial\mathbb{B}_{+}(R) = \bigcup \partial B^{[k]}_{0,+}(R) \setminus B_0(R)$.

Над стратифицированным шаром определим стратифицированный цилиндр

$$\mathbb{Q}_{+}(T, R) = (0, T) \times \mathbb{B}_{+}(R) \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\circledast}_{+}, \quad T > 0.$$

Обозначим через $\partial''\mathbb{Q}_{+}(T, R) = (0, T) \times \partial\mathbb{B}_{+}(R)$ его боковую границу, а через $\partial'\mathbb{Q}_{+}(T, R) = \partial''\mathbb{Q}_{+}(T, R) \cup \big(\{0\} \times \overline{\mathbb{B}_{+}(R)}\big)$ — параболическую.

В дальнейшем все векторы, принадлежащие пространству $\mathbb{R}^{n,[k]}$, будут обозначаться верхним индексом: $x^{[k]}$, и аналогичная запись будет использоваться для их n-х компонент. Точки пространства $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n,[k]}$ мы будем записывать как $(t, x^{[k]})$. Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ мы будем обозначать через $x^{[k]}$ его естественное вложение в $\mathbb{R}^{n,[k]}$. Также для множества

$V \subset \mathbb{R}^{\circledast}$ введём его проекцию на $\mathbb{R}^n$:

$$\overline{\mathrm{pr}}(V) = \bigcup_{k=1}^{K} \left\{ x \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x^{[k]} \in V \right\}.$$

Определим непрерывную функцию $u : \mathbb{B}_+(R) \to \mathbb{R}$ отдельно на каждом из полушаров

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x = \left(x', x_n^{[1]}\right) \\ u_2(x), & x = \left(x', x_n^{[2]}\right) \\ \ldots & \\ u_K(x), & x = \left(x', x_n^{[K]}\right) \end{cases}$$

и потребуем от функций u_k согласованности на "переплёте": $u_i|_{B_0(R)} \equiv u_j|_{B_0(R)}$. Таким же образом определяются и функции на цилиндре, для которых требование согласованности принимает вид $u_i|_{Q_0(T,R)} \equiv u_j|_{Q_0(T,R)}$. Пользуясь Леммой 2.1, введём аналог выпуклой оболочки функции u

$$\mathrm{conv}[u](x) := \begin{cases} \mathrm{conv}[u_1](x), & x = \left(x', x_n^{[1]}\right) \\ \mathrm{conv}[u_2](x), & x = \left(x', x_n^{[2]}\right) \\ \ldots & \\ \mathrm{conv}[u_K](x), & x = \left(x', x_n^{[K]}\right) \end{cases}.$$

Для функций над стратифицированным цилиндром вместо выпуклой оболочки мы будем пользоваться понятием выпукло-монотонной оболочки. Она, как и выпуклая оболочка, определяется покомпонентно и на k-том страте равняется выпукло-монотонной оболочке от k-ой компоненты u_k. Как и ранее, данное определение корректно в силу Леммы 2.2.

4 Нормальное отображение и отображение Лежандра на стратифицированном множестве

В этом параграфе мы будем предполагать выполнение одного из двух условий:

$$u \in \mathcal{C}^2(B_{0,+}^{[k]}(R)),\ u|_{\partial B_{0,+}^{[k]}(R) \setminus B_0(R)} < 0,$$

$$u \in \mathcal{C}^{1,2}_{t,x}(Q^{[k]}_{0,+}(T,R)),\ \ u\big|_{\partial' Q^{[k]}_{0,+}(T,R)\setminus Q_0(T,R)} < 0. \tag{1}$$

В работе [12] было показано, что тогда выпуклая и выпукло-монотонная оболочки принадлежат классам $W^2_\infty(B^{[k]}_{0,+}(R))$ и $W^{1,2}_\infty(Q^{[k]}_{0,+}(T,R))$ соответственно.

Определим нормальное отображение в случае стратифицированного шара и покомпонентно выпуклой функции $z : \mathbb{B}_+(R) \to \mathbb{R}$. Во внутренних точках полушаров $x^{[k]} \in B^{[k]}_+(R)$ нормальный образ $\Phi_z(x^{[k]})$ совпадает с нормальным образом соответствующей компоненты z_k, вложенным в k-й страт $\mathbb{R}^{n,[k]}$. То есть

$$\Phi_z(x^{[k]}) = \big(\Phi_{z_k}(x)\big)^{[k]}, \quad x^{[k]} \in B^{[k]}_+(R). \tag{2}$$

По-другому дело обстоит на $B_0(R)$ — общей границе полушаров. Точки $x \in B_0(R)$ принадлежат каждому из $B^{[k]}_{0,+}(R)$, и поэтому нормальный образ может иметь нетривиальное пересечение с каждым из стратов. Более того, значения функций-компонент z_k согласуются лишь на $B_0(R)$, поэтому часть нормального образа в $\mathbb{R}^{n,[k]}$ не зависит от z_l при $l \neq k$. Таким образом,

$$\Phi_z(x',0) = \bigcup_{k=1}^{K} \big(\Phi_{z_k}(x',0)\big)^{[k]}, \quad (x',0) \in B_0(R). \tag{3}$$

Перейдём теперь к нестационарному случаю и определим стратифицированный аналог отображения Лежандра. Фиксируем центральную точку $\check{x} = (\check{x}',0) \in B_0(R)$. Для внутренних точек полуцилиндров $\big(t, x^{[k]}\big) \in Q^{[k]}_+(T,R)$ по аналогии с (2) определим:

$$\Psi_z\big(t, x^{[k]}\big) := \big(\Psi_{z_k}(t,x)\big)^{[k]}, \quad x^{[k]} \in Q^{[k]}_+(T,R).$$

Для точек с плоской границы $(t,x',0) \in Q_0(T,R)$ определим отображение Лежандра, как и в (3), в виде объединения по компонентам:

$$\Psi_z(t,x',0) = \bigcup_{k=1}^{K} \big(\Psi_{z_k}(t,x',0)\big)^{[k]}, \quad (t,x',0) \in Q_0(T,R).$$

