Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 11 декабря 2023 г.
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Высокочастотное усреднение многомерных гиперболических уравнений[1,2]

Дородный М. А.[3]

Аннотация

Рассматривается действующий в $L_2(\mathbb{R}^d)$ эллиптический дифференциальный оператор $\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g(\mathbf{x}/\varepsilon)\nabla + \varepsilon^{-2}V(\mathbf{x}/\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, с периодическими коэффициентами. Для гиперболических уравнений с оператором $\mathcal{A}_\varepsilon$ изучаются аналоги задач усреднения, связанные с произвольной точкой дисперсионного соотношения оператора $\mathcal{A}_1$ (т. н. высокочастотное усреднение). Получены аппроксимации при малых ε по $L_2(\mathbb{R}^d)$-норме решений задач Коши для этих уравнений со специальными начальными данными.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, гиперболические уравнения, спектральные зоны, усреднение, эффективный оператор, операторные оценки погрешности.

Введение

0.1. Усреднение. Изучение распространения волн в периодических структурах представляет значительный интерес как для приложений, так и в теоретическом плане. Численное моделирование таких процессов зачастую является трудоёмким, поэтому один из подходов к этим задачам — применение теории усреднения. Цель усреднения — свести изучение сильно неоднородной среды с быстро осциллирующими характеристиками к изучению некоторой эквивалентной однородной среды с эффективными параметрами, которая является хорошим приближением. Теории усреднения посвящена обширная литература; укажем в первую очередь книги [1–3].

Обсудим типичную задачу теории усреднения. Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решётки Γ. Для любой Γ-периодической функции $F(\mathbf{x})$ введём обозначение $F^\varepsilon(\mathbf{x}) := F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$ — (малый) параметр. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим дифференциальный оператор (ДО), формально заданный выражением

$$\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla, \tag{0.1}$$

где $g(\mathbf{x})$ — эрмитова $(d \times d)$-матрица-функция периодическая относительно решётки Γ, ограниченная и положительно определённая. Оператор (0.1) моделирует простейшие случаи

[1] Представлено Т. А. Суслиной.

[2] Работа выполнена в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2022-287 от 06.04.2022).

[3] Санкт-Петербургский государственный университет; 199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7/9; e-mail: mdorodni@yandex.ru.

микронеоднородных сред с $\varepsilon\Gamma$-периодической структурой. Пусть $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ — (слабое) решение эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \tag{0.2}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. При $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится к решению u_0 "усреднённого" уравнения

$$-\operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}). \tag{0.3}$$

Оператор $\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} = -\operatorname{div} g^0\nabla$ называется эффективным оператором для $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon$. Матрица g^0 определяется по хорошо известной процедуре (см., например, [1, глава 2, § 3], [4, глава 3, § 1]), согласно которой требуется решить вспомогательную краевую задачу на ячейке Ω. Помимо определения эффективных коэффициентов интерес представляют следующие вопросы. *Каков характер сходимости $u_\varepsilon \to u_0$? Какова оценка погрешности $u_\varepsilon - u_0$?*

0.2. Операторные оценки погрешности при усреднении. М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной (см. [4]) был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода), основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений.

Пусть u_ε — решение уравнения (0.2), u_0 — решение уравнения (0.3). В [4] было доказано, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.4}$$

Поскольку $u_\varepsilon = (\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}f$, $u_0 = (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}f$, оценку (0.4) можно переписать в операторных терминах:

$$\|(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1} - (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.5}$$

Для параболических уравнений имеет место аналогичный результат (см. [5,6]). В операторных терминах речь идёт об аппроксимации полугруппы $e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$, $\tau > 0$:

$$\|e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-\tau\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(\tau + \varepsilon^2)^{-1/2}, \qquad \tau > 0. \tag{0.6}$$

Оценки (0.5), (0.6) точны по порядку; константы C контролируются явно в терминах данных задачи. Такие оценки называются *операторными оценками погрешности* в задачах усреднения. Более точные аппроксимации резольвенты и экспоненты при учёте следующих членов асимптотики (т. н. корректоров) были найдены в работах [7–10].

Другой подход к получению операторных оценок погрешности ("метод сдвига") для эллиптических и параболических задач был предложен В. В. Жиковым и С. Е. Пастуховой в работах [11–13]. См. также обзор [14].

С усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа дело обстоит несколько иначе. Им были посвящены статьи [15–23]. В операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, где $\tau \in \mathbb{R}$, соответственно. Для этих оператор-функций уже не удаётся получить аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$, а приходится рассматривать норму операторов, действующих из пространства Соболева $H^q(\mathbb{R}^d)$ (с подходящим q) в $L_2(\mathbb{R}^d)$. В [15] были получены точные по порядку оценки

$$\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon, \tag{0.7}$$

$$\|\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1 + |\tau|)\varepsilon. \tag{0.8}$$

В работе [16] был получен аналогичный результат для оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$:

$$\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.9}$$

Кроме того, в [16] получена аппроксимация оператора $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ при учёте корректора по $(H^2\to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ при фиксированном τ. Далее, в [17–20] была доказана точность этих результатов как по типу операторной нормы, так и относительно зависимости от τ (при больших τ). С другой стороны, было установлено, что при некоторых дополнительных предположениях (например, если матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вещественные элементы) оценки (0.7)–(0.9) допускают улучшения:

$$\begin{aligned}
\|e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon} - e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon,\\
\|\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon, &(0.10)\\
\|\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2}) - (\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} &\leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon. &(0.11)
\end{aligned}$$

Более точные аппроксимации с учётом корректоров для операторов $e^{-i\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$, $\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon^{1/2})$ были получены в [21–23].

Отметим, что в работах [4–10, 15–23] изучался гораздо более общий, чем (0.1), класс операторов (включающий в себя матричные ДО). В частности, рассматривались операторы вида

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div}\check{g}^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla + \varepsilon^{-2}V^\varepsilon(\mathbf{x}). \tag{0.12}$$

Здесь $\check{g}(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая положительно определённая и ограниченная $(d\times d)$-матрица-функция с вещественными элементами, потенциал $V(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая вещественнозначная функция, $V\in L_p(\Omega)$ с подходящим p (и предполагается, что $\inf\operatorname{spec}\mathcal{A}_1 = 0$). Для оператора (0.12) невозможно найти оператор с постоянными коэффициентами $\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}$ такой, чтобы соответствующие оператор-функции сходились к оператор-функциям от $\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}$. Однако, можно найти приближения, если "окаймить" оператор-функции от $\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}$ подходящими быстро осциллирующими множителями. Так, например, аналог оценки (0.5) выглядит следующим образом:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - [\omega^\varepsilon](\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}[\omega^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon,$$

где $\omega(\mathbf{x})$ — положительное Γ-периодическое решение уравнения

$$-\operatorname{div}\check{g}(\mathbf{x})\nabla\omega(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x}) = 0$$

с нормировкой $\|\omega\|^2_{L_2(\Omega)} = |\Omega|$, а $\widehat{\mathcal{A}}^{\mathrm{hom}}$ — эффективный оператор для оператора (0.1) с матрицей $g(\mathbf{x}) = \check{g}(\mathbf{x})\omega^2(\mathbf{x})$.

Объясним метод на примере аппроксимации резольвенты оператора (0.1). Применение масштабного преобразования сводит вопрос об изучении поведения оператора $(\widehat{\mathcal{A}}_\varepsilon + I)^{-1}$, $\varepsilon\to 0$, к изучению оператора $(\widehat{\mathcal{A}} + \varepsilon^2 I)^{-1}$, где $\widehat{\mathcal{A}} := \widehat{\mathcal{A}}_1 = -\operatorname{div} g(\mathbf{x})\nabla$. Далее, с помощью теории Флоке–Блоха оператор $\widehat{\mathcal{A}}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$, действующим в пространстве $L_2(\Omega)$. Оператор $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ задаётся дифференциальным выражением $-\operatorname{div}_{\mathbf{k}} g(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{k}}$, где $\nabla_{\mathbf{k}} = \nabla + i\mathbf{k}$, $\operatorname{div}_{\mathbf{k}} = \operatorname{div} + i\langle\mathbf{k},\cdot\rangle$, при периодических граничных условиях. Параметр $\mathbf{k}$ называют *квазиимпульсом*. Спектр оператора $\widehat{\mathcal{A}}(\mathbf{k})$ дискретен. Оказывается, что поведение оператора $(\widehat{\mathcal{A}} + \varepsilon^2 I)^{-1}$ описывается в терминах пороговых характеристик на краю спектра оператора $\widehat{\mathcal{A}}$, т. е. достаточно знать спектральное разложение $\widehat{\mathcal{A}}$ лишь вблизи нижнего края спектра. В частности, эффективная матрица g^0 — это гессиан первой зонной функции $E_1(\mathbf{k})$ в точке $\mathbf{k} = 0$.

Наконец, отметим недавнюю статью [24], где авторы изучали скорость сходимости для решений начально-краевой задачи Дирихле для волнового уравнения; получены аналоги оценок (0.10), (0.11), а также результаты с корректором.

0.3. Высокочастотное усреднение. Как было сказано выше, вклад в усреднение вносит только небольшая окрестность начала спектра (т. е. волны с низкой частотой). Можно, однако, рассматривать задачи о распространении волн в периодических структурах, частота которых пропорциональна ε^{-1} или ε^{-2} (высокочастотный режим). В таком случае даже старший член асимптотики решений быстро осциллирует. Эти задачи рассматривались в [2, глава 4] с использованием ВКБ-асимптотик.

Традиционные для теории усреднения методы, связанные с двухмасштабными асимптотическими разложениями, применялись к таким задачам в работах [25, 26]. Отметим также статью [27], где рассматривалось применение результатов [25] к фотонным кристаллам. В [25] была получена асимптотика для решений уравнения

$$\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + \nu^2\rho^\varepsilon(\mathbf{x})u_\varepsilon(\mathbf{x}) = 0,$$

являющихся возмущениями стоячих волн (функции $g(\mathbf{x})$, $\rho(\mathbf{x})$ предполагаются достаточно гладкими и Γ-периодическими). В работе [26] рассматривается аналогичная задача для случая бегущих волн.

Для нестационарного уравнения Шрёдингера результаты такого рода называются теоремами об эффективных массах (см., например, курс [28] и ссылки там). В работе [29] при помощи техники двухмасштабной сходимости и подходящих осциллирующих пробных функций изучалось усреднение задачи Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера со специальным начальным данным, "сконцентрированном" на блоховской собственной функции. Получен математически строгий вывод теорем об эффективных массах (в терминах сильной двухмасштабной сходимости). В [30] обсуждались приближение эффективных масс и $k \cdot p$ модели, хорошо известные в физике твёрдого тела. Доказано, что эти модели близки (в сильном смысле) к истинной динамике.

Наконец, упомянем статьи [31, 32], где изучалась асимптотика функции Грина при различных значениях спектрального параметра.

Обсудим теперь более подробно оценки погрешности при высокочастотном усреднении. Им были посвящены работы [33–37], где рассматривался одномерный случай $d = 1$, и [38–41], где рассматривался случай произвольной размерности. Хорошо известно, что спектр оператора $\mathcal{A}$ имеет зонную структуру и может иметь лакуны. Рассмотрим для простоты случай, когда $d = 1$ и $\Gamma = \mathbb{Z}$; при этом для оператора (0.12) будем использовать обозначение A_ε. Пусть $\sigma > 0$ — (невырожденный) левый край зоны с нечётным номером ($\geqslant 3$) в спектре оператора $A = A_1$. Тогда для оператора A_ε этот край "уезжает" в точку $\varepsilon^{-2}\sigma$ (в область высоких частот (энергий)). Рассмотрим вместо (0.2) уравнение

$$-\frac{d}{dx}g^\varepsilon(x)\frac{d}{dx}u_\varepsilon(x) - (\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2)u_\varepsilon(x) = f(x), \tag{0.13}$$

где $f \in L_2(\mathbb{R})$. Предполагается, что $\varkappa > 0$ таково, что точка $\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2$ принадлежит лакуне спектра оператора A_ε. Аналогично (0.5), дело сводится к изучению оператора $(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2)I)^{-1}$. В [33] был доказан следующий результат:

$$\|(A_\varepsilon - (\varepsilon^{-2}\sigma - \varkappa^2)I)^{-1} - [\varphi_\sigma^\varepsilon](A_\sigma^{\mathrm{hom}} + \varkappa^2 I)^{-1}[\varphi_\sigma^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.14}$$

Здесь $A_\sigma^{\mathrm{hom}} = -b_\sigma \frac{d^2}{dx^2}$ — соответствующий эффективный оператор, $b_\sigma > 0$ — коэффициент в асимптотике зонной функции $E(k)$, отвечающей зоне, для которой σ — левый край: $E(k) \sim \sigma + b_\sigma k^2$, $k \sim 0$; а φ_σ — периодическое решение уравнения $A\varphi_\sigma = \sigma\varphi_\sigma$, нормированное в $L_2(0,1)$. Таким образом, возможность усреднения для уравнения (0.13) является пороговым эффектом вблизи края внутренней лакуны.

Оценка (0.14) была получена в [33] в случае, когда $V(x) = 0$. В работе [38] был доказан аналог оценки (0.14) для операторов (0.12) при произвольном $d \geqslant 1$. Более точные аппроксимации с корректорами были найдены в [34, 39].

В статье [35] изучались параболические уравнения в одномерном случае, была доказана оценка

$$\|e^{-\tau A_\varepsilon}\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty) - e^{-\tau\sigma/\varepsilon^2}[\varphi_\sigma^\varepsilon]e^{-\tau A_\sigma^{\mathrm{hom}}}[\varphi_\sigma^\varepsilon]\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \leqslant Ce^{-\tau\sigma/\varepsilon^2}\varepsilon(\tau+\varepsilon^2)^{-1/2}, \quad \tau > 0,$$

а также найдено более точное приближение с корректором. Здесь $\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty)$ — спектральный проектор оператора A_ε, отвечающий интервалу $[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty)$.

В работе [37] изучались операторные оценки погрешности при высокочастотном усреднении нестационарного уравнения Шрёдингера и гиперболического уравнения в одномерном случае ($d = 1$). Пусть $f, g \in L_2(\mathbb{R})$. Рассматривались задачи Коши

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}u_\varepsilon(x,\tau) = (A_\varepsilon u_\varepsilon)(x,\tau), \\ u_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon f)(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}v_\varepsilon(x,\tau) = -(A_\varepsilon v_\varepsilon)(x,\tau) + \varepsilon^{-2}\sigma v_\varepsilon(x,t), \\ v_\varepsilon(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon f)(x),\ (\partial_\tau v_\varepsilon)(x,0) = (\Upsilon_\varepsilon g)(x), \end{cases} \tag{0.15}$$

где

$$(\Upsilon_\varepsilon f)(x) := (2\pi)^{-1/2}\int_{\mathbb{R}}(\Phi f)(k)\sum_{j=s}^{\infty} e^{ikx}\varphi_j(x/\varepsilon,\varepsilon k)\chi_{\widetilde{\Omega}_{j-s+1}}(\varepsilon k)\,dk.$$

Здесь $\{e^{ikx}\varphi_j(x,k)\}_{j=s}^{\infty}$ — блоховские волны, отвечающие зонам с номерами $j \geqslant s$;

$$\widetilde{\Omega}_j = (-j\pi, -(j-1)\pi] \cup ((j-1)\pi, j\pi], \qquad j \in \mathbb{N},$$

— зоны Бриллюэна. Начальные данные задач (0.15) представляют собой суперпозицию блоховских волн с амплитудой, равной Фурье-образу $(\Phi f)(k)$ функции $f(x)$, и принадлежат подпространству $\mathcal{E}_{A_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\sigma,\infty)L_2(\mathbb{R})$. Были получены оценки

$$\|u_\varepsilon(\cdot,\tau) - e^{-i\tau\varepsilon^{-2}\sigma}\varphi_\sigma^\varepsilon u_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon\|f\|_{H^2(\mathbb{R})}, \qquad f \in H^2(\mathbb{R}), \tag{0.16}$$

$$\|v_\varepsilon(\cdot,\tau) - \varphi_\sigma^\varepsilon v_0(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|\tau|^{1/2})\varepsilon(\|f\|_{H^{3/2}(\mathbb{R})} + \|g\|_{H^{1/2}(\mathbb{R})}), \quad f \in H^{3/2}(\mathbb{R}),\ g \in H^{1/2}(\mathbb{R}). \tag{0.17}$$

Здесь u_0 и v_0 — решения эффективных задач

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}u_0(x,\tau) = (A_\sigma^{\mathrm{hom}}u_0)(x,\tau), \\ u_0(x,0) = f(x), \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}v_0(x,\tau) = -(A_\sigma^{\mathrm{hom}}v_0)(x,\tau), \\ v_0(x,0) = f(x),\ (\partial_\tau v_0)(x,0) = g(x). \end{cases}$$

Оценки (0.16), (0.17) также допускают формулировку в операторном виде; см. [37, (6.6), (6.21)–(6.23)].

Высокоэнергетическому усреднению для нестационарного уравнения Шрёдингера с гамильтонианом (0.12) в случае произвольной размерности была посвящена работа [41]. Пусть $(\mathbf{k}^\circ, \lambda_0)$ — произвольная точка дисперсионного соотношения оператора $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$, и пусть $\{e^{i\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\varsigma_j(\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x})\}_{j=1}^{n}$ — отвечающие ей блоховские волны; мы считаем, что

$\big(\varsigma_j(\mathbf{k}^\circ,\cdot),\varsigma_k(\mathbf{k}^\circ,\cdot)\big)_{L_2(\Omega)}=\delta_{jk}$. Далее, пусть $u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)$, $j=1,\dots,n$, — решения следующих задач Коши для нестационарного уравнения Шрёдингера:

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)=(\mathcal{A}_\varepsilon u_{j,\varepsilon})(\mathbf{x},\tau), \qquad u_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},0)=e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\varsigma_j^\varepsilon(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{0.18}$$

где $f_j(\mathbf{x})$, $j=1,\dots,n$ — заданные функции. Результат работы [41] — оценки

$$\|u_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau)-u^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon\|f_j\|_{H^3(\mathbb{R}^d)}, \qquad j=1,\dots,n,$$

где

$$u^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)\coloneqq e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma_l^\varepsilon(\mathbf{x})v^{\mathrm{eff}}_{jl,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)$$

и $\mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)=(v^{\mathrm{eff}}_{j1,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau),\dots,v^{\mathrm{eff}}_{jn,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau))^{\mathrm{t}}$ — решение "эффективной" системы

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)=\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}_\varepsilon\mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau), \qquad \mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},0)=f_j(\mathbf{x})\mathbf{e}_j. \end{cases}$$

Здесь $\mathcal{A}^{\mathrm{eff}}_\varepsilon$ — матричный эффективный оператор с постоянными коэффициентами, а $\mathbf{e}_j$ — элемент стандартного базиса в $\mathbb{C}^n$.

0.4. Основные результаты. В настоящей работе мы изучаем высокочастотное усреднение для гиперболических уравнений с оператором (0.12) в случае произвольной размерности.

Рассматриваются задачи Коши для гиперболического уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}u_{jk,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)=-(\mathcal{A}_\varepsilon u_{jk,\varepsilon})(\mathbf{x},\tau),\\ u_{jk,\varepsilon}(\mathbf{x},0)=e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\varsigma_j^\varepsilon(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x}),\\ (\partial_\tau u_{jk,\varepsilon})(\mathbf{x},0)=e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\varsigma_k^\varepsilon(\mathbf{x})g_k(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{0.19}$$

где $f_j(\mathbf{x})$, $g_k(\mathbf{x})$, $j,k=1,\dots,n$ — заданные функции, $\varsigma_j^\varepsilon(\mathbf{x})$ — те же, что и в (0.18). Здесь предполагается, что $\lambda_0\neq0$; если $g_k\neq0$, то дополнительно считаем, что $\mathbf{k}^\circ\neq\mathbf{0}\,(\mathrm{mod}\,\widetilde{\Gamma})$, $\widetilde{\Gamma}$ — двойственная решётка. Начальные данные задачи (0.19) представляют собой модулированные блоховские волны, отвечающие точке $(\mathbf{k}^\circ,\lambda_0)$ дисперсионного соотношения.

