Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 24 января 2026 г.
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Усреднение одномерных гиперболических уравнений с корректором. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R})$[1]

Дородный М. А.[2]

Аннотация

Рассматривается действующий в $L_2(\mathbb{R})$ эллиптический дифференциальный оператор $A_\varepsilon = -\frac{d}{dx} g(x/\varepsilon) \frac{d}{dx}$, $\varepsilon > 0$, с периодическим коэффициентом. Мы изучаем поведение решений задачи Коши для гиперболического уравнения $\partial_\tau^2 w_\varepsilon(x,\tau) = -(A_\varepsilon w_\varepsilon)(x,\tau)$ при $\varepsilon \to 0$: получена аппроксимация решения $w_\varepsilon(\cdot,\tau)$ по $H^1(\mathbb{R})$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ при учёте корректора.

Ключевые слова: периодические дифференциальные операторы, гиперболические уравнения, спектральные зоны, усреднение, эффективный оператор, корректор, операторные оценки погрешности.

Введение

Работа относится к теории усреднения (гомогенизации) периодических дифференциальных операторов. Задачам гомогенизации посвящена обширная литература; см., например, книги [1–3]. Один из методов изучения задач усреднения в $\mathbb{R}^d$ — это спектральный метод, основанный на применении теории Флоке–Блоха (см., например, [1, гл. 4], [2, гл. 2], [4–6]).

Обсудим типичную задачу теории усреднения. Пусть Γ — решётка в $\mathbb{R}^d$, Ω — ячейка решётки Γ. Для любой Γ-периодической функции $F(\mathbf{x})$ введём обозначение $F^\varepsilon(\mathbf{x}) := F(\varepsilon^{-1}\mathbf{x})$, $\varepsilon > 0$ — (малый) параметр. В $L_2(\mathbb{R}^d)$ рассмотрим дифференциальный оператор (ДО), формально заданный выражением

$$\mathcal{A}_\varepsilon = -\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla, \tag{0.1}$$

где $g(\mathbf{x})$ — эрмитова $(d \times d)$-матрица-функция периодическая относительно решётки Γ, ограниченная и положительно определённая. Оператор (0.1) моделирует простейшие случаи микронеоднородных сред с $\varepsilon\Gamma$-периодической структурой. Пусть $u_\varepsilon(\mathbf{x})$ — слабое (в смысле интегрального тождества) решение эллиптического уравнения

$$-\operatorname{div} g^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla u_\varepsilon(\mathbf{x}) + u_\varepsilon(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d,$$

где $f \in L_2(\mathbb{R}^d)$. Хорошо известно, что при $\varepsilon \to 0$ решение u_ε сходится в некотором подходящем смысле к решению u_0 “усреднённого” уравнения

$$-\operatorname{div} g^0\nabla u_0(\mathbf{x}) + u_0(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d.$$

[1] Исследование выполнено при поддержке РНФ, проект 22-11-00092-П.

[2] Санкт-Петербургский государственный университет; 199034, Россия, Санкт-Петербург, Университетская наб. 7/9; e-mail: mdorodni@yandex.ru.

Оператор $\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} = -\operatorname{div} g^0 \nabla$ называется эффективным оператором для $\mathcal{A}_\varepsilon$. Матрица g^0 определяется согласно следующей процедуре (см., например, [3, гл. 2, § 3], [7, гл. 3, § 1]). Требуется найти Γ-периодическое решение $\Psi(\mathbf{x})$ (d-вектор-строку) задачи на ячейке Ω:

$$\operatorname{div} g(\mathbf{x})\big(\nabla\Psi(\mathbf{x}) + \mathbb{1}_d\big) = 0, \qquad \int_\Omega \Psi(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0 \tag{0.2}$$

(здесь $\mathbb{1}_d$ — единичная $(d \times d)$-матрица). Тогда $g^0 = \int_\Omega g(\mathbf{x})(\nabla\Psi(\mathbf{x}) + \mathbb{1}_d)\, d\mathbf{x}$.

0.1. Операторные оценки погрешности при усреднении эллиптических и параболических уравнений. М. Ш. Бирманом и Т. А. Суслиной (см. [7]) был предложен и развит теоретико-операторный подход к задачам усреднения в $\mathbb{R}^d$ (вариант спектрального метода), основанный на масштабном преобразовании, теории Флоке–Блоха и аналитической теории возмущений. В [7] было доказано, что

$$\|u_\varepsilon - u_0\|_{L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L_2(\mathbb{R}^d)}. \tag{0.3}$$

Здесь константа C не зависит ни от ε, ни от f. Поскольку $u_\varepsilon = (\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} f$, $u_0 = (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1} f$, оценку (0.3) можно переписать в операторных терминах:

$$\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.4}$$

Аппроксимации резольвенты $(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при учёте корректоров) были получены в [8, 9]:

$$\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1} - \varepsilon K(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon^2, \tag{0.5}$$

$$\big\|(\mathcal{A}_\varepsilon + I)^{-1} - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1} - \varepsilon K_1(\varepsilon)\big\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon. \tag{0.6}$$

Здесь $K_1(\varepsilon) = \Psi^\varepsilon \nabla (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} + I)^{-1} \Pi_\varepsilon$ — традиционный для теории усреднения корректор, который дополнительно содержит вспомогательный сглаживающий оператор Π_ε, а $K(\varepsilon)$ имеет более сложную структуру: $K(\varepsilon) = K_1(\varepsilon) + K_1(\varepsilon)^* + K_3$, где K_3 не зависит от ε.

К усреднению параболических задач теоретико-операторный подход применялся в [10–13]. В операторных терминах речь идёт об аппроксимации полугруппы $e^{-\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$, $\tau > 0$. В [10, 11] была установлена оценка

$$\|e^{-\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\varepsilon(\tau + \varepsilon^2)^{-1/2}, \qquad \tau > 0. \tag{0.7}$$

Аппроксимации полугруппы $e^{-\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$ по $(L_2 \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(L_2 \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ (при учёте корректоров) были получены в [12, 13].