4.1 Вспомогательное множество $\mathcal{D}$ для эллиптического случая

Рассмотрим функцию $u : \overline{\mathbb{B}_+(R)} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям: $u|_{\partial\mathbb{B}_+(R)} < 0$ и $M := \max\, u > 0$. Построим покомпонентный максимум $\widehat{u} : \overline{B_{0,+}(R)} \to \mathbb{R}$

$$\widehat{u}(x) \;:=\; \max_k u_k(x), \tag{4}$$

положим $\widehat{z} := \mathrm{conv}[\widehat{u}_+]$ и введём соответствующее множество контакта $\mathcal{Z}_{\widehat{u}} \subset B_{0,+}(R)$. Поскольку $\max \widehat{u}_+(x) \;=\; \max u_+(x) \;=\; M$ и $\widehat{u}|_{\partial B_+(R)\setminus B_0(R)} < 0$, то по Лемме 2.4, $B_{0,-}\big(M/2R\big) \subseteq \Phi_{\widehat{z}}\big(B_{0,+}(R)\big)$. Таким образом, для любого вектора $p \in B_{0,-}\big(M/2R\big)$ существует точка касания $x \in B_{0,+}(R)$ — плоскости с градиентом p и подграфика выпуклой оболочки $\widehat{z}$, и по Лемме 2.3 не умаляя общности можно считать, что $x \in \mathcal{Z}_{\widehat{u}}$. В точке x плоскость π_p касается тех компонент u_k, которые доставляют максимум в (4). Обозначим через $\mathcal{P}_k$ множество тех p из $B_{0,-}(M/2R)$, опорные плоскости которых касаются графика u_k. Множества $\mathcal{P}_k$ измеримы, и их объединением является весь полушар $B_{0,-}(M/2R)$. Далее, рассмотрим дизъюнктный набор

$$\mathcal{D}_k \;:=\; \mathcal{P}_k \setminus \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{P}_j.$$

Каждый вектор p из $B_{0,-}(M/2R)$ принадлежит ровно одному $\mathcal{D}_k$. Номер этого множества для заданного p будем обозначать $k(p)$. При этом нетрудно видеть, что $\mathcal{D}_k$ состоит из тех и только тех $p \in B_{0,-}(M/2R)$, для которых минимальный индекс k, при котором π_p касается u_k, равняется $k(p)$. Наконец, искомое множество определяется как

$$\mathcal{D} \;:=\; \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{D}_k^{[k]} \;\subseteq\; \mathbb{B}_-(M/2R).$$

4.2 Вспомогательное множество $\mathcal{K}$ для параболического случая

Аналогом шара $\mathbb{B}_-(M/2R)$ в параболическом случае является стратифицированный конус $\mathbb{K}_-(M,R)$, определяемый следующим образом:

$$\mathbb{K}_-(M,R) = \Big\{ \big(q, p^{[k]}\big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\circledast}_- \;\Big|\; 2R\big|p^{[k]}\big| < q < M \Big\}.$$

Его проекция на $\mathbb{R}^{n+1}$ равняется:

$$K_- = \Big\{ (q,p) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \;\Big|\; 2R|p| < q < M,\ p_n \leqslant 0 \Big\}.$$

Рассмотрим функцию $u : \overline{\mathbb{Q}_+(T,R)} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условиям $u|_{\partial'\mathbb{Q}_+(T,R)} < 0$ и $M := \max u > 0$. Обозначим через $(t^*; x^*) \in \mathbb{Q}_+(T,R)$ точку максимума функции u и выберем $\overline{x^*} = (x^{*\prime}, 0) \in B_0(R)$ в качестве центральной точки отображения Лежандра. Как и в эллиптическом случае, построим покомпонентный максимум $\widehat{u} : \overline{Q_{0,+}(T,R)} \to \mathbb{R}$

$$\widehat{u}(t,x) = \max_k u_k(t,x)$$

и его выпукло-монотонную оболочку $\widehat{z}$. Для $(q,p) \in K_-$ рассмотрим плоскость $\pi_{q,p}(x) = q + \langle p, x - \overline{x^*} \rangle$. В момент времени t^* в точке x^* данная плоскость лежит под графиком функции $\widehat{z}$. Действительно, поскольку $p_n \leqslant 0$ и $x^*_n \geqslant 0$, то $\pi_{q,p}(x^*) \leqslant q < M = \widehat{z}(t^*, x^*)$. При этом, в момент $t = 0$ данная плоскость строго больше $\widehat{z}$ в лобой точке $x \in \overline{B_{0,+}(R)}$, поскольку:

$$\pi_{q,p}(x) \;=\; q + \langle p, x - \overline{x^*} \rangle \;\geqslant\; q - |p| \cdot |x - \overline{x^*}| \;\geqslant\; q - |p| \cdot 2R \;>\; 0 \;=\; \widehat{z}(0,x).$$

Отсюда следует, что существует момент $\tau \in (0, t^*)$, в который $\pi_{q,p}$ касается графика $\widehat{z}(\tau, \cdot)$. Обозначим через t^0 минимальный из всех таких τ. На множестве $[0, t^0] \times \overline{B_{0,+}(R)}$ подграфик $\widehat{z}$ целиком лежит под плоскостью $\pi_{q,p}(t,x) = \pi_{q,p}(x)$, и касается её в момент $t = t^0$. Тогда, аналогично Лемме 2.3, точка касания (t^0, x^0) может быть выбрана из множества $\mathcal{Z}_{\widehat{u}}$, и $(q,p) \in \Psi_{\widehat{z}}(t^0, x^0)$. Таким образом, $K_- \subset \Psi_{\widehat{z}}\big(\mathcal{Z}_{\widehat{u}}\big)$. Более того, в точке x^0 выполняются равенство $\pi_{q,p}(x^0) = \widehat{z}(t^0, x^0) = \widehat{u}(t^0, x^0)$, и плоскость $\pi_{q,p}$ касается хотя бы одной из компонент u_k.