Пусть

$$\mathbf{v}^{\mathrm{eff},(1)}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)=(v^{\mathrm{eff},(1)}_{j1,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau),\dots,v^{\mathrm{eff},(1)}_{jn,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau))^{\mathrm{t}} \ \text{ и } \ \tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{eff},(1)}_{k,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)=(\tilde{v}^{\mathrm{eff},(1)}_{j1,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau),\dots,\tilde{v}^{\mathrm{eff},(1)}_{jn,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau))^{\mathrm{t}}$$

— решения соответствующих "эффективных" систем

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{v}^{\mathrm{eff},(1)}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)=\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}_\varepsilon\mathbf{v}^{\mathrm{eff},(1)}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau),\\ \mathbf{v}^{\mathrm{eff},(1)}_{j,\varepsilon}(\mathbf{x},0)=f_j(\mathbf{x})\mathbf{e}_j, \end{cases} \qquad \begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{eff},(1)}_{k,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)=\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}_\varepsilon\tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{eff},(1)}_{k,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau),\\ \tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{eff},(1)}_{k,\varepsilon}(\mathbf{x},0)=g_k(\mathbf{x})\mathbf{e}_k, \end{cases} \tag{0.20}$$

где $\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}_\varepsilon$ — эффективный оператор задачи (0.19), он определён в (4.4). Положим

$$u^{\mathrm{eff}}_{jk,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)\coloneqq\frac12 e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma_l^\varepsilon(\mathbf{x})\left(v^{\mathrm{eff},(1)}_{jl,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)+v^{\mathrm{eff},(1)}_{jl,\varepsilon}(\mathbf{x},-\tau)\right)$$

$$+\frac{\varepsilon\lambda_0^{-1/2}}{2i} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l^\varepsilon(\mathbf{x}) \left(\tilde{v}_{kl,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},-\tau) - \tilde{v}_{kl,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau)\right). \quad (0.21)$$

Наш результат: оценки

$$\|u_{jk,\varepsilon}(\cdot,\tau) - u_{jk,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)(\varepsilon\|f_j\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2\|g_k\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}),$$
$$j,k = 1,\dots,n.$$

Помимо решений задачи (0.19), мы изучаем поведение при $\varepsilon \to 0$ решений $w_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)$ и $z_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $\tau\in\mathbb{R}$, $j,k = 1,\dots,n$, следующих задач:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} w_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) = \mp(\mathcal{A}_\varepsilon w_{jk,\pm,\varepsilon})(\mathbf{x},\tau) \pm \varepsilon^{-2}\lambda_0 w_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau), \\ w_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},0) = \left(\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \displaystyle\sum_{l=1}^{n} e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle} \varsigma_l^\varepsilon \langle \mathcal{P}_\pm f_j \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_l\rangle\right)(\mathbf{x}), \\ (\partial_\tau w_{jk,\pm,\varepsilon})(\mathbf{x},0) = \left(\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \displaystyle\sum_{l=1}^{n} e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle} \varsigma_l^\varepsilon \langle \mathcal{P}_\pm g_k \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_l\rangle\right)(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (0.22)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2} z_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) = \mp(\mathcal{A}_\varepsilon z_{jk,\pm,\varepsilon})(\mathbf{x},\tau) \pm \varepsilon^{-2}\lambda_0 z_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau), \\ z_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},0) = \big(\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle} \varsigma_j^\varepsilon f_j\big)(\mathbf{x}), \\ (\partial_\tau z_{jk,\pm,\varepsilon})(\mathbf{x},0) = \big(\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle} \varsigma_k^\varepsilon g_k\big)(\mathbf{x}), \end{cases} \quad (0.23)$$

где $\mathscr{E}_{+,\varepsilon} \coloneqq \mathcal{E}_{\mathcal{A}_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_0,+\infty)$, $\mathscr{E}_{-,\varepsilon} \coloneqq \mathcal{E}_{\mathcal{A}_\varepsilon}[0,\varepsilon^{-2}\lambda_0]$ и проектор $\mathcal{P}_\pm$ определён в (4.21). Здесь в правую часть гиперболических уравнений в задачах Коши (0.22), (0.23) включён спектральный сдвиг $\varepsilon^{-2}\lambda_0$. Задача (0.22) рассматривается в предположении выполнения условия 3.4 (которое может быть выполнено в случае конической точки, см. [42, п. 5.10]), а задача (0.23) — в предположении выполнения условия 3.5($\pm$) (которое имеет место, например, в точках "регулярных" краёв спектральных зон).

Для этих задач мы также строим эффективные приближения $w_{jk,\pm,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},\tau)$ и $z_{jk,\pm,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},\tau)$ (см. (4.23), (4.32)) и получаем следующие оценки:

$$\|w_{jk,\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) - w_{jk,\pm,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\left(\varepsilon\|f_j\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{3/2}\|g_k\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)}\right),$$
$$\|z_{jk,\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) - z_{jk,\pm,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\left(\varepsilon\|f_j\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon\|g_k\|_{H^1(\mathbb{R}^d)}\right).$$

0.5. План работы. Работа состоит из четырёх параграфов. В § 1 приведено точное определение оператора $\mathcal{A}$, описана его факторизация. Далее, в § 2 описано его спектральное разложение (частичная диагонализация при помощи преобразования Гельфанда). Затем, в § 3 получены необходимые спектральные приближения в некоторой окрестности точки $(\mathbf{k}^\circ,\lambda_0)$ дисперсионного соотношения, вычислены эффективные характеристики. Наконец, § 4 посвящён формулировке и доказательству основных результатов работы.

0.6. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H}_*$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{H}$ и $\|\cdot\|_\mathfrak{H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$. Символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*}$ означает норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}_*$. Иногда мы опускаем индексы. Через $I = I_\mathfrak{H}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Если $A\colon \mathfrak{H}\to\mathfrak{H}_*$ — линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ и $\operatorname{Ran} A$ обозначаются область определения и образ A, соответственно. Если $\mathfrak{N}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, то $\mathfrak{N}^\perp \coloneqq \mathfrak{H}\ominus\mathfrak{N}$. Если P — ортогональный проектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}$, то $P^\perp$ — ортогональный проектор пространства $\mathfrak{H}$ на $\mathfrak{N}^\perp$. Далее, если A — самосопряжённый оператор в некотором гильбертовом пространстве, то для спектра оператора A мы используем обозначение $\operatorname{spec} A$, а $\mathcal{E}_A(\delta)$ — спектральный проектор оператора A для борелевского множества $\delta \subset \mathbb{R}$.

Символ $\langle \cdot, \cdot \rangle$ означает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^n$; $\mathbb{1} = \mathbb{1}_n$ — единичная $(n \times n)$-матрица. Для $z \in \mathbb{C}$ через z^* обозначается комплексно-сопряжённое число. Для $(m \times n)$-матрицы a обозначение a^{t} означает транспонированную матрицу, a^* — эрмитово сопряжённую $(n \times m)$-матрицу. Через $\{\mathbf{e}_j\}_{j=1}^n$ мы обозначаем стандартный базис в $\mathbb{C}^n$.

Стандартные классы L_p функций, заданных на интервале $(a, b) \subset \mathbb{R}$, обозначаются через $L_p(a, b)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Для классов Соболева порядка $q \in \mathbb{R}$ с индексом суммирования 2 используется обозначение $H^q(\mathbb{R}^d)$. Если f — измеримая функция, то оператор умножения на функцию f в пространстве L_2 обозначается тем же символом.

Далее, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$, $iD_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$, $j = 1, \dots, d$, $\mathbf{D} = -i\nabla = (D_1, \dots, D_d)$.

Через $\Phi \coloneqq \Phi_{\mathbf{x}\to\mathbf{k}}$ обозначается преобразование Фурье в $\mathbb{R}^d$, определённое на классе Шварца формулой

$$(\Phi v)(k) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\langle \mathbf{k}, \mathbf{x}\rangle} v(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d),$$

и по непрерывности распространённое до унитарного оператора $\Phi\colon L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$. Наконец, для характеристической функции множества $\delta \subset \mathbb{R}$ мы используем обозначение χ_δ.

0.7. Благодарности. Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за полезные обсуждения и внимание к работе.

1. Оператор $\mathcal{A}$

Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, порождённая базисом $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$:

$$\Gamma = \Big\{ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{a} = \sum_{j=1}^d n^j \mathbf{a}_j,\ n^j \in \mathbb{Z} \Big\},$$

и пусть Ω — элементарная ячейка решётки Γ:

$$\Omega \coloneqq \Big\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \colon \mathbf{x} = \sum_{j=1}^d \xi^j \mathbf{a}_j,\ 0 < \xi^j < 1 \Big\}.$$

Базис $\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^d$, двойственный по отношению к $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_d$, определяется из соотношений $\langle \mathbf{b}^l, \mathbf{a}_j \rangle = 2\pi\delta_j^l$. Этот базис порождает решётку $\widetilde{\Gamma}$, *двойственную* к решётке Γ. Через $\widetilde{\Omega}$ обозначим *центральную зону Бриллюэна* решётки $\widetilde{\Gamma}$: множество с внутренностью

$$\operatorname{Int} \widetilde{\Omega} = \big\{ \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d \colon |\mathbf{k}| < |\mathbf{k} - \mathbf{b}|,\ 0 \neq \mathbf{b} \in \widetilde{\Gamma} \big\}$$

(это центрально-симметричный многогранник), которое из каждой пары противоположных граней содержит только одну. Через $\widetilde{H}^1(\Omega)$ обозначается подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, Γ-периодическое продолжение которых на $\mathbb{R}^d$ принадлежит $H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^d)$.

В $L_2(\mathbb{R}^d)$, $d \geqslant 1$, рассматривается самосопряжённый оператор Шрёдингера $\mathcal{A}$, порождённый дифференциальным выражением

$$\mathcal{A} = -\operatorname{div} \check{g}(\mathbf{x})\nabla + V(\mathbf{x}) = \mathbf{D}^* \check{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} + V(\mathbf{x}) \tag{1.1}$$

с Γ-периодическими метрикой $\breve{g}(\mathbf{x})$ и потенциалом $V(\mathbf{x})$. Предполагается, что

$$\left.\begin{array}{r}\breve{g}\text{ — измеримая симметричная матрица-функция с вещественными элементами,}\\ \alpha_0 \mathbb{1} \leqslant \breve{g}(\mathbf{x}) \leqslant \alpha_1 \mathbb{1}, \qquad 0 < \alpha_0 \leqslant \alpha_1 < \infty,\end{array}\right\} \tag{1.2}$$

и $V(\mathbf{x})$ — вещественная функция, причём

$$V \in L_q(\Omega), \qquad q > d/2 \quad \text{при} \quad d \geqslant 2, \qquad q = 1 \quad \text{при} \quad d = 1.$$

Точное определение оператора $\mathcal{A}$ даётся через полуограниченную замкнутую квадратичную форму

$$a[u,u] = \int_{\mathbb{R}} \left(\langle \breve{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D}u, \mathbf{D}u \rangle + V(\mathbf{x}) |u(\mathbf{x})|^2 \right) d\mathbf{x}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.3}$$

За счёт добавления к V постоянной будем считать, что $\inf \operatorname{spec} \mathcal{A} = 0$. При этом условии оператор $\mathcal{A}$ допускает удобную факторизацию (см., например, [43], [4, гл. 6, п. 1.1]). Для описания этой факторизации рассмотрим уравнение

$$\mathbf{D}^* \breve{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D} \omega(\mathbf{x}) + V(\mathbf{x}) \omega(\mathbf{x}) = 0$$

(уравнение понимается в слабом смысле). Существует (строго) положительное Γ-периодическое решение $\omega \in \widetilde{H}^1(\Omega)$ этого уравнения, определённое с точностью до постоянного множителя. Этот множитель можно фиксировать так, чтобы

$$\|\omega\|^2_{L_2(\Omega)} = |\Omega|. \tag{1.4}$$

Оказывается, что $\omega \in C^\varkappa$ при некотором $\varkappa > 0$. Кроме того, функция ω — мультипликатор как в $H^1(\mathbb{R}^d)$, так и в $\widetilde{H}^1(\Omega)$. Подстановка $u = \omega\psi$ преобразует форму (1.3) к виду

$$a[u,u] = \int_{\mathbb{R}^d} \omega^2(\mathbf{x}) \langle \breve{g}(\mathbf{x}) \mathbf{D}\psi, \mathbf{D}\psi \rangle \, d\mathbf{x}, \qquad u = \omega\psi, \quad \psi \in H^1(\mathbb{R}^d). \tag{1.5}$$

Это означает, что справедлива факторизация

$$\mathcal{A} = \omega(\mathbf{x})^{-1} \mathbf{D}^* g(\mathbf{x}) \mathbf{D} \omega(\mathbf{x})^{-1}, \qquad g(\mathbf{x}) = \omega^2(\mathbf{x}) \breve{g}(\mathbf{x}). \tag{1.6}$$

Примем представление (1.6) оператора $\mathcal{A}$ за исходное определение, т. е. будем считать, что $\mathcal{A}$ — оператор, порождённый формой (1.5), а Γ-периодические функции $\breve{g}$ и ω удовлетворяют (1.2), (1.4) и условиям $\omega(\mathbf{x}) > 0$; $\omega, \omega^{-1} \in L_\infty$. Мы можем вернуться к представлению (1.1), полагая $V = -\omega^{-1}(\mathbf{D}^* \breve{g} \mathbf{D} \omega)$. Однако при этом потенциал V может оказаться сильно сингулярным.

2. Спектр оператора $\mathcal{A}$

Нам понадобится описание спектра оператора (1.6). Введём объекты, связанные со спектральным разложением оператора (1.6). Положим

$$\mathcal{H}^1(\mathcal{O}) = \{ f \colon \omega^{-1} f \in H^1(\mathcal{O}) \}, \qquad \text{где} \quad \mathcal{O} = \mathbb{R}^d \ \text{ или } \ \Omega,$$
$$\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) = \{ f \colon \omega^{-1} f \in \widetilde{H}^1(\Omega) \}, \qquad \|f\|_{\mathcal{H}^1(\mathcal{O})} = \|\omega^{-1} f\|_{H^1(\mathcal{O})}.$$

Рассмотрим в $L_2(\Omega)$ семейство форм

$$a(\mathbf{k})[u,u] = \int_\Omega \left\langle g(\mathbf{x})(\mathbf{D}+\mathbf{k})\omega^{-1}u, (\mathbf{D}+\mathbf{k})\omega^{-1}u\right\rangle\, d\mathbf{x}, \qquad u \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega), \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d. \tag{2.1}$$

Порождённый формой (2.1) оператор обозначим через $\mathcal{A}(\mathbf{k})$. Формально можно записать

$$\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D}+\mathbf{k})\omega(\mathbf{x})^{-1}.$$

Параметр $\mathbf{k}\in\mathbb{R}^d$ называют *квазиимпульсом.* Пусть $E_l(\mathbf{k})$, $l\in\mathbb{N}$, — последовательные (с учётом кратностей) собственные значения оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и $\varphi_l(\cdot,\mathbf{k})$, $l\in\mathbb{N}$, — соответствующие ортонормированные собственные функции:

$$\omega(\mathbf{x})^{-1}(\mathbf{D}+\mathbf{k})^* g(\mathbf{x})(\mathbf{D}+\mathbf{k})\omega(\mathbf{x})^{-1}\varphi_l(\mathbf{x},\mathbf{k}) = E_l(\mathbf{k})\varphi_l(\mathbf{x},\mathbf{k}), \qquad l\in\mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Функции $E_l(\mathbf{k})$ называются *зонными функциями*; они $\widetilde{\Gamma}$-периодичны и непрерывны (и даже липшицевы). Далее, $\varphi_l(\mathbf{x},\mathbf{k})$ являются Γ-периодическими по $\mathbf{x}$, а функции $e^{i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}\rangle}\varphi_l(\mathbf{x},\mathbf{k})$ можно выбрать $\widetilde{\Gamma}$-периодическими по $\mathbf{k}$.

Преобразование Гельфанда $\mathscr{G}$ первоначально определяется на функциях из класса Шварца $v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ формулой

$$\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k}) = (\mathscr{G}v)(\mathbf{x},\mathbf{k}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2}\sum_{\mathbf{a}\in\Gamma} e^{-i\langle\mathbf{k},\mathbf{x}+\mathbf{a}\rangle}v(\mathbf{x}+\mathbf{a}), \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \quad \mathbf{k}\in\mathbb{R}^d.$$

Функция $\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})$ — Γ-периодическая по $\mathbf{x}$ и $\widetilde{\Gamma}$-квазипериодическая по $\mathbf{k}$ (т. е. функция $e^{i\langle\mathbf{x},\mathbf{k}\rangle}\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})$ является $\widetilde{\Gamma}$-периодической). Таким образом, достаточно рассматривать $\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})$ при $\mathbf{x}\in\Omega$ и $\mathbf{k}\in\mathbb{T}^d$, где $\mathbb{T}^d$ — тор $\mathbb{R}^d/\widetilde{\Gamma}$ с индуцированной $\mathbb{R}^d$-метрикой. Точки тора $\mathbf{k}\in\mathbb{T}^d$ могут быть реализованы, например, как точки из $\widetilde{\Omega}$. Обратное преобразование даётся формулой

$$v(\mathbf{x}) = (\mathscr{G}^{-1}\tilde{v})(\mathbf{x}) = |\widetilde{\Omega}|^{-1/2}\int_{\mathbb{T}^d}\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})e^{i\langle\mathbf{x},\mathbf{k}\rangle}d\mathbf{k}, \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d, \tag{2.3}$$

и восстанавливает v по $\tilde{v}$. При этом $\int_{\mathbb{T}^d}\int_\Omega |\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})|^2 d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} = \int_{\mathbb{R}^d}|v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x}$ и $\mathscr{G}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathscr{G}\colon L_2(\mathbb{R}^d)\to\int_{\mathbb{T}^d}\oplus L_2(\Omega)\, d\mathbf{k} =: \mathcal{K}.$$

Включение $v\in H^1(\mathbb{R}^d)$ равносильно тому, что $\tilde{v}(\cdot,\mathbf{k})\in\widetilde{H}^1(\Omega)$ при п.в. $\mathbf{k}\in\mathbb{T}^d$ и

$$\int_{\mathbb{T}^d}\int_\Omega \left(|(\mathbf{D}+\mathbf{k})\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})|^2 + |\tilde{v}(\mathbf{x},\mathbf{k})|^2\right)\, d\mathbf{x}\, d\mathbf{k} < \infty.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R}^d)$ под действием $\mathscr{G}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$. Действие оператора $\mathbf{D}$ на $v\in H^1(\mathbb{R}^d)$ переходит в послойное действие оператора $\mathbf{D}+\mathbf{k}$ на $\tilde{v}(\cdot,\mathbf{k})\in\widetilde{H}^1(\Omega)$.

Под действием преобразования Гельфанда $\mathscr{G}$ оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$:

$$\mathscr{G}\mathcal{A}\mathscr{G}^{-1} = \int_{\mathbb{T}^d}\oplus\mathcal{A}(\mathbf{k})\, d\mathbf{k}. \tag{2.4}$$

Говоря подробнее, имеется ввиду следующее. Пусть $v \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$, тогда

$$\tilde{v}(\cdot,\mathbf{k}) \in \widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega) \quad \text{при п.в.} \quad \mathbf{k} \in \mathbb{T}^d, \tag{2.5}$$

$$a[v,v] = \int_{\mathbb{T}^d} a(\mathbf{k})[\tilde{v}(\cdot,\mathbf{k}),\tilde{v}(\cdot,\mathbf{k})]\,d\mathbf{k}. \tag{2.6}$$

Обратно, если для $\tilde{v} \in \mathcal{K}$ выполнено (2.5) и интеграл в (2.6) конечен, тогда $v \in \mathcal{H}^1(\mathbb{R}^d)$ и выполнено (2.6). Из (2.4) следует, что спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадает с объединением отрезков (зон) $\operatorname{Ran} E_j$, $j \in \mathbb{N}$.

Введём оператор P_0, который действует как усреднение по ячейке Ω:

$$P_0 u = |\Omega|^{-1}\int_\Omega u(\mathbf{x})\,d\mathbf{x}, \qquad u \in L_2(\Omega).$$

Оператор P_0 является ортопроектором на подпространство констант

$$\mathfrak{N}_0 = \{u \in L_2(\Omega)\colon u = c \in \mathbb{C}\}.$$

Справедливо следующее соотношение (см., например, [7, § 6, п. 6.1]):

$$([P_0]\mathscr{G}u)(\mathbf{k}) = |\Omega|^{-1/2}(\Phi u)(\mathbf{k}), \qquad u \in L_2(\mathbb{R}^d), \quad \mathbf{k} \in \mathbb{R}^d. \tag{2.7}$$

Здесь $[P_0]$ — проектор в $\mathcal{K}$, действующий послойно как оператор P_0. Наоборот, если $\operatorname{supp} c \subset \mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{k}')$ для некоторого $\mathbf{k}' \in \mathbb{R}^d$ и достаточно малого $\varkappa$, и $c(\mathbf{k}) \in \mathfrak{N}_0$, $\mathbf{k} \in \mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{k}')$, то из (2.3) и соотношения $|\Omega||\widetilde{\Omega}| = (2\pi)^d$ следует, что

$$(\mathscr{G}^{-1}c)(\mathbf{x}) = |\Omega|^{1/2}(\Phi^* c)(\mathbf{x}). \tag{2.8}$$

В (2.8) точки $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d$ реализуются как точки из множества $\widetilde{\Omega}_{\mathbf{k}'}$ такого, что $\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{k}') \subset \widetilde{\Omega}_{\mathbf{k}'}$.