Оценки (0.4)–(0.7) точны по порядку; константы C контролируются явно в терминах данных задачи. Оценки такого вида называются *операторными оценками погрешности* в задачах усреднения. Другой подход к получению операторных оценок погрешности (“метод сдвига”) для эллиптических и параболических задач был предложен В. В. Жиковым и С. Е. Пастуховой в работах [14–16]. См. также обзор [17].

0.2. Операторные оценки погрешности для уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа. С усреднением нестационарных уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа дело обстоит несколько иначе. Им были посвящены статьи [18–23], где изучалось поведение решений задач Коши

$$\begin{cases} \dfrac{i\partial z_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (\mathcal{A}_\varepsilon z_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau), \\ z_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \end{cases} \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -(\mathcal{A}_\varepsilon w_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau), \\ w_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (\partial_\tau w_\varepsilon)(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x}), \end{cases} \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}. \tag{0.8}$$

Соответствующие им “усреднённые” задачи выглядят следующим образом:

$$\begin{cases} \dfrac{i\partial z_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau} = (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} z_0)(\mathbf{x},\tau), \\ z_0(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \end{cases} \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R},$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w_0(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}} w_0)(\mathbf{x},\tau), \\ w_0(\mathbf{x},0) = \phi(\mathbf{x}), \quad (\partial_\tau w_0)(\mathbf{x},0) = \psi(\mathbf{x}), \end{cases} \qquad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}.$$

Поскольку

$$z_\varepsilon(\cdot,\tau) = e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}\phi, \qquad w_\varepsilon(\cdot,\tau) = \cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\phi + \mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\psi,$$

в операторных терминах речь идёт о поведении при малом ε оператор-функций $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$ и $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$, где $\tau\in\mathbb{R}$, соответственно. Для этих оператор-функций уже не удаётся получить аппроксимации по операторной норме в $L_2(\mathbb{R}^d)$, а приходится рассматривать норму операторов, действующих из пространства Соболева $H^q(\mathbb{R}^d)$ (с подходящим q) в $L_2(\mathbb{R}^d)$. В [18] были получены точные по порядку оценки

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{0.9}$$

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.10}$$

Аналогичный результат для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ получен в работе [19]:

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^1(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.11}$$

Далее, в [20–23] была доказана точность этих результатов как по типу операторной нормы, так и относительно зависимости от τ (при больших τ). С другой стороны, было установлено, что при некоторых дополнительных предположениях (например, если матрица $g(\mathbf{x})$ имеет вещественные элементы) оценки (0.9)–(0.11) допускают улучшения:

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon} - e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{0.12}$$

$$\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon, \tag{0.13}$$

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\|_{H^{1/2}(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon. \tag{0.14}$$

Поясним метод на примере вывода оценки (0.10). Ясно, что эта оценка эквивалентна неравенству

$$\left\|\left(\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - \cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\right)(-\Delta+I)^{-1}\right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon. \tag{0.15}$$

За счёт масштабного преобразования неравенство (0.15) равносильно оценке

$$\left\| \left(\cos(\tau\varepsilon^{-1}\mathcal{A}^{1/2}) - \cos(\tau\varepsilon^{-1}(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}) \right) \varepsilon^2(-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-1} \right\|_{L_2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \quad (0.16)$$

где $\mathcal{A} := \mathcal{A}_1$. Далее, с помощью теории Флоке–Блоха оператор $\mathcal{A}$ раскладывается в прямой интеграл по операторам $\mathcal{A}(\mathbf{k})$, действующим в пространстве $L_2(\Omega)$. Оператор $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ задаётся дифференциальным выражением $-\operatorname{div}_{\mathbf{k}} g(\mathbf{x})\nabla_{\mathbf{k}}$, где $\nabla_{\mathbf{k}} = \nabla + i\mathbf{k}$, $\operatorname{div}_{\mathbf{k}} = \operatorname{div} + i\langle \cdot, \mathbf{k}\rangle$, при периодических граничных условиях. Параметр $\mathbf{k}$ называют *квазиимпульсом*. Спектр оператора $\mathcal{A}(\mathbf{k})$ дискретен. Оказывается, что вклад в усреднение дают лишь пороговые характеристики на краю спектра оператора $\mathcal{A}$, т. е. достаточно знать спектральное разложение $\mathcal{A}$ лишь вблизи нижнего края спектра. В частности, эффективная матрица g^0 — это гессиан первой зонной функции $E_1(\mathbf{k})$ в точке $\mathbf{k} = 0$.

0.3. Аппроксимации решений уравнений гиперболического типа: “классические” результаты с корректором. Отдельно обсудим известные “классические” результаты с корректором, которые не могут быть записаны в терминах равномерной операторной сходимости. Эти результаты относятся к операторам в ограниченной области $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^d$. Аппроксимации для решений гиперболических уравнений с нулевыми начальными данными и ненулевой правой частью были получены в [1, гл. 2, п. 3.6] и [3, гл. 4, п. 5]. В [1] была доказана сильная сходимость к нулю в $L_2((0,T); H^1(\mathcal{O}))$ разности решения и соответствующего первого приближения, а в [3] в предположении C^∞-гладкости правой части было построено полное асимптотическое разложение для решения и получена оценка порядка $O(\varepsilon^{1/2})$ для $H^1(\mathcal{O}\times(0,T))$-нормы разности решения и его первого приближения.

Задача поиска приближения с корректором для решений гиперболических систем с ненулевыми начальными данными изучалась в статье [24]. В этой работе было выяснено, что получить член корректора с традиционной для теории усреднения структурой возможно лишь для очень специального класса начальных данных. В общем случае для произвольных начальных данных аппроксимации с корректором были найдены в [25, 26].