Обозначим через $\mathcal{P}_k$ множество тех $(q,p) \in K_-$, для которых соответствующие опорные плоскости касаются графика u_k, и рассмотрим дизъюнктный набор:

$$\mathcal{K}_k = \mathcal{P}_k \;\setminus\; \bigcup_{j=1}^{k-1} \mathcal{P}_j,$$

в объединении дающий K_-. По аналогии с определением множества $\mathcal{D}$, введём множество $\mathcal{K}$:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{k=1}^{K} \mathcal{K}_k^{[k]} \;\subseteq\; \mathbb{K}_-(M,R). \tag{5}$$

4.3 Основное свойство множеств $\mathcal{D}$ и $\mathcal{K}$

В точке $x = (x', 0) \in B_0(R)$ определим нормальную производную в направлении страта с номером k как односторонний предел:

$$D_n^{[k]} z(x', 0) = \lim_{x_n^{[k]} \to 0+} D_n z(x', x_n^{[k]}).$$

В нестационарном случае нормальная производная в направлении k-го страта в точке $(t, x) = (t, x', 0) \in Q_0(T, R)$ определяется аналогично:

$$D_n^{[k]} z(t, x', 0) = \lim_{x_n^{[k]} \to 0+} D_n z(t, x', x_n^{[k]}).$$

Гладкости функции u достаточно для корректности данного определения в обоих случаях.

Лемма 4.1 (Основное свойство множества $\mathcal{D}$). *Для множества $\mathcal{D}$ выполняется включение:*

$$\mathcal{D} \ \setminus \ \Phi_z\big(\mathbb{B}_+(R) \setminus B_0(R)\big) \ \subseteq \ \Phi_z\big(\widetilde{\mathcal{Z}}\big),$$

где $\widetilde{\mathcal{Z}}$ — множество "правильного поведения" функции z, определяемое как

$$\widetilde{\mathcal{Z}} = \Big\{ x \in \mathcal{Z}_u \cap B_0(R) \ \Big| \ \forall k : \ D_n^{[k]} z(x', 0) \leqslant 0 \Big\}.$$

Лемма 4.2 (Основное свойство множества $\mathcal{K}$). *Для множества $\mathcal{K}$ выполняется включение:*

$$\mathcal{K} \ \setminus \ \Psi_z\big(\mathbb{Q}_+(T, R) \setminus Q_0(T, R)\big) \ \subseteq \ \Psi_z\big(\widetilde{\mathcal{Z}}\big),$$

где $\widetilde{\mathcal{Z}}$ — множество "правильного поведения" функции z, определяемое как

$$\widetilde{\mathcal{Z}} = \Big\{ (t, x) \in \mathcal{Z}_u \cap Q_0(T, R) \ \Big| \ \forall k : \ D_n^{[k]} z(t, x', 0) \leqslant 0 \Big\}.$$

Ниже приведено доказательство данного факта для параболического случая. Доказательство Леммы 4.1 проще, чем у Леммы 4.2, и легко восстанавливается из приведённого доказательства.

Доказательство Леммы 4.2

Из того что $K_- \subseteq \Psi_{\widehat{z}}(\mathcal{Z}_{\widehat{u}})$ и определения (5) следует $\mathcal{K} \subseteq \Psi_z\big(\mathbb{Q}_+(T, R)\big)$.

Рассмотрим $(q, p^{[k]}) \in \mathcal{K} \setminus \Psi_z\bigl(\mathbb{Q}_+(T,R) \setminus Q_0(T,R)\bigr)$. По определению множества $\mathcal{K}$, $(q, p^{[k]}) \in \mathcal{K}$ означает $(q, p^{[k]}) \in \mathcal{K}_k^{[k]}$, то есть $(q,p) \in \mathcal{K}_k$, и найдётся точка $(t,x) \in \mathcal{Z}_{\widehat{z}}$, в которой $\widehat{u}(t,x) = u_k(t,x)$. Тогда соответствующая ей $(t, x^{[k]}) \in \mathbb{Q}_+(T,R)$ является точкой касания для $\pi_{q,p^{[k]}}$ и выпуклой оболочки u_+. Поскольку $(q, p^{[k]}) \notin \Psi_z\bigl(\mathbb{Q}_+(T,R) \setminus Q_0(T,R)\bigr)$, то $(t, x^{[k]}) \in Q_0(T,R)$, то есть $(t, x^{[k]}) = (t, x', 0)$ и $(q,p) \in \Psi_{\widehat{z}}\bigl(Q_0(T,R)\bigr)$.

В точке $(t,x) \in Q_0(T,R)$, в силу согласованности компонент u_i на страте $Q_0(T,R)$, имеем: $u_1(t,x) = \dots = u_K(t,x) = \widehat{u}(t,x) = \widehat{z}(t,x)$. Последнее верно, поскольку $(t,x) \in \mathcal{Z}_{\widehat{u}}$. Функция $\widehat{u}$ по определению мажорирует каждую из компонент u_k, поэтому её выпукло-монотонная оболочка $\widehat{z}$ мажорирует каждую из функций $z_k = \operatorname{conv}\bigl[(u_k)_+\bigr]$. Кроме того, опорная плоскость $\pi_{q,p}$ мажорирует выпуклую оболочку $\widehat{z}$. Исходя из этого, для любого k в точке $(t,x) = (t,x',0)$, рассматриваемой как точка на $\mathbb{Q}_+(T,R)$, выполняются неравенства

$$\begin{aligned} D_n^{[k]} z(t,x',0) \;&=\; \lim_{x_n^{[k]} \to 0+} D_n^{[k]} z\bigl(t, x', x_n^{[k]}\bigr) \;=\; \lim_{x_n \to 0+} D_n z_k(t,x',x_n) \;\leqslant \\ &\leqslant\; \lim_{x_n \to 0+} D_n \widehat{z}(t,x',x_n) \;\leqslant\; p_n \;\leqslant\; 0. \end{aligned}$$