Пусть $\lambda_0 \in \operatorname{spec}\mathcal{A}$. Тогда $\lambda_0 = E_s(\mathbf{k}^\circ)$ для некоторой точки $\mathbf{k}^\circ \in \mathbb{T}^d$ и числа $s \in \mathbb{N}$ (считаем, что s — наименьшее). Пусть n — кратность собственного числа λ_0 для оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)$ (т. е. $E_s(\mathbf{k}^\circ) = \ldots = E_{s+n-1}(\mathbf{k}^\circ) = \lambda_0$), а d_0 — расстояние от λ_0 до остального спектра оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)$. В силу непрерывности зонных функций можно выбрать $\varkappa > 0$ такое, что при $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa$, $\delta\mathbf{k} := \mathbf{k} - \mathbf{k}^\circ$, на отрезке $[\lambda_0 - d_0/3, \lambda_0 + d_0/3]$ имеется ровно n собственных чисел (с учётом кратности) оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ и

$$\big([\lambda_0 - 2d_0/3, \lambda_0 - d_0/3) \cup (\lambda_0 + d_0/3, \lambda_0 + 2d_0/3]\big) \cap \operatorname{spec}\mathcal{A}(\mathbf{k}) = \varnothing.$$

Введём обозначение $\mathfrak{N} := \operatorname{Ker}(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ) - \lambda_0 I)$, и пусть P — ортопроектор пространства $L_2(\Omega)$ на $\mathfrak{N}$; через $F(\mathbf{k})$ обозначим спектральный проектор оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, отвечающий отрезку $[\lambda_0 - d_0/3, \lambda_0 + d_0/3]$.

3. Спектральные приближения

3.1. Спектральные приближения для операторов $F(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})$. Материал этого пункта в основном заимствован из [41, § 3, п. 3.1]. Там адаптацией метода из [44, § 4, п. 4.2, третий метод] (см. также [45, § 2, п. 2.2]) были получены приближения для операторов $F(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})$. Для этого применяются подходящий вариант резольвентного тождества (см. формулу (3.3) ниже), а также представления

$$F(\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma (\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \zeta I)^{-1} d\zeta, \tag{3.1}$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma \zeta(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \zeta I)^{-1} d\zeta. \tag{3.2}$$

Здесь γ — контур, эквидистантно охватывающий отрезок $[\lambda_0 - d_0/3, \lambda_0 + d_0/3]$ и проходящий через точку $\lambda_0 + d_0/2$. Положим

$$R(\mathbf{k},\zeta) := (\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \zeta I)^{-1}, \qquad R_0(\zeta) := R(\mathbf{k}^\circ,\zeta) = (\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ) - \zeta I)^{-1}.$$

Длина контура γ равна $l_\gamma = \frac{\pi+4}{3} d_0$, обе резольвенты на этом контуре удовлетворяют оценкам

$$\|R(\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant 6d_0^{-1}, \qquad \|R_0(\zeta)\| \leqslant 6d_0^{-1}, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \quad \zeta \in \gamma.$$

Имеет место тождество [41, (3.3)]

$$R(\mathbf{k},\zeta) = R_0(\zeta) - \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta) - \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) - \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta), \tag{3.3}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta) &= g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R(\mathbf{k},\zeta), & \mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) &= g^{1/2}(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R(\mathbf{k},\zeta),\\ \mathcal{X}_0(\zeta) &= g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta), & \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta) &= g^{1/2}(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0(\zeta). \end{aligned}$$

Для операторов $\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)$, $\mathcal{X}_0(\zeta)$, $\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ и $\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)$ справедливы оценки

$$\begin{aligned} &\|\mathcal{Y}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant C_1|\delta\mathbf{k}|, \quad \|\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant C_1|\delta\mathbf{k}|, \quad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \ \zeta\in\gamma;\\ &\|\mathcal{X}(\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant \check{C}_2, \qquad \|\mathcal{X}_0(\zeta)\| \leqslant C_2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \ \zeta\in\gamma. \end{aligned} \tag{3.4}$$

с константами

$$C_1 = 6\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\omega^{-1}\|_{L_\infty} d_0^{-1}, \qquad C_2 = (24d_0^{-1} + 36\lambda_0 d_0^{-2})^{1/2},$$
$$\check{C}_2 = (24d_0^{-1} + 36\lambda_0 d_0^{-2})^{1/2} + 6\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}\varkappa d_0^{-1}.$$

Итерирование тождества (3.3) даёт равенства [41, (3.9) и (3.13)]:

$$R(\mathbf{k},\zeta) = R_0(\zeta) + T_1(\delta\mathbf{k},\zeta) + \mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta), \tag{3.5}$$
$$R(\mathbf{k},\zeta) = R_0(\zeta) + T_1(\delta\mathbf{k},\zeta) + T_2(\delta\mathbf{k},\zeta) + \mathscr{R}_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta), \tag{3.6}$$
$$T_1(\delta\mathbf{k},\zeta) := -\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta) - \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta), \tag{3.7}$$
$$\begin{aligned} T_2(\delta\mathbf{k},\zeta) := {}& \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{X}_0(\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}_0(\zeta) + \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\\ &+ \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})^*\mathcal{X}_0(\zeta) + \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta)\\ &- \mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta^*)^*\mathcal{Y}_0(\delta\mathbf{k},\zeta). \end{aligned} \tag{3.8}$$

Здесь введены обозначения

$$\check{\mathcal{X}}_0(\zeta) := g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\big(g^{1/2}(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta^*)\big)^*, \qquad \check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k}) := g^{1/2}(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}. \tag{3.9}$$

Для операторов $\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)$ и $\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})$ справедливы оценки

$$\|\check{\mathcal{X}}_0(\zeta)\| \leqslant C_3, \qquad \|\check{\mathcal{Y}}(\delta\mathbf{k})\| \leqslant C_4|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \qquad \zeta\in\gamma, \tag{3.10}$$
$$C_3 = 4 + 6\lambda_0 d_0^{-1}, \qquad C_4 = \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}.$$

Явные выражения для $\mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$, $\mathscr{R}_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ нам не понадобятся. Нужны лишь оценки [41, (3.14)]

$$\|\mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant C_5|\delta\mathbf{k}|^2, \qquad \|\mathscr{R}_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant C_6|\delta\mathbf{k}|^3, \qquad \zeta\in\gamma; \tag{3.11}$$

$$C_5 = 2C_1C_2\check{C}_2C_4 + C_1^2C_3 + 2C_1^2C_2C_4\varkappa + C_1C_2^2C_4 + C_1^2,$$
$$C_6 = 3C_1^2C_2C_4 + 3C_1C_2^2\check{C}_2C_4^2 + 3C_1^2C_2C_3C_4 + 3C_1^2C_2^2C_4^2\varkappa + C_1^2\check{C}_2C_3C_4 + C_1^3C_3C_4\varkappa + C_1C_2^3C_4^2 + C_1^2\check{C}_2C_4 + C_1^3C_4\varkappa.$$

Далее, обозначим

$$T_2^\circ(\delta\mathbf{k},\zeta) := PT_2(\delta\mathbf{k},\zeta)P, \qquad T_2^\times(\delta\mathbf{k},\zeta) := PT_2(\delta\mathbf{k},\zeta)P^\perp, \qquad T_2^\perp(\delta\mathbf{k},\zeta) := P^\perp T_2(\delta\mathbf{k},\zeta)P^\perp.$$

Теорема 3.1. *Для оператора $F(\mathbf{k})$ при $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa$ справедливы аппроксимации*

$$\|F(\mathbf{k}) - P\| \leqslant C_7|\delta\mathbf{k}|, \tag{3.12}$$
$$F(\mathbf{k}) = P + F_1(\delta\mathbf{k}) + \Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}), \qquad \|\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| \leqslant C_8|\delta\mathbf{k}|^2, \tag{3.13}$$
$$F(\mathbf{k}) = P + F_1(\delta\mathbf{k}) + F_2(\delta\mathbf{k}) + \Phi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}), \qquad \|\Phi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| \leqslant C_9|\delta\mathbf{k}|^3. \tag{3.14}$$

Операторы $F_1(\delta\mathbf{k})$ и $F_2(\delta\mathbf{k})$ имеют следующую структуру:

$$F_1(\delta\mathbf{k}) = F_1^\times(\delta\mathbf{k}) + F_1^\times(\delta\mathbf{k})^*, \tag{3.15}$$
$$F_2(\delta\mathbf{k}) = F_2^\circ(\delta\mathbf{k}) + F_2^\times(\delta\mathbf{k}) + F_2^\times(\delta\mathbf{k})^* + F_2^\perp(\delta\mathbf{k}), \tag{3.16}$$

где

$$F_1^\times(\delta\mathbf{k}) = -P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0) - ((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P)^*g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0), \tag{3.17}$$
$$F_2^r(\delta\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma T_2^r(\delta\mathbf{k},\zeta)\,d\zeta, \qquad r \in \{\circ,\times,\perp\}, \tag{3.18}$$
$$F_2^\circ(\delta\mathbf{k}) = -F_1^\times(\delta\mathbf{k})F_1^\times(\delta\mathbf{k})^*, \tag{3.19}$$

$R_0^\perp(\zeta) := R_0(\zeta)P^\perp$, а константы C_7, C_8 и C_9 заданы выражениями

$$C_7 = (2\pi)^{-1}l_\gamma(C_1C_2 + C_1\check{C}_2 + C_1^2\varkappa), \quad C_8 = (2\pi)^{-1}l_\gamma C_5, \quad C_9 = (2\pi)^{-1}l_\gamma C_6.$$

Оператор $F_1^\times(\delta\mathbf{k})$ удовлетворяет оценке

$$\|F_1^\times(\delta\mathbf{k})\| \leqslant C_{10}|\delta\mathbf{k}|, \qquad C_{10} = \pi^{-1}l_\gamma C_1C_2. \tag{3.20}$$

Доказательство. Оценка (3.12) следует из представления (3.1), аналогичного представления для проектора P и тождества (3.3) с учётом (3.4); см. [41, (3.16)].

Аппроксимация (3.13) следует из (3.1) и (3.5), при этом

$$F_1(\delta\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma T_1(\delta\mathbf{k},\zeta)d\zeta, \qquad \Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma \mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)d\zeta.$$

Оценка (3.20) следует из (3.4) и (3.7), вычисление интеграла для $F_1(\delta\mathbf{k})$ даёт (3.15), (3.17), а остаток $\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$ оценивается с помощью (3.11); см. [41, (3.17), (3.18), (3.20)–(3.23)].

Докажем (3.14). Применяя (3.1) и (3.6), получаем (3.14), где имеет место (3.16), (3.18) и

$$\Phi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma \mathscr{R}_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)d\zeta.$$

С помощью (3.11) мы получаем оценку для $\Phi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$. Далее, получим представление (3.19). Имеем

$$T_2^\circ(\delta\mathbf{k},\zeta) = \frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^*g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{\lambda_0-\zeta} P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta^*)\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\\
&+ \Big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta^*}P\Big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0(\zeta)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\\
&+ \Big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta^*}P\Big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta^*)\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\\
&- \frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P.
\end{aligned}
$$

Вычислим интеграл (3.18) для $F_2^\circ(\delta\mathbf{k})$. Для этого воспользуемся разложением резольвенты

$$
R_0(\zeta) = R_0(\zeta)P + R_0(\zeta)P^\perp = (\lambda_0-\zeta)^{-1}P + R_0(\zeta)P^\perp, \qquad \zeta\in\gamma, \tag{3.21}
$$

где оператор-функция $R_0^\perp(\zeta) = R_0(\zeta)P^\perp$ голоморфна внутри контура γ, и формулой для производной интеграла Коши. Получаем

$$
\begin{aligned}
F_2^\circ(\delta\mathbf{k}) = &- P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)^2\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\\
&- P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)^2\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P\\
&- \big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)^2\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\\
&- \big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)^2\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P.
\end{aligned}
$$

Здесь учтено равенство $(R_0^\perp)'(\lambda_0) := \frac{d}{d\lambda}R_0^\perp(\lambda)\big|_{\lambda=\lambda_0} = R_0^\perp(\lambda_0)^2$. Вместе с (3.17) отсюда следует (3.19). $\square$

Кроме того, нам понадобятся следующие соотношение и оценка [41, (3.25), (3.26)]:

$$
F_1^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k}) = F_1^\times(\delta\mathbf{k})F_1^\times(\delta\mathbf{k})^*F(\mathbf{k}) + F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}); \tag{3.22}
$$
$$
\|F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k})\| \leqslant C_{11}|\delta\mathbf{k}|^3, \quad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa; \qquad C_{11} = 2^{-1}\pi^{-2}l_\gamma^2C_1C_2C_5. \tag{3.23}
$$

Теорема 3.2. *Для оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})$ при $|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa$ справедливы аппроксимации*

$$
\|\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \lambda_0P\| \leqslant C_{12}|\delta\mathbf{k}|; \tag{3.24}
$$
$$
\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) = \lambda_0P + G_1(\delta\mathbf{k}) + \Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}), \qquad \|\Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\|\leqslant C_{13}|\delta\mathbf{k}|^2; \tag{3.25}
$$
$$
\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) = \lambda_0P + G_1(\delta\mathbf{k}) + G_2(\delta\mathbf{k}) + \Xi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}), \qquad \|\Xi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\|\leqslant C_{14}|\delta\mathbf{k}|^3. \tag{3.26}
$$

Операторы $G_1(\delta\mathbf{k})$ и $G_2(\delta\mathbf{k})$ имеют следующую структуру:

$$
G_1(\delta\mathbf{k}) = \mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \lambda_0\big(F_1^\times(\delta\mathbf{k}) + F_1^\times(\delta\mathbf{k})^*\big), \tag{3.27}
$$
$$
G_2(\delta\mathbf{k}) = G_2^\circ(\delta\mathbf{k}) + G_2^\times(\delta\mathbf{k}) + G_2^\times(\delta\mathbf{k})^* + G_2^\perp(\delta\mathbf{k}). \tag{3.28}
$$

Здесь

$$
\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) := P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P + ((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P, \tag{3.29}
$$
$$
G_2^r(\delta\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma \zeta T_2^r(\delta\mathbf{k},\zeta)\,d\zeta, \qquad r\in\{\circ,\times,\perp\}, \tag{3.30}
$$

оператор $F_1^\times(\delta\mathbf{k})$ определён в (3.17), для $G_2^\circ(\delta\mathbf{k})$ справедливо соотношение

$$
\begin{aligned}
G_2^\circ(\delta\mathbf{k}) &+ \lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k}) F_1^\times(\delta\mathbf{k})^* = P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P \\
&- P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P \\
&- P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P \\
&- \big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P \\
&- \big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P =: \mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k});
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

а константы C_{12}, C_{13}, C_{14} заданы выражениями

$$
C_{12} = (2\pi)^{-1}(\lambda_0 + d_0/2) l_\gamma (C_1C_2 + C_1\check{C}_2 + C_1^2\varkappa), \quad C_{13} = (2\pi)^{-1}(\lambda_0 + d_0/2) l_\gamma C_5,
$$
$$
C_{14} = (2\pi)^{-1}(\lambda_0 + d_0/2) l_\gamma C_6.
$$

Кроме того,

$$
\|\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\| \leqslant C_{15}|\delta\mathbf{k}|, \qquad \|\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})\| \leqslant C_{16}|\delta\mathbf{k}|^2; \tag{3.32}
$$
$$
\|G_2^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k})\| \leqslant C_{17}|\delta\mathbf{k}|^3, \quad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \tag{3.33}
$$

с константами

$$
\begin{aligned}
C_{15} &= \pi^{-1}(\lambda_0 + d_0/2) l_\gamma C_1C_2, \\
C_{16} &= \lambda_0 C_{10}^2 + (2\pi)^{-1}(\lambda_0 + d_0/2) l_\gamma (3C_1C_2^2C_4 + C_1^2C_3 + C_1^2), \\
C_{17} &= (2\pi)^{-1}(\lambda_0 + d_0/2) l_\gamma (3C_1C_2^2C_4 + C_1^2C_3 + C_1^2)C_7.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Оценка (3.24) следует из (3.2) и (3.3) с учётом оценок (3.4). Далее, (3.2) и (3.5) дают (3.25) с

$$
G_1(\delta\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma \zeta T_1(\delta\mathbf{k},\zeta)\,d\zeta, \tag{3.34}
$$
$$
\Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma \zeta \mathscr{R}_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\,d\zeta.
$$

Интеграл для $G_1(\delta\mathbf{k})$ был вычислен в [41, (3.33), (3.34)], а применение (3.11) даёт оценку для остаточного члена $\Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$ в (3.25). Представление (3.26) было получено в [41, (3.29), (3.44)]; соотношения (3.28), (3.30), (3.31) — в [41, (3.30), (3.38), (3.39), (3.41)].

Использование (3.4), (3.7), (3.34) и соотношения $\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) = PG_1(\delta\mathbf{k})P$ даёт первую оценку (3.32). Вторая оценка (3.32) следует из соотношения (3.31), представления (3.30) для $G_2^\circ(\delta\mathbf{k})$ и оценок (3.4), (3.8), (3.10), (3.20). Оценка (3.33) была доказана в [41, (3.43)]. □

Лемма 3.3. *Справедливы соотношения*

$$
\begin{aligned}
&G_2^\times(\delta\mathbf{k}) - \lambda_0 F_2^\times(\delta\mathbf{k}) \\
&\quad = -\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\left(P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0) + \big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\right),
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$
$$
G_2^\perp(\delta\mathbf{k}) - \lambda_0 F_2^\perp(\delta\mathbf{k}) = 0. \tag{3.36}
$$

Доказательство. Докажем (3.35), соотношение (3.36) проверяется похожим образом. В силу (3.18), (3.30) имеем

$$
G_2^\times(\delta\mathbf{k}) - \lambda_0 F_2^\times(\delta\mathbf{k}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_\gamma (\zeta - \lambda_0) T_2^\times(\delta\mathbf{k},\zeta)\,d\zeta. \tag{3.37}
$$

Выпишем явное выражение для $T_2^\times(\delta\mathbf{k},\zeta)$:

$$\begin{aligned}T_2^\times(\delta\mathbf{k},\zeta) = {}&\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\zeta)\\ &+\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta^*)\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\zeta)\\ &+\Big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta^*}P\Big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0(\zeta)\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\zeta)\\ &+\Big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\frac{1}{\lambda_0-\zeta^*}P\Big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0(\zeta^*)\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\zeta)\\ &-\frac{1}{\lambda_0-\zeta}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\zeta).\end{aligned}$$

Вычисление интеграла (3.37) с помощью разложения (3.21) даёт

$$\begin{aligned}G_2^\times(\delta\mathbf{k})-&\lambda_0F_2^\times(\delta\mathbf{k})\\ &=-P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\\ &\quad-P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\\ &\quad-\Big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\Big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}P\omega^{-1}(\delta\mathbf{k})^* g(\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0)\\ &\quad-\Big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\Big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}\big((\mathbf{D}+\mathbf{k}^\circ)\omega^{-1}P\big)^* g(\delta\mathbf{k})\omega^{-1}R_0^\perp(\lambda_0).\end{aligned}$$

С учётом (3.29) получаем (3.35). $\square$

3.2. Условия невырожденности. Введём дополнительные условия.

Условие 3.4. *Пусть* $\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})$ *— оператор* (3.29). *Пусть* $\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})\neq 0$ *при всех* $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$.

Условие 3.5. *Пусть* $\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})$ *— оператор* (3.29), *и* $\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})$ *— оператор* (3.31).

(+) *При всех* $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ *оператор* $\mathfrak{G}_2^\circ(\boldsymbol{\theta})$ *равномерно положительно определён:* $\mathfrak{G}_2^\circ(\boldsymbol{\theta})|_{\mathfrak{N}}\geqslant cI_{\mathfrak{N}}$, $c>0$, *и* $\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})=0$.

(−) *При всех* $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ *оператор* $\mathfrak{G}_2^\circ(\boldsymbol{\theta})$ *равномерно отрицательно определён:* $-\mathfrak{G}_2^\circ(\boldsymbol{\theta})|_{\mathfrak{N}}\geqslant cI_{\mathfrak{N}}$, $c>0$, *и* $\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})=0$.

Рассмотрим случай, когда выполнено условие 3.4. Через $\mathfrak{N}_+(\boldsymbol{\theta})$ и $\mathfrak{N}_-(\boldsymbol{\theta})$ обозначим спектральные подпространства, отвечающие положительным и отрицательным собственным числам оператора $\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})$, соответственно. Из однородности $\mathfrak{G}_1^\circ(-\boldsymbol{\theta})=-\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})$ и непрерывности по $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$ собственных чисел оператора $\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})$ следует, что найдётся константа $c>0$ такая, что

$$\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})|_{\mathfrak{N}_+(\boldsymbol{\theta})}\geqslant cI_{\mathfrak{N}_+(\boldsymbol{\theta})},\qquad -\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})|_{\mathfrak{N}_-(\boldsymbol{\theta})}\geqslant cI_{\mathfrak{N}_-(\boldsymbol{\theta})},\qquad \boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}. \tag{3.38}$$

Также из условия 3.4 следуют чётность числа n и равенство $\dim\mathfrak{N}_+(\boldsymbol{\theta})=\dim\mathfrak{N}_-(\boldsymbol{\theta})=n/2$ для всех $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$.

Положим $t=|\delta\mathbf{k}|$, $\delta\mathbf{k}=t\boldsymbol{\theta}$ (а тогда $\mathbf{k}=\mathbf{k}^\circ+t\boldsymbol{\theta}$ — прямая, проходящая через точку $\mathbf{k}^\circ$ в направлении $\boldsymbol{\theta}\in\mathbb{S}^{d-1}$). Рассмотрим оператор $\mathscr{A}(t,\boldsymbol{\theta})$, заданный формулой

$$\mathscr{A}(t,\boldsymbol{\theta})=\begin{cases}\dfrac{1}{t}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ+t\boldsymbol{\theta})-\lambda_0I\big)F(\mathbf{k}^\circ+t\boldsymbol{\theta}), & \text{если } t\neq 0,\\ \mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta}), & \text{если } t=0,\end{cases}$$

как возмущение оператора $\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})$.

