Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 14.08.2023
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

# Обзор результатов научной школы СПбГУ по нелинейным уравнениям в частных производных. I[1]

*Д. Е. Апушкинская*[a,b], *А. А. Архипова*[c], *А. И. Назаров*[b,c], *В. Г. Осмоловский*[c], *Н. Н. Уральцева*[c]

[a] Российский университет дружбы народов (РУДН),
Россия, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

[b] ПОМИ РАН,
Россия, 191023, Санкт-Петербург, Фонтанка, 27

[c] Санкт-Петербургский государственный университет,
Россия, 199034, Санкт-Петербург, Университетская наб., 7/9

Статья содержит обзор важнейших результатов, полученных в рамках научной школы СПбГУ по нелинейным уравнениям в частных производных (школы О.А. Ладыженской–Н.Н. Уральцевой). Основное внимание уделено работам, выполненным в нашем университете за последние 50 лет. Предлагаемая читателям первая часть обзора касается разрешимости и качественных свойств решений краевых задач для скалярных квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка, а также вариационных задач. В планируемую вторую часть обзора войдут разделы о полностью нелинейных уравнениях и системах уравнений и о задачах со свободными границами.

*Ключевые слова*: квазилинейные уравнения, краевые задачи, вариационные неравенства, вариационное исчисление.

## 1. Введение[2].

Научная школа нелинейных уравнений в частных производных (УрЧП) сформировалась в Ленинградском университете в 50-е годы XX века. Из ее предшественников мы выделим С.Н. Бернштейна и Н.М. Гюнтера.

[1]Работа Д.Е.А. и А.И.Н. выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 22-21-00027).

[2]При подготовке этого раздела существенно использовались материалы коллективной монографии [176].

Работы С.Н. Бернштейна, относящиеся к началу XX в. (в то время он еще не работал в университете), намного опередили развитие теории УрЧП и математической физики во всем мире. Их направление связано в основном с краевыми задачами для линейных и нелинейных эллиптических уравнений при двух независимых переменных, с задачами вариационного исчисления и с различными задачами геометрии поверхностей. Большой цикл его работ посвящен решению двух проблем Гильберта — 19-й и 20-й.

Как известно, 19-я и 20-я проблемы Гильберта во многом определили направление исследований по квазилинейным эллиптическим уравнениям в XX веке. В 20-й проблеме утверждалось существование по крайней мере одной функции $u(x)$, дающей минимум регулярному функционалу

$$J(u) := \int\limits_{\Omega} F(x, u, Du)\, dx \tag{1}$$

(здесь и далее $\Omega$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$; $Du = (D_1 u, \ldots, D_n u)$ — градиент функции $u$) при условии Дирихле $u|_{\partial\Omega} = u_0(x)$, если класс функций сравнения выбран достаточно широким. Регулярность $J(u)$ означает эллиптичность соответствующего уравнения Эйлера–Лагранжа. В 19-й проблеме утверждалась аналитичность всех обладающих некоторой гладкостью решений эллиптических уравнений, коэффициенты которых аналитичны.

С.Н. Бернштейн доказал справедливость 19-й проблемы Гильберта для общих нелинейных эллиптических уравнений второго порядка с двумя независимыми переменными, предполагая решения априори трижды дифференцируемыми. В 20-й проблеме он доказал однозначную разрешимость задачи Дирихле для уравнений вида

$$\sum_{i,j=1}^{2} a_{ij}(x, Du) D_i D_j u + a(x, u, Du) = 0 \tag{2}$$

в классе достаточно гладких функций при условии невозрастания функции $a$ по $u$ (в этом случае заведомо имеет место теорема единственности). Из этого результата следовала однозначная разрешимость задачи минимизации функционалов (1) в двумерной области с $F = F(x, Du)$ в классе достаточно гладких функций. Более того, Бернштейн выяснил условия, необходимые для разрешимости задачи Дирихле "в целом". Они касаются поведения функций $a_{ij}(x, p)$, $a(x, p)$, $F(x, p)$ и их производных при $|p| \to \infty$.

Главная идея Бернштейна состояла в том, что разрешимость краевой задачи по существу зависит от наличия априорных оценок максимумов модулей решений и их производных до определенного порядка для данной задачи и какого-либо однопараметрического семейства задач, связывающего данную задачу с заведомо разрешимой. Это положение Бернштейна нашло свое строгое оформление много позже в топологических принципах неподвижной точки. Следуя этой идее, Бернштейн основное внимание уделял получению априорных оценок для решений уравнений (2). Им были указаны различные способы получения априорных оценок, среди которых выделим следующий. Благодаря принципу максимума для эллиптических уравнений оказалось возможным получать оценки для весьма широких классов таких уравнений, вводя вместо исследуемых решений $u(x)$ специально подобранные функции от них $v = \phi(u)$ (или $\phi(Du)$, или $\phi(D^2u)$ и пр.). Различные классы уравнений и оценки $\max|u|$ или $\max|D^\ell u|$ требуют введения своей функции $\phi$. От удачи в выборе функции $\phi$ зависит успех в получении оценки. Бернштейн указал такие функции для квазилинейных уравнений вида (2), а также для общих линейных уравнений эллиптического и параболического типов (при любом числе независимых переменных). Однако сама идея рассмотрения наряду с решением задачи специально подобранных функций от него (или каких-либо его производных) оказалась полезной и для других классов квазилинейных и нелинейных уравнений и была использована в дальнейшем многими авторами.

Н.М. Гюнтер работал в нашем университете более 50 лет. Из его работ по нелинейным УрЧП упомянем серию статей по аналитической теории таких уравнений и большой цикл работ по задаче Коши и смешанной задаче для уравнений гидродинамики идеальной жидкости. Работы по гидродинамике неоднократно приводили Гюнтера к необходимости оперировать с функциями, которые не имеют достаточного числа непрерывных производных. Это привело его к общему понятию функции от области (множества). Таким образом, он является предшественником С.Л. Соболева в создании теории обобщенных функций, которая играет огромную роль в исследованиях по УрЧП.

Говоря о научной школе нелинейных УрЧП, нельзя не упомянуть имена В.И. Смирнова и С.Л. Соболева. Несмотря на то, что сами они нелинейной тематикой не занимались, их научная, а в еще большей степени просветительская деятельность оказали на развитие этой школы колоссальное влияние.

В многогранной деятельности В.И. Смирнова в ЛГУ большое место занимала организация научно-исследовательских семинаров, из которых выросли несколько крупных научных школ в городе. Среди них мы выделим семинар по функциональному анализу (30-е годы), а также общегородской семинар по математической физике (1947), который ныне носит имя своего основателя и в прошлом году отметил свое 75-летие [88]. Почти все ленинградские/петербургские специалисты по уравнениям в частных производных были или являются участниками этого семинара.

Современную теорию нелинейных УрЧП невозможно представить себе без обобщенных функций, обобщенных решений, пространств Соболева, введенных С.Л. Соболевым в работах тридцатых — сороковых годов прошлого века. А его монография [177], изданная в Ленинградском университете в 1950 году, долгие годы была настольной книгой всех специалистов в этой области.

Основателем школы нелинейных УрЧП в ЛГУ является О.А. Ладыженская. Выпускница Московского университета (1947), она привезла в наш город культуру УрЧП в московском духе, которую там в большой мере определял её учитель И.Г. Петровский. С другой же стороны, она быстро освоила технику (идущую от Соболева), основанную на теоремах вложения и обобщенных решениях.

Еще в своей кандидатской диссертации (1949) Ладыженская предложила сходящиеся разностные схемы для общих квазилинейных систем, гиперболических по Петровскому (задача Коши). После защиты докторской диссертации (1953), посвященной смешанной задаче для линейных гиперболических уравнений, она вернулась к изучению нелинейных задач, в частности, начально-краевых задач для системы уравнений математической гидродинамики — системы Навье–Стокса.

Первые же работы о разрешимости таких задач оказались прорывными, некоторые из результатов не перекрыты и до сих пор. Результаты О.А. Ладыженской и ее учеников по этой тематике, полученные в 50-х годах, подытожены в монографии [116]. В 1963 году вышел перевод этой книги на английский язык, а в 1970 году – второе русское издание, существенно дополненное и переработанное. Позднее монография была переведена еще на несколько языков и стала «Библией» для всех специалистов по гидродинамике.

Более подробно об этих и дальнейших работах Ладыженской в области математической гидродинамики можно прочесть в обзорной статье [175].

Другая проблема, которая была в центре внимания О.А. Ладыженской, начиная с 50-х годов — регулярность решений квазилинейных уравнений эллиптического и параболического типов. Большинство результатов в этом направлении было получено в сотрудничестве с ее ученицей Н.Н. Уральцевой (ныне заведующей кафедрой математической физики мат-меха).

Отправными точками этих исследований были работа Ладыженской [115] об оценке градиентов решений эллиптических и параболических квазилинейных уравнений и статьи Э. Де Джорджи (E. De Giorgi) [27] и Дж. Нэша (J. Nash) [60], которые установили, что решения линейных равномерно эллиптических и параболических уравнений дивергентного вида с измеримыми коэффициентами удовлетворяют условию Гельдера. Развивая технику Де Джорджи и Нэша, Ладыженская и Уральцева распространили ее на более общие линейные и квазилинейные уравнения эллиптического и параболического типов. Кроме того, они разработали технику вывода априорных оценок для решений эллиптических уравнений с сильными нелинейностями. Это позволило им получить точные результаты о разрешимости и гладкости решений классических краевых задач для дивергентных квазилинейных уравнений

$$L(u) := -\sum_{i=1}^{n} D_i\big(a_i(x,u,Du)\big) + a(x,u,Du) = 0; \tag{3}$$

$$M(u) := \partial_t u - \sum_{i=1}^{n} D_i\big(a_i(x,t,u,Du)\big) + a(x,t,u,Du) = 0,$$

удовлетворяющих так называемым естественным (бернштейновским) условиям роста. В частности, это дало полное решение 19-й и 20-й проблем Гильберта для уравнений второго порядка. Заметим, что как для **систем** уравнений второго порядка, так и для эллиптических уравнений более высокого порядка утверждение 19-й проблемы Гильберта неверно. Соответствующие контрпримеры были построены в 1968 году В.Г. Мазья [127] (для высокого порядка) и итальянскими математиками Э. Де Джорджи [28], Э. Джусти и М. Мирандой (E. Giusti, M. Miranda) [32] (для систем).

Полученные результаты по эллиптическим уравнениям были подытожены в монографии [118] (в 1973 году вышло второе, переработанное издание [119]). Тремя годами позже была опубликована монография [117] (написанная совместно с В.А. Солонниковым, еще одним учеником Ладыженской), посвященная параболическим уравнениям.

Заметим, что гидродинамическая часть школы О.А. Ладыженской–В.А. Солонникова, хотя и пополнялась выпускниками университета, в дальнейшем развивалась в основном на базе Ленинградского/Санкт-Петербургского отделения Математического института им. В.А. Стеклова [108], [109]. В то же время задачи, связанные с квазилинейными и полностью нелинейными уравнениями, а также с вариационным исчислением, получили свое развитие именно в ЛГУ–СПбГУ, прежде всего на кафедре математической физики.

Отдельно отметим работы В.Г. Мазья. Выпускник ЛГУ, он более 25 лет работал на мат-мехе. Хотя его многочисленные и разнообразные работы, многие из которых стали классическими (их обзор можно найти, например, в [43]; см. также [76], [79], [78]) относятся в основном к линейным задачам, их влияние на школу О.А. Ладыженской–Н.Н. Уральцевой весьма существенно.