Тем самым, $(t,x) \in \widetilde{\mathcal{Z}}$, и $(q, p^{[k]}) \in \Psi_z(t,x) \subseteq \Psi_z\bigl(\widetilde{\mathcal{Z}}\bigr)$. $\square$

5 Параболическое уравнение на стратифицированном шаре

Пусть на каждом $Q_+^{[k]}(T,R)$ задан параболический оператор:

$$\mathcal{M}^{[k]} u \;=\; \partial_t u - a_{ij}^{[k]} D_i D_j u + b_i^{[k]} D_i u,$$

$$a_{ij}^{[k]} \in L_\infty\bigl(Q_+^{[k]}(T,R)\bigr),\; b_i^{[k]} \in L_{n+1}\bigl(Q_+^{[k]}(T,R)\bigr),\; (a_{ij}^{[k]})_{i,j=1}^n \geqslant \nu I_n, \qquad (6)$$

а на страте $Q_0(T,R)$ — оператор

$$\mathcal{N} u \;=\; \partial_t u - \alpha_{l,m} D_l D_m u + \beta_l D_l u + \mathcal{J} u,$$

$$\alpha_{lm} \in L_\infty\bigl(Q_0(T,R)\bigr),\; \beta_l \in L_n\bigl(Q_0(T,R)\bigr),\; (\alpha_{lm})_{l,m=1}^{n-1} \geqslant \nu I_{n-1}, \qquad (7)$$

где $\mathcal{J}$ — оператор сопряжения, определяемый для измеримых $\beta_n^{[k]}$:

$$\mathcal{J}u \;=\; \sum_{k=1}^{K} \beta_n^{[k]}(t,x') \lim_{x_n^{[k]}\to 0+} D_n u(t,x',x_n^{[k]}).$$

Теорема 5.1. *Пусть $n \geqslant 2$, и на цилиндрах $Q_+^{[k]}(T,R)$ заданы операторы $\mathcal{M}^{[k]}$ вида (6), а на $Q_0(T,R)$ — оператор $\mathcal{N}$ вида (7), удовлетворяющий соотношениям $\beta_n^{[k]} \leqslant 0$, для $k = \overline{1:K}$. Рассмотрим функцию $u \in \mathcal{C}\big(\overline{\mathbb{Q}_+(T,R)}\big)$, такую что*

$$u \in W^{1,2}_{n+1}\big(Q_+^{[k]}(T,R)\big),\ k \in \overline{1:K};\quad u \in W^{1,2}_{n}\big(Q_0(T,R)\big);\quad u|_{\partial'\mathbb{Q}_+(T,R)} \leqslant 0.$$

Тогда справедлива оценка:

$$\max_{\mathbb{Q}_+(T,R)} u_+ \;\leqslant\; N_1 \cdot \sum_{k=1}^{K} \left\| \frac{\big(\mathcal{M}^{[k]}u\big)_+}{\nu^{n/(n+1)}} \right\|_{n+1,\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)_u} + N_2 \cdot \left\| \frac{\big(\mathcal{N}u\big)_+}{\nu^{(n-1)/n}} \right\|_{n,\left(Q_0(T,R)\right)_u},$$

где

$$N_1 \;=\; N_0(n)\cdot\left(R^{\frac{n}{n+1}} + \sum_{k=1}^{K} \left\| \frac{|b^{[k]}|}{\nu^{n/(n+1)}} \right\|^{n}_{n+1,\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)_u} + \left\| \frac{|\beta'|}{\nu^{(n-1)/n}} \right\|^{\frac{n^2}{n+1}}_{n,\left(Q_0(T,R)\right)_u} \right),$$

$$N_2 \;=\; N_0(n)\cdot\left(R^{\frac{n-1}{n}} + \sum_{k=1}^{K} \left\| \frac{|b^{[k]}|}{\nu^{n/(n+1)}} \right\|^{\frac{n^2-1}{n}}_{n+1,\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)_u} + \left\| \frac{|\beta'|}{\nu^{(n-1)/n}} \right\|^{n-1}_{n,\left(Q_0(T,R)\right)_u} \right).$$

Доказательство

Будем считать, что u удовлетворяет условию (1). Общий случай получается из этого стандартной аппроксимацией (см., например, [12, §4]).

Рассмотрим точку максимума функции u_+: $(t^*,x^*) \in \overline{\mathbb{Q}_+(T,R)}$. Обозначим $M = u_+(t^*,x^*) = z(t^*,x^*)$, и не умаляя общности будем считать $M > 0$. Выберем в качестве центральной точки отображения Лежандра проекцию $\overline{x^*} = (x^{*\prime},0)$. В точках дифференцируемости z по пространственным переменным, то есть при $(t,x^{[k]}) \in \mathbb{Q}_+(T,R) \setminus Q_0(T,R)$, отображение Лежандра является однозначным и явно выражается через градиент z:

$$\Psi_z(t,x^{[k]}) = \big(z_k - \langle Dz_k, x - \overline{x^*}\rangle,\ D'z_k,\ (D_n z_k)^{[k]}\big).$$

По Лемме 4.2, для любой суммируемой неотрицательной функции $\psi(q,p)$ выполнено

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \psi \, dp \, dq \;\leqslant\; \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\Psi_z\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)} \psi \, dp \, dq \;+\; \int\limits_{\mathcal{K}\cap\Psi_z\left(\widetilde{\mathcal{Z}}\right)} \psi \, dp \, dq. \qquad (8)$$

Возьмём в качестве ψ функцию

$$\psi(q,p) \;=\; \psi\big(|p|\big) \;=\; \Big(\big(|p|\lambda\big)^2 + \Lambda^2\Big)^{-\frac{n+1}{2}},$$