Лемма 3.6. *Справедливо неравенство*

$$\|\mathscr{A}(t,\boldsymbol{\theta}) - \mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant C_{18}t, \qquad t = |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa; \qquad C_{18} = \lambda_0 C_8 + C_{13}. \tag{3.39}$$

Доказательство. Используя (3.13), (3.15), (3.25) и (3.27), получаем

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \lambda_0 F(\mathbf{k}) - \mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) = -\lambda_0\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}).$$

Отсюда и из оценок (3.13), (3.25) с учётом однородности $\mathfrak{G}_1^\circ(t\boldsymbol{\theta}) = t\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})$ следует (3.39). $\square$

Из (3.32) и (3.38) следует, что положительные собственные числа оператора $\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})$ содержатся в отрезке $[c, C_{15}]$, а отрицательные — в отрезке $[-C_{15}, -c]$. Через $P_\pm(\boldsymbol{\theta})$ обозначим соответствующие спектральные проекторы на подпространства $\mathfrak{N}_+(\boldsymbol{\theta})$ и $\mathfrak{N}_-(\boldsymbol{\theta})$:

$$P_\pm(\boldsymbol{\theta}) = \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\tilde{\gamma}_\pm} (\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta}) - \zeta I)^{-1} d\zeta, \tag{3.40}$$

где $\tilde{\gamma}_\pm \subset \mathbb{C}$ — контуры, окружающие отрезки $[3c/4, C_{15} + c/4]$ и $[-C_{15} - c/4, -3c/4]$, соответственно, эквидистантно на расстоянии $c/4$.

Теперь выберем число $\varkappa^0 \leqslant \varkappa$ так, чтобы

$$\varkappa^0 \leqslant (4C_{18})^{-1}c.$$

Тогда в силу (3.39) при $t = |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0$ имеем

$$\|\mathscr{A}(t,\boldsymbol{\theta}) - \mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant c/4. \tag{3.41}$$

Далее, введём проекторы

$$F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) := \frac{-1}{2\pi i}\oint_{\tilde{\gamma}_\pm} (\mathscr{A}(t,\boldsymbol{\theta}) - \zeta I)^{-1} d\zeta. \tag{3.42}$$

Легко видеть, что

$$F_+(t,\boldsymbol{\theta}) = F(\mathbf{k})\mathcal{E}_{\mathcal{A}(\mathbf{k})}(\lambda_0, +\infty), \quad F_-(t,\boldsymbol{\theta}) = F(\mathbf{k})\mathcal{E}_{\mathcal{A}(\mathbf{k})}[0, \lambda_0), \quad \text{при} \quad \delta\mathbf{k} \neq \mathbf{0},\ |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0,$$

а из (3.38), (3.41) и (3.42) следует, что

$$\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) \geqslant \frac{3}{4}c|\delta\mathbf{k}|F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}), \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0, \tag{3.43}$$

$$\dim \operatorname{Ran} F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) = \dim \mathfrak{N}_\pm(\boldsymbol{\theta}) = n/2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0. \tag{3.44}$$

Предложение 3.7. *Пусть выполнено условие 3.4. Тогда при $t = |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0$ имеем*

$$\|F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) - P_\pm(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant C_{19}t \tag{3.45}$$

с константой $C_{19} = \frac{8C_{18}}{\pi c^2}\bigl(2C_{15} + (\frac{\pi}{2} - 1)c\bigr)$.

Доказательство. Для операторов $P_\pm(\boldsymbol{\theta})$ и $F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})$ справедливы представления (3.40) и (3.42), причём длины контуров $\tilde{\gamma}_\pm$ равны

$$l_{\tilde{\gamma}_\pm} = 2\left(C_{15} - \frac{c}{2}\right) + 2\pi\frac{c}{4} = 2C_{15} + \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)c. \tag{3.46}$$

Применим резольвентное тождество

$$(\mathscr{A}(t,\boldsymbol{\theta})-\zeta I)^{-1}-(\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})-\zeta I)^{-1}=(\mathscr{A}(t,\boldsymbol{\theta})-\zeta I)^{-1}\big(\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})-\mathscr{A}(t,\boldsymbol{\theta})\big)(\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})-\zeta I)^{-1}.$$

При $|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0$ и $\zeta\in\tilde{\gamma}_\pm$ имеем $\|(\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})-\zeta I)^{-1}\|\leqslant 4c^{-1}$, $\|(\mathscr{A}(t,\boldsymbol{\theta})-\zeta I)^{-1}\|\leqslant 4c^{-1}$. Вместе с (3.39) это влечёт

$$\|(\mathscr{A}(t,\boldsymbol{\theta})-\zeta I)^{-1}-(\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})-\zeta I)^{-1}\|\leqslant 16C_{18}c^{-2}t,\qquad \zeta\in\tilde{\gamma}_\pm,\quad t=|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0. \tag{3.47}$$

Объединяя (3.40), (3.42), (3.46) и (3.47), приходим к (3.45). □

Теперь предположим, что выполнено условие 3.5(±). Рассмотрим оператор $\widetilde{\mathscr{A}}(t,\boldsymbol{\theta})$, заданный формулой

$$\widetilde{\mathscr{A}}(t,\boldsymbol{\theta})=\begin{cases}\dfrac{1}{t^2}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ+t\boldsymbol{\theta})-\lambda_0 I\big)F(\mathbf{k}^\circ+t\boldsymbol{\theta}), & \text{если } t\neq 0,\\ \mathfrak{G}_2^\circ(\boldsymbol{\theta}), & \text{если } t=0.\end{cases}$$

Аналогично доказательству леммы 3.6, используя (3.14)–(3.16), (3.19), (3.26)–(3.28), (3.31), (3.35), (3.36) с учётом $\mathfrak{G}_1^\circ(\boldsymbol{\theta})=0$, получаем следующее утверждение.

Лемма 3.8. *Пусть выполнено условие* 3.5(±)*. Справедливо неравенство*

$$\|\widetilde{\mathscr{A}}(t,\boldsymbol{\theta})-\mathfrak{G}_2^\circ(\boldsymbol{\theta})\|\leqslant C_{20}t,\qquad t=|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa;\qquad C_{20}=\lambda_0C_9+C_{14}. \tag{3.48}$$

Выберем теперь число $\varkappa^0\leqslant\varkappa$ так, что

$$\varkappa^0\leqslant\min\{(8C_{20})^{-1}c,(16C_7)^{-1}\}.$$

Тогда, в силу (3.48) при $|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0$ имеем

$$\|\widetilde{\mathscr{A}}(t,\boldsymbol{\theta})-\mathfrak{G}_2^\circ(\boldsymbol{\theta})\|\leqslant c/8.$$

Вместе с (3.12) и условием 3.5(±) отсюда следует

$$\pm\,(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)F(\mathbf{k})\geqslant\frac{3}{4}c|\delta\mathbf{k}|^2F(\mathbf{k}),\qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0. \tag{3.49}$$

3.3. Аппроксимации для оператора $(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})$**.** В этом пункте мы находим подходящие приближения для операторов $(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})$ и $P(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})$, $|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa$. При этом мы считаем, что

$$\lambda_0\neq 0 \tag{3.50}$$

и $\varkappa$ удовлетворяет условию

$$\varkappa\leqslant\min\{(4C_{12})^{-1}\lambda_0,(8C_7)^{-1}\}. \tag{3.51}$$

Начнём с оценки разности $(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})-(\lambda_0+\zeta)^{-1}P$, $\zeta>0$. Представим эту разность в виде

$$(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})-(\lambda_0+\zeta)^{-1}P=\mathcal{J}_1(\mathbf{k},\zeta)+\mathcal{J}_2(\mathbf{k},\zeta)+\mathcal{J}_3(\mathbf{k},\zeta), \tag{3.52}$$

где

$$\mathcal{J}_1(\mathbf{k},\zeta) = (\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})(F(\mathbf{k})-P),$$
$$\mathcal{J}_2(\mathbf{k},\zeta) = (F(\mathbf{k})-P)(\lambda_0+\zeta)^{-1}P,$$
$$\mathcal{J}_3(\mathbf{k},\zeta) = (\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})P - F(\mathbf{k})(\lambda_0+\zeta)^{-1}P.$$

Из (3.12), (3.24) и (3.51) следует оценка

$$\|(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})\| \leqslant (\lambda_0/2+\zeta)^{-1}, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \quad \zeta > 0. \tag{3.53}$$

Поэтому, с учётом (3.12), мы получаем следующие оценки для $\mathcal{J}_1(\mathbf{k},\zeta)$ и $\mathcal{J}_2(\mathbf{k},\zeta)$:

$$\|\mathcal{J}_1(\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant (\lambda_0/2+\zeta)^{-1}C_7|\delta\mathbf{k}|, \qquad \|\mathcal{J}_2(\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant (\lambda_0+\zeta)^{-1}C_7|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \quad \zeta > 0. \tag{3.54}$$

Рассмотрим теперь $\mathcal{J}_3(\mathbf{k},\zeta)$. Применение резольвентного тождества даёт равенство

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_3(\mathbf{k},\zeta) &= (\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})P - F(\mathbf{k})(\lambda_0+\zeta)^{-1}P \\ &= -(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0 P\big)(\lambda_0+\zeta)^{-1}P,\end{aligned} \tag{3.55}$$

откуда с учётом (3.24) и (3.53) следует оценка

$$\|\mathcal{J}_3(\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant (\lambda_0/2+\zeta)^{-1}(\lambda_0+\zeta)^{-1}C_{12}|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \quad \zeta > 0. \tag{3.56}$$

Таким образом, из (3.52), (3.54), (3.56) имеем

$$\|(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k}) - (\lambda_0+\zeta)^{-1}P\| \leqslant 2(\lambda_0/2+\zeta)^{-1}C_7|\delta\mathbf{k}| + (\lambda_0/2+\zeta)^{-2}C_{12}|\delta\mathbf{k}|,$$
$$|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \quad \zeta > 0. \tag{3.57}$$

Теперь рассмотрим разность

$$P(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k}) - P(\lambda_0+\zeta)^{-1}F(\mathbf{k}).$$

Аналогично (3.55), (3.56) имеем

$$\begin{aligned}P(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k}) &- P(\lambda_0+\zeta)^{-1}F(\mathbf{k}) \\ &= -P(\lambda_0+\zeta)^{-1}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0 P\big)(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k}).\end{aligned} \tag{3.58}$$

$$\|P(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k}) - P(\lambda_0+\zeta)^{-1}F(\mathbf{k})\| \leqslant (\lambda_0/2+\zeta)^{-1}(\lambda_0+\zeta)^{-1}C_{12}|\delta\mathbf{k}|, \quad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \quad \zeta > 0. \tag{3.59}$$

Далее, из (3.25), (3.27) и тождества $PF_1^\times(\delta\mathbf{k})^* = 0$ следует соотношение

$$P\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0 P\big)F(\mathbf{k}) = P\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + \lambda_0 PF_1^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + P\Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}),$$

поэтому правую часть (3.58) можно записать как

$$\begin{aligned}-&P(\lambda_0+\zeta)^{-1}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0 P\big)(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k}) \\ &= -(\lambda_0+\zeta)^{-1}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})(\lambda_0+\zeta)^{-1}PF(\mathbf{k}) + \mathcal{J}_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) + \mathcal{J}_5(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta),\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{J}_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) \coloneqq -(\lambda_0+\zeta)^{-1}P\big(\lambda_0 PF_1^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + \Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\big)(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k}),$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{J}_5(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) := -(\lambda_0+\zeta)^{-1}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\big(P(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k}) - P(\lambda_0+\zeta)^{-1}F(\mathbf{k})\big),\\
&\|\mathcal{J}_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant (\lambda_0/2+\zeta)^{-2}\big(\lambda_0 C_{10}^2 + \lambda_0 C_{11}\varkappa + C_{13}\big)|\delta\mathbf{k}|^2, \quad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa, \quad \zeta>0,\\
&\|\mathcal{J}_5(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant (\lambda_0/2+\zeta)^{-3}C_{12}C_{15}|\delta\mathbf{k}|^2, \qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa, \quad \zeta>0.
\end{aligned} \tag{3.60}$$

При оценивании $\mathcal{J}_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ мы использовали (3.20), (3.22), (3.23), (3.25) и (3.53), а при оценивании $\mathcal{J}_5(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ — (3.32) и (3.59).

В итоге, мы получили следующий результат:

$$\begin{aligned}
&P(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})\\
&\qquad = P(\lambda_0+\zeta)^{-1}F(\mathbf{k}) - (\lambda_0+\zeta)^{-2}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})PF(\mathbf{k}) + \mathcal{J}_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) + \mathcal{J}_5(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta),\\
&\qquad\qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa, \quad \zeta>0.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

где $\mathcal{J}_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ и $\mathcal{J}_5(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ удовлетворяют оценкам (3.60).

3.4. Аппроксимация оператора $\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})$ в случае, когда выполнено условие 3.4. В этом пункте, в предположении выполнения условия 3.4, мы получим нужные приближения для операторов

$$\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) \qquad \text{и} \qquad P\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}).$$

Рассмотрим разность

$$\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) - (\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta}), \qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0, \quad \zeta>0,$$

которую запишем следующим образом:

$$\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) - (\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta}) = \mathcal{J}_6(\mathbf{k}) + \mathcal{J}_7(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \mathcal{J}_8(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}),$$

где

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_6(\mathbf{k}) &:= \big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})(F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})-P_\pm(\boldsymbol{\theta})),\\
\mathcal{J}_7(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) &:= (F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})-P_\pm(\boldsymbol{\theta}))(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta}),\\
\mathcal{J}_8(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) &:= \big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})P_\pm(\boldsymbol{\theta}) - F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned}$$

Из (3.43) следует оценка

$$\|\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\| \leqslant (\tfrac{3}{4}c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}, \qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0, \quad \zeta>0,$$

что вместе с (3.38), (3.45) даёт

$$\|\mathcal{J}_6(\mathbf{k})\| \leqslant (\tfrac{3}{4}c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}C_{19}|\delta\mathbf{k}|, \qquad \|\mathcal{J}_7(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| \leqslant (c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}C_{19}|\delta\mathbf{k}|, \quad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0, \quad \zeta>0.$$

Далее, оценим $\mathcal{J}_8(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$. С помощью резольвентного тождества представим $\mathcal{J}_8(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$ в виде

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_8(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) = \mp\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \lambda_0 P - \mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\big)&\\
\times (\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta}).&
\end{aligned} \tag{3.62}$$

В силу (3.27) и тождества $F_1^\times(\delta\mathbf{k})P = 0$ справедливо равенство

$$F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\big(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I - \mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\big)P_\pm(\boldsymbol{\theta})$$

$$= F_\pm(t,\boldsymbol\theta)\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \lambda_0 P - G_1(\delta\mathbf{k})\big)P_\pm(\boldsymbol\theta) + \lambda_0 F_\pm(t,\boldsymbol\theta)F_1^\times(\delta\mathbf{k})^* P_\pm(\boldsymbol\theta).$$

Поэтому, применяя (3.20), (3.22), (3.23), (3.25), (3.38), (3.43), получаем оценку

$$\begin{aligned}\|\mathcal{J}_8(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| &\leqslant (\tfrac34 c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}(c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}(C_{13}+\lambda_0 C_{11}\varkappa^0+\lambda_0 C_{10}^2)|\delta\mathbf{k}|^2\\ &\leqslant c^{-1}(\tfrac34 c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}(C_{13}+\lambda_0 C_{11}\varkappa^0+\lambda_0 C_{10}^2)|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0, \quad \zeta>0.\end{aligned}$$

Таким образом, мы доказали, что

$$\begin{aligned}&\big\|\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol\theta) - (\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol\theta)\big\|\\ &\qquad\qquad \leqslant C_{21}(\tfrac34 c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0, \quad \zeta>0,\\ &C_{21} = 2C_{19}+c^{-1}C_{13}+c^{-1}\lambda_0 C_{11}\varkappa^0+c^{-1}\lambda_0 C_{10}^2.\end{aligned} \tag{3.63}$$

Получим теперь более точное приближение для $P_\pm(\boldsymbol\theta)\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol\theta)$. Аналогично (3.62) имеем

$$\begin{aligned}&P_\pm(\boldsymbol\theta)\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol\theta) - P_\pm(\boldsymbol\theta)(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol\theta)\\ &= \mp P_\pm(\boldsymbol\theta)(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0 P-\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\big)\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol\theta).\end{aligned} \tag{3.64}$$

В силу (3.22), (3.26)–(3.28), (3.31), тождеств $G_2^\times(\delta\mathbf{k})P=0$, $PG_2^\perp(\delta\mathbf{k})=0$ и $F_1^\times(\delta\mathbf{k})P=0$ справедливо соотношение

$$\begin{aligned}&P\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0 P-\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\big)F(\mathbf{k})\\ &\qquad = P\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + P\Xi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + \lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + G_2^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k})\end{aligned} \tag{3.65}$$

и поэтому

$$\begin{aligned}&P_\pm(\boldsymbol\theta)\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol\theta) - P_\pm(\boldsymbol\theta)(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol\theta)\\ &\quad = \mp(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol\theta)\big(\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})+\Xi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})+\lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})+G_2^\times(\delta\mathbf{k})\big)\\ &\qquad\qquad \times\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol\theta).\end{aligned} \tag{3.66}$$

Представим правую часть этого равенства в виде

$$\mp(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol\theta)\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol\theta) + \mathcal{J}_9(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) + \mathcal{J}_{10}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta),$$

где

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_9(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) &= \mp(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol\theta)\\ &\quad\times\big(\Xi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})+\lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})+G_2^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k})\big)(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol\theta),\\ \mathcal{J}_{10}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) &= \mp(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol\theta)\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})\\ &\qquad\times\Big(\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol\theta) - (\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol\theta)\Big).\end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{J}_9(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ оценивается на основании (3.23), (3.26), (3.33), (3.38) и (3.43), а $\mathcal{J}_{10}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ — на основании (3.32), (3.38) и (3.63):

$$\|\mathcal{J}_9(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant (\tfrac34 c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}(c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}(C_{14}+\lambda_0 C_{11}+C_{17})|\delta\mathbf{k}|^3, \tag{3.67}$$

$$\|\mathcal{J}_{10}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\| \leqslant (\tfrac34 c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}(c|\delta\mathbf{k}|+\zeta)^{-1}C_{16}C_{21}|\delta\mathbf{k}|^3, \qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0, \quad \zeta>0. \tag{3.68}$$

В итоге, мы пришли к следующему результату:

$$
\begin{aligned}
P_\pm(\boldsymbol{\theta})\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) &= P_\pm(\boldsymbol{\theta})(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\\
\mp(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})&(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})+\mathcal{J}_9(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\\
&\qquad+\mathcal{J}_{10}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta),
\end{aligned}
\tag{3.69}
$$

где $\mathcal{J}_9(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ и $\mathcal{J}_{10}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$ удовлетворяют оценкам (3.67) и (3.68).