В настоящей статье собраны основные результаты, полученные в рамках этой школы за последние полвека. Первая часть содержит разделы о разрешимости и качественных свойствах решений краевых задач для скалярных квазилинейных эллиптических и параболических уравнений второго порядка (§2) и вариационных задач (§3). В планируемую вторую часть обзора войдут разделы о полностью нелинейных уравнениях и системах уравнений, а также о задачах со свободными границами.

**2. Квазилинейные уравнения.**

Этот раздел мы начнем с описания цикла работ Н.Н. Уральцевой по уравнениям, имеющим различного рода вырождения эллиптичности по градиенту. Начало этому циклу положила статья [178], в которой, в частности, был получен знаменитый результат о регулярности $p$-гармонических функций, т.е. решений уравнения

$$\Delta_p u := \sum_{i=1}^{n} D_i\big(|Du|^{p-2} D_i u\big) = 0. \tag{4}$$

Уравнения с $p$-лапласианом $\Delta_p$ при $p > 2$ являются квазилинейными эллиптическими уравнениями с вырождением при нулевом значении градиента. Известно, что решение такого уравнения, вообще говоря, не имеет соболевских вторых производных, и вопрос заключался в доказательстве непрерывности первых производных в окрестности множества, где $Du = 0$. К сожалению, результат полученный Уральцевой, долго оставался неизвестным за границей и через 9 лет был передоказан и расширен К. Уленбек (K. Uhlenbeck) и другими авторами.

Для класса неравномерно эллиптических уравнений, включающих уравнение Эйлера для функционалов типа площади поверхности

$$-\sum_{i=1}^{n} D_i\left(\frac{D_iu}{(1+|Du|^2)^{\frac{1}{2}}}\right)+f(x,u)=0 \tag{5}$$

(такие уравнения вырождаются при $|Du|\to\infty$) Н.Н. Уральцевой был разработан метод получения локальных оценок модуля градиента решения. Внутренние оценки градиента, обобщающие результаты Э. Бомбиери (E. Bombieri), Э. Де Джорджи и М. Миранды [20], были получены в работе [40] (совместной с О.А. Ладыженской); позднее авторы распространили этот результат на класс сингулярно возмущенных задач [125]. Приграничные оценки градиента решения для краевого условия типа капиллярности без ограничений на геометрию области, а также разрешимость соответствующих краевых задач были установлены в серии работ [179], [180], [182]. В статье Уральцевой и ее аспирантки А.Б. Урдалетовой [186], по-видимому, впервые были получены результаты о регулярности решений некоторого класса анизотропно вырождающихся эллиптических уравнений. Этот класс включает уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} D_i\big(|D_iu|^{p_i-2}D_iu\big)=0, \qquad 1<p_1\le p_2\le\dots\le p_n,$$

принадлежащее к весьма популярным в последние десятилетия уравнениям с нестандартным ростом по градиенту (см., например, [17] и [26]).

Новый этап в развитии теории разрешимости квазилинейных уравнений в ЛГУ начался в 1980 году, после выхода знаменитой работы московских математиков Н.В. Крылова и М.В. Сафонова [114], в которой были установлены оценка Гельдера и неравенство Гарнака для решений равномерно эллиптических и равномерно параболических уравнений общего (недивергентного) вида с измеримыми коэффициентами

$$\mathcal{L}u := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)D_iD_ju+\sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_iu=0;$$

$$\mathcal{M}u := \partial_t u-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)D_iD_ju+\sum_{i=1}^{n} b_i(x,t)D_iu=0;$$

$$a_{ij}=a_{ji}, \qquad \nu|\xi|^2\le\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j\le\nu^{-1}|\xi|^2, \qquad \nu>0.$$

Техника, развитая ранее О.А. Ладыженской и Н.Н. Уральцевой, позволила быстро распространить эти результаты на квазилинейные уравнения общего вида

$$-\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,u,Du)D_iD_ju + a(x,u,Du) = 0;$$

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t,u,Du)D_iD_ju + a(x,t,u,Du) = 0$$

с квадратичным ростом функции $a$ по компонентам градиента [120]. В работе [121] были получены дальнейшие априорные оценки решений задачи Дирихле для таких уравнений и доказаны теоремы существования.

К работе над этой тематикой Н.Н. Уральцева привлекла своего студента А.И. Назарова. В работе [154] было получено обобщение принципа максимума Александрова–Бакельмана–Крылова[3] для параболических уравнений на случай уравнений с неограниченными младшими коэффициентами (одновременно аналогичные результаты были получены К. Тсо (K. Tso)). Отметим, что подход, развитый в этой работе, основан на геометрических идеях, близких к первоначальным идеям А.Д. Александрова, и более прозрачен, чем чисто аналитический подход Н.В. Крылова. Этот результат позволил получить все необходимые априорные оценки и доказать теоремы существования решения задачи Дирихле для уравнений с неограниченными особенностями по независимым переменным [122], [124]. Обзор результатов по задаче Дирихле для недивергентных уравнений был опубликован в статье [123] и составил содержание приглашенного доклада Уральцевой на Международном Математическом конгрессе 1986 года [73]. Сравнительно недавно эта линия исследований была продолжена в [148].

Далее под руководством Н.Н. Уральцевой было развернуто исследование других краевых задач — задачи с наклонной производной (oblique derivative problem) и задачи Вентцеля. В первой из них граничное условие имеет вид

$$b(x,u,Du) = 0 \qquad \text{или} \qquad b(x,t,u,Du) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

в эллиптическом и параболическом случае соответственно и таким образом задает производную решения по направлению некоторого векторно-

[3]Подробный обзор результатов о принципе максимума Александрова–Бакельмана–Крылова, в том числе полученных в СПбГУ, был опубликован в [147], см. также [87, §2.3].

го поля (зависящего от самого решения). Функция $b(x,u,p)$ ($b(x,t,u,p)$) удовлетворяет условию некасательности

$$\sum_{i=1}^{n} b_{p_i}\mathbf{n}_i \geq \chi \cdot |b_p|, \qquad \chi > 0.$$

Эта задача изучалась в серии работ, из которых мы упомянем [74], [135], [185], [155]. Заметим, что параллельно исследование этой задачи велось зарубежными математиками, в том числе Н.С. Трудингером (N.S. Trudinger) и Г. Либерманом (G. Lieberman).

Задача Вентцеля была впервые поставлена А.Д. Вентцелем в 1959 году [104] как наиболее общая краевая задача для эллиптического оператора, порождающая генератор марковского случайного процесса. Впоследствии было обнаружено, что задачи с условиями Вентцелевского типа описывают процессы в средах, содержащих тонкие пленки на границе, и возникают во многих областях науки и техники. Среди них задачи гидродинамики, электродинамики и теории упругости, инженерные задачи нефтедобычи и некоторые вопросы финансовой математики.

Граничные условия Вентцеля задаются операторами, содержащими производные второго порядка по касательным переменным. Для квазилинейных эллиптических и параболических недивергентных уравнений они могут быть записаны в виде, соответственно,

$$-\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x,u,D^*u)D_i^*D_j^*u + \beta(x,u,Du) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

(здесь $p^*$ — проекция вектора $p$ на касательную плоскость к $\partial\Omega$) или

$$\partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x,t,u,D^*u)D_i^*D_j^*u + \beta(x,t,u,Du) = 0, \qquad x \in \partial\Omega,$$

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ji}, \qquad \nu|\xi^*|^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\xi_i^*\xi_j^* \leq \nu^{-1}|\xi^*|^2, \qquad \nu > 0; \qquad \sum_{i=1}^{n} \beta_{p_i}\mathbf{n}_i \geq 0.$$

Исследование задачи Вентцеля для эллиптических уравнений общего вида было начато в работах Н.С. Трудингера и его ученика Ю. Луо (Y. Luo). Задача получения аналогичных результатов для параболических уравнений была поставлена Н.Н. Уральцевой перед Д.Е. Апушкинской, в дипломной работе которой, опубликованной в [80], были получены локальные оценки типа Александрова–Бакельмана–Крылова. Далее последовала большая серия статей Апушкинской и Назарова (из них мы упомянем [4] и [83]), в которых были получены априорные оценки и доказаны теоремы существования при условиях, близких к необходимым. Итоги этой серии были подведены в обзоре [5]. Отметим также работу [126], в которой была развита теория повторных потенциалов для задачи Вентцеля и более сложных краевых задач, возникающих в акустике.

Следующей естественно возникшей задачей стала **двухфазная** задача Вентцеля для эллиптических и параболических уравнений. Такая задача описывает ситуацию, когда пленка $\Sigma$ разделяет область $\Omega$ на две части. Условие на пленке при этом задается квазилинейным уравнением второго порядка (соответственно эллиптическим или параболическим) по касательным переменным. Главные члены граничного оператора, как и в однофазной задаче, описывают диффузию вдоль пленки, а члены первого порядка образуют оператор "сопряжения" на пленке

$$\begin{aligned}\mathfrak{J}u := \beta_{[1]}\big(x, u, D^*u + \mathbf{n}(x)\cdot \lim_{\varepsilon\to -0}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x+\varepsilon\cdot \mathbf{n}(x))\big)\\ - \beta_{[2]}\big(x, u, D^*u + \mathbf{n}(x)\cdot \lim_{\varepsilon\to +0}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}(x+\varepsilon\cdot \mathbf{n}(x))\big)\end{aligned}$$

и описывают взаимодействие пленки с подобластями $\Omega^{[1]}$ и $\Omega^{[2]}$.

Изучение двухфазной задачи Вентцеля, как и предыдущих задач, было начато с локальных оценок типа Александрова–Бакельмана–Крылова [6], потребовавших тонкого анализа отображения Лежандра для этой задачи. При дальнейшем анализе выяснилось, что случай, когда пленка не пересекает внешнюю границу области, относительно прост, чего никак нельзя сказать о ситуации, когда такое пересечение имеется. Для трансверсального пересечения задача была решена в серии работ, заключительными в которой были [86] и [143]. Вопрос о разрешимости двухфазной задачи при нетрансверсальном пересечении открыт до сих пор.

В дальнейшем изучение задачи Вентцеля было продолжено. В работе [152] были впервые получены оценки Гельдера для дивергентной задачи, в [128] этот результат был распространен на задачу Вентцеля на сложной структуре — стратифицированном множестве. В работах [130], [129] установлен принцип максимума Александрова–Бакельмана–Крылова для задачи на стратифицированном множестве типа "книжка".

В последние годы также активно развивается сотрудничество по этой тематике с итальянскими математиками. В статьях [25] и [24] были рассмотрены задачи Вентцеля с нелокальными членами в областях с кусочно гладкой границей. В серии работ [9], [10], [11], [89], [90] получены априорные оценки и теоремы о разрешимости линейных и квазилинейных задач Вентцеля с разрывными старшими коэффициентами из класса *VMO*.

Заметим еще, что исследованию задач Вентцелевского типа посвящено много работ зарубежных математиков. Частичный обзор литературы можно найти в [11].

При исследовании задач Вентцеля неоднократно возникала потребность в получении априорных оценок и теорем о разрешимости для вспомогательных задач Дирихле в ситуациях, не рассмотренных ранее. В связи с этим упомянем работы [84], [85], а также [141], в которой было получено существенное обобщение оценок типа Александрова–Бакельмана–Крылова.

Более того, работа над задачей Вентцеля инициировала серию новых результатов в линейной теории параболических уравнений — области, сравнительно хорошо изученной. В работе [139] были впервые рассмотрены краевые задачи для уравнений с непрерывными коэффициентами в областях с ребрами, имеющими произвольную коразмерность. Отметим следующее довольно неожиданное вспомогательное утверждение из этой статьи, представляющее самостоятельный интерес.