а точные значения чисел $\lambda > 0$ и $\Lambda > 0$ определим позднее. Первым делом оценим снизу левую часть в неравенстве (8). Поскольку множество $\mathcal{K}$ однозначно проецируется на полуконус K_- и функция ψ не зависит от выбора страта, переходя к полярным координатам, выводим

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \psi \, dp \, dq \;=\; \frac{1}{2} \int\limits_{2R|p|<q<M} \psi\big(|p|\big) \, dp \, dq \;=\; \frac{|S_{n-1}|}{2} \int\limits_{0}^{M/(2R)} (M-2R\rho)\rho^{n-1}\psi(\rho) \, d\rho \;=$$

$$=\; \frac{|S_{n-1}|}{2} \cdot \frac{M}{\lambda^n \Lambda} \int\limits_{0}^{M\lambda/(2R\Lambda)} \Big(1 - \frac{2R\Lambda}{M\lambda} y\Big) \frac{y^{n-1}}{(y^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \, dy.$$

Ограничим числа λ, Λ неравенством $M\lambda/(2R\Lambda) > 1$. Случай выполнения обратного неравенства тривиален, и мы вернёмся к нему позже. Тогда интеграл можно оценить снизу, заменив верхний предел на 1, и воспользоваться тем, что для любого $0 \leqslant y \leqslant 1$ выполнено $1 - y \cdot 2R\Lambda/(M\lambda) \geqslant 1 - y$.

$$\int\limits_{\mathcal{K}} \psi \, dp \, dq \;\geqslant\; \frac{|S_{n-1}|}{2} \cdot \frac{M}{\lambda^n \Lambda} \cdot \int\limits_{0}^{1} \frac{(1-y)y^{n-1}}{(y^2+1)^{\frac{n+1}{2}}} \, dy \;=\; N_3(n) \frac{M}{\lambda^n \Lambda}. \qquad (9)$$

Оценим теперь правую часть неравенства (8) сверху. Для этого нам понадобятся две вспомогательные Леммы.

Лемма 5.1. *Для любой измеримой неотрицательной функции $\psi : \mathbb{R}^{\circledast} \to \mathbb{R}$ и для любого $k \in \overline{1:K}$ справедливо неравенство:*

$$\int\limits_{\Psi_z\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)} \psi(p) \, dp \, dq \;\leqslant\; \frac{1}{\nu^n (n+1)^{n+1}} \int\limits_{\mathcal{Z}\cap Q_+^{[k]}(T,R)} \psi(Du)\big(\mathcal{M}^{[k]}u - b_i^{[k]} D_i u\big)^{n+1} \, dx \, dt.$$

Данная Лемма является переформулировкой неравенств, полученных в ходе доказательства Теоремы I из [12, §4], поэтому её доказательство мы не не приводим.

Лемма 5.2. *Для любой измеримой неотрицательной функции* $\psi : \mathbb{R}^{\circledast} \to \mathbb{R}$ *инвариантной относительно выбора страта,* $\psi(x^{[k_1]}) = \psi(x^{[k_2]})$, *справедливо неравенство:*

$$\int\limits_{\mathcal{K}\cap\Psi_z(\widetilde{\mathcal{Z}})} \psi(p)\, dp\, dq \ \leqslant$$

$$\leqslant \ \frac{1}{\nu^{n-1}n^n} \int\limits_{\widetilde{\mathcal{Z}}} \Big(\mathcal{N}u(t,x',0) - \beta_l(t,x')D_l u(t,x',0)\Big)^n \times$$

$$\times \int\limits_{-M/(2R)}^{0} \psi\Big(D'u(t,x',0), p_n\Big) dp_n\, dx' dt. \quad (10)$$

Данная Лемма является аналогом оценок, полученных в доказательстве Теоремы 1.1 из [2], однако её доказательство нуждается в модификации.

Доказательство Леммы 5.2

Выясним сперва более точный вид множества $\Psi_z(\widetilde{\mathcal{Z}})$. Для $(t,x) = (t,x',0) \in \widetilde{\mathcal{Z}}$ при любом k выполнено

$$(q,p',p_n^0) \ := \ \Big(z\big(t^*,\overline{x^*}\big) - \big\langle D^{[k]}z(t,x), x - \overline{x^*}\big\rangle,\ D'z(t,x),\ D_n^{[k]}z(t,x)\Big) \in \Psi_z(t,x).$$

Введём соответствующую опорную плоскость: $\pi_0(x) = q + \big\langle p', x' - x^{*\prime}\big\rangle + p_n^0 x_n$. Ясно, что сужение π_0 на $B_0(R)$ не зависит от значения p_n, что позволяет "наклонять" исходную опорную плоскость по направлению p_n, не меняя при этом параметр q. Более того, в силу гладкости функции z в точке $(t,x',0)$ по переменным x', невозможно изменить компоненту p' градиента опорной плоскости в точке (t,x). Нетрудно видеть что $(q,p',p_n) \in \Psi_z(t,x)$ при $p_n \geqslant p_n^0 = D^{[k]}z(t,x)$ и $(q,p',p_n) \notin \Psi_z(t,x)$ при $p_n < p_n^0$, и для $(t,x) \in \widetilde{\mathcal{Z}}$. Итак, отображение Лежандра в точке $(t,x',0) \in \widetilde{\mathcal{Z}}$ представляется в виде:

$$\Psi_z(t,x',0) = \bigcup_{k=1}^{K} \Big(\big\{z - \big\langle D'z, x' - x^{*\prime}\big\rangle\big\} \times \{D'z\} \times \big[D_n z_k, +\infty\big)\Big)^{[k]}.$$