0.4. Операторные оценки погрешности для уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа: результаты с корректорами. Перейдём теперь к описанию известных результатов об операторных оценках погрешности при усреднении уравнений типа Шрёдингера и гиперболического типа с корректорами. В [19] была получена аппроксимация по “энергетической” норме для оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin\bigl(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\bigr)$:

$$\begin{aligned}\bigl\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin\bigl(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\bigr) - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin\bigl(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}\bigr) - \varepsilon\tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)\bigr\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}& \\ \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon,&\end{aligned} \quad (0.17)$$

где $\tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau) = \Psi^\varepsilon\nabla(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin\bigl(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}\bigr)\Pi_\varepsilon$ — соответствующий корректор. Далее, в рукописи [27] и в работах [28, 29] была найдена аппроксимация оператора $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin\bigl(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\bigr)$ по $(H^3 \to L_2)$-норме при учёте корректора с погрешностью $O(\varepsilon^2)$:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}) - (\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}) - \varepsilon\tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}& \\ \leqslant C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2,&\end{aligned} \quad (0.18)$$

где $\tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau) = \tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau) + \tilde{\mathcal{K}}_2(\tau)$, член $\tilde{\mathcal{K}}_2(\tau)$ не зависит от ε. Результаты (0.17) и (0.18) удалось получить за счёт присутствия “сглаживающего” множителя $\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}$ в приближаемом операторе.

Вопрос о возможности найти аппроксимации для операторной экспоненты $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}$ по $(H^q \to L_2)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по $(H^q \to H^1)$-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ за счёт учёта корректоров исследовался в статье [30], вслед за этим для оператора $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})$ данный вопрос изучался в [28, 29]. Выяснилось, что построить такие приближения в пороговых терминах для самих операторов не удаётся, но их можно получить для "подправленных" операторов — композиций $e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)$ и $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)$:

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}-\varepsilon\check{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon, \tag{0.19}$$

$$\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}-\varepsilon\check{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\|_{H^6(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\leqslant C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2, \tag{0.20}$$

$$\begin{aligned}\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-\cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})-\varepsilon\mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}&\\ \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon,&\end{aligned} \tag{0.21}$$

$$\begin{aligned}\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-\cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})-\varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon,\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}&\\ \leqslant C(1+|\tau|)^2\varepsilon^2,&\end{aligned} \tag{0.22}$$

где

$$\begin{aligned}\check{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)&=\check{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)+\check{\mathcal{K}}_2(\tau), &\quad \check{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)&=\Psi^\varepsilon\nabla e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}\Pi_\varepsilon,\\ \mathcal{K}(\varepsilon,\tau)&=\mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau)+\mathcal{K}_2(\tau), &\quad \mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau)&=\Psi^\varepsilon\nabla\cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})\Pi_\varepsilon,\end{aligned}$$

члены $\check{\mathcal{K}}_2(\tau)$, $\mathcal{K}_2(\tau)$ не зависят от ε.

Оценки (0.17)–(0.22) точны по порядку. В [22, 28–30] было установлено, что в общем случае они точны также по типу операторной нормы и в отношении зависимости от времени τ. Однако, при дополнительных предположениях (тех же самых, при которых выполнены оценки (0.12)–(0.14)) эти результаты допускают усиление:

$$\begin{aligned}&\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}-\varepsilon\check{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\qquad\leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,\\ &\|e^{-i\tau\mathcal{A}_\varepsilon}(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-e^{-i\tau\mathcal{A}^{\mathrm{hom}}}-\varepsilon\check{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\|_{H^4(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\qquad\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon^2,\\ &\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-\cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})-\varepsilon\mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau)\|_{H^{5/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\qquad\leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,\\ &\|\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})(I+\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon)-\cos(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})-\varepsilon\mathcal{K}(\varepsilon,\tau)\|_{H^3(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\qquad\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon^2,\end{aligned} \tag{0.23}$$

$$\begin{aligned}&\Big\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin\big(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2}\big)-(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin\big(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2}\big)-\varepsilon\tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)\Big\|_{H^{3/2}(\mathbb{R}^d)\to H^1(\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\qquad\leqslant C(1+|\tau|)^{1/2}\varepsilon,\\ &\|\mathcal{A}_\varepsilon^{-1/2}\sin(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})-(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{-1/2}\sin(\tau(\mathcal{A}^{\mathrm{hom}})^{1/2})-\varepsilon\tilde{\mathcal{K}}(\varepsilon,\tau)\|_{H^2(\mathbb{R}^d)\to L_2(\mathbb{R}^d)}\\ &\qquad\qquad\leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon^2.\end{aligned} \tag{0.24}$$

Также отметим, что в ряде случаев сглаживающий оператор Π_ε может быть заменён тождественным I. Полученные оценки применяются к исследованию решений задач Коши для нестационарного уравнения типа Шрёдингера и гиперболического уравнения *с начальными данными из специального класса*:

$$\begin{cases}\dfrac{i\partial\check{z}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau}=(\mathcal{A}_\varepsilon\check{z}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau),\\ \check{z}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\phi(\mathbf{x})+\varepsilon\Psi^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla\Pi_\varepsilon\phi(\mathbf{x}),\end{cases}\quad \begin{cases}\dfrac{\partial^2\check{w}_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2}=-(\mathcal{A}_\varepsilon\check{w}_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau),\\ \check{w}_\varepsilon(\mathbf{x},0)=\phi(\mathbf{x})+\varepsilon\Psi^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla\Pi_\varepsilon\phi(\mathbf{x}),\\ (\partial_\tau\check{w}_\varepsilon)(\mathbf{x},0)=\psi(\mathbf{x}),\end{cases}\quad \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}.$$

Отметим, что в работах [7–13, 18–23, 27–30] изучался гораздо более общий, чем (0.1), класс операторов (включающий в себя матричные ДО).

Наконец, мы упомянем статью [31], где авторы изучали скорость сходимости для решений начально-краевой задачи Дирихле для волнового уравнения в ограниченной области; получены аналоги оценок (0.13), (0.14), а также результаты с корректором при условии принадлежности начальных данных специальному классу.