*Пусть* $\Omega = \Omega' \times \Omega''$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^m$, $\Omega'' \subset \mathbb{R}^{n-m}$.

*Обозначим* $G'_{\mathcal{D}}(x', y', t)$, $G'_{\mathcal{N}}(x', y', t)$, $G''_{\mathcal{D}}(x'', y'', t)$ *и* $G''_{\mathcal{N}}(x'', y'', t)$ *функции Грина задач Дирихле и Неймана для уравнения теплопроводности в областях* $\Omega'$ *и* $\Omega''$ *соответственно.*

*Тогда функции Грина задач Дирихле и Неймана для уравнения теплопроводности в области* $\Omega$ *задаются формулами*

$$G_{\mathcal{D}}(x, y, t) = G'_{\mathcal{D}}(x', y', t) \cdot G''_{\mathcal{D}}(x'', y'', t);$$

$$G_{\mathcal{N}}(x, y, t) = G'_{\mathcal{N}}(x', y', t) \cdot G''_{\mathcal{N}}(x'', y'', t).$$

В серии работ В.А. Козлова и А.И. Назарова [34], [35], [36], [37] были установлены коэрцитивные оценки в весовых пространствах для уравнений со старшими коэффициентами, непрерывными по пространственным переменным и лишь измеримыми по времени. Полученные результаты существенно усиливают пионерские оценки Н.В. Крылова.

Изложенные выше результаты касаются априорных оценок и теорем существования. В последнее десятилетие был также получен ряд результатов по качественной теории эллиптических и параболических уравнений, касающихся точных (а при некоторых предположениях даже необходимых и достаточных) условий справедливости классических теорем.

В статье А.И. Назарова и Н.Н. Уральцевой [156] рассматривались эллиптические и параболические уравнения дивергентного вида:

$$Lu := -\sum_{i,j=1}^{n} D_i\big(a_{ij}(x)D_j u\big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x)D_i u = 0;$$

$$Mu := \partial_t u - \sum_{i,j=1}^{n} D_i\big(a_{ij}(x;t)D_j u\big) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x;t)D_i u = 0$$

с дополнительным структурным условием

$$\mathrm{div}(\mathbf{b}) := \sum_{i=1}^{n} D_i b_i \leq 0 \quad \text{в смысле обобщенных функций.} \tag{6}$$

Уравнения с младшими коэффициентами, удовлетворяющими (6), возникают в некоторых приложениях (в частности, в задачах математической гидродинамики). В [156] изучался вопрос о том, насколько "плохими" могут быть младшие коэффициенты $b_i$ для выполнения сильного принципа максимума, неравенства Гарнака и теоремы Лиувилля. Было показано, что при условии (6) предположения о $b_i$ можно значительно ослабить в шкале пространств Морри по сравнению с общим случаем.

В серии работ Д.Е. Апушкинской и А.И. Назарова получены точные условия выполнения леммы о нормальной производной (леммы Хопфа–Олейник) для уравнений недивергентного ([62], [7]) и дивергентного ([8]) вида.

В статьях [33], [21] получены новые условия для выполнения принципа Фрагмена–Линделефа в смешанной краевой задаче для эллиптических уравнений недивергентного вида.

Работа [38] посвящена сильному принципу максимума для дивергентных эллиптических уравнений со старшими коэффициентами из класса $VMO$ и младшими коэффициентами из класса Като. Полученные результаты позволили существенно ослабить условия справедливости оценок профиля свободной поверхности в двумерной задаче о волнах в канале.

Наконец, недавний обзор [87] содержит широкую картину развития этой тематики от Гаусса до наших дней.

**3. Вариационные задачи.**

Другое направление, интенсивно развивающееся в ЛГУ/СПбГУ в последние полвека, — исследование разрешимости вариационных задач, регулярности и качественных свойств их решений — находится на стыке теории уравнений в частных производных и вариационного исчисления.

Большой цикл работ Н.Н. Уральцевой и А.А. Архиповой относится к теории вариационных неравенств и охватывает широкий круг задач с выпуклыми ограничениями. Простейшее вариационное неравенство для эллиптического оператора возникает при минимизации регулярного функционала $J$ на выпуклом множестве $\mathcal{K}$ в банаховом пространстве $X$ и имеет вид

$$\langle J'(u), v - u\rangle \geq 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{K}. \tag{7}$$

Для параболического оператора соответствующее (эволюционное) вариационное неравенство имеет вид

$$\langle u'(t), v - u(t)\rangle + \langle J'(u(t)), v - u(t)\rangle \geq 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{K}$$

(здесь $u : [0, T] \to X$ — абстрактная функция вещественной переменной из подходящего класса).

Важной проблемой теории вариационных неравенств является исследование регулярности обобщённых решений. Известно, что порог гладкости решений вариационных неравенств существенно зависит от характера ограничений (множества $\mathcal{K}$) и доказательство предельной гладкости требует, как правило, больших усилий.

Формирование теории вариационных неравенств началось в конце 60-х годов 20 века в работах Г. Стампаккья (G. Stampaccia) и его соавторов. Первые работы были посвящены задаче с препятствием. В этой задаче функционал (1) минимизируется на множестве

$$\mathcal{K}^{\psi}_{\phi} := \{v \in W^1_m(\Omega) \bigm| v(x) \geq \psi(x) \quad \text{п.в. в } \Omega,\ v|_{\partial\Omega} = \phi\}. \tag{8}$$

Здесь $m \geq 1$, $\phi$, $\psi \in W^1_m(\Omega)$ — заданные функции, $\psi \geq \phi$ на $\partial\Omega$, а интегрант $F(x, u, p)$ — выпуклая по аргументу $p$ функция, удовлетворяющая условию $F(x, u, p) \sim |p|^m$ при $|p| \to \infty$.

При дополнительных ограничениях на поведение частных производных $F_{p_i}(x, u, p)$ и $F_u(x, u, p)$ необходимое условие минимума выражается вариационным неравенством

$$\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{n} F_{p_i}(x, u, Du)(D_i v - D_i u) + F_u(x, u, Du)(v - u)\Big)\, dx \geq 0 \quad \text{для всех} \quad v \in \mathcal{K}^{\psi}_{\phi},$$

которое можно записать в виде (7), где

$$J'(u) := -\sum_{i=1}^{n} D_i F_{p_i}(x, u, Du) + F_u(x, u, Du)$$

– оператор Эйлера функционала $J[u]$. Понятие вариационного неравенства было распространено и на эллиптические операторы $L(u)$ невариационного типа, имеющие дивергентную структуру (см. (3)). При условиях монотонности и коэрцитивности операторов (и более общих условиях) исследовались качественные свойства решений.

В первых работах А.А. Архиповой, составивших основу ее кандидатской диссертации ([92], [93], [94]; см. также [95]) для различных классов эллиптических и параболических операторов изучался вопрос о гладкости решения задачи с одним или двумя (верхним и нижним) препятствиями, в том числе вопрос о предельной гладкости — ограниченности вторых производных решения при условии достаточной гладкости данных задачи.

В работе [93] изучалась задача с препятствием для класса недивергентных уравнений

$$\mathcal{L}(u) := -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, Du) D_i D_j u + a(x, u, Du) = 0, \quad x \in \Omega \subset \mathbb{R}^n, \tag{9}$$

как задача о наименьших суперрешениях уравнения (9) на множестве

$$\widetilde{\mathcal{K}}_\phi^\psi = \{v \in W^2_{\hat{n}}(\Omega) \bigm| v \geq \psi \text{ в } \Omega,\ v|_{\partial\Omega} = \phi\},$$

где $\hat{n} = n$ при $n > 2$, и $\hat{n} = n + \epsilon$, с любым $\epsilon > 0$ при $n = 2$.

Напомним, что функция $g \in \widetilde{\mathcal{K}}_\phi^\psi$ называется суперрешением уравнения $\mathcal{L}(u) = 0$, если она удовлетворяет неравенству $\mathcal{L}(g) \geq 0$ п.в. в $\Omega$. В работе [93] сформулированы условия на данные задачи, при которых существует наименьшее суперрешение уравнения $Lu = 0$ класса $W^2_q(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$ при любых $q < \infty$ и $\lambda \in (0, 1)$. Отметим, что наименьшее суперрешение одновременно является решением неравенства

$$\int\limits_\Omega \big( -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x, Du) D_i D_j u + a(x, u, Du)\big)(v - u)\, dx \geq 0$$
$$\text{для всех } v \in L^2(\Omega),\ v \geq \psi \text{ в } \Omega,$$

тогда как для операторов дивергентного вида (3) наименьшее суперрешение является решением вариационного неравенства

$$\int\limits_\Omega \big( \sum_{i=1}^{n} a_i(x, u, Du)(D_i v - D_i u) + a(x, u, Du)(v - u)\big)\, dx \geq 0, \quad \text{для всех } v \in \mathcal{K}_\phi^\psi,$$

где множество $\mathcal{K}_{\phi}^{\psi}$ определено в (8).

Отметим еще один результат Архиповой, посвященный задаче с препятствием для уравнения средней кривизны (5) при $f(x,u) = n\Lambda(x)$, где $\Lambda(x)$ - заданная кривизна поверхности. В работе [93] приведены условия на $\Lambda(x)$ и границу области $\Omega$, при которых существует наименьшее суперрешение $u \in \widetilde{\mathcal{K}}_{\phi}^{\psi}$ класса $W_q^2(\Omega) \cap C^{1,\lambda}(\overline{\Omega})$. Показано, что это суперрешение является также решением соответствующего вариационного неравенства. Этот результат обобщает работу Х. Леви (H. Lewy) и Г. Стампаккья 1971 года, в которой рассматривались минимальные поверхности $(\Lambda(x) \equiv 0)$.

Одной из важных прикладных задач, описываемых вариационным неравенством, является задача Синьорини — задача о деформации под действием внешних сил упругого тела, соприкасающегося с твёрдой поверхностью. В простейшей скалярной постановке это задача о минимизации заданного функционала (1) на выпуклом замкнутом множестве

$$\mathcal{K}[\psi] = \{v \in W_m^1(\Omega) \ \big| \ v \geq \psi \text{ на } \Gamma \subset \partial\Omega\},$$

где $\psi$ — заданная функция на $\Gamma$. Известно, что предельная гладкость решения такой задачи — принадлежность первых производных решения пространству $C^{\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$.

Задача Синьорини и ее модификации для эллиптических и параболических уравнений и диагональных систем уравнений изучались в работах Н.Н. Уральцевой [181] и [183], а также в ее совместных статьях с А.А. Архиповой [96], [97], [98], [99] и [14]. Авторами изучалась регулярность (вплоть до предельной) решения задачи Синьорини для различных классов операторов, причем в задаче с двумя препятствиями не исключалась возможность их совпадения на части границы. Для диагональных систем изучалась проблема регулярности решений вариационных неравенств в ситуации, когда “препятствие” на границе области описывалось как принадлежность решения $\mathbf{u} = (u^1, ..., u^N)$, $N > 1$, некоторому выпуклому множеству $\mathbb{K} \subset \mathbb{R}^N$. В статье [184] содержится частичный обзор результатов по проблеме регулярности решений вариационных неравенств.

Отметим также недавнюю серию работ [12], [91] и [13], выполненную Д.Е. Апушкинской совместно с С.И. Репиным, в которой изучались эллиптические и параболические вариационные неравенства, порожденные задачей с тонким препятствием внутри области, задачей с препятствием для бигармонического оператора, нестационарной задачей с препятствием, а также стационарной и нестационарной скалярной задачей Синьорини. Для этих задач были получены полностью вычисляемые апостериорные оценки энергетической нормы разности между точным решением (минимайзером) и приближенным решением (произвольной функцией из множества $\mathcal{K}$, порождаемого задачей). Важно, что полученные оценки полностью определяются данными задачи и приближенным решением, т.е. для их вычисления знание точного решения не нужно. Кроме того, они обращаются в нуль на решении рассматриваемой задачи и, таким образом, являются точными.