3.5. Спектральные приближения оператора $\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F(\mathbf{k})$ в случае, когда выполнено условие 3.5($\pm$). Оценим разность

$$
\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F(\mathbf{k})-(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P,\qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0,\qquad \zeta>0,
$$

в предположении выполнения условия 3.5($\pm$). Для этого представим её в виде

$$
\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F(\mathbf{k})-(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P=\mathcal{J}_{11}(\mathbf{k},\zeta)+\mathcal{J}_{12}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)+\mathcal{J}_{13}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta),
$$

где

$$
\begin{aligned}
\mathcal{J}_{11}(\mathbf{k},\zeta)&=\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F(\mathbf{k})(F(\mathbf{k})-P),\\
\mathcal{J}_{12}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)&=(F(\mathbf{k})-P)(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P,\\
\mathcal{J}_{13}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)&=\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F(\mathbf{k})P-F(\mathbf{k})(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P.
\end{aligned}
$$

Из (3.12), условия 3.5($\pm$) и (3.49) следуют оценки для $\mathcal{J}_{11}(\mathbf{k},\zeta)$ и $\mathcal{J}_{12}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)$:

$$
\|\mathcal{J}_{11}(\mathbf{k},\zeta)\|\leqslant(\tfrac34 c|\delta\mathbf{k}|^2+\zeta)^{-1}C_7|\delta\mathbf{k}|,\qquad \|\mathcal{J}_{12}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\|\leqslant(c|\delta\mathbf{k}|^2+\zeta)^{-1}C_7|\delta\mathbf{k}|,
$$
$$
|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0,\qquad \zeta>0.
$$

Далее, в силу (3.22), (3.26)–(3.28), (3.31), тождеств $G_2^\times(\delta\mathbf{k})P=0$, $G_2^\perp(\delta\mathbf{k})P=0$ и $F_1^\times(\delta\mathbf{k})P=0$ с учётом $\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})=0$ имеем

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{J}_{13}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\\
&=\mp\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F(\mathbf{k})\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0 P-\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})\big)(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P\\
&=\mp\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F(\mathbf{k})\big(\Xi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})+\lambda_0 F(\mathbf{k})\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F_1^\times(\delta\mathbf{k})^*+F(\mathbf{k})G_2^\times(\delta\mathbf{k})^*\big)\\
&\qquad\times(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P.
\end{aligned}
$$

Поэтому, применяя (3.23), (3.26), (3.33), а также условие 3.5($\pm$) и (3.49), получаем оценку

$$
\|\mathcal{J}_{13}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\|\leqslant(\tfrac34 c|\delta\mathbf{k}|^2+\zeta)^{-1}(c|\delta\mathbf{k}|^2+\zeta)^{-1}(C_{14}+\lambda_0 C_{11}+C_{17})|\delta\mathbf{k}|^3,
$$
$$
|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0,\qquad \zeta>0.
$$

Таким образом, мы доказали, что

$$
\begin{aligned}
&\|\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F(\mathbf{k})-(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P\|\\
&\qquad\leqslant 2(\tfrac34 c|\delta\mathbf{k}|^2+\zeta)^{-1}C_7|\delta\mathbf{k}|+(\tfrac34 c|\delta\mathbf{k}|^2+\zeta)^{-2}(C_{14}+\lambda_0 C_{11}+C_{17})|\delta\mathbf{k}|^3,\\
&\qquad\qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0,\qquad \zeta>0.
\end{aligned}
\tag{3.70}
$$

3.6. Аппроксимации операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}F(\mathbf{k})$ и $P\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k})$. Для операторов $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}F(\mathbf{k})$ и $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k})$ справедливы интегральные представления (см., например, [46, гл. III, § 3, п. 3])

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}F(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})\,d\zeta, \tag{3.71}$$

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})\,d\zeta. \tag{3.72}$$

В этом пункте мы предполагаем, что выполнены условия (3.50) и (3.51).

Предложение 3.9. *Пусть выполнены условия* (3.50) *и* (3.51)*. При* $|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa$ *справедлива оценка*

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}F(\mathbf{k})-\lambda_0^{-1/2}P\|\leqslant\Big(2^{3/2}\lambda_0^{-1/2}C_7+\sqrt{2}\lambda_0^{-3/2}C_{12}\Big)|\delta\mathbf{k}|. \tag{3.73}$$

Доказательство. Используя представление (3.71) и формулу

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\lambda_0+\zeta)^{-1}d\zeta=\lambda_0^{-1/2}, \tag{3.74}$$

имеем

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}F(\mathbf{k})-\lambda_0^{-1/2}P=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\big((\mathcal{A}(\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})-(\lambda_0+\zeta)^{-1}P\big)\,d\zeta.$$

Вместе с (3.57) отсюда следует (3.73). □

Перейдём к рассмотрению оператора $P\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k})$. Подставляя (3.61) в (3.72), запишем оператор $P\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k})$ следующим образом

$$\begin{aligned}
P\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k}) &= I_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})+I_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})+\mathcal{J}_{14}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}),\\
I_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) &\coloneqq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\lambda_0+\zeta)^{-1}P\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})\,d\zeta,\\
I_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) &\coloneqq -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\lambda_0+\zeta)^{-2}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})P\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})\,d\zeta,\\
\mathcal{J}_{14}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) &\coloneqq \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\big(\mathcal{J}_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)+\mathcal{J}_5(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\big)\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})\,d\zeta.
\end{aligned}$$

Начнём с рассмотрения $I_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$. Применяя (3.20), (3.22), (3.23), (3.25), (3.27), (3.74) и соотношение $PF_1^\times(\delta\mathbf{k})^*=0$, имеем

$$\begin{aligned}
&I_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})=\lambda_0^{-1/2}P\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})=\big(\lambda_0^{1/2}P+\lambda_0^{-1/2}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\big)F(\mathbf{k})+\mathcal{J}_{15}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}),\\
&\mathcal{J}_{15}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\coloneqq\lambda_0^{1/2}F_1^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k})+\lambda_0^{-1/2}P\Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}),\\
&\|\mathcal{J}_{15}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\|\leqslant\big(\lambda_0^{1/2}C_{10}^2+\lambda_0^{1/2}C_{11}\varkappa+\lambda_0^{-1/2}C_{13}\big)|\delta\mathbf{k}|^2,\qquad|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa.
\end{aligned} \tag{3.75}$$

Далее, рассмотрим $I_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$. Вычисляя интеграл и применяя (3.24), (3.32), имеем

$$\begin{aligned}
I_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) &= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\lambda_0+\zeta)^{-2}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})P\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})\,d\zeta\\
&= -\frac{1}{2}\lambda_0^{-3/2}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})P\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) = -\frac{1}{2}\lambda_0^{-1/2}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})PF(\mathbf{k})+\mathcal{J}_{16}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}),\\
\mathcal{J}_{16}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) &\coloneqq -\frac{1}{2}\lambda_0^{-3/2}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})P(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0P)F(\mathbf{k}),\\
\|\mathcal{J}_{16}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| &\leqslant \frac{1}{2}\lambda_0^{-3/2}C_{12}C_{15}|\delta\mathbf{k}|^2.
\end{aligned} \tag{3.76}$$

Остаётся оценить $\mathcal{J}_{14}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$. Использование (3.60) с учётом (3.24), (3.51) даёт

$$\|\mathcal{J}_{14}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| \leqslant \frac{3\sqrt{2}}{2}\lambda_0^{-1/2}\big(\lambda_0 C_{10}^2 + \lambda_0 C_{11}\varkappa + C_{13}\big)|\delta\mathbf{k}|^2 + \frac{9}{2\sqrt{2}}\lambda_0^{-3/2}C_{12}C_{15}|\delta\mathbf{k}|^2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa. \tag{3.77}$$

Мы получили следующий результат.

Предложение 3.10. *Пусть выполнены условия (3.50) и (3.51). При $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa$ справедливо равенство*

$$P\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k}) = \Big(\lambda_0^{1/2}P + \frac{1}{2}\lambda_0^{-1/2}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})P\Big)F(\mathbf{k}) + \mathcal{J}_{14}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \mathcal{J}_{15}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \mathcal{J}_{16}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}),$$

где $\mathcal{J}_{14}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$, $\mathcal{J}_{15}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$, $\mathcal{J}_{16}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$ удовлетворяют оценкам (3.75), (3.76), (3.77).

3.7. Аппроксимации оператора $P_\pm(\boldsymbol{\theta})\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)\big)^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})$ в случае, когда выполнено условие 3.4. Воспользуемся опять представлениями для дробных степеней (ср. (3.71), (3.72))

$$\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)\big)^{-1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I) + \zeta I\big)^{-1}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\,d\zeta, \tag{3.78}$$

$$\begin{aligned}\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)\big)^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) = \frac{\pm 1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I) + \zeta I\big)^{-1}& \\ \times (\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\,d\zeta.&\end{aligned} \tag{3.79}$$

Поясним, что под записью $\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)\big)^{-1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})$ в (3.78) мы понимаем сумму $\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)|_{\operatorname{Ran} F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})}\big)^{-1/2} \oplus \mathbb{O}|_{\operatorname{Ran} F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})^\perp}$, а под записью $\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)\big)^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})$ в (3.79) — оператор $\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)|_{\operatorname{Ran} F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})}\big)^{1/2} \oplus \mathbb{O}|_{\operatorname{Ran} F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})^\perp}$.

Следующее утверждение доказывается аналогично предложению 3.9 с использованием (3.63), (3.78) и представления вида (3.78) для оператора $(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})$.

Предложение 3.11. *Пусть выполнено условие 3.4. При $0 < |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0$ справедлива оценка*

$$\big\|\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)\big)^{-1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) - (\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\big\| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}c^{-1/2}C_{21}|\delta\mathbf{k}|^{1/2}. \tag{3.80}$$

Перейдём к рассмотрению оператора $P_\pm(\boldsymbol{\theta})\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)\big)^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})$. Применяя (3.69) и (3.79), получаем

$$\begin{aligned}
&P_\pm(\boldsymbol{\theta})\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)\big)^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) = I_3(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + I_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \mathcal{J}_{17}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}),\\
&I_3(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) := \pm\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\,d\zeta,\\
&I_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) := -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\\
&\qquad\qquad\times (\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\,d\zeta,\\
&\mathcal{J}_{17}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) := \pm\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\big(\mathcal{J}_9(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta) + \mathcal{J}_{10}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k},\zeta)\big)(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\,d\zeta.
\end{aligned}$$

Начнём с рассмотрения $I_3(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$. Применение представления вида (3.78) для оператора $(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})$ и (3.65) даёт

$$I_3(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) = \pm(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \lambda_0 P)F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})$$
$$= \big((\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta}) \pm (\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})\big)\, F_\pm(t,\boldsymbol{\theta}) + \mathcal{J}_{18}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}),$$

где

$$\mathcal{J}_{18}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) := \pm(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\big(\Xi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + G_2^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k})\big)F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})$$

оценивается на основании (3.23), (3.26), (3.33) и (3.38):

$$\|\mathcal{J}_{18}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| \leqslant c^{-1/2}(C_{14} + \lambda_0 C_{11} + C_{17})|\delta\mathbf{k}|^{5/2}, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0. \tag{3.81}$$

Теперь перейдём к $I_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$. В силу (3.25), (3.27) и соотношения $PF_1^\times(\delta\mathbf{k})^* = 0$ справедливо равенство $P(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)F(\mathbf{k}) = \mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + \lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + P\Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k})$. Поэтому

$$I_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$$
$$= -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\,d\zeta$$
$$+ \mathcal{J}_{19}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}),$$

где

$$\mathcal{J}_{19}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) := -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})$$
$$\times \big(\lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + \Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\big)F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\,d\zeta$$

удовлетворяет оценке

$$\|\mathcal{J}_{19}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| \leqslant \frac{1}{2}c^{-3/2}C_{16}(\lambda_0 C_{10}^2 + \lambda_0 C_{11}\varkappa^0 + C_{13})|\delta\mathbf{k}|^{5/2}, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0, \tag{3.82}$$

следующей из (3.20), (3.22), (3.23), (3.25), (3.32) и (3.38). Далее, справедливо тождество

$$(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta}) = \pm\big(I - \zeta(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}\big)P_\pm(\boldsymbol{\theta}),$$

поэтому

$$I_4(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) = \mp(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})$$
$$\pm \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{1/2}(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}) + \zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\,d\zeta + \mathcal{J}_{19}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}).$$

Остаётся оценить $\mathcal{J}_{17}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$. Из (3.67), (3.68), равенства

$$(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)F(\mathbf{k}) = \big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \lambda_0 P\big)F(\mathbf{k}) - \lambda_0(F(\mathbf{k}) - P)F(\mathbf{k}), \tag{3.83}$$

а также оценок (3.12), (3.24) следует, что

$$\|\mathcal{J}_{17}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| \leqslant 4\cdot 3^{-3/2}c^{-3/2}(C_{14} + \lambda_0 C_{11} + C_{17} + C_{16}C_{21})(\lambda_0 C_7 + C_{12})|\delta\mathbf{k}|^{5/2}, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0. \tag{3.84}$$

В итоге получаем следующее утверждение.

Предложение 3.12. *Пусть выполнено условие 3.4. При $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0$ справедливо равенство*

$$P_\pm(\boldsymbol\theta)\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol\theta) = \bigg((\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{1/2}P_\pm(\boldsymbol\theta) \\ \pm\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{1/2}(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol\theta)\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol\theta)\,d\zeta\bigg)F_\pm(t,\boldsymbol\theta) \\ + \mathscr{J}_{17}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \mathscr{J}_{18}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \mathscr{J}_{19}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}), \quad (3.85)$$

где $\mathscr{J}_{17}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$, $\mathscr{J}_{18}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$, $\mathscr{J}_{19}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$ *удовлетворяют оценкам* (3.81), (3.82), (3.84).

3.8. Аппроксимации операторов $\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{-1/2}F(\mathbf{k})$ и $P\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{1/2}F(\mathbf{k})$ в случае, когда выполнено условие 3.5($\pm$). Мы опять будем применять представления для дробных степеней (ср. (3.71), (3.72))

$$\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{-1/2}F(\mathbf{k}) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F(\mathbf{k})\,d\zeta, \quad (3.86)$$

$$\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{1/2}F(\mathbf{k}) = \frac{\pm 1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1} \\ \times(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)F(\mathbf{k})\,d\zeta. \quad (3.87)$$

Следующее утверждение доказывается аналогично предложению 3.9 с использованием (3.70), (3.86) и представления вида (3.86) для оператора $(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P$.

Предложение 3.13. *Пусть выполнено условие* 3.5($\pm$). *При* $0<|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0$ *справедлива оценка*

$$\big\|\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{-1/2}F(\mathbf{k}) - (\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P\big\| \\ \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}}c^{-1/2}C_7 + 4\cdot 3^{-3/2}c^{-3/2}(C_{14}+\lambda_0 C_{11}+C_{17}). \quad (3.88)$$

Теперь получим аппроксимацию для оператора $P\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{1/2}F(\mathbf{k})$. Используя представление (3.87) и формулу (3.65) (с учётом $\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})=0$), получаем

$$P\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{1/2}F(\mathbf{k}) = \pm(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)F(\mathbf{k}) + \mathscr{J}_{20}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) \\ = (\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}))^{1/2}PF(\mathbf{k}) + \mathscr{J}_{20}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \mathscr{J}_{21}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}), \quad (3.89)$$

где

$$\mathscr{J}_{20}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) := \frac{\pm 1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{-1/2}\Big(P\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)+\zeta I\big)^{-1}F(\mathbf{k}) - P(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}F(\mathbf{k})\Big) \\ \times(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)F(\mathbf{k})\,d\zeta,$$

$$\mathscr{J}_{21}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) := \\ \pm(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P\left(\Xi_2(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \lambda_0 F_1^\times(\delta\mathbf{k})\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}) + G_2^\times(\delta\mathbf{k})F(\mathbf{k})\right)F(\mathbf{k}).$$

Оценим $\mathscr{J}_{20}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$. Для этого воспользуемся (3.13), (3.15), (3.25), (3.27), (3.83) и учтём, что сейчас $\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})=0$. Справедливо равенство

$$(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)F(\mathbf{k}) = F(\mathbf{k})\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})F(\mathbf{k})-\lambda_0 P\big)F(\mathbf{k}) - \lambda_0 F(\mathbf{k})\big(F(\mathbf{k})-P\big)F(\mathbf{k}) \\ = F(\mathbf{k})\Xi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}) - \lambda_0 F(\mathbf{k})\Phi_1(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})F(\mathbf{k}).$$

Отсюда и из (3.70), с учётом (3.13), (3.25) следует оценка

$$\begin{aligned}\|\mathcal{J}_{20}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| \leqslant \frac{4}{\sqrt{3}} c^{-1/2} C_7 \left(\lambda_0 C_8 + C_{13}\right)|\delta\mathbf{k}|^2 \\ + 4\cdot 3^{-3/2} c^{-3/2} (C_{14} + \lambda_0 C_{11} + C_{17}) \left(\lambda_0 C_8 + C_{13}\right)|\delta\mathbf{k}|^2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0.\end{aligned} \tag{3.90}$$

Далее, применение оценок (3.23), (3.26), (3.33) вместе с условием 3.5($\pm$) даёт оценку для $\mathcal{J}_{21}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$:

$$\|\mathcal{J}_{21}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})\| \leqslant c^{-1/2}(C_{14} + \lambda_0 C_{11} + C_{17})|\delta\mathbf{k}|^2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0. \tag{3.91}$$

Подытожим вышесказанное.

Предложение 3.14. *Пусть выполнено условие 3.5($\pm$). При $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa^0$ справедливо равенство*

$$P\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k}) - \lambda_0 I)\big)^{1/2} F(\mathbf{k}) = (\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}))^{1/2} P F(\mathbf{k}) + \mathcal{J}_{20}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}) + \mathcal{J}_{21}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k}), \tag{3.92}$$

где $\mathcal{J}_{20}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$ и $\mathcal{J}_{21}(\delta\mathbf{k},\mathbf{k})$ удовлетворяют оценкам (3.90), (3.91).

3.9. Приближение для операторной экспоненты $e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}P$.

Положим

$$\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k}) := \lambda_0^{1/2} P + \frac{1}{2}\lambda_0^{-1/2}\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})P. \tag{3.93}$$

Пусть выполнены условия (3.50) и (3.51). В этом пункте мы хотим приблизить оператор $e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}P$, $\tau \in \mathbb{R}$, с помощью $e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}P$. Имеем

$$\begin{aligned}\big(e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}} - e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}P\big)P = P\big(e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k}) - e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}P\big) \\ + e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}(P - F(\mathbf{k})) + (F(\mathbf{k}) - P)e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

В силу (3.12) последние два слагаемых допускают оценки

$$\begin{aligned}\|e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}(P - F(\mathbf{k}))\| \leqslant C_7|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa, \\ \|(F(\mathbf{k}) - P)e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k})\| \leqslant C_7|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa,\end{aligned}$$

Далее (ср. [15, доказательство теоремы 2.1]),

$$P\big(e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k}) - e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}P\big) = Pe^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}\Sigma(\mathbf{k},\tau), \tag{3.94}$$

где $\Sigma(\mathbf{k},\tau) := e^{i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}F(\mathbf{k})e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}} - P$. Справедливо равенство

$$\Sigma(\mathbf{k},\tau) = \Sigma(\mathbf{k},0) + \int_0^\tau \Sigma'(\mathbf{k},\tilde{\tau})d\tilde{\tau}. \tag{3.95}$$

Очевидно, $\Sigma(\mathbf{k},0) = F(\mathbf{k}) - P$, и в силу (3.12)

$$\|Pe^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}\Sigma(\mathbf{k},0)\| \leqslant C_7|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa. \tag{3.96}$$

Затем,

$$\Sigma'(\mathbf{k},\tau) := \frac{d\Sigma}{d\tau}(\mathbf{k},\tau) = -ie^{i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k}) - \mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P\big)F(\mathbf{k})e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}.$$

Применение предложения 3.10 для оценки оператора $P\big(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}F(\mathbf{k}) - \mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P\big)F(\mathbf{k})$ даёт

$$\left\| P e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P} \int_0^\tau \Sigma'(\mathbf{k},\tilde{\tau})\,d\tilde{\tau} \right\| \leqslant C_{22}|\tau||\delta\mathbf{k}|^2, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa; \tag{3.97}$$

$$C_{22} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}+1\right)\left(\lambda_0^{1/2}C_{10}^2 + \lambda_0^{1/2}C_{11}\varkappa + \lambda_0^{-1/2}C_{13}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{9}{\sqrt{2}}+1\right)\lambda_0^{-3/2}C_{12}C_{15}.$$

В итоге получаем следующий результат.

Теорема 3.15. *Пусть выполнены условия* (3.50) *и* (3.51). *Пусть* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa$. *Справедлива оценка*

$$\big\|\big(e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}} - e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}P\big)P\big\| \leqslant 3C_7|\delta\mathbf{k}| + C_{22}|\tau||\delta\mathbf{k}|^2.$$

Рассмотрим теперь разность

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}P - \lambda_0^{-1/2}e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}P.$$

При этом сейчас мы дополнительно предположим, что $\mathbf{k}^\circ \neq \mathbf{0} \,(\mathrm{mod}\ \widetilde{\Gamma})$, а тогда (уменьшая при необходимости $\varkappa$)

$$E_1(\mathbf{k}) \geqslant \widetilde{C} > 0, \qquad \mathbf{k} = \mathbf{k}^\circ + \delta\mathbf{k}, \quad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa. \tag{3.98}$$

Запишем $\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}P$ как

$$\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}P = \mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k})P + \mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k})^\perp P. \tag{3.99}$$

Из (3.12), (3.98) следует оценка

$$\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k})^\perp P\| \leqslant \widetilde{C}^{-1/2}C_7|\delta\mathbf{k}|, \qquad |\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa. \tag{3.100}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}&e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k})P - \lambda_0^{-1/2}e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}P \\ &= \left(\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}F(\mathbf{k}) - \lambda_0^{-1/2}P\right)e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k})P \\ &\qquad + \lambda_0^{-1/2}P\left(e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}F(\mathbf{k}) - e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}P\right)P.\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое оценивается с помощью (3.73), второе — с помощью (3.94)–(3.97). Таким образом, учитывая (3.99) и (3.100), мы приходим к следующему результату.

Теорема 3.16. *Пусть выполнены условия* (3.50), (3.51), *и дополнительно предположим, что* $\mathbf{k}^\circ \neq \mathbf{0}\,(\mathrm{mod}\ \widetilde{\Gamma})$ *и выполнено* (3.98). *Пусть* $\tau \in \mathbb{R}$ *и* $|\delta\mathbf{k}| \leqslant \varkappa$. *Справедлива оценка*

$$\big\|\mathcal{A}(\mathbf{k})^{-1/2}e^{-i\tau\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}}P - \lambda_0^{-1/2}e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P}P\big\| \leqslant C_{23}|\delta\mathbf{k}| + \lambda_0^{-1/2}C_{22}|\tau||\delta\mathbf{k}|^2,$$

где $C_{23} = 2^{3/2}\lambda_0^{-1/2}C_7 + \sqrt{2}\lambda_0^{-3/2}C_{12} + \lambda_0^{-1/2}C_7 + \widetilde{C}^{-1/2}C_7$.