0.5. Цели работы и метод исследования. В свете описанных выше результатов возникает вопрос: можно ли найти приближения по L_2-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ и по H^1-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ для решения задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_\varepsilon(\mathbf{x},\tau)}{\partial\tau^2} = -(\mathcal{A}_\varepsilon u_\varepsilon)(\mathbf{x},\tau), & \mathbf{x}\in\mathbb{R}^d,\ \tau\in\mathbb{R}, \\ u_\varepsilon(\mathbf{x},0) = \varepsilon\Psi^\varepsilon(\mathbf{x})\nabla\Pi_\varepsilon\phi(\mathbf{x}), \quad (\partial_\tau u_\varepsilon)(\mathbf{x},0)=0, & \phi\in H^q(\mathbb{R}^d) \text{ с подходящим } q. \end{cases} \tag{0.25}$$

Эти задачи равносильны изучению поведения оператора $\cos(\tau\mathcal{A}_\varepsilon^{1/2})\varepsilon\Psi^\varepsilon\nabla\Pi_\varepsilon$, $\tau\in\mathbb{R}$, $\varepsilon\to 0$, для которого получить такие приближения в терминах пороговых характеристик на краю спектра оператора $\mathcal{A}$ *не представляется возможным* (см. обсуждение в [29, гл. 3, § 14, п. 14.6]). В недавней работе [32] было найдено приближение для решения задачи (0.25) по L_2-норме с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ в одномерном случае ($d=1$). При этом *вклад в эффективное приближение дают края всех "периодических" лакун.*

Настоящая статья посвящена аппроксимации решения задачи (0.25) по H^1-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ также в одномерном случае. (Когда $d=1$, мы будем обозначать оператор (0.1) через A_ε.) Сейчас мы дополнительно считаем, что коэффициент g удовлетворяет условию липшицевости, и что g' принадлежит "периодическому" классу Соболева $\widetilde{H}^\sigma(0,\nu)$, где $\sigma>1/2$. Также отметим, что в одномерном случае оператор Π_ε может быть заменён тождественным.

Следуя [32], мы раскладываем решение Ψ задачи (0.2) в ряд Фурье по собственным функциям $\{\varsigma_j\}_{j=2}^\infty$ оператора $A(0)$: $\Psi=\sum_{j=2}^\infty\beta_j\varsigma_j$, и изучаем задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u_{j,\varepsilon}(x,\tau)}{\partial\tau^2} = -(A_\varepsilon u_{j,\varepsilon})(x,\tau), \\ u_{j,\varepsilon}(x,0) = \varepsilon\beta_j\varsigma_j^\varepsilon(x)\phi'(x), \quad (\partial_\tau u_{j,\varepsilon})(x,0)=0. \end{cases} \tag{0.26}$$

Отвечающие собственным функциям ς_j собственные числа являются краями "периодических" лакун в спектре оператора A. Каждой задаче (0.26) мы сопоставляем соответствующую эффективную задачу (см. (4.6), (4.7)) и эффективное приближение (см. (4.8)–(4.10)). Эффективные характеристики находятся на основании спектральных приближений на краях "периодических" лакун (теоремы 2.4, 2.6, 2.7). При этом мы разбиваем лакуны на две группы: те, которые лежат ближе к началу спектра, и те, которые лежат в подходящей окрестности бесконечности. Для невырожденных лакун из первой группы мы находим эффективные характеристики для каждого из краёв по отдельности, а для невырожденных лакун из второй группы и вырожденных лакун из обеих групп нужно учитывать оба края вместе. Способ получения спектральных приближений базируется на результатах из статей [32, 33] (которые, в свою очередь, были получены адаптацией метода из [34, § 4, п. 4.2, третий метод], [35, § 2, п. 2.2], [36]), а проконтролировать зависимость оценок в этих приближениях от края лакуны удаётся за счёт асимптотики собственных чисел оператора $A(0)$ из работы [37] (см. теорему 2.1 ниже). Суммированием эффективных приближений мы получаем теорему 4.6 — *основной результат работы*:

$$\left\| u_\varepsilon(\cdot,\tau) - u_\varepsilon^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\right\|_{H^1(\mathbb{R})} \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})}.$$

Благодаря полученному результату вместе с (0.23), (0.24), нам удаётся найти приближение по H^1-норме с погрешностью $O(\varepsilon)$ при учёте корректора для решения *исходной задачи* (0.8) в одномерном случае:

$$\begin{aligned}\big\|w_\varepsilon(\cdot,\tau) - w_0(\cdot,\tau) - \big(\varepsilon\mathcal{K}_1(\varepsilon,\tau)\phi + \varepsilon\tilde{\mathcal{K}}_1(\varepsilon,\tau)\psi - u_\varepsilon^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\big)\big\|_{H^1(\mathbb{R})}\\ \leqslant C(1+|\tau|)\varepsilon\big(\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})} + \|\psi\|_{H^{3/2}(\mathbb{R})}\big).\end{aligned}$$

0.6. Обозначения. Пусть $\mathfrak{H}$ и $\widetilde{\mathfrak{H}}$ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства. Символы $(\cdot,\cdot)_\mathfrak{H}$ и $\|\cdot\|_\mathfrak{H}$ означают скалярное произведение и норму в $\mathfrak{H}$, а символ $\|\cdot\|_{\mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}}$ — норму ограниченного оператора из $\mathfrak{H}$ в $\widetilde{\mathfrak{H}}$. Если $A\colon \mathfrak{H}\to\widetilde{\mathfrak{H}}$ — замкнутый линейный оператор, то через $\operatorname{Dom} A$ обозначается область определения оператора A, а через $\operatorname{Ker} A$ — его ядро; A^* — сопряжённый оператор. Через $I = I_\mathfrak{H}$ обозначается тождественный оператор в $\mathfrak{H}$. Далее, если A — самосопряжённый оператор в $\mathfrak{H}$, то для спектра оператора A мы используем обозначение $\operatorname{spec} A$.