Задачи вариационного исчисления составляют значительную часть в работах В.Г. Осмоловского. В основном они относятся к проблеме фазовых переходов в механике сплошных сред. Специфика этих задач порождается отсутствием выпуклости функционала энергии, возникающей из-за наличия двух фаз с априори неизвестной границей раздела.

Одна из возможных постановок этой задачи такова: для фиксированных плотностей энергии двух фаз $F^{\pm}(D\mathbf{u})$, квадратично зависящих от градиента вектор-функции смещения $\mathbf{u}$ в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, задаётся функционал энергии

$$\begin{gathered} I_0[\mathbf{u}, \chi, t] = \int\limits_{\Omega} \big(\chi(F^+(D\mathbf{u}) + t) + (1-\chi)F^-(D\mathbf{u})\big)\, dx, \\ \mathbf{u} \in \mathbb{H} := \overset{o}{W}{}^1_2(\Omega, \mathbb{R}^N), \quad \chi \in \mathbb{Z}', \quad t \in \mathbb{R}, \end{gathered} \tag{10}$$

где $\mathbb{Z}'$ — множество всех характеристических функций измеримых множеств, а параметр $t$ определяется температурой. Функция $\chi$ описывает распределение фаз в области: на ее носителе располагается фаза с плотностью $F^+$, а на его дополнении — фаза с плотностью $F^-$. Под состоянием равновесия двухфазовой среды понимается пара $\hat{\mathbf{u}}_t$, $\hat{\chi}_t$, минимизирующая при фиксированном $t$ функционал (10). Функция $\hat{\mathbf{u}}_t$ при этом задаёт равновесное поле смещений, а $\hat{\chi}_t$ — равновесное распределение фаз.

Функционал (10) содержит энергию каждой из фаз, но не учитывает поверхностной энергии границы раздела фаз. Учёт этой энергии (которую естественно считать пропорциональной площади границы раздела) приводит к функционалу

$$\begin{gathered} I[\mathbf{u}, \chi, t, \sigma] = I_0[\mathbf{u}, \chi, t] + \sigma S[\chi], \\ \mathbf{u} \in \mathbb{H}, \quad \chi \in \mathbb{Z} = \mathbb{Z}' \cap \mathrm{BV}(\Omega), \quad t, \sigma \in \mathbb{R}, \quad \sigma > 0, \end{gathered} \tag{11}$$

где $S[\chi]$ — площадь границы раздела фаз, определяемая как полная вариация функции $\chi$, а константа $\sigma$ называется коэффициентом поверхностного натяжения. Под состоянием равновесия двухфазовой среды с энергией (11) при фиксированных $t$ и $\sigma$ понимается пара $\hat{\mathbf{u}}_{t,\sigma} \in \mathbb{H}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma} \in \mathbb{Z}$, минимизирующая функционал (11).

При $N = 1$ задачи о минимизации функционалов (10) и (11) разрешимы в явном виде. Получающиеся формулы позволяют детально проследить за зависимостью состояний равновесия от параметров задачи $t$, $\sigma$ и области $\Omega$. Полное исследование одномерной задачи приведено в [71].

При $N \geq 2$ основной целью исследования является получение (пусть иногда на качественном уровне) аналогов одномерных результатов. В этом случае инфимум функционала (10) при некоторых значениях $t$ может не достигаться. Однако, как и в одномерном случае, существуют [166] не зависящие от области $\Omega$ температуры фазовых переходов $t_* \leq t^*$, для которых

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{u}}_t \equiv 0, \quad \hat{\chi}_t \equiv 1 \quad \text{при} \quad t < t_*, \\ &\hat{\mathbf{u}}_t \equiv 0, \quad \hat{\chi}_t \equiv 0 \quad \text{при} \quad t > t^* \end{aligned}$$

– единственное состояние равновесия среды с энергией (10), а при $t \in (t_*, t^*)$ у этой среды нет однофазовых ($\hat{\chi}_t \equiv 0$ или $\hat{\chi}_t \equiv 1$) состояний равновесия. В общей ситуации для температур $t_*$ и $t^*$ получены оценки, а также критерий их совпадения через коэффициенты плотностей $F^{\pm}$. Иногда удаётся получить и явные формулы для температур $t_*$ и $t^*$, даже в случае, когда при $t \in (t_*, t^*)$ функционал (10) не достигает минимума [170].

Наиболее удачно в многомерном случае устроена задача о минимизации функционала (10) для изотропных сред

$$\begin{aligned} F^{\pm}(D\mathbf{u}) = a\,\mathbf{tr}(e(D\mathbf{u}) - c_{\pm}I)^2 + b_{\pm}\,\mathbf{tr}^2(e(D\mathbf{u}) - c_{\pm}I), \\ e_{ij}(D\mathbf{u}) = \frac{D_j u^i + D_i u^j}{2}, \end{aligned} \tag{12}$$

где $a > 0$, $b_{\pm} \geq 0$, $c_{\pm} \in \mathbb{R}$ — параметры, а $I$ — единичная матрица в пространстве $\mathbb{R}^N$. Для плотностей энергии (12) эта задача в произвольной области $\Omega$ допускает явное решение [164], что приводит к явным формулам для температур $t_*$ и $t^*$. Любопытно отметить, что при каждом $t \in (t_*, t^*)$ у этой задачи существует континуальное множество различных решений. Однако в каждом хаосе есть свой порядок: объемы, занимаемые фазами, однозначно определяются значением $t$.

С математической точки зрения функционал (11) существенно лучше функционала (10): он достигает минимума [161] для каждых $t$, $\sigma$. Как и в одномерном случае, полуплоскость параметров $(t, \sigma)$ разбивается на зоны, в которых даётся [165] описание состояний равновесия $\hat{\mathbf{u}}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$. При каждом $\sigma > 0$ вводятся температуры фазовых переходов $t_*(\sigma)$ и

$t^*(\sigma)$ (совпадающие с $t_*$ и $t^*$ при $\sigma = 0$) и исследуется их зависимость от области $\Omega$. Для близких плотностей энергии $F^{\pm}$ устанавливается непрерывная дифференцируемость границы раздела фаз [19].

Переход к функционалу (11) можно рассматривать как регуляризацию функционала (10), поскольку [163] этот переход снимает проблему с быстрой осциляцией минимизирующей последовательности и обеспечивает достижимость минимума. Однако такая регуляризация не единственно возможная. Другой вариант — замена величины $S[\chi]$ в (11) на некоторую (меньшую единицы) степень $L^2$-нормы старших производных поля смещений [162], [18]. При такой регуляризации разбиение полуплоскости параметров $t, \sigma$ на зоны на качественном уровне не меняется.

Наиболее же традиционной регуляризацией функционала (10) является переход к функционалу с интегрантом $\mathcal{F}(D\mathbf{u}, t)$, представляющем собой квазивыпуклую оболочку функции $\min\{F^+(D\mathbf{u})+t, F^-(D\mathbf{u})\}$. Для плотностей (12) функция $\mathcal{F}(D\mathbf{u}, t)$ явно вычисляется [167], что позволяет описать множество всех решений релаксированной задачи. Последний результат полезен при изучении поведения пар $\hat{\mathbf{u}}_{t,\sigma}$, $\hat{\chi}_{t,\sigma}$ при $\sigma \to 0$. Подробное изложение результатов по этому направлению можно найти в препринте [168]. Они отличаются от близких по тематике работ (см., напр., монографию [1] и приведённую в ней библиографию) большей детализацией свойств решений соответствующих вариационных задач.

Перечислим некоторые другие результаты В.Г. Осмоловского и его учеников в этой области. Задача о фазовых переходах при больших внешних нагрузках изучалась в [72]. Задаче о фазовых переходах при количестве фаз больше двух посвящена статья [133]. В [131] и [132] исследовались вариационные задачи о фазовых переходах при наличии дополнительных ограничений, таких как условие несжимаемости одной из фаз или возникновение абсолютно жестких включений. Вопрос о разрешимости квазистационарной задачи и поведении её решения при неограниченном возрастании времени изложен в [169]. Наличие температур фазовых переходов при условии Синьорини изучалось в [172]. Исследование задачи о фазовых переходах для температур, зависящих от пространственной переменной, проведено в [173]. Обзор результатов по состоянию на 2017 год приведен в [171].

Упомянем еще ряд совместных работ Д.Е. Апушкинской и В.Г. Осмоловского с немецкими математиками М. Билдгауэром (M. Bildhauer) и М. Фуксом (M. Fuchs) [2] [3], [81], [82] и [30]. В этих работах изучались вопросы полной и частичной регулярности решений вариационных задач для функционалов с различным ростом интегранта по градиенту (линейным, неполиномиальным, анизотропным и т.п.).

Проблеме множественности положительных решений квазилинейных краевых задач посвящена серия работ А.И. Назарова и его учеников.

Хорошо известно, что если линейная краевая задача обладает какой-нибудь симметрией, то ее решение обычно наследует эту симметрию. Для квазилинейных уравнений дело обстоит гораздо сложнее. Рассмотрим, например, простейшую задачу

$$-\Delta u = f(u) \ \text{ в } \ \Omega, \qquad u > 0 \ \text{ в } \ \Omega, \quad u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{13}$$

В известной работе [31] Б. Гидас, В. Ни и Л. Ниренберг (B. Gidas, W.M. Ni, L. Nirenberg) показали[4], что если $\Omega = B_R$ — шар радиуса $R$, а $f \in C^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}_+)$, то любое решение $u \in C^2(\overline{\Omega})$ задачи (13) радиально симметрично ($u = u(r)$). Для $f(u) = u^{q-1}$ в [31] была доказана также единственность положительного решения.

В то же время, если $\Omega = B_{R+1} \setminus \overline{B}_R$ — сферический слой, а $f(u) = u^{q-1}$, ситуация кардинально меняется. При $1 < q < 2$ решение задачи (13) по-прежнему радиально симметрично (и единственно), но для любого $2 < q < \frac{2n}{n-2}$, если $R$ достаточно велико, то наряду с радиальным решением существуют и нерадиальные[5]. Более того, увеличивая $R$, можно обеспечить существование любого наперед заданного количества различных (не получающихся друг из друга поворотом) решений. Аналогичный эффект наблюдается для более общей нелинейности $f$ в (13) при выполнении некоторых структурных условий.

Впервые эффект множественности положительных решений задачи (13) был открыт Ч. Коффманом (C.V. Coffman) [22] при $n = 2$. Затем этот эффект разрабатывался несколькими исследователями в многомерном случае (как ни удивительно, наиболее трудным оказался случай $n = 3$). Назаров [144] получил аналогичные результаты для уравнения с оператором $p$-лапласиана (4) в левой части уравнения (13). Для ряда других краевых задач эффект множественности был исследован им и его учениками [191], [113], [111], [112], [110], [150], [29], [193]. Вариационный

[4]Отметим, что в основе этого результата лежит знаменитый **метод движущихся плоскостей (moving plane method)**, впервые примененный А.Д. Александровым [77] в задаче о характеризации сферы свойством постоянства ее средней кривизны. Хотя Александров прежде всего известен как геометр, ему принадлежат несколько выдающихся результатов в области УрЧП, описание которых можно найти в обзоре [87].

[5]При $q \geq \frac{2n}{n-2}$ некоторые из этих решений по-прежнему существуют, в то время как в шаре $\Omega = B_R$ эта задача решений не имеет [174].