Поскольку область интегрирования из левой части неравенства (10) содержится в $\mathcal{K}$, на ней выполняются ограничения $-M/2R < p_n^{[k]} \leqslant 0$. Обозначим

$$\mathcal{I}^{[k]}(x) := \Big\{ p_n^{[k]} \in (-M/2R, 0] \;\Big|\; p_n^{[k]} \geqslant D_n^{[k]} z(x), \;\; \big(D'z\big(x\big), \; p_n^{[k]}\big) \in \mathcal{K} \Big\} \; \subset \; \mathbb{R}.$$

Напомним, что для выпукло-монотонной оболочки z на всём $Q_0(T,R)$ выполняются соотношения:

$$\partial_t z \geqslant 0, \; -{D'}^2 z \geqslant 0,$$

где последнее понимается в смысле квадратичных форм. При этом, на множестве контакта $\mathcal{Z}_u \cap Q_0(T,R)$ дополнительно выполнено:

$$\partial_t z = \partial_t u, \; D'z = D'u, \; -{D'}^2 z \leqslant -{D'}^2 u.$$

Якобиан отображения Лежандра по переменным (t, x') существует почти везде на $\mathcal{Z}_u \cap Q_0(T,R)$ и может быть посчитан как:

$$\det(\nabla' \Psi_z) = \partial_t z \cdot \det({D'}^2 z).$$

Замена $\big(q, p', p_n^{[k]}\big) = \big(\nabla' \Psi_z(t, x', 0), p_n^{[k]}\big)$ на каждом из полуцилиндров даёт:

$$\int\limits_{\mathcal{K} \cap \Psi_z(\widetilde{\mathcal{Z}})} \psi(p) \; dp \; dq \;\; \leqslant \;\; \int\limits_{\widetilde{\mathcal{Z}}} dt \; dx' \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\mathcal{I}^{[k]}(x)} \psi\Big(t, D'z\big(t, x', 0\big), \; p_n^{[k]}\Big) \times$$
$$\times \, \partial_t z(t, x', 0) \det\Big(-{D'}^2 z(t, x', 0)\Big) dp_n^{[k]} \;\; \leqslant$$

$$\leqslant \;\; \int\limits_{\widetilde{\mathcal{Z}}} dt \; dx' \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\mathcal{I}^{[k]}(x)} \psi\Big(t, D'u\big(t, x', 0\big), \; p_n^{[k]}\Big) \times$$
$$\times \, \partial_t u(t, x', 0) \det\Big(-{D'}^2 u(t, x', 0)\Big) dp_n^{[k]} \;\; \leqslant$$

$$\leqslant \;\; \int\limits_{\widetilde{\mathcal{Z}}} dt \; dx' \int\limits_{-M/2R}^{0} \psi\Big(D'z\big(t, x', 0\big), \; p_n\Big) \cdot \partial_t u(t, x', 0) \det\Big(-{D'}^2 u(t, x', 0)\Big) dp_n.$$

Последнее неравенство верно поскольку по определению множества $\mathcal{K}$, множества $\mathcal{I}^{[k]}(x)$ дизъюнктны. Обозначим

$$\mathbb{M}_0 \;=\; \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -D'^2 u & 0 \\ 0 & \partial_t u \end{pmatrix},$$

где $\alpha(x) := (\alpha_{l,m})_{l,m=1}^{n-1}$ — матрица старших коэффициентов оператора $\mathcal{N}$.

$$\partial_t u \cdot \det\bigl(-D'^2 u\bigr) \;=\; \frac{\det(\mathbb{M}_0)}{\det(\alpha)} \;\leqslant\; \left(\frac{\mathbf{tr}(\mathbb{M}_0)}{n}\right)^n \cdot \frac{1}{\det(\alpha)} \;\leqslant$$

$$\leqslant\; \frac{\Bigl(\mathcal{N}u - \beta_l D_l u - \mathcal{J}u\Bigr)^n}{n^n \nu^{n-1}} \;\leqslant\; \frac{\Bigl(\mathcal{N}u - \beta_l D_l u\Bigr)^n}{\nu^{n-1} n^n},$$

где последнее неравенство верно, поскольку на $\widetilde{\mathcal{Z}}$ выполнено $\mathcal{J}u \geqslant 0$. Тем самым доказательство Леммы завершается. $\square$

Уточним полученную оценку для конкретного выбора функции ψ.

$$\int\limits_{-M/(2R)}^{0} \psi(p', p_n)\, dp_n \;\leqslant\; \frac{1}{\lambda^{n+1}} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dp_n}{\Bigl(|p'|^2 + |p_n|^2 + \bigl(\frac{\Lambda}{\lambda}\bigr)^2\Bigr)^{\frac{n+1}{2}}} \;=$$

$$=\; \frac{1}{\lambda^{n+1}\Bigl(|p'|^2 + \bigl(\frac{\Lambda}{\lambda}\bigr)^2\Bigr)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{d\rho}{(1+\rho^2)^{\frac{n+1}{2}}} \;=\; \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{N_4(n)}{\Bigl(\bigl(|p'|\lambda\bigr)^2 + \Lambda^2\Bigr)^{\frac{n}{2}}}.$$

Итак, правая часть в неравенстве (8) оценивается:

$$\sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\Psi_z\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)} \psi\; dp\, dq \;+\; \int\limits_{\mathcal{K}\cap\Psi_z\left(\widetilde{\mathcal{Z}}\right)} \psi\; dp\, dq \;\leqslant$$

$$\leqslant\; \frac{1}{\nu^n (n+1)^{n+1}} \sum_{k=1}^{K} \int\limits_{\mathcal{Z}\cap Q_+^{[k]}(T,R)} \frac{\Bigl(\mathcal{M}^{[k]}u - b_i^{[k]} D_i u\Bigr)_+^{n+1}}{\Bigl(\bigl(|Du|\lambda\bigr)^2 + \Lambda^2\Bigr)^{(n+1)/2}}\, dxdt \;+$$

$$+\; \frac{1}{\lambda} \frac{N_4(n)}{\nu^{n-1} n^n} \int\limits_{\widetilde{\mathcal{Z}}} \frac{\Bigl(\mathcal{N}u - \beta_l D_l u\Bigr)_+^{n}}{\Bigl(\bigl(|D'u|\lambda\bigr)^2 + \Lambda^2\Bigr)^{n/2}}\, dx'dt.$$