3.10. Приближение для операторной экспоненты $e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}}$ в случае, когда выполнено условие 3.4. Пусть выполнено условие 3.4. Положим

$$
\begin{aligned}
\mathring{\mathfrak{A}}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k}) &:= (\pm\mathfrak{G}^{\circ}_1(\delta\mathbf{k}))^{1/2}P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}) \\
&\pm\frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}\zeta^{1/2}(\pm\mathfrak{G}^{\circ}_1(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\mathfrak{G}^{\circ}_2(\delta\mathbf{k})(\pm\mathfrak{G}^{\circ}_1(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\,d\zeta.
\end{aligned}
\tag{3.101}
$$

Здесь операторы $\mathfrak{G}^{\circ}_1(\delta\mathbf{k})$ и $\mathfrak{G}^{\circ}_2(\delta\mathbf{k})$ определены в (3.29) и (3.31). Сначала мы получим приближение для оператора $e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})}\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})$, $\tau\in\mathbb{R}$, где $\mathscr{E}_{+}(\mathbf{k}) := \mathcal{E}_{\mathcal{A}(\mathbf{k})}[\lambda_0,+\infty)$, $\mathscr{E}_{-}(\mathbf{k}) := \mathcal{E}_{\mathcal{A}(\mathbf{k})}[0,\lambda_0]$, через оператор $e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})}P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})$.

Отметим сперва следующее соотношение

$$
\begin{aligned}
\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}) &= \big(F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})+F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})^{\perp}\big)\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}) \\
&= F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})+\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})\big(P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})-F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})\big)P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}),\qquad t=|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0.
\end{aligned}
$$

Рассмотрим разность

$$
\begin{aligned}
&e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})}\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}) - e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})}P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}) \\
&\quad= P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\big(e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta}) - e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})}P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\big)P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}) \\
&\qquad+\big(F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})-P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\big)e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}) \\
&\qquad\qquad+e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})}\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})\big(P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})-F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})\big)P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned}
$$

В силу (3.45) последние два слагаемых допускают оценки

$$
\begin{aligned}
\big\|\big(F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})-P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\big)e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\big\| &\leqslant C_{19}|\delta\mathbf{k}|,\quad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0, \\
\big\|e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})}\mathscr{E}_{\pm}(\mathbf{k})\big(P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})-F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})\big)P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\big\| &\leqslant C_{19}|\delta\mathbf{k}|,\quad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0.
\end{aligned}
$$

Далее, аналогично рассмотрениям предыдущего пункта,

$$
\begin{aligned}
P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\big(e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta}) &- e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})}P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\big)P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}) \\
&= P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})}\widetilde{\Sigma}(\mathbf{k},\tau)P_{\pm}(\boldsymbol{\theta}),
\end{aligned}
\tag{3.102}
$$

где $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{k},\tau) := e^{i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})} - P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})$. Справедливо равенство

$$
\widetilde{\Sigma}(\mathbf{k},\tau) = \widetilde{\Sigma}(\mathbf{k},0) + \int_0^{\tau}\widetilde{\Sigma}'(\mathbf{k},\tilde{\tau})d\tilde{\tau}.
\tag{3.103}
$$

Очевидно, $\widetilde{\Sigma}(\mathbf{k},0) = F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta}) - P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})$, и в силу (3.45)

$$
\|P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})}\widetilde{\Sigma}(\mathbf{k},0)P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\| \leqslant C_{19}|\delta\mathbf{k}|,\qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0.
\tag{3.104}
$$

Затем,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\Sigma}'(\mathbf{k},\tau) := \frac{d\widetilde{\Sigma}}{d\tau}(\mathbf{k},\tau) = -ie^{i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})}\Big(\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{1/2}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta}) - \mathring{\mathfrak{A}}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})P_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\Big) \\
\times e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta})}F_{\pm}(t,\boldsymbol{\theta}).
\end{aligned}
$$

Поэтому применение предложения 3.12 для оценки оператора

$$P_\pm(\boldsymbol{\theta})\big(\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})-\mathring{\mathfrak{A}}_\pm^{(2)}(\delta\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})\big)F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})$$

даёт

$$\left\|P_\pm(\boldsymbol{\theta})e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}_\pm^{(2)}(\delta\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})}\int_0^\tau \widetilde{\Sigma}'(\mathbf{k},\tilde\tau)P_\pm(\boldsymbol{\theta})\,d\tilde\tau\right\|\leqslant C_{24}|\tau||\delta\mathbf{k}|^{5/2},\qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0;\tag{3.105}$$

$$C_{24}=c^{-1/2}(C_{14}+\lambda_0C_{11}+C_{17})+\frac{1}{2}c^{-3/2}C_{16}(\lambda_0C_{10}^2+\lambda_0C_{11}\varkappa^0+C_{13})$$
$$+4\cdot 3^{-3/2}c^{-3/2}(C_{14}+\lambda_0C_{11}+C_{17}+C_{16}C_{21})(\lambda_0C_7+C_{12}).$$

Мы получили следующий результат.

Теорема 3.17. *Пусть выполнено условие 3.4. Пусть $\tau\in\mathbb{R}$ и $|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0$. Справедлива оценка*

$$\big\|e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I))^{1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})-e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}_\pm^{(2)}(\delta\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\big\|\leqslant 3C_{19}|\delta\mathbf{k}|+C_{24}|\tau||\delta\mathbf{k}|^{5/2}.$$

Теперь приблизим оператор

$$\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I)\big)^{-1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I))^{1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta}),\qquad \tau\in\mathbb{R},$$

через оператор $(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}_\pm^{(2)}(\delta\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})}P_\pm(\boldsymbol{\theta})$ при $0<|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0$. Напомним, что сейчас выполнены соотношения (3.43) и (3.44), поэтому точка λ_0 не является собственным числом оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ при $0<|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0$, а значит оператор $\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I)\big)^{-1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})$ определён корректно.

Рассмотрим разность

$$\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I)\big)^{-1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I))^{1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})$$
$$-(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}_\pm^{(2)}(\delta\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})}P_\pm(\boldsymbol{\theta}).$$

Запишем её как

$$\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I)\big)^{-1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})^\perp e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I))^{1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})\big(P_\pm(\boldsymbol{\theta})-F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\big)P_\pm(\boldsymbol{\theta})$$
$$+\Big(\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I)\big)^{-1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})-(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\Big)$$
$$\times e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I))^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})P_\pm(\boldsymbol{\theta})$$
$$+(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\Big(e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I))^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})-e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}_\pm^{(2)}(\delta\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\Big)P_\pm(\boldsymbol{\theta}).$$

С помощью (3.45) и неравенства

$$\big\|\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I)\big)^{-1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})^\perp\big\|\leqslant(2d_0/3)^{-1/2},\qquad 0<|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0,$$

оценим первое слагаемое:

$$\Big\|\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I)\big)^{-1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})^\perp e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0I))^{1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})$$
$$\times\big(P_\pm(\boldsymbol{\theta})-F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})\big)P_\pm(\boldsymbol{\theta})\Big\|\leqslant(2d_0/3)^{-1/2}C_{19}|\delta\mathbf{k}|,\qquad 0<|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0.$$

Оценим второе слагаемое. Из (3.80) следует неравенство

$$\Big\|\Big((\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{-1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})-(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\Big) \\ \times e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})P_\pm(\boldsymbol{\theta})\Big\| \leqslant \frac{2}{\sqrt{3}}c^{-1/2}C_{21}|\delta\mathbf{k}|^{1/2}, \qquad 0<|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0.$$

Наконец, третье слагаемое оценим, используя (3.38) и (3.102)–(3.105):

$$\Big\|(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\Big(e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})}F_\pm(t,\boldsymbol{\theta})-e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}_\pm^{(2)}(\delta\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\Big)P_\pm(\boldsymbol{\theta})\Big\| \\ \leqslant c^{-1/2}C_{19}|\delta\mathbf{k}|^{1/2}+c^{-1/2}C_{24}|\tau||\delta\mathbf{k}|^2, \qquad 0<|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0.$$

В итоге получаем следующий результат.

Теорема 3.18. *Пусть выполнено условие 3.4. Пусть $\tau\in\mathbb{R}$ и $0<|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0$. Справедлива оценка*

$$\Big\|\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{-1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta}) \\ -(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}_\pm^{(2)}(\delta\mathbf{k})P_\pm(\boldsymbol{\theta})}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\Big\| \\ \leqslant C_{25}|\delta\mathbf{k}|^{1/2}+(2d_0/3)^{-1/2}C_{19}|\delta\mathbf{k}|+c^{-1/2}C_{24}|\tau||\delta\mathbf{k}|^2,$$

где $C_{25}=\frac{2}{\sqrt{3}}c^{-1/2}C_{21}+c^{-1/2}C_{19}$.

3.11. Приближение для операторной экспоненты $e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}}$ в случае, когда выполнено условие 3.5($\pm$). Предположим теперь, что выполнено условие 3.5($\pm$). Проводя аналогичные предыдущим двум пунктам рассмотрения с использованием предложений 3.13, 3.14, получаем следующий результат.

Теорема 3.19. *Пусть выполнено условие 3.5($\pm$). Пусть $\tau\in\mathbb{R}$. Справедливы оценки*

$$\big\|e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})P-e^{-i\tau(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}))^{1/2}P}P\big\|\leqslant 3C_7|\delta\mathbf{k}|+C_{26}|\tau||\delta\mathbf{k}|^2, \qquad |\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0;$$

$$\big\|\big(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I)\big)^{-1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}(\mathbf{k})-\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})P-(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}e^{-i\tau(\pm\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k}))^{1/2}P}P\big\| \\ \leqslant C_{27}+(2d_0/3)^{-1/2}C_7|\delta\mathbf{k}|+c^{-1/2}C_{26}|\tau||\delta\mathbf{k}|, \qquad 0<|\delta\mathbf{k}|\leqslant\varkappa^0;$$

где

$$C_{26}=\frac{4}{\sqrt{3}}c^{-1/2}C_7\left(\lambda_0C_8+C_{13}\right)+4\cdot3^{-3/2}c^{-3/2}(C_{14}+\lambda_0C_{11}+C_{17})\left(\lambda_0C_8+C_{13}\right) \\ +c^{-1/2}(C_{14}+\lambda_0C_{11}+C_{17}),$$

$$C_{27}=\left(1+\frac{4}{\sqrt{3}}\right)c^{-1/2}C_7+4\cdot3^{-3/2}c^{-3/2}(C_{14}+\lambda_0C_{11}+C_{17}).$$

3.12. Вычисление в базисе. Пусть $\varsigma=\{\varsigma_p\}_{p=1}^n$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. В [41, п. 3.3] были получены выражения для матричных элементов операторов $\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})$ и $\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})$:

$$(\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})\varsigma_p,\varsigma_l)=\left\langle\mathfrak{g}_\varsigma^{1,lp},\delta\mathbf{k}\right\rangle, \qquad p,l=1,\dots,n, \tag{3.106}$$

$$(\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})\varsigma_p,\varsigma_l)=\left\langle\mathfrak{g}_\varsigma^{2,lp}(\delta\mathbf{k}),(\delta\mathbf{k})\right\rangle, \qquad p,l=1,\dots,n. \tag{3.107}$$

Здесь $\mathfrak{g}_{\varsigma}^{1,lp} = (\mathfrak{g}_{\varsigma,1}^{1,lp},\dots,\mathfrak{g}_{\varsigma,d}^{1,lp})^{\mathrm{t}}$ — вектор-столбец с элементами

$$\mathfrak{g}_{\varsigma,r}^{1,lp} = i\sum_{s=1}^{d}\int_\Omega g_{rs}(\mathbf{x})\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_s}\big(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*\big) - \omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*\frac{\partial}{\partial x_s}\big(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\big)\right)d\mathbf{x}$$
$$+ 2\sum_{s=1}^{d}k_s^\circ\int_\Omega g_{rs}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-2}\varsigma_p(\mathbf{x})\varsigma_l(\mathbf{x})^*d\mathbf{x},\qquad r=1,\dots,d,$$

$\mathfrak{g}_{\varsigma}^{2,lp}$ — $(d\times d)$-матрица с элементами

$$\mathfrak{g}_{\varsigma,rq}^{2,lp} = -\sum_{s=1}^{d}\int_\Omega g_{qs}(\mathbf{x})\left(\omega(\mathbf{x})^{-1}\Lambda_r^p(\mathbf{x})\frac{\partial}{\partial x_s}(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*) - \omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_l(\mathbf{x})^*\frac{\partial}{\partial x_s}(\omega(\mathbf{x})^{-1}\Lambda_r^p(\mathbf{x}))\right)d\mathbf{x}$$
$$+2i\sum_{s=1}^{d}k_s^\circ\int_\Omega g_{qs}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-2}\Lambda_r^p(\mathbf{x})\varsigma_l(\mathbf{x})^*d\mathbf{x} + \int_\Omega g_{qr}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-2}\varsigma_p(\mathbf{x})\varsigma_l(\mathbf{x})^*d\mathbf{x},\qquad r,q=1,\dots,d,$$

а $\Lambda_r^p\in\widetilde{\mathcal{H}}^1(\Omega)$ — решение уравнения

$$\big(\mathcal{A}(\mathbf{k}^\circ)-\lambda_0 I\big)\Lambda_r^p(\mathbf{x}) = \sum_{s=1}^{d}\omega(\mathbf{x})^{-1}g_{rs}(\mathbf{x})\left(\frac{\partial}{\partial x_s}+ik_s^\circ\right)\big(\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\big)$$
$$+\sum_{s=1}^{d}\omega(\mathbf{x})^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_s}+ik_s^\circ\right)\big(g_{sr}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^{-1}\varsigma_p(\mathbf{x})\big),\quad \Lambda_r^p\perp\mathfrak{N}.$$

Поэтому оператор (3.93) в базисе $\boldsymbol{\varsigma}$ изображается матрицей

$$\mathfrak{a}^{(1)}(\delta\mathbf{k}) = \left\{\lambda_0^{1/2}\delta_{lp} + \tfrac{1}{2}\lambda_0^{-1/2}\left\langle\mathfrak{g}_{\varsigma}^{1,lp},\delta\mathbf{k}\right\rangle\right\}_{l,p=1}^{n}. \tag{3.108}$$

Рассмотрим действие оператора $e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})}$ на вектор ς_j. Нетрудно проверить, что

$$e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})}\varsigma_j = \sum_{l=1}^{n}c_{jl}^{(1)}(\tau)\varsigma_l, \tag{3.109}$$

где $\{c_{j1}^{(1)}(\tau),\dots,c_{jn}^{(1)}(\tau)\}^{\mathrm{t}} =: \mathbf{c}_j^{(1)}(\tau) = e^{-i\tau\mathfrak{a}^{(1)}(\delta\mathbf{k})}\mathbf{e}_j$ — решение системы

$$\left\{ i\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{c}_j^{(1)}(\tau) = (\mathfrak{a}^{(1)}(\delta\mathbf{k})\mathbf{c}_j^{(1)})(\tau),\qquad \mathbf{c}_j^{(1)}(0)=\mathbf{e}_j.\right.$$

Теперь предположим, что выполнено условие 3.4. Пусть $\{\omega_p(\boldsymbol{\theta})\}_{p=1}^{n/2}$ — ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}_+(\boldsymbol{\theta})$, и пусть $\{\omega_p(\boldsymbol{\theta})\}_{p=n/2+1}^{n}$ — ортонормированный базис в подпространстве $\mathfrak{N}_-(\boldsymbol{\theta})$. Тогда $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta}) = \{\omega_p(\boldsymbol{\theta})\}_{p=1}^{n}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$. Выразим один базис через другой: $\varsigma_k = \sum_{j=1}^{n}b_k^j(\boldsymbol{\theta})\omega_j(\boldsymbol{\theta})$. Положим

$$\mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta}) := \begin{pmatrix} b_1^1(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & b_n^1(\boldsymbol{\theta})\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ b_1^n(\boldsymbol{\theta}) & \cdots & b_n^n(\boldsymbol{\theta})\end{pmatrix}.$$

Поскольку ς и $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})$ — ортонормированные базисы, то матрица $\mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})$ унитарна. Тогда операторы $(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})$ в базисе ς изображаются матрицами

$$\begin{aligned}
\mathring{\mathfrak{a}}_{1,+}^{(2)}(\delta\mathbf{k}) &= \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})^* \begin{pmatrix} \Big(\big\{\big\langle \mathfrak{g}^{1,lp}_{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}, \delta\mathbf{k}\big\rangle\big\}_{l,p=1}^{n/2}\Big)^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta}),\\
\mathring{\mathfrak{a}}_{1,-}^{(2)}(\delta\mathbf{k}) &= \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Big(-\big\{\big\langle \mathfrak{g}^{1,lp}_{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}, \delta\mathbf{k}\big\rangle\big\}_{l,p=n/2+1}^{n}\Big)^{1/2} \end{pmatrix} \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta}),
\end{aligned} \tag{3.110}$$

операторы $\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{1/2}(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\mathfrak{G}_2^\circ(\delta\mathbf{k})(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k})+\zeta I)^{-1}P_\pm(\boldsymbol{\theta})\,d\zeta$ — матрицами

$$\begin{aligned}
\mathring{\mathfrak{a}}_{2,+}^{(2)}(\delta\mathbf{k}) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{1/2}\mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})^* \begin{pmatrix} \Big(\big\{\big\langle \mathfrak{g}^{1,lp}_{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}, \delta\mathbf{k}\big\rangle\big\}_{l,p=1}^{n/2} + \zeta\mathbb{1}_{n/2}\Big)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\\
&\qquad \times \big\{\big\langle \mathfrak{g}^{2,lp}_{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}(\delta\mathbf{k}), (\delta\mathbf{k})\big\rangle\big\}_{l,p=1}^{n} \begin{pmatrix} \Big(\big\{\big\langle \mathfrak{g}^{1,lp}_{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}, \delta\mathbf{k}\big\rangle\big\}_{l,p=1}^{n/2} + \zeta\mathbb{1}_{n/2}\Big)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})\,d\zeta,\\
\mathring{\mathfrak{a}}_{2,-}^{(2)}(\delta\mathbf{k}) &= \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \zeta^{1/2}\mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Big(-\big\{\big\langle \mathfrak{g}^{1,lp}_{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}, \delta\mathbf{k}\big\rangle\big\}_{l,p=n/2+1}^{n} + \zeta\mathbb{1}_{n/2}\Big)^{-1} \end{pmatrix}\\
&\qquad \times \big\{\big\langle \mathfrak{g}^{2,lp}_{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}(\delta\mathbf{k}), (\delta\mathbf{k})\big\rangle\big\}_{l,p=1}^{n} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Big(-\big\{\big\langle \mathfrak{g}^{1,lp}_{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}, \delta\mathbf{k}\big\rangle\big\}_{l,p=n/2+1}^{n} + \zeta\mathbb{1}_{n/2}\Big)^{-1} \end{pmatrix} \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})\,d\zeta,
\end{aligned} \tag{3.111}$$

и, следовательно, операторы (3.101) — матрицами

$$\mathring{\mathfrak{a}}_{\pm}^{(2)}(\delta\mathbf{k}) = \mathring{\mathfrak{a}}_{1,\pm}^{(2)}(\delta\mathbf{k}) \pm \mathring{\mathfrak{a}}_{2,\pm}^{(2)}(\delta\mathbf{k}).$$

Далее, операторы $(\pm\mathfrak{G}_1^\circ(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P_\pm(\boldsymbol{\theta})$ в базисе ς изображаются матрицами

$$\begin{aligned}
\tilde{\mathfrak{a}}_{+}^{(2)}(\delta\mathbf{k}) &= \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})^* \begin{pmatrix} \Big(\big\{\big\langle \mathfrak{g}^{1,lp}_{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}, \delta\mathbf{k}\big\rangle\big\}_{l,p=1}^{n/2}\Big)^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta}),\\
\tilde{\mathfrak{a}}_{-}^{(2)}(\delta\mathbf{k}) &= \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \Big(-\big\{\big\langle \mathfrak{g}^{1,lp}_{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{\theta})}, \delta\mathbf{k}\big\rangle\big\}_{l,p=n/2+1}^{n}\Big)^{-1/2} \end{pmatrix} \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta}),
\end{aligned} \tag{3.112}$$

а проекторы $P_\pm(\boldsymbol{\theta})$ — матрицами

$$\mathfrak{p}_+(\boldsymbol{\theta}) = \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})^* \begin{pmatrix} \mathbb{1}_{n/2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta}), \qquad \mathfrak{p}_-(\boldsymbol{\theta}) = \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta})^* \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{1}_{n/2} \end{pmatrix} \mathfrak{b}(\boldsymbol{\theta}), \tag{3.113}$$

соответственно. Отметим, что матрицы $\mathring{\mathfrak{a}}_{1,\pm}^{(2)}(\delta\mathbf{k})$ являются положительно однородными функциями от $\delta\mathbf{k}$ порядка $1/2$, а матрицы $\mathring{\mathfrak{a}}_{2,\pm}^{(2)}(\delta\mathbf{k})$ — положительно однородными функциями порядка $3/2$. Далее матрицы $\tilde{\mathfrak{a}}_{+}^{(2)}(\delta\mathbf{k})$ и $\mathfrak{p}_\pm(\boldsymbol{\theta})$ имеют порядок однородности $-1/2$ и 0, соответственно.