метод построения решений с различными симметриями для квазилинейных уравнений во всем пространстве был предложен в [41].

С проблемой множественности решений тесно связаны вопросы о симметрии решений симметричных вариационных задач и о потере симметрии решений при изменении параметров задачи. Эти вопросы оказываются нетривиальными, а ответы подчас неожиданными даже в одномерном случае. Например, потеря симметрии экстремали в одномерном обобщенном неравенстве Пуанкаре

$$\|u\|_{L^q(-1,1)} \leq \lambda(p,q,r)\|u'\|_{L^p(-1,1)}, \qquad \int\limits_{-1}^{1} |u(x)|^{r-2}u(x)\,dx = 0 \tag{14}$$

(здесь $1 \leq p, q, r \leq \infty$; при $r = \infty$ последнее соотношение понимается в предельном смысле) исследовалась многими авторами, включая таких известных специалистов, как Б. Дакоронья (B. Dacorogna) и Б. Каволь (B. Kawohl). Окончательные результаты здесь были получены А.И. Назаровым с соавторами [103], [142], [105]. Именно, при выполнении неравенства $q \leq (2r-1)p$ точная константа в (14) не зависит от $r$, выписывается явно и достигается на нечетной функции, выражаемой в квадратурах. Если же $q > (2r-1)p$, то соответствующая экстремальная функция симметрией не обладает и точная константа в явном виде не выписывается.

Потеря симметрии решений как в одномерных, так и в многомерных задачах изучалась в работах Назарова и его учеников [136], [138], [140], [159], [192], [134]. Обзор результатов о симметрии и асимметрии экстремалей одномерных задач содержится в [68].

К проблемам симметрии экстремалей примыкают задачи об определении точных констант в интегральных неравенствах и о монотонности различных функционалов при перестановках функций (теоремы типа Пойа–Сеге). Из работ первого направления отметим [137], [145], [153], [65], [157], [69], [55], [23], а также обзор [39]. Необходимые и достаточные условия выполнения неравенства Пойа–Сеге для новых классов функционалов были получены в работах [102], [15], [100], [101], [16].

Еще один цикл работ А.И. Назарова с соавторами связан с разрешимостью краевых задач вариационной структуры с "критическим" ростом правой части, когда стандартные теоремы существования не работают, и результат коренным образом зависит от геометрии области (ср. замечание в сноске 5). Из работ этого цикла отметим [146], [106], [107], [66], [67], [149], [63] и обзор [61].

Интересные приложения нашли вариационные методы в задачах теории случайных процессов и математической статистики. Работы по этой тематике [151], [42], [158] были выполнены совместно с представителями вероятностной школы СПбГУ.

В последние десятилетия существенно вырос интерес к уравнениям с нелокальными операторами типа дробных лапласианов, количество работ в мире по этому направлению исчисляется уже сотнями. Начиная с 2014 года, А.И. Назаров в сотрудничестве с итальянским математиком Р. Мусиной (R. Musina) получил ряд основополагающих результатов о качественных свойствах различных дробных лапласианов, в том числе для весьма трудного случая операторов порядка большего единицы ([45], [48], [49], [52], [53], [58], [44], [64]). Для некоторых классов квазилинейных уравнений и вариационных неравенств с дробными операторами ими установлены неулучшаемые результаты о разрешимости, а также получены важные теоремы о качественных свойствах решений ([47] [59] [50], [54], [56]). Для дробных аналогов классических неравенств Харди-Соболева получены результаты о точных константах и их достижимости/недостижимости ([46], [51], [57]). Результаты о сравнении дробных лапласианов вошли в приглашенный доклад Назарова на Международном Математическом конгрессе 2022 года. Вариационные задачи, связанные с дробными лапласианами, исследуются также его учениками ([187], [188], [75], [189], [194], [160], [190], [70]).

### Литература


[1] Allaire G. Shape optimization by the homogenization method. — Springer-Verlag, New York, 2002. — Vol. 146 of Applied Mathematical Sciences. — https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9286-6.

[2] Apushkinskaya D., Bildhauer M., Fuchs M. Steady states of anisotropic generalized Newtonian fluids // J. Math. Fluid Mech. — 2005. — Vol. 7, no. 2. — P. 261–297. — https://doi.org/10.1007/s00021-004-0118-6.

[3] Apushkinskaya D., Fuchs M. Partial regularity for higher order variational problems under anisotropic growth conditions // Ann. Acad. Sci. Fenn. Math. — 2007. — Vol. 32, no. 1. — P. 199–214.

[4] Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. Hölder estimates of solutions to initial-boundary value problems for parabolic equations of nondivergent form with Wentzel boundary condition // Nonlinear evolution equations. — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995. — Vol. 164 of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — P. 1–13. — https://doi.org/10.1090/trans2/164/01.

[5] Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. A survey of results on nonlinear Venttsel problems // Appl. Math. — 2000. — Vol. 45, no. 1. — P. 69–80. — https://doi.org/10.1023/A:1022288717033.

[6] Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. Linear two-phase Venttsel problems // Ark. Mat. — 2001. — Vol. 39, no. 2. — P. 201–222. — https://doi.org/10.1007/BF02384554.

[7] Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. A counterexample to the Hopf-Oleinik lemma (elliptic case) // Anal. PDE. — 2016. — Vol. 9, no. 2. — P. 439–458. — https://doi.org/10.2140/apde.2016.9.439.

[8] Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I. On the boundary point principle for divergence-type equations // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. — 2019. — Vol. 30, no. 4. — P. 677–699. — https://doi.org/10.4171/RLM/867.

[9] Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I., Palagachev D.K., Softova L.G. Elliptic Venttsel problems with $VMO$ coefficients // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Lincei Mat. Appl. — 2020. — Vol. 31, no. 2. — P. 391–399. — https://doi.org/10.4171/rlm/896.

[10] Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I., Palagachev D.K., Softova L.G. $L^p$-theory of Venttsel BVPs with discontinuous data // Atti Accad. Peloritana Pericolanti Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. — 2020. — Vol. 98, no. suppl. 2. — P. A1, 16. — https://doi.org/10.1478/AAPP.98S2A1.

[11] Apushkinskaya D.E., Nazarov A.I., Palagachev D.K., Softova L.G. Venttsel boundary value problems with discontinuous data // SIAM J. Math. Anal. — 2021. — Vol. 53, no. 1. — P. 221–252. — https://doi.org/10.1137/19M1286839.

[12] Apushkinskaya D.E., Repin S.I. Thin obstacle problem: estimates of the distance to the exact solution // Interfaces Free Bound. — 2018. — Vol. 20, no. 4. — P. 511–531. — https://doi.org/10.4171/IFB/410.

[13] Apushkinskaya D., Repin S. Functional a posteriori error estimates for the parabolic obstacle problem // Comput. Methods Appl. Math. — 2022. — Vol. 22, no. 2. — P. 259–276. — https://doi.org/10.1515/cmam-2021-0156.

[14] Arkhipova A., Uraltseva N. Sharp estimates for solutions of a parabolic Signorini problem // Math. Nachr. — 1996. — Vol. 177. — P. 11–29. — https://doi.org/10.1002/mana.19961770103.

[15] Bankevich S.V., Nazarov A.I. On monotonicity of some functionals under rearrangements // Calc. Var. Partial Differential Equations. — 2015. — Vol. 53, no. 3-4. — P. 627–647. — https://doi.org/10.1007/s00526-014-0761-6.

[16] Bankevich S.V., Nazarov A.I. On monotonicity of some functionals with variable exponent under symmetrization // Appl. Anal. — 2019. — Vol. 98, no. 1-2. — P. 362–373. — https://doi.org/10.1080/00036811.2018.1437420.

[17] Baroni P., Colombo G., Mingione G. Nonautonomous functionals, borderline cases and related function classes // Алгебра и анализ. — 2015. — Vol. 27, no. 3. — P. 118–151.

[18] Bildhauer M., Fuchs M., Osmolovskii V.G. The effect of a penalty term involving higher order derivatives on the distribution of phases in an elastic medium with a two-well elastic potential // Math. Methods Appl. Sci. — 2002. — Vol. 25, no. 4. — P. 289–308. — https://doi.org/10.1002/mma.287.

[19] Bildhauer M., Fuchs M., Osmolovskii V. The effect of a surface energy term on the distribution of phases in an elastic medium with a two-well elastic potential // Math. Methods Appl. Sci. — 2002. — Vol. 25, no. 2. — P. 149–178. — https://doi.org/10.1002/mma.282.

[20] Bombieri E., De Giorgi E., Miranda M. Una maggiorazione a priori relativa alle ipersuperfici minimali non parametriche // Arch. Rational Mech. Anal. — 1969. — Vol. 32. — P. 255–267. — (In Italian). https://doi.org/10.1007/BF00281503.

[21] Cao D., Ibraguimov A., Nazarov A.I. Mixed boundary value problems for non-divergence type elliptic equations in unbounded domains // Asymptot. Anal. — 2018. — Vol. 109, no. 1-2. — P. 75–90. — https://doi.org/10.3233/asy-181469.

[22] Coffman C.V. A nonlinear boundary value problem with many positive solutions // J. Differential Equations. — 1984. — Vol. 54, no. 3. — P. 429–437. — https://doi.org/10.1016/0022-0396(84)90153-0.

[23] Cora G., Musina R., Nazarov A.I. Hardy type inequalities with mixed weights in cones. — 2023. — arxiv : math.AP/2305.05034v1.

[24] Creo S., Lancia M.R., Nazarov A.I. Regularity results for nonlocal evolution Venttsel' problems // Fract. Calc. Appl. Anal. — 2020. — Vol. 23, no. 5. — P. 1416–1430. — https://doi.org/10.1515/fca-2020-0070.

[25] Creo S., Lancia M.R., Nazarov A., Vernole P. On two-dimensional nonlocal Venttsel' problems in piecewise smooth domains // Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2019. — Vol. 12, no. 1. — P. 57–64. — https://doi.org/10.3934/dcdss.2019004.

[26] De Filippis C., Mingione G. A borderline case of Calderón-Zygmund estimates for nonuniformly elliptic problems // Алгебра и анализ. — 2019. — Vol. 31, no. 3. — P. 82–115.

[27] De Giorgi E. Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari // Mem. Accad. Sci. Torino. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (3). — 1957. — Vol. 3. — P. 25–43. — (In Italian).

[28] De Giorgi E. Un esempio di estremali discontinue per un problema variazionale di tipo ellittico // Boll. Un. Mat. Ital. (4). — 1968. — Vol. 1. — P. 135–137. — (In Italian).

[29] Enin A. Multiplicity of positive solutions for a critical quasilinear Neumann problem // Arch. Math. (Basel). — 2017. — Vol. 109, no. 3. — P. 263–272. — https://doi.org/10.1007/s00013-017-1064-x.

[30] Fuchs M., Osmolovski V. Variational integrals on Orlicz-Sobolev spaces // Z. Anal. Anwendungen. — 1998. — Vol. 17, no. 2. — P. 393–415. — https://doi.org/10.4171/ZAA/829.

[31] Gidas B., Ni W.M., Nirenberg L. Symmetry and related properties via the maximum principle // Commun. Math. Phys. — 1979. — Vol. 68, no. 3. — P. 209–243.

[32] Giusti E., Miranda M. Un esempio di soluzioni discontinue per un problema di minimo relativo ad un integrale regolare del calcolo delle variazioni // Boll. Un. Mat. Ital. (4). — 1968. — Vol. 1. — P. 219–226. — (In Italian).