Стандартные классы L_p функций, заданных на интервале $(a,b)\subset\mathbb{R}$, обозначаются через $L_p(a,b)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Если f — измеримая функция, то оператор умножения на функцию f в пространстве L_2 обозначается тем же символом. Далее, $H^\sigma(a,b)$ — класс Соболева порядка $\sigma\in\mathbb{R}$ с индексом суммирования 2; а $\widetilde{H}^\sigma(0,\nu)$ — подпространство функций из $H^\sigma(0,\nu)$, ν-периодическое продолжение которых принадлежит $H^\sigma_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R})$.

Если $F(x)$ — ν-периодическая функция, то $F^\varepsilon(x) := F(\varepsilon^{-1}x)$. Через $\Phi := \Phi_{x\to k}$ обозначается преобразование Фурье в $\mathbb{R}$, определённое на классе Шварца формулой

$$(\Phi v)(k) = (2\pi)^{-1/2}\int_\mathbb{R} e^{-ikx}v(x)\,dx, \qquad v\in\mathcal{S}(\mathbb{R}),$$

и по непрерывности распространённое до унитарного оператора $\Phi\colon L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})$. Характеристическая функция множества $\delta\subset\mathbb{R}$ обозначается χ_δ. Для множества значений произвольной функции f будем использовать обозначение $\operatorname{Ran} f$.

Далее, $D = -id/dx$. Через C, C, $\mathcal{C}$, $\mathscr{C}$ (возможно, с индексами и значками) обозначаются различные оценочные постоянные.

0.7. Благодарности. Автор выражает благодарность Т. А. Суслиной за полезные обсуждения и внимание к работе. Также автор благодарит Н. Д. Филонова и А. И. Назарова за ценные советы.

1. Оператор A

В $L_2(\mathbb{R})$ рассматривается ν-периодический самосопряжённый оператор A, порождённый дифференциальным выражением

$$A = -\frac{d}{dx}g(x)\frac{d}{dx} = Dg(x)D, \qquad \operatorname{Dom} A = H^2(\mathbb{R}), \tag{1.1}$$

где $\nu > 0$,

$$\left.\begin{aligned} &g \text{ — липшицева вещественнозначная функция,}\\ &0<\alpha_0\leqslant g(x)\leqslant\alpha_1<\infty,\ g(x+\nu)=g(x),\ x\in\mathbb{R}.\end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

Без ограничения общности будем считать, что

$$\int_0^\nu g(x)^{-1/2}dx = \pi. \tag{1.3}$$

Отметим также следующую оценку, которая нам понадобится в дальнейшем (см. [7, гл. 2, § 1, (1.11)])

$$\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2}\|Du\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \|A^{1/2}u\|_{L_2(\mathbb{R})} \leqslant \|g\|_{L_\infty}^{1/2}\|Du\|_{L_2(\mathbb{R})}, \qquad u \in H^1(\mathbb{R}). \tag{1.4}$$

2. Спектр оператора A

2.1. Операторы $A(k)$**.** Опишем спектр оператора (1.1). Для этого введём объекты, связанные со спектральным разложением оператора (1.1) (разложением Флоке–Блоха). Рассмотрим в $L_2(0,\nu)$ семейство операторов

$$A(k) = (D+k)g(x)(D+k), \qquad k \in \mathbb{R},$$

с периодическими граничными условиями. Параметр $k \in \mathbb{R}$ называют *квазиимпульсом*. Пусть $E_l(k)$, $l \in \mathbb{N}$, — последовательные (с учётом кратностей) собственные значения оператора $A(k)$ и $\varphi_l(\cdot,k)$, $l \in \mathbb{N}$, — соответствующие ортонормированные собственные функции. Функции $E_l(k)$ называются *зонными функциями*; они $(2\pi/\nu)$-периодичны. Далее, $\varphi_l(x+\nu,k) = \varphi_l(x,k)$, а функции $e^{ikx}\varphi_l(x,k)$ можно выбрать $(2\pi/\nu)$-периодическими по k. Обозначим через $\widetilde{\Omega} = \big[-\pi/\nu, \pi/\nu\big)$ центральную (первую) зону Бриллюена. В силу периодичности функций $E_l(k)$ и $e^{ikx}\varphi_l(x,k)$ достаточно рассматривать только $k \in \widetilde{\Omega}$.

Рассмотрим функцию $E_s(k)$ для некоторого $s \in \mathbb{N}$. Следующие утверждения хорошо известны (см., например, [38, XIII.16]).

1°. Функция E_s липшицева и чётна.

2°. Функция E_s — кусочно вещественно аналитическая, гладкость которой может нарушаться только в точках перемены кратности.

3°. Отображение $k \mapsto E_s(k)$, $k \in \widetilde{\Omega}$, дважды покрывает зону $\operatorname{Ran} E_s$.

4°. Равенство $E_s(k) = E_{s+1}(k)$ возможно только если $k = \pi/\nu \pmod{2\pi/\nu}$ (s — нечётное число).

5°. Равенство $E_s(k) = E_{s-1}(k)$ возможно только если $k = 0 \pmod{2\pi/\nu}$ (s — нечётное число).

6°. При $0 \leqslant k \leqslant \pi/\nu$ функция $E_s(k)$ строго монотонна.

7°. Если номер s — нечётный, то при $k = 0 \pmod{2\pi/\nu}$ функция $k \mapsto E_s(k)$ имеет минимум, а при $k = \pi/\nu \pmod{2\pi/\nu}$ — максимум.

8°. Если номер s — чётный, то при $k = 0 \pmod{2\pi/\nu}$ функция $k \mapsto E_s(k)$ имеет максимум, а при $k = \pi/\nu \pmod{2\pi/\nu}$ — минимум.