Аналогично (3.109),

$$e^{-i\tau\mathring{\mathfrak{A}}_{\pm}^{(2)}(\delta\mathbf{k})}\varsigma_j = \sum_{l=1}^{n} c_{jl,\pm}^{(2)}(\tau)\varsigma_l, \tag{3.114}$$

где $\{c^{(2)}_{j1,\pm}(\tau),\dots,c^{(2)}_{jn,\pm}(\tau)\}^{\rm t} =: \mathbf{c}^{(2)}_{j,\pm}(\tau) = e^{-i\tau\mathfrak{a}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})}\mathfrak{p}_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}_j$ — решение системы

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{c}^{(2)}_{j,\pm}(\tau) = (\mathfrak{a}^{(2)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})\mathbf{c}^{(2)}_{j,\pm})(\tau), \qquad \mathbf{c}^{(2)}_{j,\pm}(0) = \mathfrak{p}_{\pm}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{e}_j. \end{cases}$$

Наконец, если выполнено условие 3.5($\pm$), то

$$\cos(\tau(\pm\mathfrak{G}^{\circ}_2(\delta\mathbf{k}))^{1/2}P)\varsigma_j = \sum_{l=1}^{n} c^{(3)}_{jl,\pm}(\tau)\varsigma_l,$$
$$(\pm\mathfrak{G}^{\circ}_2(\delta\mathbf{k}))^{-1/2}P\sin(\tau(\pm\mathfrak{G}^{\circ}_2(\delta\mathbf{k}))^{1/2}P)\varsigma_k = \sum_{l=1}^{n} \tilde{c}^{(3)}_{kl,\pm}(\tau)\varsigma_l,$$

где

$$\{c^{(3)}_{j1,\pm}(\tau),\dots,c^{(3)}_{jn,\pm}(\tau)\}^{\rm t} =: \mathbf{c}^{(3)}_{j,\pm}(\tau) = \cos(\tau\mathfrak{a}^{(3)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})^{1/2})\mathbf{e}_j,$$
$$\{\tilde{c}^{(3)}_{k1,\pm}(\tau),\dots,\tilde{c}^{(3)}_{kn,\pm}(\tau)\}^{\rm t} =: \tilde{\mathbf{c}}^{(3)}_{k,\pm}(\tau) = \mathfrak{a}^{(3)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})^{-1/2}\sin(\tau\mathfrak{a}^{(3)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})^{1/2})\mathbf{e}_k$$

— решения систем

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}\mathbf{c}^{(3)}_{j,\pm}(\tau) = -(\mathfrak{a}^{(3)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})\mathbf{c}^{(3)}_{j,\pm})(\tau), \qquad \mathbf{c}^{(3)}_{j,\pm}(0) = \mathbf{e}_j, \qquad (\partial_\tau\mathbf{c}^{(3)}_{j,\pm})(0) = \mathbf{0}, \end{cases}$$
$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}\tilde{\mathbf{c}}^{(3)}_{k,\pm}(\tau) = -(\mathfrak{a}^{(3)}_{\pm}(\delta\mathbf{k})\tilde{\mathbf{c}}^{(3)}_{k,\pm})(\tau), \qquad \tilde{\mathbf{c}}^{(3)}_{k,\pm}(0) = \mathbf{0}, \qquad (\partial_\tau\tilde{\mathbf{c}}^{(3)}_{k,\pm})(0) = \mathbf{e}_k, \end{cases}$$

и $\mathfrak{a}^{(3)}_{\pm}(\delta\mathbf{k}) = \{\pm\langle\mathfrak{g}^{2,lp}_{\varsigma}(\delta\mathbf{k}),(\delta\mathbf{k})\rangle\}^{n}_{l,p=1}$.

4. Основные результаты работы

В этом параграфе приводятся основные результаты работы. Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Если $F(\mathbf{x})$ — Γ-периодическая функция, то $F^{\varepsilon}(\mathbf{x}) := F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R}^d)$ оператор, формально заданный дифференциальным выражением

$$\mathcal{A}_{\varepsilon} = -\omega^{\varepsilon}(\mathbf{x})^{-1}\operatorname{div} g^{\varepsilon}(\mathbf{x})\nabla\omega^{\varepsilon}(\mathbf{x})^{-1}, \quad g(\mathbf{x}) = \check{g}(\mathbf{x})\omega(\mathbf{x})^2. \tag{4.1}$$

Здесь Γ-периодические функции $\check{g}$ и ω удовлетворяют (1.2), (1.4) и условиям $\omega(\mathbf{x}) > 0$; $\omega,\omega^{-1}\in L_\infty$. Точное определение оператора $\mathcal{A}_\varepsilon$ даётся в терминах соответствующей квадратичной формы (ср. (1.5)). Операторы (1.6) и (4.1) связаны между собой соотношением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = \varepsilon^{-2}T^{*}_{\varepsilon}\mathcal{A}T_\varepsilon, \tag{4.2}$$

где T_ε — оператор масштабного преобразования: $(T_\varepsilon u)(\mathbf{x}) = \varepsilon^{d/2}u(\varepsilon\mathbf{x})$.

Пусть $\{\varsigma_j\}^{n}_{j=1}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}$ и пусть $f_j, g_k \in L_2(\mathbb{R}^d)$, $j,k = 1,\dots,n$. Функции $\varsigma_j(\mathbf{x})$, $j = 1,\dots,n$, будем считать Γ-периодически продолженными на всё $\mathbb{R}^d$.

4.1. Задача Коши для гиперболического уравнения без спектрального сдвига. В этом пункте мы изучаем поведение при $\varepsilon\to 0$ решений $u_{jk,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d$, $\tau\in\mathbb{R}$,

$j,k=1,\dots,n$, следующих задач Коши для гиперболического уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}u_{jk,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) = -(\mathcal{A}_\varepsilon u_{jk,\varepsilon})(\mathbf{x},\tau), \\ u_{jk,\varepsilon}(\mathbf{x},0) = e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\varsigma_j^\varepsilon(\mathbf{x})f_j(\mathbf{x}), \\ (\partial_\tau u_{jk,\varepsilon})(\mathbf{x},0) = e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\varsigma_k^\varepsilon(\mathbf{x})g_k(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{4.3}$$

Здесь предполагается, что $\lambda_0 \neq 0$; если $g_k \neq 0$, то дополнительно считаем, что $\mathbf{k}^\circ \neq \mathbf{0} \,(\mathrm{mod}\,\widetilde{\Gamma})$.

В $L_2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n)$ рассмотрим оператор

$$\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1),11} & \dots & \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1),1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1),n1} & \dots & \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1),nn} \end{pmatrix}, \qquad \mathrm{Dom}\,\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)} = H^1(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{4.4}$$

$$\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1),lp} := \varepsilon^{-1}\lambda_0^{1/2}I - \frac{i}{2}\lambda_0^{-1/2}\left\langle \mathfrak{g}_{\boldsymbol{\varsigma}}^{1,lp},\nabla\right\rangle, \tag{4.5}$$

который назовём *эффективным оператором* для задачи (4.3). Напомним, что векторы $\mathfrak{g}_{\boldsymbol{\varsigma}}^{1,lp}$ были определены в (3.106). Пусть $\mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau) = (v_{j1,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau),\dots,v_{jn,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau))^{\mathrm{t}}$ и $\tilde{\mathbf{v}}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau) = (\tilde{v}_{j1,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau),\dots,\tilde{v}_{jn,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau))^{\mathrm{t}}$ — решения соответствующих "эффективных" систем

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau) = \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}\mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},0) = J_jf_j(\mathbf{x}), \end{cases} \qquad \begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\mathbf{v}}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau) = \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}\tilde{\mathbf{v}}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau), \\ \tilde{\mathbf{v}}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},0) = J_kg_k(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{4.6}$$

Здесь оператор $J_j\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}^n$ действует по правилу $a\mapsto a\mathbf{e}_j$. Положим

$$\begin{aligned} u_{jk,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},\tau) := \frac{1}{2}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon(\mathbf{x})\left(v_{jl,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau) + v_{jl,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},-\tau)\right) \\ + \frac{\varepsilon\lambda_0^{-1/2}}{2i}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon(\mathbf{x})\left(\tilde{v}_{kl,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},-\tau) - \tilde{v}_{kl,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\mathbf{x},\tau)\right). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Для решений задач (4.3), (4.6), а также для $u_{jk,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}$ справедливы операторные представления

$$u_{jk,\varepsilon}(\cdot,\tau) = \cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^\varepsilon f_j + \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_k^\varepsilon g_k, \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}_{j,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}}J_jf_j, \qquad \tilde{\mathbf{v}}_{k,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(1)}(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}}J_kg_k, \\ &u_{jk,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) = \frac{1}{2}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n\varsigma_l^\varepsilon\tilde{J}_l\big(e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}} + e^{i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}}\big)J_jf_j \\ &\qquad + \frac{\varepsilon\lambda_0^{-1/2}}{2i}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n\varsigma_l^\varepsilon\tilde{J}_l\big(e^{i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}} - e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}}\big)J_kg_k, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где $\tilde{J}_l\colon\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}$ задаётся формулой $\tilde{J}_l\mathbf{c} = \langle\mathbf{c},\mathbf{e}_l\rangle$.

Теорема 4.1. *Пусть $\lambda_0\neq 0$. Пусть $u_{jk,\varepsilon}$ — решение задачи (4.3), $u_{jk,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}$ определено в (4.7). Пусть $\varepsilon>0$, $\tau\in\mathbb{R}$, $f_j\in H^2(\mathbb{R}^d)$, $g_k\in H^2(\mathbb{R}^d)$, $j,k=1,\dots,n$. Если $g_k\neq 0$, то дополни-*

тельно считаем, что $\mathbf{k}^\circ \neq \mathbf{0} \,(\mathrm{mod}\ \widetilde{\Gamma})$ *и выполнено* (3.98). *Справедливы оценки*

$$\|u_{jk,\varepsilon}(\cdot,\tau) - u^{\mathrm{eff}}_{jk,\varepsilon}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)(\varepsilon\|f_j\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^2\|g_k\|_{H^2(\mathbb{R}^d)}). \tag{4.10}$$

с константой $\mathcal{C}$, *зависящей от* λ_0, $\varkappa$, d_0, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ *и* $\|\varsigma_l\|_{L_\infty}$, $l=1,\dots,n$ *(а также от* $\widetilde{C}$, *если* $g_k \neq 0$).

Доказательство. В силу (4.8), (4.9) оценка (4.10) допускает переформулировку в операторных терминах:

$$\Big\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^\varepsilon - \frac{1}{2}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l(e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}} + e^{i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}})J_j\Big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{4.11}$$

$$\Big\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_k^\varepsilon - \frac{\varepsilon\lambda_0^{-1/2}}{2i}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l(e^{i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}} - e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}})J_k\Big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon^2, \tag{4.12}$$

где $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon>0$. Таким образом, наша цель — доказать оценки (4.11), (4.12).

Докажем сначала (4.11). В силу формулы Эйлера $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) = \frac{1}{2}(e^{i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}} + e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}})$ достаточно рассмотреть оператор

$$e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^\varepsilon - e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon\tilde{J}_l e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}}J_j.$$

Поскольку

$$\left.\begin{aligned}&\text{оператор } (-\Delta+I)^{q/2} \text{ осуществляет изометрический изоморфизм}\\&\text{пространства Соболева } H^q(\mathbb{R}^d) \text{ на } L_2(\mathbb{R}^d),\end{aligned}\right\} \tag{4.13}$$

справедливо равенство

$$\begin{aligned}&\Big\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^\varepsilon - e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon\tilde{J}_l e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}}J_j\Big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&\quad= \Big\|\Big(e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^\varepsilon - e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon\tilde{J}_l e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}}J_j\Big)(-\Delta+I)^{-1}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.\end{aligned}$$

Затем, в силу унитарности оператора масштабного преобразования имеем

$$\begin{aligned}&\Big\|\Big(e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j^\varepsilon - e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon\tilde{J}_l e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}}J_j\Big)(-\Delta+I)^{-1}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\&= \Big\|\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}}e^{i\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma_j - e^{i\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^n \varsigma_l\tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}}J_j\Big)\varepsilon^2(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-1}\Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)},\end{aligned} \tag{4.14}$$

где

$$\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)} = \mathcal{A}_1^{\mathrm{eff},(1)} = \{\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1),lp}\}_{l,p=1}^n, \qquad \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1),lp} := \lambda_0^{1/2}I - \frac{i}{2}\lambda_0^{-1/2}\left\langle\mathfrak{g}_\varsigma^{1,lp},\nabla\right\rangle.$$

Далее, нам понадобятся следующие операторные тождества:

$$\Phi^* \varepsilon^2 (|\delta \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \Phi e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x}\rangle} = e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x}\rangle} \varepsilon^2 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-1}, \tag{4.15}$$

$$\Phi^* \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}^{(1)}(\delta\mathbf{k})} J_j \varepsilon^2 (|\delta \mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \Phi e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x}\rangle} = e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x}\rangle} \tilde{J}_l e^{-i\varepsilon^{-1}\tau \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}} J_j \varepsilon^2 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-1}. \tag{4.16}$$

Напомним, что матрица $\mathfrak{a}^{(1)}(\delta\mathbf{k})$ была определена в (3.108). Введём проектор $F_\varkappa := \Phi^* \chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\mathbf{k}) \Phi$. Здесь $\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\mathbf{k})$ — характеристическая функция шара $\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})$ радиуса $\varkappa$ с центром в нуле. Очевидно, $\varepsilon^2(|\delta\mathbf{k}|^2+\varepsilon^2)^{-1}(1-\chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k})) \leqslant \varkappa^{-1}\varepsilon$, и ввиду (4.15) с учётом ограниченности функций ς_l, $l = 1, \dots, n$, (см. [41, замечание 2.1]) имеем

$$\Big\| \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}} e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_j - e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}} J_j \Big) \varepsilon^2 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-1} (I - F_\varkappa) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \Big(\|\varsigma_j\|_{L_\infty} + \sum_{l=1}^{n} \|\varsigma_l\|_{L_\infty} \Big) \varkappa^{-1} \varepsilon.$$

Рассмотрим оператор

$$\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}} e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_j - e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}} J_j \Big) \varepsilon^2 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-1} F_\varkappa,$$

который в силу тождеств (4.15), (4.16) можно записать как

$$\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}} \varsigma_j - \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l \Phi^* \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}^{(1)}(\delta\mathbf{k})} J_j \Phi \Big) \Phi^* \varepsilon^2 (|\delta\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k}) \Phi e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \mathbf{x}\rangle}. \tag{4.17}$$

Напомним, что оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл (2.4). Принимая во внимание также соотношения (2.7) и (2.8) (с $\mathbf{k}' = \mathbf{k}^\circ$), получаем равенство

$$\begin{aligned} &\Big\| \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}} \varsigma_j - \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l \Phi^* \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}^{(1)}(\delta\mathbf{k})} J_j \Phi \Big) \Phi^* \varepsilon^2 (|\delta\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k}) \Phi \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\ &= \operatorname*{ess\text{-}sup}_{\mathbf{k}\in\mathbb{T}^d} \Big\| \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}} \varsigma_j - \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}^{(1)}(\delta\mathbf{k})} J_j \Big) \varepsilon^2 (|\delta\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k}) P_0 \Big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Учитывая включение $\operatorname{Ran} \varsigma_j P_0 \subset \mathfrak{N}$ и (3.109), получаем, что

$$\begin{aligned} &\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}} \varsigma_j - \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}^{(1)}(\delta\mathbf{k})} J_j \Big) \varepsilon^2 (|\delta\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k}) P_0 \\ &= \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P} \Big) P \varsigma_j \varepsilon^2 (|\delta\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k}) P_0. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Применение теоремы 3.15 (с заменой τ на $\tau\varepsilon^{-1}$) с учётом равенства $\|\varsigma_j\|_{L_2(\Omega)} = 1$ даёт оценку с независящими от $\mathbf{k}$ постоянными

$$\begin{aligned} &\big\| \big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}(\mathbf{k})^{1/2}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathring{\mathfrak{A}}^{(1)}(\delta\mathbf{k})P} \big) P \varsigma_j \varepsilon^2 (|\delta\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \chi_{\mathrm{B}_\varkappa(\mathbf{0})}(\delta\mathbf{k}) P_0 \big\|_{L_2(\Omega)\to L_2(\Omega)} \\ &\leqslant \big(3C_7 |\delta\mathbf{k}| + C_{22} \varepsilon^{-1} |\tau| |\delta\mathbf{k}|^2 \big) \varepsilon^2 (|\delta\mathbf{k}|^2 + \varepsilon^2)^{-1} \leqslant (3C_7 + C_{22}|\tau|)\varepsilon, \end{aligned}$$

что завершает доказательство оценки (4.11).

Теперь докажем (4.12). В силу (4.13) и унитарности оператора масштабного преобразования имеем равенство

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2} \sin(\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_k^\varepsilon \\
&\qquad - \frac{\varepsilon \lambda_0^{-1/2}}{2i} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^n \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l \big(e^{i\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}} - e^{-i\tau \mathcal{A}_\varepsilon^{\mathrm{eff},(1)}} \big) J_k \Big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \varepsilon \Big\| \Big(\mathcal{A}^{-1/2} \sin(\tau \varepsilon^{-1} \mathcal{A}^{1/2}) e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_k \\
&\quad - \frac{\lambda_0^{-1/2}}{2i} e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^n \varsigma_l \tilde{J}_l \big(e^{i\tau\varepsilon^{-1} \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}} \big) J_k \Big) \varepsilon^2 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-1} \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}.
\end{aligned}
$$

Далее,

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon \Big\| \Big(\mathcal{A}^{-1/2} \sin(\tau \varepsilon^{-1} \mathcal{A}^{1/2}) e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_k - \frac{\lambda_0^{-1/2}}{2i} e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^n \varsigma_l \tilde{J}_l \big(e^{i\tau\varepsilon^{-1} \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}} \big) J_k \Big) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \times \varepsilon^2 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-1} (I - F_\varkappa) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\leqslant \Big(|\tau| \|\varsigma_k\|_{L_\infty} + \varepsilon \lambda_0^{-1/2} \sum_{l=1}^n \|\varsigma_l\|_{L_\infty} \Big) \frac{\varepsilon^2}{\varkappa^2 + \varepsilon^2} \leqslant \Big(\varkappa^{-2} |\tau| \|\varsigma_k\|_{L_\infty} + \lambda_0^{-1/2} \varkappa^{-1} \sum_{l=1}^n \|\varsigma_l\|_{L_\infty} \Big) \varepsilon^2.
\end{aligned}
$$

Здесь мы воспользовались неравенством $|\sin t|/|t| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}$. Таким образом, учитывая формулу Эйлера $\sin(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}) = \frac{1}{2i}(e^{i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}})$, приходим к выводу, что достаточно рассмотреть оператор

$$
\varepsilon \Big(\mathcal{A}^{-1/2} e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}} e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_k - \lambda_0^{-1/2} e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^n \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(1)}} J_k \Big) \varepsilon^2 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-1} F_\varkappa.
$$

Действуя аналогично (4.17)–(4.19) и применяя теорему 3.16, получаем оценку (4.12). $\square$

4.2. Задача Коши для гиперболического уравнения со спектральным сдвигом в случае выполнения условия 3.4. Теперь в предположении выполнения условия 3.4 изучим поведение при $\varepsilon \to 0$ решений $w_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in \mathbb{R}$, $j,k = 1,\dots,n$, следующих задач:

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2}{\partial \tau^2} w_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) = \mp (\mathcal{A}_\varepsilon w_{jk,\pm,\varepsilon})(\mathbf{x},\tau) \pm \varepsilon^{-2}\lambda_0 w_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau), \\
w_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},0) = \Big(\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \displaystyle\sum_{l=1}^n e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l \mathcal{P}_\pm J_j f_j \Big)(\mathbf{x}), \\
(\partial_\tau w_{jk,\pm,\varepsilon})(\mathbf{x},0) = \Big(\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \displaystyle\sum_{l=1}^n e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l \mathcal{P}_\pm J_k g_k \Big)(\mathbf{x}),
\end{cases}
\tag{4.20}
$$

где $\mathscr{E}_{+,\varepsilon} := \mathcal{E}_{\mathcal{A}_\varepsilon}[\varepsilon^{-2}\lambda_0, +\infty)$, $\mathscr{E}_{-,\varepsilon} := \mathcal{E}_{\mathcal{A}_\varepsilon}[0, \varepsilon^{-2}\lambda_0]$,

$$
\mathcal{P}_\pm := \Phi^* \mathfrak{p}_\pm(\mathbf{k}/|\mathbf{k}|)\Phi, \tag{4.21}
$$

и $\mathfrak{p}_\pm(\mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$ определено в (3.113).