[33] Ibraguimov A., Nazarov A.I. On Phragmén-Lindelöf principle for non-divergence type elliptic equations and mixed boundary conditions // Mat. Fiz. Komp'yut. Model. — 2017. — no. 3(40). — P. 65–76. — https://doi.org/10.15688/mpcm.jvolsu.2017.3.5.

[34] Kozlov V., Nazarov A. The Dirichlet problem for non-divergence parabolic equations with discontinuous in time coefficients // Math. Nachr. — 2009. — Vol. 282, no. 9. — P. 1220–1241. — https://doi.org/10.1002/mana.200910796.

[35] Kozlov V., Nazarov A. The Dirichlet problem for non-divergence parabolic equations with discontinuous in time coefficients in a wedge // Math. Nachr. — 2014. — Vol. 287, no. 10. — P. 1142–1165. — https://doi.org/10.1002/mana.201100352.

[36] Kozlov V., Nazarov A. Oblique derivative problem for non-divergence parabolic equations with time-discontinuous coefficients // Proceedings of the St. Petersburg Mathematical Society. Vol. XV. Advances in mathematical analysis of partial differential equations. — Amer. Math. Soc., Providence, RI. — 2014. — Vol. 232 of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — P. 177–191. — https://doi.org/10.1090/trans2/232/10.

[37] Kozlov V., Nazarov A. Oblique derivative problem for non-divergence parabolic equations with time-discontinuous coefficients in a wedge // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — Vol. 435, no. 1. — P. 210–228. — https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2015.10.029.

[38] Kozlov V., Nazarov A. A comparison theorem for nonsmooth nonlinear operators // Potential Anal. — 2021. — Vol. 54, no. 3. — P. 471–481. — https://doi.org/10.1007/s11118-020-09834-8.

[39] Kuznetsov N., Nazarov A. Sharp constants in the Poincaré, Steklov and related inequalities (a survey) // Mathematika. — 2015. — Vol. 61, no. 2. — P. 328–344. — https://doi.org/10.1112/S0025579314000229.

[40] Ladyzhenskaya O. A., Uraltseva N. N. Local estimates for gradients of solutions of non-uniformly elliptic and parabolic equations // Comm. Pure Appl. Math. — 1970. — Vol. 23. — P. 677–703. — https://doi.org/10.1002/cpa.3160230409.

[41] Lerman L.M., Naryshkin P.E., Nazarov A.I. Abundance of entire solutions to nonlinear elliptic equations by the variational method // Nonlinear Anal. — 2020. — Vol. 190. — P. 111590, 21. — https://doi.org/10.1016/j.na.2019.111590.

[42] Lifshits M., Nazarov A., Nikitin Ya. Tail behavior of anisotropic norms for Gaussian random fields // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 2003. — Vol. 336, no. 1. — P. 85–88. — https://doi.org/10.1016/S1631-073X(02)00013-4.

[43] The Maz'ya anniversary collection. Vol. 1: On Maz'ya's work in functional analysis, partial differential equations and applications. Based on talks given at the conference, Rostock, Germany, August 31–September 4, 1998 / ed. by Rossmann J., Takač P., Wildenhain G. — Birkhäuser, Basel, 1999. — Vol. 109 of Oper. Theory Adv. Appl.

[44] Musina R., Nazarov A.I. Fractional operators as traces of operator-valued curves. — 2022. — arxiv : math.AP/2208.06873v1.

[45] Musina R., Nazarov A.I. On fractional Laplacians // Comm. Partial Differential Equations. — 2014. — Vol. 39, no. 9. — P. 1780–1790. — https://doi.org/10.1080/03605302.2013.864304.

[46] Musina R., Nazarov A.I. On the Sobolev and Hardy constants for the fractional Navier Laplacian // Nonlinear Anal. — 2015. — Vol. 121. — P. 123–129. — https://doi.org/10.1016/j.na.2014.09.021.

[47] Musina R., Nazarov A.I. Non-critical dimensions for critical problems involving fractional Laplacians // Rev. Mat. Iberoam. — 2016. — Vol. 32, no. 1. — P. 257–266. — https://doi.org/10.4171/RMI/885.

[48] Musina R., Nazarov A.I. On fractional Laplacians—2 // Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire. — 2016. — Vol. 33, no. 6. — P. 1667–1673. — https://doi.org/10.1016/j.anihpc.2015.08.001.

[49] Musina R., Nazarov A.I. On fractional Laplacians—3 // ESAIM Control Optim. Calc. Var. — 2016. — Vol. 22, no. 3. — P. 832–841. — https://doi.org/10.1051/cocv/2015032.

[50] Musina R., Nazarov A.I. Variational inequalities for the spectral fractional Laplacian // Comp. Math. and Math. Phys. — 2017. — Vol. 57, no. 3. — P. 373–386. — https://doi.org/10.1134/S0965542517030113.

[51] Musina R., Nazarov A.I. Fractional Hardy-Sobolev inequalities on half spaces // Nonlinear Anal. — 2019. — Vol. 178. — P. 32–40. — https://doi.org/10.1016/j.na.2018.07.002.

[52] Musina R., Nazarov A.I. Strong maximum principles for fractional Laplacians // Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2019. — Vol. 149, no. 5. — P. 1223–1240. — https://doi.org/10.1017/prm.2018.81.

[53] Musina R., Nazarov A.I. A note on truncations in fractional Sobolev spaces // Bull. Math. Sci. — 2019. — Vol. 9, no. 1. — P. 1950001, 7. — https://doi.org/10.1142/S1664360719500012.

[54] Musina R., Nazarov A.I. A tool for symmetry breaking and multiplicity in some nonlocal problems // Math. Methods Appl. Sci. — 2020. — Vol. 43, no. 16. — P. 9345–9357. — https://doi.org/10.1002/mma.6220.

[55] Musina R., Nazarov A.I. A weighted estimate for generalized harmonic extensions // Math. Inequal. Appl. — 2020. — Vol. 23, no. 2. — P. 419–424. — https://doi.org/10.7153/mia-2020-23-32.

[56] Musina R., Nazarov A.I. Complete classification and nondegeneracy of minimizers for the fractional Hardy-Sobolev inequality, and applications // J. Differential Equations. — 2021. — Vol. 280. — P. 292–314. — https://doi.org/10.1016/j.jde.2021.01.022.

[57] Musina R., Nazarov A.I. Sobolev inequalities for fractional Neumann Laplacians on half spaces // Adv. Calc. Var. — 2021. — Vol. 14, no. 1. — P. 127–145. — https://doi.org/10.1515/acv-2018-0020.

[58] Musina R., Nazarov A.I. A note on higher order fractional Hardy-Sobolev inequalities // Nonlinear Anal. — 2021. — Vol. 203. — P. Paper No. 112168, 3. — https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112168.

[59] Musina R., Nazarov A.I., Sreenadh K. Variational inequalities for the fractional Laplacian // Potential Anal. — 2017. — Vol. 46, no. 3. — P. 485–498. — https://doi.org/10.1007/s11118-016-9591-9.

[60] Nash J. Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations // Amer. J. Math. — 1958. — Vol. 80. — P. 931–954. — https://doi.org/10.2307/2372841.

[61] Nazarov A.I. Dirichlet and Neumann problems to critical Emden-Fowler type equations // J. Global Optim. — 2008. — Vol. 40, no. 1-3. — P. 289–303. — https://doi.org/10.1007/s10898-007-9193-6.

[62] Nazarov A.I. A centennial of the Zaremba-Hopf-Oleinik lemma // SIAM J. Math. Anal. — 2012. — Vol. 44, no. 1. — P. 437–453. — https://doi.org/10.1137/110821664.

[63] Nazarov A.I. On the Dirichlet problem generated by the Maz'ya-Sobolev inequality // Calc. Var. Partial Differential Equations. — 2014. — Vol. 49, no. 1-2. — P. 369–389. — https://doi.org/10.1007/s00526-012-0586-0.

[64] Nazarov A.I. On comparison of fractional Laplacians // Nonlinear Anal. — 2022. — Vol. 218. — P. Paper No. 112790, 7. — https://doi.org/10.1016/j.na.2022.112790.

[65] Nazarov A.I., Repin S.I. Exact constants in Poincaré type inequalities for functions with zero mean boundary traces // Math. Methods Appl. Sci. — 2015. — Vol. 38, no. 15. — P. 3195–3207. — https://doi.org/10.1002/mma.3290.

[66] Nazarov A., Reznikov A. Attainability of infima in the critical Sobolev trace embedding theorem on manifolds // Nonlinear partial differential equations and related topics. — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2010. — Vol. 229 of Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. — P. 197–210. — https://doi.org/10.1090/trans2/229/12.

[67] Nazarov A.I., Reznikov A.B. On the existence of an extremal function in critical Sobolev trace embedding theorem // J. Funct. Anal. — 2010. — Vol. 258, no. 11. — P. 3906–3921. — https://doi.org/10.1016/j.jfa.2010.02.018.

[68] Nazarov A.I., Shcheglova A.P. Steklov-type 1D inequalities (a survey). — 2021. — arxiv : math.AP/2101.10752v1.

[69] Nazarov A.I., Shcheglova A.P. On the sharp constant in the "magnetic" 1D embedding theorem // Russ. J. Math. Phys. — 2018. — Vol. 25, no. 1. — P. 67–72. — https://doi.org/10.1134/S1061920818010065.

[70] Nazarov A.I., Shcheglova A.P. Solutions with various structures for semilinear equations in $\mathbb{R}^n$ driven by fractional Laplacian // Calc. Var. Partial Differential Equations. — 2023. — Vol. 62, no. 4. — P. Paper No. 112, 31. — https://doi.org/10.1007/s00526-023-02453-2.

[71] Osmolovskii V.G. Boundary value problems with free surfaces in the theory of phase transitions // Differ. Equ. — 2017. — Vol. 53, no. 13. — P. 1734–1763. — https://doi.org/10.1134/s0012266117130043.

[72] Osmolovskij V. G. Phase transition in the mechanics of continuous media for big loading // Math. Nachr. — 1996. — Vol. 177. — P. 233–250. — https://doi.org/10.1002/mana.19961770113.

[73] Uraltseva N.N. Estimates of derivatives of solutions of elliptic and parabolic inequalities // Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Berkeley, Calif., 1986). — Amer. Math. Soc., Providence, RI. — 1987. — P. 1143–1149.

[74] Uraltseva N.N. Gradient estimates for solutions of nonlinear parabolic oblique boundary problem // Geometry and nonlinear partial differential equations (Fayetteville, AR, 1990). — Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992. — Contemp. Math. — P. 119–130. — https://doi.org/10.1090/conm/127/1155414.

[75] Ustinov N. The effect of curvature in fractional Hardy-Sobolev inequality involving the spectral Dirichlet Laplacian // Trans. Amer. Math. Soc. — 2020. — Vol. 373, no. 11. — P. 7785–7815. — Access mode: https://doi.org/10.1090/tran/8124.

[76] Агранович М.С., Бураго Ю.Д., Вайнберг Б.Р., Вишик М.И., Гиндикин С.Г., Кондратьев В.А., Маслов В.П., Поборчий С.В., Решетняк Ю.Г., Хавин В.П., Шубин М.А. Владимир Гилелевич Мазья (к 70-летию со дня рождения) // УМН. — 2008. — Т. 63, № 1(379). — С. 183–189. — https://doi.org/10.4213/rm9127.

[77] Александров А.Д. Теоремы единственности для поверхностей “в целом”. V // Вестник ЛГУ. Сер. матем. мех. астроном. — 1958. — Т. 3, № 19(4). — С. 5–8.