Преобразование Гельфанда $\mathscr{G}$ первоначально определяется на функциях из класса Шварца $v \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ формулой

$$\tilde{v}(x,k) = (\mathscr{G}v)(x,k) = \left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{-1/2} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{-ik(x+\nu n)} v(x+\nu n), \qquad x \in \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Функция $\tilde{v}(x,k)$ — ν-периодическая по x и $(2\pi/\nu)$-квазипериодическая по k (т. е. функция $e^{i\langle x,k\rangle}\tilde{v}(x,k)$ является $(2\pi/\nu)$-периодической). Таким образом, достаточно рассматривать

$\tilde v(x,k)$ при $x\in[0,\nu)$ и $k\in\widetilde\Omega$. Обратное преобразование даётся формулой

$$v(x)=(\mathscr{G}^{-1}\tilde v)(x)=\left(\frac{2\pi}{\nu}\right)^{-1/2}\int_{\widetilde\Omega}\tilde v(x,k)e^{ikx}dk,\qquad x\in\mathbb{R},$$

и восстанавливает v по $\tilde v$. При этом $\int_{\widetilde\Omega}\int_{\Omega}|\tilde v(x,k)|^2dx\,dk=\int_{\mathbb{R}}|v(x)|^2dx$ и $\mathscr{G}$ продолжается по непрерывности до унитарного отображения:

$$\mathscr{G}\colon L_2(\mathbb{R})\to\int_{\widetilde\Omega}\oplus L_2(0,\nu)\,dk=:\mathcal{K}.$$

Оператор умножения на ограниченную периодическую функцию в $L_2(\mathbb{R})$ под действием $\mathscr{G}$ переходит в умножение на ту же функцию в слоях прямого интеграла $\mathcal{K}$. Действие оператора D на $v\in H^1(\mathbb{R})$ переходит в послойное действие оператора $D+k$ на $\tilde v(\cdot,k)\in\widetilde H^1(0,\nu)$.

Под действием преобразования Гельфанда $\mathscr{G}$ оператор A раскладывается в прямой интеграл по операторам $A(k)$:

$$\mathscr{G}A\mathscr{G}^{-1}=\int_{\widetilde\Omega}\oplus A(k)\,dk.\tag{2.1}$$

В силу (2.1) спектр оператора A представляет собой объединение отрезков (зон), которые являются образами функций E_l:

$$\operatorname{spec}A=\bigcup_{l=1}^{\infty}\operatorname{Ran}E_l=[E_1(0),E_1(\pi/\nu)]\cup[E_2(\pi/\nu),E_2(0)]\cup[E_3(0),E_3(\pi/\nu)]\cup\dots.$$

В одномерном случае спектральные зоны не перекрываются. Интервалы

$$\bigl(-\infty,E_1(0)\bigr),\quad\bigl(E_1(\pi/\nu),E_2(\pi/\nu)\bigr),\quad\bigl(E_2(0),E_3(0)\bigr),\quad\dots$$

называются лакунами в спектре. Отметим, что зоны могут касаться друг друга, т. е. возможно их пересечение по граничной точке. Это означает, что некоторые лакуны могут быть пустыми.

Введём оператор P_1, который действует как усреднение по интервалу периодичности $(0,\nu)$:

$$P_1u=\frac{1}{\nu}\int_0^{\nu}u(x)\,dx,\qquad u\in L_2(0,\nu).$$

Оператор P_1 является ортопроектором на подпространство констант

$$\mathfrak{N}_1=\{u\in L_2(0,\nu)\colon u=c\in\mathbb{C}\}.$$

Справедливы следующие соотношения (см., например, [8, § 6, п. 6.1] и [39, (2.8), (2.9)]):

$$([P_1]\mathscr{G}u)(k)=\nu^{-1/2}(\Phi u)(k),\qquad u\in L_2(\mathbb{R}),\quad k\in\widetilde\Omega;\tag{2.2}$$

$$(\mathscr{G}^{-1}c)(x)=\nu^{1/2}(\Phi^*c)(x),\qquad c\in L_2(\mathbb{R}),\quad\operatorname{supp}c\subset\widetilde\Omega.\tag{2.3}$$

Здесь $[P_1]$ — проектор в $\mathcal{K}$, действующий послойно как оператор P_1.

Для нас важную роль будут играть спектральные характеристики оператора A в окрестности точки $k=0$. Введём обозначения $\lambda_l:=E_l(0)$, $\varsigma_l(x):=\varphi_l(x,0)$. Это собственные числа и собственные функции задачи

$$\begin{cases} -\dfrac{d}{dx}g(x)\dfrac{d}{dx}\varsigma_l(x) = \lambda_l\varsigma_l(x), & 0 < x < \nu, \\ \varsigma_l(0) = \varsigma_l(\nu), & \left(\frac{d}{dx}\varsigma_l\right)(0) = \left(\frac{d}{dx}\varsigma_l\right)(\nu). \end{cases} \tag{2.4}$$

Преобразование Грина–Лиувилля (см. [40, гл. 3, п. 3.2])

$$t(x) = \int_0^x g(\tilde{x})^{-1/2}d\tilde{x}, \qquad z_l(t) = g(x)^{1/4}\varsigma_l(x)\big|_{x=x(t)} \tag{2.5}$$

преобразует задачу (2.4) в задачу с сингулярным потенциалом

$$\begin{cases} -\dfrac{d^2}{dt^2}z_l(t) + V(t)z_l(t) = \lambda_l z_l(t), & 0 < t < \pi, \\ z_l(0) = z_l(\pi),\ z_l^{[1]}(0) = z_l^{[1]}(\pi), \end{cases} \tag{2.6}$$

где $z_l^{[1]}(t) = \left(\frac{d}{dt}z_l - Qz_l\right)(t)$ – квазипроизводная,

$$V(t) = -\,g(x)^{1/4}\frac{d}{dx}\left(g(x)\frac{d}{dx}g(x)^{-1/4}\right)\Bigg|_{x=x(t)}, \quad V \in W_\infty^{-1} \subset H_{\mathrm{loc}}^{-1}(\mathbb{R}), \quad V(t+\pi) = V(t),$$

и Q определяется из соотношения

$$V = V_0 + Q'; \quad V_0 = \mathrm{const}, \quad Q \in L_\infty \subset L_{2,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}), \quad Q(t+\pi) = Q(t), \quad \int_0^\pi Q(t)\,dt = 0. \tag{2.7}$$

(Точную постановку задачи (2.6) с сингулярным потенциалом $V \in H_{\mathrm{loc}}^{-1}(\mathbb{R})$ см. в [37, 41].) Для больших собственных чисел λ_l задачи (2.6) известна асимптотика [37, теорема 28] (для случая регулярного потенциала см. также [40, гл. 3, пп. 3.3–3.5]).