Пусть

$$\mathbf{v}^{\mathrm{eff},(2)}_{j,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) = \{v^{\mathrm{eff},(2)}_{j1,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau),\dots,v^{\mathrm{eff},(2)}_{jn,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)\}^{\mathrm{t}} \text{ и } \tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{eff},(2)}_{k,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) = \{\tilde{v}^{\mathrm{eff},(2)}_{k1,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau),\dots,\tilde{v}^{\mathrm{eff},(2)}_{kn,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)\}^{\mathrm{t}}$$

— решения соответствующих "эффективных" систем

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{v}^{\mathrm{eff},(2)}_{j,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) = \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}\mathbf{v}^{\mathrm{eff},(2)}_{j,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{v}^{\mathrm{eff},(2)}_{j,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},0) = \big(\mathcal{P}_\pm J_j f_j\big)(\mathbf{x}), \end{cases} \qquad \begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{eff},(2)}_{k,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) = \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}\tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{eff},(2)}_{k,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau), \\ \tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{eff},(2)}_{k,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},0) = \big(\mathcal{P}_\pm J_k g_k\big)(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{4.22}$$

и положим

$$\begin{aligned} w^{\mathrm{eff}}_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) := \frac{1}{2}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma^\varepsilon_l(\mathbf{x})\left(v^{\mathrm{eff},(2)}_{jl,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) + v^{\mathrm{eff},(2)}_{jl,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},-\tau)\right) \\ + \frac{\varepsilon^{1/2}}{2i}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle}\sum_{l,r=1}^{n}\varsigma^\varepsilon_r(\mathbf{x})\Phi^*[\tilde{\mathfrak{a}}^{(2)}_\pm(\mathbf{k})]_{rl}\Phi\left(\tilde{v}^{\mathrm{eff},(2)}_{kl,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},-\tau) - \tilde{v}^{\mathrm{eff},(2)}_{kl,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)\right). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Здесь $\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon} = \varepsilon^{-1/2}\Phi^*\mathring{\mathfrak{a}}^{(2)}_{1,\pm}(\delta\mathbf{k})\Phi \pm \varepsilon^{1/2}\Phi^*\mathring{\mathfrak{a}}^{(2)}_{2,\pm}(\delta\mathbf{k})\Phi$ — *эффективный оператор*, отвечающий задаче (4.20). Его первое слагаемое представляет собой псевдодифференциальный оператор (ПДО) порядка 1/2, второе слагаемое — ПДО порядка 3/2. Напомним, что $\mathring{\mathfrak{a}}^{(2)}_{1,\pm}(\delta\mathbf{k})$ и $\mathring{\mathfrak{a}}^{(2)}_{2,\pm}(\delta\mathbf{k})$ были определены в (3.110) и (3.111). Наконец, $\tilde{\mathfrak{a}}^{(2)}_\pm(\mathbf{k})$ было определено в (3.112).

Для решений задач (4.20), (4.22), а также для $w^{\mathrm{eff}}_{jk,\pm,\varepsilon}$ справедливы операторные представления

$$\begin{aligned} w_{jk,\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) = \cos(\tau(\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon})\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon}\sum_{l=1}^{n}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma^\varepsilon_l\tilde{J}_l\mathcal{P}_\pm J_j f_j \\ + (\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I))^{-1/2}\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon}\sin(\tau(\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon})\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \\ \times\sum_{l=1}^{n}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\varsigma^\varepsilon_l\tilde{J}_l\mathcal{P}_\pm J_k g_k, \end{aligned} \tag{4.24}$$

$$\begin{aligned} &\mathbf{v}^{\mathrm{eff},(2)}_{j,\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}}\mathcal{P}_\pm J_j f_j, \qquad \tilde{\mathbf{v}}^{\mathrm{eff},(2)}_{k,\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}}\mathcal{P}_\pm J_k g_k, \\ &w^{\mathrm{eff}}_{jk,\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) = \frac{1}{2}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma^\varepsilon_l\tilde{J}_l(e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}} + e^{i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}})\mathcal{P}_\pm J_j f_j \\ &\qquad + \frac{\varepsilon^{1/2}}{2i}e^{i\varepsilon^{-1}\langle\mathbf{k}^\circ,\cdot\rangle}\sum_{l=1}^{n}\varsigma^\varepsilon_l\tilde{J}_l\Phi^*\tilde{\mathfrak{a}}^{(2)}_\pm(\mathbf{k})\Phi(e^{i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}} - e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}})\mathcal{P}_\pm J_k g_k. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Теорема 4.2. *Пусть выполнено условие 3.4. Пусть $w_{jk,\pm,\varepsilon}$ — решение задачи (4.20), $w^{\mathrm{eff}}_{jk,\pm,\varepsilon}$ определено в (4.23). Пусть $\varepsilon > 0$, $\tau\in\mathbb{R}$, $f_j\in H^2(\mathbb{R}^d)$, $g_k\in H^{3/2}(\mathbb{R}^d)$, $j,k = 1,\dots,n$. Справедливы оценки*

$$\|w_{jk,\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) - w^{\mathrm{eff}}_{jk,\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau)\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\left(\varepsilon\|f_j\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \varepsilon^{3/2}\|g_k\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)}\right)$$

с константой $\mathcal{C}$, зависящей от λ_0, $\varkappa^0$, c, d_0, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\|\varsigma_l\|_{L_\infty}$, $l = 1,\dots,n$.

Доказательство. В силу (4.24), (4.25) нужно доказать оценки

$$
\begin{aligned}
\Big\| \cos\big(\tau(\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon}\big)\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \sum_{l=1}^{n} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l \mathcal{P}_\pm J_j \\
- \frac{1}{2} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l \big(e^{-i\tau \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}} + e^{i\tau \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}}\big)\mathcal{P}_\pm J_j \Big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon,
\end{aligned}
\tag{4.26}
$$

$$
\begin{aligned}
\Big\| \big(\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I)\big)^{-1/2}\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \sin\big(\tau\big(\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I)\big)^{1/2}\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon}\big)\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \sum_{l=1}^{n} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l \mathcal{P}_\pm J_k \\
- \frac{\varepsilon^{1/2}}{2i} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l \Phi^* \tilde{\mathfrak{a}}^{(2)}_\pm(\mathbf{k})\Phi \big(e^{i\tau \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}} - e^{-i\tau \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}}\big)\mathcal{P}_\pm J_k \Big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
\leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon^{3/2}.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

Прокомментируем доказательство оценки (4.26). В силу формулы Эйлера достаточно рассмотреть оператор

$$
e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon}}\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \sum_{l=1}^{n} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l \mathcal{P}_\pm J_j - e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l e^{-i\tau \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}} \mathcal{P}_\pm J_j.
$$

Используя (4.13) и унитарность оператора масштабного преобразования имеем равенство

$$
\begin{aligned}
&\Big\| e^{-i\tau(\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon}}\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \sum_{l=1}^{n} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l \mathcal{P}_\pm J_j \\
&\qquad - e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l^\varepsilon \tilde{J}_l e^{-i\tau \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,\varepsilon}} \mathcal{P}_\pm J_j \Big\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&= \Big\| \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}(\pm(\mathcal{A} - \lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_\pm}\mathscr{E}_\pm \sum_{l=1}^{n} e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_l \tilde{J}_l \mathcal{P}_\pm J_j \\
&\qquad - e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm}} \mathcal{P}_\pm J_j \Big) \varepsilon^2(-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-1} \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)},
\end{aligned}
$$

где $\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_\pm := \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm,1} = \Phi^* \mathring{\mathfrak{a}}^{(2)}_{1,\pm}(\delta\mathbf{k})\Phi \pm \Phi^* \mathring{\mathfrak{a}}^{(2)}_{2,\pm}(\delta\mathbf{k})\Phi$, $\mathscr{E}_\pm := \mathscr{E}_{\pm,1}$. Далее,

$$
\begin{aligned}
&\Big\| \Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}(\pm(\mathcal{A} - \lambda_0 I))^{1/2}\mathscr{E}_\pm}\mathscr{E}_\pm \sum_{l=1}^{n} e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \varsigma_l \tilde{J}_l \mathcal{P}_\pm J_j \\
&\qquad - e^{i\langle \mathbf{k}^\circ, \cdot\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l \tilde{J}_l e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(2)}_{\pm}} \mathcal{P}_\pm J_j \Big) \varepsilon^2(-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-1}(I - F_{\varkappa^0}) \Big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \\
&\qquad \leqslant 2\left(\sum_{l=1}^{n} \|\varsigma_l\|_{L_\infty} \right)(\varkappa^0)^{-1}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Дальнейшее доказательство вполне аналогично доказательству оценки (4.11). Нужно лишь дополнительно учесть соотношения $\mathscr{E}_\pm = \mathscr{G}^{-1}\mathscr{E}_\pm(\mathbf{k})\mathscr{G}$ и применить теорему 3.17.

Оценка (4.27) доказывается аналогично доказательству оценки (4.12) с использованием теоремы 3.18. $\square$

4.3. Задача Коши для гиперболического уравнения со спектральным сдвигом в случае выполнения условия 3.5($\pm$). Наконец, в предположении выполнения условия 3.5($\pm$) изучим поведение при $\varepsilon \to 0$ решений $z_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$, $\tau \in \mathbb{R}$, $j,k = 1,\dots,n$, следующих задач:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial \tau^2} z_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau) = \mp(\mathcal{A}_\varepsilon z_{jk,\pm,\varepsilon})(\mathbf{x},\tau) \pm \varepsilon^{-2}\lambda_0 z_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},\tau), \\ z_{jk,\pm,\varepsilon}(\mathbf{x},0) = \big(\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\,\cdot\,\rangle} \varsigma_j^\varepsilon f_j\big)(\mathbf{x}), \\ (\partial_\tau z_{jk,\pm,\varepsilon})(\mathbf{x},0) = \big(\mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\,\cdot\,\rangle} \varsigma_k^\varepsilon g_k\big)(\mathbf{x}). \end{cases} \tag{4.28}$$

Введём соответствующий *эффективный оператор*:

$$\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3)} = \begin{pmatrix} \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3),11} & \dots & \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3),1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3),n1} & \dots & \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3),nn} \end{pmatrix}, \qquad \operatorname{Dom} \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3)} = H^2(\mathbb{R}^d;\mathbb{C}^n), \tag{4.29}$$

$$\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3),lp} := -\operatorname{div} \mathfrak{g}_{\varsigma}^{2,lp} \nabla. \tag{4.30}$$

Напомним, что $(d \times d)$-матрицы $\mathfrak{g}_{\varsigma}^{2,lp}$ были определены в (3.107). Пусть $\mathbf{v}_{jk,\pm}^{\mathrm{eff},(3)}(\mathbf{x},\tau) = \{v_{jk1,\pm}^{\mathrm{eff},(3)}(\mathbf{x},\tau),\dots,v_{jkn,\pm}^{\mathrm{eff},(3)}(\mathbf{x},\tau)\}^{\mathrm{t}}$ — решение "эффективной" системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial \tau^2} \mathbf{v}_{jk,\pm}^{\mathrm{eff},(3)}(\mathbf{x},\tau) = \mp \mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3)} \mathbf{v}_{jk,\pm}^{\mathrm{eff},(3)}(\mathbf{x},\tau), \\ \mathbf{v}_{jk,\pm}^{\mathrm{eff},(3)}(\mathbf{x},0) = J_j f_j(\mathbf{x}), \quad (\partial \mathbf{v}_{jk,\pm}^{\mathrm{eff},(3)})(\mathbf{x},0) = J_k f_k(\mathbf{x}), \end{cases} \tag{4.31}$$

и положим

$$z_{jk,\pm,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\mathbf{x},\tau) := e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\mathbf{x}\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l^\varepsilon(\mathbf{x}) v_{jkl,\pm}^{\mathrm{eff},(3)}(\mathbf{x},\tau). \tag{4.32}$$

Для решений задач (4.28), (4.31), а также для $z_{jk,\pm,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}$ справедливы операторные представления

$$\begin{aligned} z_{jk,\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) &= \cos\Big(\tau\big(\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I)\big)^{1/2} \mathscr{E}_{\pm,\varepsilon}\Big) \mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\,\cdot\,\rangle} \varsigma_j^\varepsilon f_j \\ &\quad + \big(\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I)\big)^{-1/2} \mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} \sin\Big(\tau\big(\pm(\mathcal{A}_\varepsilon - \varepsilon^{-2}\lambda_0 I)\big)^{1/2} \mathscr{E}_{\pm,\varepsilon}\Big) \mathscr{E}_{\pm,\varepsilon} e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\,\cdot\,\rangle} \varsigma_k^\varepsilon g_k, \\ \mathbf{v}_{jk,\pm,\varepsilon}^{\mathrm{eff},(3)}(\cdot,\tau) &= \cos\Big(\tau\big(\pm\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3)}\big)^{1/2}\Big) J_j f_j + \big(\pm\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3)}\big)^{-1/2} \sin\Big(\tau\big(\pm\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3)}\big)^{1/2}\Big) J_k g_k, \\ z_{jk,\pm,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}&(\cdot,\tau) \\ &= e^{i\varepsilon^{-1}\langle \mathbf{k}^\circ,\,\cdot\,\rangle} \sum_{l=1}^{n} \varsigma_l^\varepsilon \left(\tilde{J}_l \cos\Big(\tau\big(\pm\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3)}\big)^{1/2}\Big) J_j f_j + \tilde{J}_l \big(\pm\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3)}\big)^{-1/2} \sin\big(\tau(\pm\mathcal{A}^{\mathrm{eff},(3)})^{1/2}\big) J_k g_k \right). \end{aligned}$$

С помощью теоремы 3.19 доказывается следующий результат.

Теорема 4.3. *Пусть выполнено условие 3.5($\pm$). Пусть $z_{jk,\pm,\varepsilon}$ — решение задачи (4.28), $z_{jk,\pm,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}$ определено в (4.32). Пусть $\varepsilon > 0$, $\tau \in \mathbb{R}$, $f_j \in H^2(\mathbb{R}^d)$, $g_k \in H^1(\mathbb{R}^d)$, $j,k = 1,\dots,n$. Справедливы оценки*

$$\| z_{jk,\pm,\varepsilon}(\cdot,\tau) - z_{jk,\pm,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) \|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant \mathcal{C}(1+|\tau|)\varepsilon(\|f_j\|_{H^2(\mathbb{R}^d)} + \|g_k\|_{H^1(\mathbb{R}^d)})$$

с константой $\mathcal{C}$, зависящей от λ_0, $\varkappa^0$, c, d_0, $\|g\|_{L_\infty}$, $\|\omega^{-1}\|_{L_\infty}$ и $\|\varsigma_l\|_{L_\infty}$, $l = 1,\dots,n$.

Список литературы

[1] Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П., *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[2] Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G., *Asymptotic analisys for periodic structures*, Stud. Math. Appl., vol. **5**, North-Holland Publishing Co., Amsterdam-New York, 1978.

[3] Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[4] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения*, Алгебра и анализ, **15**:5 (2003), 1–108.

[5] Суслина Т. А., *Об усреднении периодических параболических систем*, Функц. анализ и его прил., **38**:4 (2004), 86–90.

[6] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem*, Amer. Math. Soc. Transl. (2), vol. **220**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233.

[7] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора*, Алгебра и анализ, **17**:6 (2005), 1–104.

[8] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Алгебра и анализ, **18**:6 (2006), 1–130.

[9] Василевская Е. С., *Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора*, Алгебра и анализ, **21**:1 (2009), 3–60.

[10] Suslina T. A., *Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev Space $H^1(\mathbb{R}^d)$*, Math. Model. Nat. Phenom., **5**:4 (2010), 390–447.

[11] Жиков В. В., *О некоторых оценках из теории усреднения*, Докл. РАН, **406**:5 (2006), 597–601.

[12] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *On operator estimates for some problems in homogenization theory*, Russ. J. Math. Phys., **12**:4 (2005), 515–524.

[13] Zhikov V. V., Pastukhova S. E., *Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients*, Russ. J. Math. Phys., **13**:2 (2006), 224–237.

[14] Жиков В. В., Пастухова С. Е., *Об операторных оценках в теории усреднения*, УМН, **71**:3(429) (2016), 27–122.

[15] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений*, Алгебра и анализ, **20**:6 (2008), 30–107.

[16] Meshkova Yu. M., *On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients*, J. Spectr. Theory, **11**:2 (2021), 587–660.

[17] Dorodnyi M. A., Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients*, J. Differ. Equ., **264**:12 (2018), 7463–7522.

[18] Suslina T. A., *Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations*, J. Math. Anal. and Appl., **446**:2 (2017), 1466–1523.

[19] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$: точность результатов*, Алгебра и анализ, **32**:4 (2020), 3–136.

[20] Dorodnyi M. A., *Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results*, Appl. Anal., **101**:16 (2022), 5582–5614.

[21] Суслина Т.А., *Усреднение уравнений типа Шрёдингера: операторные оценки при учёте корректоров*, Функ. анализ и его прил., **56**:3 (2022), 93–99.

[22] Суслина Т. А., *Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами*, УМН, **78**:6 (2023), 47–178.

[23] Дородный М. А., Суслина Т. А., *Усреднение гиперболических уравнений: операторные оценки при учёте корректоров*, Функ. анализ и его прил., **57**:4 (2023), 123–129.

[24] Lin F., Shen Zh., *Uniform boundary controllability and homogenization of wave equations*, J. Eur. Math. Soc., **24**:9 (2021), 3031–3053.

[25] Craster R. V., Kaplunov J., Pichugin A. V., *High-frequency homogenization for periodic media*, Proc. R. Soc. A., **466**:2120 (2010), 2341–2362.

[26] Harutyunyan D., Milton G.W., Craster R.V., *High-frequency homogenization for travelling waves in periodic media*, Proc. R. Soc. A, **472**:2191 (2016), 20160066.

[27] Ceresoli L. et al., *Dynamic effective anisotropy: Asymptotics, simulations, and microwave experiments with dielectric fibers*, Phys. Rev. B, **92**:17 (2015), 174307.

[28] Allaire G., *Periodic homogenization and effective mass theorems for the Schrödinger equation*, Lecture Notes in Mathematics, vol. **1946**, Quantum Transport, pp. 1–44. Springer, Berlin, Heidelberg (2008).

[29] Allaire G., Piatnitski A., *Homogenization of the Schrödinger equation and effective mass theorems*, Comm. Math. Phys., **258**:1 (2005), 1–22.

[30] Barletti L., Ben Abdallah N., *Quantum transport in crystals: effective mass theorem and $k \cdot p$ Hamiltonians*, Comm. Math. Phys., **307**:3 (2011), 567–607.

[31] Kuchment P., Raich A., *Green's function asymptotics near the internal edges of spectra of periodic elliptic operators. Spectral edge case*, Math. Nachr., **285**:14-15 (2012), 1880–1894.

[32] Kha M., Kuchment P., Raich A., *Green's function asymptotics near the internal edges of spectra of periodic elliptic operators. Spectral gap interior*, J. Spectr. Theory, **7**:4 (2017), 1171–1233.

[33] Бирман М. Ш., *О процедуре усреднения для периодических операторов в окрестности края внутренней лакуны*, Алгебра и анализ, **15**:4 (2003), 61–71.

[34] Суслина Т. А., Харин А. А., *Усреднение с учётом корректора для периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*, Проблемы мат. анализа, **41** (2009), 127–141.

[35] Akhmatova A. R., Aksenova E. S., Sloushch V. A., Suslina T. A., *Homogenization of the parabolic equation with periodic coefficients at the edge of a spectral gap*, Complex Var. Elliptic Equ., **67**:3 (2022), 523–555.

[36] Мишулович А. А., Слоущ В. А., Суслина Т. А., *Усреднение одномерного периодического эллиптического оператора на краю спектральной лакуны: операторные оценки в энергетической норме*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **519** (2022), 114–151.

[37] Dorodnyi M. A., *High-frequency homogenization of nonstationary periodic equations*, Appl. Anal., (2023), https://doi.org/10.1080/00036811.2023.2199031.

[38] Бирман М. Ш., Суслина Т. А., *Усреднение многомерного периодического эллиптического оператора в окрестности края внутренней лакуны*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **318** (2004), 60–74.

[39] Суслина Т. А., Харин А. А., *Усреднение с учётом корректора для многомерного периодического эллиптического оператора вблизи края внутренней лакуны*, Проблемы мат. анализа, **59** (2011), 177–193.

[40] Мишулович А. А., *Усреднение многомерных параболических уравнений с периодическими коэффициентами на краю внутренней лакуны*, Зап. научн. сем. ПОМИ, **516** (2022), 135–175.

[41] Dorodnyi M. A. *High-energy homogenization of a multidimensional nonstationary Schrödinger equation*, Russ. J. Math. Phys., **30**:4 (2023), to appear.

[42] Kuchment P., *An overview of periodic elliptic operators*, Bull. Amer. Math. Soc., **53**:3 (2016), 343–414.

[43] Kirsch W., Simon B., *Comparison theorems for the gap of Schrödinger operators*, J. Funct. Anal., **75**:2 (1987), 396–410.

[44] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type*, J. Differ. Equ., **352** (2023), 153–188.

[45] Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E., *Homogenization of nonlocal convolution type operators*: *approximation for the resolvent with corrector*, (2023), arXiv:2311.16574 [math.AP].

[46] под ред. Крейна С.Г., *Функциональный анализ (серия “Справочная математическая библиотека”)*, Наука, М., 1972.