[78] Анолик М.В., Апушкинская Д., Архипова А.А., Бураго Ю.Д., Демьянович Ю.К., Ибрагимов И.А., Кисляков С.В., Леонов Г.А., Мишурис Г., Мовчан А., Морозов Н.Ф., Назаров А.И., Нивс М., Романовский И.В., Слепян Л., Слисенко А.О., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. К юбилею Владимира Гилелевича Мазьи // Вестник СПбГУ. Сер. матем. мех. астроном. — 2018. — Т. 5 (63), № 3. — С. 524–526.

[79] Анолик М.В., Ю.Д. Бураго, Демьянович Ю.К., Кисляков С.В., Леонов Г.А., Морозов Н.Ф., Поборчий С.В., Уральцева Н.Н., Хавин В.П., Широков Н.А. Владимир Гилелевич Мазья (к семидесятилетию) // Вестник СПбГУ. Сер.1, матем. мех. астроном. — 2008. — Vol. 53, no. 4. — P. 3–6.

[80] Апушкинская Д.Е. Оценка максимума решений параболических уравнений с граничным условием Вентцеля // Вестн. ЛГУ. Сер. 1, матем. мех. астроном. — 1991. — Т. 36, № 2 (8). — С. 3–12.

[81] Апушкинская Д.Е., Билдгауэр М., Фукс М. Внутренние оценки градиента функции, локально минимизирующей вариационный интеграл при нестандартных условиях роста // Проблемы мат. анализа. — 2009. — № 43. — С. 35–50.

[82] Апушкинская Д.Е., Билдгауэр М., Фукс М. О локальном обобщенном решении и локальном тензоре напряжений вариационной задачи с интеграндом линейного роста // Проблемы мат. анализа. — 2010. — № 44. — С. 39–54.

[83] Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. Нестационарная задача Вентцеля с квадратичным ростом по градиенту // Проблемы мат. анализа. — 1995. — № 15. — С. 33–46.

[84] Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. Оценки на границе области градиента решения недивергентного параболического уравнения с “составной” правой частью и коэффициентами при младших производных // Проблемы мат. анализа. — 1995. — № 14. — С. 3–27.

[85] Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. Задача Дирихле для квазилинейных эллиптических уравнений в областях с гладкими замкнутыми ребрами // Проблемы мат. анализа. — 2000. — № 21. — С. 3–29.

[86] Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. Квазилинейные эллиптические двухфазные задачи Вентцеля в трансверсальном случае // Проблемы мат. анализа. — 2002. — № 24. — С. 3–28.

[87] Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. Лемма о нормальной производной и вокруг неё // УМН. — 2022. — Т. 77, № 2(464). — С. 3–68. — https://doi.org/10.4213/rm10049.

[88] Апушкинская Д.Е., Назаров А.И. Семинару имени В.И. Смирнова – 75 лет! // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2022. — Т. 519. — С. 5–9.

[89] Апушкинская Д.Е., Назаров А.И., Палагачев Д.К., Софтова Л.Г. Квазилинейная параболическая задача Вентцеля с разрывными старшими коэффициентами // Функц. анализ и его прил. — 2023. — Т. 57, № 2. — С. 93–99. — https://doi.org/110.4213/faa4098.

[90] Апушкинская Д.Е., Назаров А.И., Палагачев Д.К., Софтова Л.Г. Нестационарная задача Вентцеля со старшими коэффициентами из класса $VMO_x$ // Доклады РАН. — 2023. — Т. 510. — С. 13–17. — https://doi.org/10.31857/S2686954322600707.

[91] Апушкинская Д.Е., Репин С.И. Бигармоническая задача с препятствием: гарантированные и вычисляемые оценки ошибок для приближенных решений // Ж. вычисл. матем. и матем. физ. — 2020. — Т. 60, № 11. — С. 1881–1897. — https://doi.org/10.31857/S0044466920110034.

[92] Архипова А.А. О гладкости решений задачи с препятствием // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1973. — Т. 38. — С. 7–9.

[93] Архипова А.А. О наименьших суперрешениях для задачи с препятствием // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1973. — Т. 37, № 5. — С. 1155–1185.

[94] Архипова А.А. Задача с разрывным препятствием для равномерно эллиптических уравнений // Вестн. ЛГУ. Сер. 1, матем. мех. астроном. — 1974. — Т. 19, № 4 (19). — С. 154–155.

[95] Архипова А.А. О предельной гладкости решения задачи с двусторонним ограничением // Вестн. ЛГУ. Сер. 1, матем. мех. астроном. — 1984. — Т. 29, № 2 (7). — С. 7–9.

[96] Архипова А.А., Уральцева Н.Н. Регулярность решений диагональных эллиптических систем при выпуклых ограничениях на границе области // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1986. — Т. 152. — С. 5–17.

[97] Архипова А.А., Уральцева Н.Н. Предельная гладкость решений вариационных неравенств при выпуклых ограничениях на границе области // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1987. — Т. 163. — С. 5–16.

[98] Архипова А.А., Уральцева Н.Н. Регулярность решения задачи с двусторонним ограничением на границе для эллиптических и параболических уравнений // Тр. МИАН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 5–22.

[99] Архипова А.А., Уральцева Н.Н. О существовании гладких решений задач с выпуклыми ограничениями на границе области для параболических систем // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1989. — Т. 171. — С. 5–11.

[100] Банкевич С.В. О монотонности некоторых функционалов при монотонной перестановке по одной переменной // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 444. — С. 5–14.

[101] Банкевич С.В. О неравенстве Пойи–Сегё для функционалов с переменным показателем суммирования // Функц. анализ и его прил. — 2018. — Т. 52, № 1. — С. 56–60. — https://doi.org/10.4213/faa3523.

[102] Банкевич С.В., Назаров А.И. Об обобщении неравенства Пойа – Сеге для одномерных функционалов // Доклады РАН. — 2011. — Т. 438, № 1. — С. 11–13.

[103] Буслаев А.П., Кондратьев В.А., Назаров А.И. Об одном семействе экстремальных задач и связанных с ним свойствах одного интеграла // Матем. заметки. — 1998. — Т. 64, № 6. — С. 830–838.

[104] Вентцель А.Д. О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов // Теория вероятн. и ее примен. — 1959. — Т. 4, № 2. — С. 172–185.

[105] Герасимов И.В., Назаров А.И. О точной константе в трехпараметрическом неравенстве Пуанкаре // Проблемы мат. анализа. — 2011. — № 61. — С. 69–86.

[106] Демьянов А.В., Назаров А.И. О существовании экстремальной функции в теоремах вложения Соболева с предельным показателем // Алгебра и анализ. — 2005. — Т. 17, № 5. — С. 105–140.

[107] Демьянов А.В., Назаров А.И. О разрешимости задачи Дирихле для полулинейного уравнения Шредингера с сингулярным потенциалом // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2006. — Т. 336. — С. 25–45.

[108] Денисова И.В., Ладыженская О.А., Серёгин Г.А., Уральцева Н.Н., Фролова Е.В. К юбилею Всеволода Алексеевича Солонникова // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2003. — Т. 306. — С. 7–15.

[109] Денисова И.В., Пилецкас К.И., Репин С.И., Серёгин Г.А., Уральцева Н.Н., Фролова Е.В. К 75-летию Всеволода Алексеевича Солонникова // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2008. — Т. 362. — С. 5–14.

[110] Енин А.И., Назаров А.И. Множественность решений квазилинейной задачи Неймана в трехмерном случае // Проблемы мат. анализа. — 2015. — № 78. — С. 85–94.

[111] Колоницкий С.Б. Множественность решений задачи Дирихле для уравнения с $p$-лапласианом в трехмерном сферическом слое // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, № 3. — С. 206–221.

[112] Колоницкий С.Б. Множественность концентрирующихся на кривых положительных решений задачи Дирихле для уравнения с $p$-лапласианом // Функц. анализ и его прил. — 2015. — Т. 49, № 2. — С. 88–92. — https://doi.org/10.4213/faa3193.

[113] Колоницкий С.Б., Назаров А.И. Множественность решений задачи Дирихле для обобщенного уравнения Хенона // Проблемы мат. анализа. — 2007. — № 35. — С. 91–110.

[114] Крылов Н.В., Сафонов М.В. Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1980. — Т. 44, № 1. — С. 161–175.

[115] Ладыженская О.А. Первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений // Доклады Акад. Наук СССР. — 1956. — Т. 107. — С. 636–639.

[116] Ладыженская О.А. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: ГНФМЛ, 1961.

[117] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и казилинейные уравнения параболического типа. — М. : Наука, 1967.

[118] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М. : Наука, 1964.

[119] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — 2-е перераб. изд. — М. : Наука, 1973.

[120] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Оценка гельдеровской нормы решений квазилинейных эллиптических уравнений второго порядка общего вида // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1980. — Т. 96. — С. 161–168.

[121] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Об оценках $\max|u_x|$ для решений квазилинейных эллиптических и параболических уравнений общего вида и теоремах существования // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1984. — Т. 138. — С. 90–107.

[122] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Оценки константы Гельдера для функций, удовлетворяющих равномерно эллиптическому или равномерно параболическому квазилинейному неравенству с неограниченными коэффициентам // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1985. — Т. 147. — С. 72–94.

[123] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Обзор результатов по разрешимости краевых задач для равномерно эллиптических и параболических квазилинейных уравнений второго порядка, имеющих неограниченные особенности // УМН. — 1986. — Т. 41, № 5 (251). — С. 59–83.

[124] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Оценки на границе области первых производных функций, удовлетворяющих эллиптическому или параболическому неравенству // Тр. МИАН СССР. — 1988. — Т. 179. — С. 102–125.

[125] Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н. Локальные оценки градиентов решений простейшей регуляризации некоторого класса неравномерно эллиптических уравнений // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 1994. — Т. 213. — С. 75–92.

[126] Лукьянов В.В., Назаров А.И. Решение задачи Вентцеля для уравнения Лапласа и Гельмгольца с помощью повторных потенциалов // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 1998. — Т. 250. — С. 203–218. — Исправление: Зап. научн. сем. ПОМИ, Т. 324. 2005. С. 129–130.

[127] Мазья В.Г. Примеры нерегулярных решений квазилинейных эллиптических уравнений с аналитическими коэффициентами // Функц. анализ и его прил. — 1968. — Т. 2, № 3. — С. 53–57.

[128] Медведев К.М., Назаров А.И. Оценка Гельдера для решения дивергентного эллиптического уравнения на стратифицированном множестве. — 2023. — Препринт Санкт-Петербургского математического общества : 2023-02. http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/.

[129] Мироненко Ф.Д. Оценки максимума для решений эллиптического и параболического уравнений на стратифицированном множестве вида “книжка”. — 2023. — Препринт Санкт-Петербургского математического общества : 2023-03. http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/.

[130] Мироненко Ф.Д., Назаров А.И. Локальная оценка максимума типа Александрова–Бакельмана для решений эллиптических уравнений на стратифицированном множестве вида “книжка” // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2022. — Т. 519. — С. 105–113.

[131] Михайлов В.С. Задачи о фазовых переходах со специальными ограничениями // Проблемы мат. анализа. — 2002. — № 23. — С. 30–49.

[132] Михайлов А.С. Об определении коэффициента поверхностного натяжения в двухфазовых задачах теории упругости при условии несжимаемости или наличии жестких включений // Вестник СПбГУ. Сер. 1, матем. мех. астроном. — 2006. — Т. 51, № 3. — С. 24–34.

[133] Михайлов А.С., Михайлов В.С. Фазовые переходы в многофазовых средах // Проблемы мат. анализа. — 2000. — № 20. — С. 120–169.

[134] Мукосеева Е.В., Назаров А.И. О симметрии экстремали в некоторых теоремах вложения // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2014. — Т. 425. — С. 35–45. — Исправление: Зап. научн. сем. ПОМИ. Т. 489. 2020. С. 225.