Для подынтегрального выражения в последнем интеграле справедлива оценка:

$$\frac{\Big(\mathcal{N}u-\beta_l D_l u\Big)_+^{\;n}}{\Big(\big(|D'u|\lambda\big)^2+\Lambda^2\Big)^{n/2}}\ \leqslant\ 2^{n-1}\left(\frac{(\mathcal{N}u)_+^{\;n}}{\Lambda^n}\ +\ \frac{|\beta'|^n}{\lambda^n}\right).$$

Остальные подынтегральные выражения оцениваются аналогично. Пользуясь данными неравенствами и расширяя пределы интегрирования до множеств неотрицательности u, получаем:

$$\sum_{k=1}^{K}\ \int\limits_{\Psi_z\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)}\psi\;dp\;dq\ +\int\limits_{\mathcal{K}\cap\Psi_z\left(\widetilde{\mathcal{Z}}\right)}\psi\;dp\;dq\ \leqslant$$

$$\leqslant\ N_5(n)\cdot\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{1}{\Lambda^{n+1}}\left\|\frac{(\mathcal{M}^{[k]}u)_+}{\nu^{n/(n+1)}}\right\|^{n+1}_{n+1,\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)_u}+\frac{1}{\lambda^{n+1}}\left\|\frac{b^{[k]}}{\nu^{n/(n+1)}}\right\|^{n+1}_{n+1,\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)_u}\right)+$$

$$+\ \frac{N_6(n)}{\lambda}\cdot\left(\frac{1}{\Lambda^n}\left\|\frac{(\mathcal{N}u)_+}{\nu^{(n-1)/n}}\right\|^{n}_{n,\left(Q_0(T,R)\right)_u}\ +\ \frac{1}{\lambda^n}\left\|\frac{\beta'}{\nu^{(n-1)/n}}\right\|^{n}_{n,\left(Q_0(T,R)\right)_u}\right).\quad (11)$$

Совмещая неравенства (8), (9) и (11), выводим:

$$M\ \leqslant\ \frac{N_7(n)\Lambda}{\lambda}\cdot\left(\sum_{k=1}^{K}\frac{\lambda^{n+1}}{\Lambda^{n+1}}\left\|\frac{(\mathcal{M}^{[k]}u)_+}{\nu^{n/(n+1)}}\right\|^{n+1}_{n+1,\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)_u}+\frac{\lambda^n}{\Lambda^n}\left\|\frac{(\mathcal{N}u)_+}{\nu^{(n-1)/n}}\right\|^{n}_{n,\left(Q_0(T,R)\right)_u}+\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{K}\left\|\frac{b^{[k]}}{\nu^{n/(n+1)}}\right\|^{n+1}_{n+1,\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)_u}\ +\ \left\|\frac{\beta'}{\nu^{(n-1)/n}}\right\|^{n}_{n,\left(Q_0(T,R)\right)_u}\right).\quad (12)$$

Зафиксируем $\varepsilon>0$ и выберем

$$\Lambda\ =\ \left\|\frac{(\mathcal{N}u)_+}{\nu^{(n-1)/n}}\right\|_{n,\left(Q_0(T,R)\right)_u}\ +\ \lambda^{\frac{1}{n+1}}\sum_{k=1}^{K}\left\|\frac{(\mathcal{M}^{[k]}u)_+}{\nu^{n/(n+1)}}\right\|_{n+1,\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)_u}\ +\ \varepsilon.$$

Вспомним, наконец, что выше мы приняли предположение $M\lambda/(2R\Lambda)>1$. Включим противный случай: $M\leqslant\frac{2\Lambda}{\lambda}R$ в оценку (12) и продолжим:

$$M\leqslant\ \frac{N_8(n)\Lambda}{\lambda}\cdot\left(R+\lambda^n+\sum_{k=1}^{K}\left\|\frac{b^{[k]}}{\nu^{n/(n+1)}}\right\|^{n+1}_{n+1,\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)_u}+\left\|\frac{\beta'}{\nu^{(n-1)/n}}\right\|^{n}_{n,\left(Q_0(T,R)\right)_u}\right).$$

Наконец, выберем

$$\lambda \ = \ \max\left\{R^{1/n},\ \max_k\left\|\frac{b^{[k]}}{\nu^{n/(n+1)}}\right\|^{(n+1)/n}_{n+1,\left(Q_+^{[k]}(T,R)\right)_u},\ \left\|\frac{\beta'}{\nu^{(n-1)/n}}\right\|_{n,\left(Q_0(T,R)\right)_u}\right\}$$

и, устремив ε из определения Λ к $0+$, завершим доказательство Теоремы.

$\square$

6 Эллиптическое уравнение на стратифицированном шаре

Пусть на каждом из стратов $B_+^{[k]}(R)$ задан эллиптический оператор:

$$\mathcal{L}^{[k]}u \ = \ -a_{ij}^{[k]}D_iD_ju \ + \ b_i^{[k]}D_iu, \tag{13}$$

$$a_{ij}^{[k]} \in L_\infty\big(B_+^{[k]}(R)\big),\ b_i^{[k]} \in L_n\big(B_+^{[k]}(R)\big),\ (a_{ij}^{[k]})_{i,j=1}^n \geqslant \nu I_n,$$

а на страте $B_0(R)$ — оператор

$$\mathcal{B}u \ = \ -\alpha_{lm}D_lD_mu \ + \ \beta_lD_lu \ + \ \mathcal{J}u$$

$$\alpha_{lm} \in L_\infty\big(B_0(R)\big),\ \beta_l \in L_{n-1}\big(B_0(R)\big),\ (\alpha_{lm})_{l,m=1}^{n-1} \geqslant \nu I_{n-1}, \tag{14}$$