Теорема 2.1 ([37]). *Для достаточно больших номеров $m \geqslant M = M(V)$ имеют место оценки*

$$|\lambda_{2m} - (2m)^2| < \frac{m}{2}, \qquad |\lambda_{2m+1} - (2m)^2| < \frac{m}{2}. \tag{2.8}$$

Далее, следующая лемма позволяет оценить скорость изменения $E_l(k)$ при изменении k ([32, лемма 2.2], см. также [42, лемма 4.2]).

Лемма 2.2 ([32]). *Для достаточно больших $l \geqslant \widetilde{M}$ справедливы оценки*

$$|E_l(k) - \lambda_l| \leqslant 2\|g\|_{L_\infty}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\sqrt{\lambda_l}|k| + \|g\|_{L_\infty}k^2.$$

Собственные функции задачи (2.6) принадлежат $H^1([0,\pi])$ и для них справедлива асимптотика ([37, теорема 45]; см. также [43, (1.3.9)] для случая регулярного потенциала)

$$\begin{aligned} z_{2m}(t) &= a_{2m}e^{i2mt} \quad + b_{2m}e^{-i2mt} \quad + o(1), \\ z_{2m+1}(t) &= a_{2m+1}e^{i2mt} + b_{2m+1}e^{-i2mt} + o(1), \end{aligned} \qquad \pi(|a_j|^2 + |b_j|^2) = 1 + o(1),$$

при больших m. Вместе с (1.2), (2.5) отсюда следует равномерная ограниченность собственных функций задачи (2.4):

$$\sup_{l\in\mathbb{N}}\max_{x\in[0,\nu]}|\varsigma_l(x)| \leqslant C_\varsigma < \infty. \tag{2.9}$$

Далее, квазипроизводные собственных функций задачи (2.6) абсолютно непрерывны и для них справедлива асимптотика [44]

$$\begin{aligned} z_{2m}^{[1]}(t) &= i2m\big(a_{2m}e^{i2mt} \quad - \quad b_{2m}e^{-i2mt}\big) + o(m), \\ z_{2m+1}^{[1]}(t) &= i2m\big(a_{2m+1}e^{i2mt} - b_{2m+1}e^{-i2mt}\big) + o(m), \end{aligned} \qquad \pi(|a_j|^2 + |b_j|^2) = 1 + o(1),$$

при больших m. Вместе с (1.2), (2.5), (2.7) отсюда следует оценка

$$\operatorname*{ess-sup}_{x\in[0,\nu]} |\varsigma_l'(x)| \leqslant C_\varsigma' \cdot l. \tag{2.10}$$

Наконец, через λ_l° обозначим *различные* собственные числа оператора $A(0)$, занумерованные в порядке возрастания, и пусть p_l — их кратности (которые могут равняться 1 или 2). Введём обозначения

$$\Upsilon^{(1)} = \{l \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \colon p_l = 1\}, \qquad \Upsilon^{(2)} = \{l \in \mathbb{N} \colon p_l = 2\},$$

и положим

$$\begin{aligned} q(l) &= p_1 + \ldots + p_{l-1} + 1, \\ \Upsilon^{(<)} &= \{l \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \colon q(l) < \max\{2(M+1), \widetilde{M}, 20\}\}, \\ \Upsilon^{(1,<)} &= \Upsilon^{(<)} \cap \Upsilon^{(1)}, \qquad \Upsilon^{(2,<)} = \Upsilon^{(<)} \cap \Upsilon^{(2)}, \\ \Upsilon^{(1,>)} &= \{l \in \Upsilon^{(1)} \colon q(l) \geqslant \max\{2(M+1), \widetilde{M}, 20\},\ q(l) \text{ — чётное число}\}, \\ \Upsilon^{(2,>)} &= \{l \in \Upsilon^{(2)} \colon q(l) \geqslant \max\{2(M+1), \widetilde{M}, 20\}\}. \end{aligned}$$

Отметим, что в силу свойств зонных функций числа $q(l)$, $l \in \Upsilon^{(2)}$, всегда чётные.

2.2. Спектральные приближения. Положим $\mathfrak{N}_l \coloneqq \operatorname{Ker}(A(0) - \lambda_l^\circ I)$, $l \in \mathbb{N}$, и пусть P_l — ортопроектор пространства $L_2(0,\nu)$ на $\mathfrak{N}_l$. Далее, обозначим $\mathfrak{N}_{l,l+1} \coloneqq \mathfrak{N}_l \oplus \mathfrak{N}_{l+1}$ и, соответственно, $P_{l,l+1} \coloneqq P_l + P_{l+1}$. Введём в рассмотрение операторы

$$\begin{aligned} \mathfrak{G}_{1,l}^\circ &\coloneqq P_l g D P_l + (DP_l)^* g P_l, \\ \widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ &\coloneqq P_{l,l+1} g D P_{l,l+1} + (DP_{l,l+1})^* g P_{l,l+1}, \\ \mathfrak{A}_l(k) &\coloneqq \sqrt{\lambda_l^\circ} P_l + \frac{k}{2} (\lambda_l^\circ)^{-1/2} \mathfrak{G}_{1,l}^\circ P_l, \end{aligned} \tag{2.11}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{A}}_l(k) &\coloneqq (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1})^{1/2} P_{l,l+1} \\ &+ \frac{k}{\pi} \int_0^\infty \zeta^{1/2} P_{l,l+1} (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} \widetilde{\mathfrak{G}}_{1,l}^\circ (\lambda_l^\circ P_l + \lambda_{l+1}^\circ P_{l+1} + \zeta I)^{-1} P_{l,l+1}\, d\zeta. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Получим сначала спектральные приближения в окрестности собственного числа λ_l°, $l \in \Upsilon^{(<)}$, оператора $A(0)$ с кратностью p_l. Пусть d_l — расстояние от λ_l° до остального спектра оператора $A(0)$. В силу непрерывности зонных функций можно выбрать $\varkappa_l > 0$ такое, что при $|k| \leqslant \varkappa_l$ на отрезке $[\lambda_l^\circ - d_l/3, \lambda_l^\circ + d_l/3]$ имеется p_l собственных чисел оператора $A(k)$ и

$$\big([\lambda_l^\circ - 2d_l/3, \lambda_l^\circ - d_l/3) \cup (\lambda_l^\circ + d_l/3, \lambda_l^\circ + 2d_l/3]\big) \cap \operatorname{spec} A(k) = \varnothing.$$