[135] Назаров А.И. Гельдеровские оценки для ограниченных решений задач с наклонной производной для параболических уравнений недивергентной структуры // Проблемы мат. анализа. — 1990. — № 11. — С. 37–46.

[136] Назаров А.И. Об “одномерности” экстремали в неравенстве Пуанкаре на квадрате // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 1999. — Т. 259. — С. 167–181.

[137] Назаров А.И. О собственных функциях одной задачи Штурма–Лиувилля, связанной с обобщенными синусами Ляпунова // Дифференц. уравнения. — 2000. — Т. 36, № 7. — С. 1000.

[138] Назаров А.И. Об “одномерности” экстремали в неравенстве Фридрихса для сферического и плоского слоя // Проблемы мат. анализа. — 2000. — № 20. — С. 171–190.

[139] Назаров А.И. $L_p$-оценки решения задач Дирихле и Неймана для уравнения теплопроводности в клине с ребром произвольной коразмерности // Проблемы мат. анализа. — 2001. — № 22. — С. 126–159.

[140] Назаров А.И. О симметричности экстремали в весовой теореме вложения // Проблемы мат. анализа. — 2001. — № 23. — С. 50–75.

[141] Назаров А.И. Оценки максимума решений эллиптических и параболических уравнений через весовые нормы правой части // Алгебра и анализ. — 2001. — Т. 13, № 2. — С. 151–164.

[142] Назаров А.И. О точной константе в обобщенном неравенстве Пуанкаре // Проблемы мат. анализа. — 2002. — № 24. — С. 155–180.

[143] Назаров А.И. О нестационарной двухфазной задаче Вентцеля в трансверсальном случае // Проблемы мат. анализа. — 2004. — № 28. — С. 71–82.

[144] Назаров А.И. О решениях задачи Дирихле для уравнения, включающего $p$-лапласиан, в сферическом слое // Труды СПбМО. — Т. Рожковская, Новосибирск. — 2004. — Т. 10. — С. 33–62.

[145] Назаров А.И. О точных константах в одномерных теоремах вложения произвольного порядка // Вопросы современной теории аппроксимации. — Изд. СПбГУ, 2004. — С. 146–158.

[146] Назаров А.И. Неравенства Харди – Соболева в конусе // Проблемы мат. анализа. — 2005. — № 31. — С. 39–46.

[147] Назаров А.И. Принцип максимума А.Д. Александрова // Современная математика и ее приложения. — 2005. — Т. 29. — С. 127–143.

[148] Назаров А.И. Гёльдеровские оценки решений вырождающихся недивергентных эллиптических и параболических уравнений // Алгебра и анализ. — 2009. — Т. 21, № 4. — С. 174–195.

[149] Назаров А.И. Неравенства Харди–Соболева для следов в конусе // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, № 6. — С. 200–213.

[150] Назаров А.И., Нетеребский Б.О. Множественность положительных решений квазилинейного уравнения, порождаемого неравенством Ильина – Каффарелли – Кона – Ниренберга // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2016. — Т. 444. — С. 98–109.

[151] Назаров А.И., Никитин Я.Ю. Некоторые экстремальные задачи для гауссовых и эмпирических случайных полей // Труды СПбМО. — Научная книга, Новосибирск. — 2000. — Т. 8.

[152] Назаров А.И., Палецких А.А. О гельдеровости решений эллиптической задачи Вентцеля // Доклады РАН. — 2015. — Т. 465, № 5. — С. 532–536. — https://doi.org/10.7868/S0869565215350066.

[153] Назаров А.И., Петрова А.Н. О точных константах в некоторых теоремах вложения высокого порядка // Вестник СПбГУ. Сер. 1, матем. мех. астроном. — 2008. — Т. 53, № 4. — С. 16–20.

[154] Назаров А.И., Уральцева Н.Н. Выпукло-монотонные оболочки и оценка максимума решения параболического уравнения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1985. — Т. 147. — С. 95–109.

[155] Назаров А.И., Уральцева Н.Н. Задача с наклонной производной для квазилинейного параболического уравнения // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1992. — Т. 200. — С. 118–131.

[156] Назаров А.И., Уральцева Н.Н. Неравенство Гарнака и связанные с ним свойства решений эллиптических и параболических уравнений с бездивергентными младшими коэффициентами // Алгебра и анализ. — 2011. — Т. 23, № 1. — С. 136–168.

[157] Назаров А.И., Устинов Н.С. Об одном обобщении неравенства Харди // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2018. — Т. 477. — С. 112–118.

[158] Назаров А.И., Чирина А.В. О доступной локальной асимптотической эффективности некоторых критериев согласия // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2021. — Т. 501. — С. 218–235.

[159] Назаров А.И., Щеглова А.П. О некоторых свойствах экстремали в вариационной задаче, порожденной теоремой вложения Соболева // Проблемы мат. анализа. — 2004. — № 27. — С. 109–136.

[160] Назаров А.И., Щеглова А.П. Новые классы решений для полулинейных уравнений в $\mathbb{R}^n$ с дробным лапласианом // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2021. — Т. 508. — С. 124–133.

[161] Осмоловский В.Г. Теорема существования и слабая форма уравнений Лагранжа для вариационной задачи теории фазовых превращений // Сиб. матем. журн. — 1994. — Т. 35, № 4. — С. 835–846.

[162] Осмоловский В.Г. Сравнение двух способов учета поверхностной энергии в задаче о фазовых переходах в больших силовых полях // Проблемы мат. анализа. — 1999. — № 19. — С. 182–192.

[163] Осмоловский В.Г. Критерий слабой полунепрерывности снизу функционала энергии двухфазовой упругой среды // Проблемы мат. анализа. — 2003. — № 26. — С. 215–254.

[164] Осмоловский В.Г. Точные решения вариационной задачи теории фазовых переходов механики сплошных сред // Проблемы мат. анализа. — 2004. — № 27. — С. 171–206.

[165] Осмоловский В.Г. Изопериметрическое неравенство и состояния равновесия для двухфазовой среды // Проблемы мат. анализа. — 2007. — № 36. — С. 81–88.

[166] Осмоловский В.Г. Независимость температур фазовых переходов от области, занимаемой двухфазовой упругой средой // Проблемы мат. анализа. — 2012. — № 66. — С. 147–152.

[167] Осмоловский В.Г. Квазивыпуклая оболочка для однородной изотропной двухфазовой упругой среды и решения исходной и релаксированной задачи // Проблемы мат. анализа. — 2013. — № 70. — С. 161–170.

[168] Осмоловский В.Г. Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред // St. Petersburg Mathematical Society Preprint. http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/2014/index.html♯04. — 2014.

[169] Осмоловский В.Г. Квазистационарная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред. Одномерный случай. Нулевой коэффициент поверхностного натяжения // Проблемы мат. анализа. — 2015. — № 82. — С. 99–110.

[170] Осмоловский В.Г. Вычисление температур фазовых переходов для одной анизотропной модели двухфазовой упругой среды // Проблемы мат. анализа. — 2016. — № 84. — С. 151–160.

[171] Осмоловский В.Г. Математические вопросы теории фазовых переходов в механике сплошных сред // Алгебра и анализ. — 2017. — Т. 29, № 5. — С. 111–178.

[172] Осмоловский В.Г. Поведение решений односторонних вариационных задач о фазовых переходах в механике сплошных сред при больших температурах // Функц. анализ и его прил. — 2019. — Т. 53, № 4. — С. 38–51. — https://doi.org/10.4213/faa3650.

[173] Осмоловский В.Г. Одномерная задача о фазовых переходах в механике сплошных сред при непостоянной температуре // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2021. — Т. 508. — С. 134–146.

[174] Похожаев С.И. О собственных функциях уравнения $\Delta u + \lambda f(u) = 0$ // Доклады Акад. Наук СССР. — 1965. — Т. 165, № 1. — С. 36–39.

[175] Серёгин Г.А., Уральцева Н.Н. Ольга Александровна Ладыженская (к 80-летию со дня рождения) // УМН. — 2003. — Т. 58, № 2(350). — С. 181–206. — https://doi.org/10.4213/rm626.

[176] Смирнов В.И. (ред.). Математика в Петербургском – Ленинградском университете. — Изд-во Ленинградского ун-та, 1970.

[177] Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1950.

[178] Уральцева Н.Н. Вырождающиеся квазилинейные эллиптические системы // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1968. — Т. 7. — С. 184–222.

[179] Уральцева Н.Н. Разрешимость задачи о капиллярах // Вестн. ЛГУ. Сер. 1, матем. мех. астроном. — 1973. — Т. 18, № 19(4). — С. 54–64.

[180] Уральцева Н.Н. Разрешимость задачи о капиллярах. Ч. 2 // Вестн. ЛГУ. Сер. 1, матем. мех. астроном. — 1975. — Т. 20, № 1(1). — С. 143–149.

[181] Уральцева Н.Н. О сильных решениях обобщенной задачи Синьорини // Сиб. матем. журн. — 1978. — Т. 19, № 5. — С. 1204–1212.

[182] Уральцева Н.Н. Об оценках максимумов модулей градиентов для решений задач капиллярности // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1982. — Т. 115. — С. 274–284.

[183] Уральцева Н.Н. Непрерывность по Гёльдеру градиентов решений параболических уравнений при граничных условиях типа Синьорини // Доклады Акад. Наук СССР. — 1985. — Т. 280, № 3. — С. 563–565.

[184] Уральцева Н.Н. О регулярности решений вариационных неравенств // УМН. — 1987. — Т. 42, № 6 (258). — С. 151–174.

[185] Уральцева Н.Н. Нелинейная задача с косой производной для параболических уравнений // Зап. научн. сем. ЛОМИ. — 1991. — Т. 188. — С. 143–158.

[186] Уральцева Н.Н., Урдалетова А.Б. Ограниченность градиентов обобщенных решений вырождающихся неравномерно эллиптических квазилинейных уравнений // Вестн. ЛГУ. Сер. 1, матем. мех. астроном. — 1983. — Т. 28, № 19(4). — С. 50–56.

[187] Устинов Н.С. Множественность решений краевых задач с дробными лапласианами Дирихле и Навье // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2017. — Т. 459. — С. 104–126.

[188] Устинов Н.С. О достижимости точных констант в дробных неравенствах Харди–Соболева со спектральным лапласианом Дирихле // Функц. анализ и его прил. — 2019. — Т. 53, № 4. — С. 93–98. — https://doi.org/10.4213/faa3673.

[189] Устинов Н.С. О постоянстве экстремали в теореме вложения дробного порядка // Функц. анализ и его прил. — 2020. — Т. 54, № 4. — С. 85–97. — https://doi.org/10.4213/faa3828.

[190] Устинов Н.С. О разрешимости полулинейной задачи со спектральным дробным лапласианом Неймана и критической правой частью // Алгебра и анализ. — 2021. — Т. 33, № 1. — С. 194–212.

[191] Щеглова А.П. Множественность решений одной краевой задачи с нелинейным условием Неймана // Проблемы мат. анализа. — 2005. — № 30. — С. 121–144.

[192] Щеглова А.П. Задача Неймана для полулинейного эллиптического уравнения в тонком цилиндре. Решения с наименьшей энергией // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2007. — Т. 348. — С. 272–302.

[193] Щеглова А.П. Задача Неймана для обобщенного уравнения Хенона // Проблемы мат. анализа. — 2018. — № 95. — С. 103–114.

[194] Щеглова А.П. Множественность положительных решений для обобщенного уравнения Хенона с дробным лапласианом // Зап. научн. сем. ПОМИ. — 2020. — Т. 489. — С. 207–224.