где $\mathcal{J}$ — оператор сопряжения, определяемый для измеримых $\beta_n^{[k]}$:

$$\mathcal{J}u \ = \ \sum_{k=1}^K \beta_n^{[k]}(x') \lim_{x_n^{[k]}\to 0+} D_nu(x', x_n^{[k]}).$$

Теорема 6.1. *Пусть $n \geqslant 2$, и на полушарах $B_+^{[k]}(R)$ заданы операторы $\mathcal{L}^{[k]}$ вида (13), а на $B_0(R)$ — оператор $\mathcal{B}$ вида (14), удовлетворяющий соотношениям $\beta_n^{[k]} \leqslant 0$. Рассмотрим функцию $u \in \mathcal{C}\big(\overline{\mathbb{B}_+(R)}\big)$, такую что*

$$u \in W_n^2\big(B_+^{[k]}(R)\big),\ k \in \overline{1:K}; \quad u \in W_{n-1}^2\big(B_0(R)\big); \quad u|_{\partial\mathbb{B}_+(R)} \leqslant 0.$$

Тогда справедлива оценка:

$$\max_{\mathbb{B}_+(R)} u_+ \ \leqslant \ N\left(n,\ \left(\frac{\left\|\, b^{[k]}\right\|_{n,\left(B_+^{[k]}(R)\right)_u}}{\nu}\right)_{k=1}^K,\ \frac{\|\beta'\|_{n-1,\left(B_0(R)\right)_u}}{\nu}\right)\times$$
$$\times\, \frac{R}{\nu}\cdot\left(\sum_{k=1}^K \left\|(\mathcal{L}^{[k]}u)_+\right\|_{n,\left(B_+^{[k]}(R)\right)_u} + \left\|(\mathcal{B}u)_+\right\|_{n-1,\left(B_0(R)\right)_u}\right).$$

Доказательство данного результата использует ту же технику, что и доказательство Теоремы 5.1, однако все выкладки в эллиптическом случае заметно упрощаются. Как и в предыдущем параграфе, в ходе доказательства Теоремы используются следующие аналоги Лемм 1.1 и 3.4 из [7] соответственно, доказывающиеся аналогично Леммам 5.1 и 5.2, приведённым выше.

Лемма 6.1. *Для любой измеримой неотрицательной функции $g : \mathbb{R}^{\circledast} \to \mathbb{R}$ и для любого $k \in \overline{1:K}$ справедливо неравенство:*

$$\int\limits_{\Phi_z\left(B_+^{[k]}(R)\right)} g(p)dp \ \leqslant \ \frac{1}{(\nu n)^n} \int\limits_{\mathcal{Z}_u \cap B_+^{[k]}(R)} g(Du)\Big(\mathcal{L}^{[k]}u - b_i^{[k]} D_i u\Big)^n dx.$$

Лемма 6.2. *Для любой измеримой неотрицательной функции $g : \mathbb{R}^{\circledast} \to \mathbb{R}$ инвариантной относительно выбора страта, $g(x^{[k_1]}) = g(x^{[k_2]})$, справедливо неравенство:*

$$\int\limits_{\mathcal{D}\cap\Phi_z(\widetilde{\mathcal{Z}})} g(p)dp \ \leqslant$$

$$\leqslant \ \frac{1}{(\nu(n-1))^{n-1}} \int\limits_{\widetilde{\mathcal{Z}}} \Big(\mathcal{B}u - \beta_l D_l u\Big)^{n-1} \cdot \int\limits_{-M/2R}^{0} g\Big(D'u,\ p_n\Big) dp_n\, dx'.$$

Я весьма признателен А.И. Назарову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Список литературы

[1] Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. "Hölder estimates of solutions to initial-boundary value problems for parabolic equations of nondivergent form with Venttsel boundary condition". *Amer. Math. Soc. Transl.*, v.64:1–13, 1995.

[2] Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. "Linear two-phase Venttsel problems". *Arkiv för matematik*, v.39(2):201–222, 2001.

[3] Luo Y. “An Aleksandrov-Bakelman type maximum principle and applications”. *Journal of Differential Equations*, v.101(2):213–231, 1993.

[4] Александров А.Д. “Некоторые оценки, касающиеся задачи Дирихле”. *ДАН СССР*, т.134(5):1001–1004, 1960.

[5] Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. “Лемма о нормальной производной и вокруг неё”. *Успехи математических наук*, т.77(2):3–68, 2022.

[6] Мироненко Ф.Д., Назаров А.И. “Локальная оценка максимума типа Александрова–Бакельмана для решений эллиптических уравнений на стратифицированном множестве вида “книжка””. *Записки научных семинаров ПОМИ*, 519:105–113, 2022.

[7] Назаров А.И. “Принцип максимума А.Д. Александрова”. *Современная математика и ее приложения*, т.29:127–143, 2005.

[8] Апушкинская Д.Е. “Оценка максимума решений параболических уравнений с граничными условиями Вентцеля”. *Вестник ЛГУ. Сер. мат. мех. астр.*, вып.2:3–12, 1991.

[9] Бакельман И.Я. “К теории квазилинейных эллиптических уравнений”. *Сиб. мат. журнал*, т.2(2):179–186, 1961.

[10] Крылов Н.В. “Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболического уравнения”. *Сиб. мат. журнал*, т.17(2):290–303, 1976.

[11] Крылов Н.В. “О принципе максимума для нелинейных параболических и эллиптических уравнений”. *Изв. АН СССР. Сер. мат.*, т.42(5):1050–1062, 1978.

[12] Назаров А.И., Уральцева Н.Н. “Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения”. *Записки научных семинаров ПОМИ*, 147:95–109, 1985.

[13] Ощепкова С.Н., Пенкин О.М. “Теорема о среднем для эллиптического оператора на стратифицированном множестве”. *Математические заметки*, т.81(3):417–426, 2007.

[14] Рокафеллар Р. *“Выпуклый анализ”’*. М., Мир, 1973.