Через $F_l(k)$ обозначим спектральный проектор оператора $A(k)$, отвечающий отрезку $[\lambda_l^\circ - d_l/3, \lambda_l^\circ + d_l/3]$, и пусть γ_l — контур, эквидистантно охватывающий отрезок

$[\lambda_l^\circ - d_l/3, \lambda_l^\circ + d_l/3]$ и проходящий через точку $\lambda_l^\circ + d_l/2$. Его длина равна

$$\ell_l = \frac{\pi+4}{3} d_l.$$

Лемма 2.3. *Пусть $|k| \leqslant \varkappa_l$. Справедливы оценки*

$$\bigl\| A(k)^{1/2}\bigl(F_l(k) - P_l\bigr)\bigr\| \leqslant \mathscr{C}'_{1,l}|k|, \qquad \bigl\| A(k)^{1/2} P_l \bigr\| \leqslant \mathscr{C}'_{1,l}|k| + \sqrt{\lambda_l^\circ + d_l/3}. \tag{2.13}$$

Здесь константа $\mathscr{C}'_{1,l}$ задана выражением

$$\mathscr{C}'_{1,l} = (2\pi)^{-1}\ell_l\bigl(C_{2,l}\check{C}_{2,l}C_4 + C_{1,l}\check{C}_{2,l}C_4\varkappa_l + C_{1,l}C_{3,l} + 2C_{1,l}C_{2,l}C_4\varkappa_l + C_{1,l}^2 C_4 \varkappa_l^2\bigr), \tag{2.14}$$

где

$$C_{1,l} = 6\|g\|_{L_\infty}^{1/2} d_l^{-1}, \qquad C_{2,l} = (24 d_l^{-1} + 36\lambda_l^\circ d_l^{-2})^{1/2}, \qquad \check{C}_{2,l} = C_{2,l} + 6\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\varkappa_l d_l^{-1},$$
$$C_{3,l} = 4 + 6\lambda_l^\circ d_l^{-1}, \qquad C_4 = \|g\|_{L_\infty}^{1/2}.$$

(Здесь и далее в этом пункте мы опускаем индекс у $(L_2(0,\nu) \to L_2(0,\nu))$-операторной нормы.)

Доказательство. Докажем первую оценку (2.13). Справедливо представление [39, (3.3), (3.15)]

$$\begin{aligned} &F_l(k) - P_l = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_l} T(k,\zeta)\, d\zeta, \qquad |k| \leqslant \varkappa_l, \\ &T(k,\zeta) \coloneqq \mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}(k,\zeta) + \mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(k,\zeta) + \mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{Y}(k,\zeta), \end{aligned} \tag{2.15}$$

где

$$\begin{aligned} \mathcal{X}(k,\zeta) &= g^{1/2} D R(k,\zeta), \qquad & \mathcal{Y}(k,\zeta) &= g^{1/2} k R(k,\zeta), \\ \mathcal{X}_0(\zeta) &= g^{1/2} D R_0(\zeta), & \mathcal{Y}_0(k,\zeta) &= g^{1/2} k R_0(\zeta), \\ R(k,\zeta) &= (A(k) - \zeta I)^{-1}, & R_0(\zeta) &= (A(0) - \zeta I)^{-1}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

а значит

$$A(k)^{1/2}\bigl(F_l(k) - P_l\bigr) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_l} A(k)^{1/2} T(k,\zeta)\, d\zeta, \qquad |k| \leqslant \varkappa_l. \tag{2.17}$$

Для операторов $\mathcal{X}(k,\zeta)$, $\mathcal{X}_0(\zeta)$, $\mathcal{Y}(k,\zeta)$ и $\mathcal{Y}_0(k,\zeta)$ справедливы оценки [39, (3.5), (3.7) и (3.8)]

$$\|\mathcal{Y}(k,\zeta)\| \leqslant C_{1,l}|k|, \qquad \|\mathcal{Y}_0(k,\zeta)\| \leqslant C_{1,l}|k|, \qquad |k| \leqslant \varkappa_l,\ \zeta \in \gamma_l; \tag{2.18}$$
$$\|\mathcal{X}_0(\zeta)\| \leqslant C_{2,l}, \qquad \|\mathcal{X}(k,\zeta)\| \leqslant \check{C}_{2,l}, \qquad |k| \leqslant \varkappa_l,\ \zeta \in \gamma_l. \tag{2.19}$$

Также отметим, что [39, (3.6)]

$$\|A(0)^{1/2} R_0(\zeta)\| \leqslant C_{2,l}, \qquad \|A(0) R_0(\zeta)\| \leqslant C_{3,l}, \qquad \zeta \in \gamma_l. \tag{2.20}$$

Рассмотрим слагаемые в выражении для $A(k)^{1/2}T(k,\zeta)$. Начнём с $A(k)^{1/2}\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}(k,\zeta)$. Используя (2.18), (2.19) и первую оценку (2.20), имеем

$$\begin{aligned} \bigl\|A(k)^{1/2}\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}(k,\zeta)\bigr\| &= \bigl\|g^{1/2}(D+k)\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}(k,\zeta)\bigr\| \\ &\leqslant \bigl\|g^{1/2}D\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}(k,\zeta)\bigr\| + \bigl\|g^{1/2}k\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}(k,\zeta)\bigr\| \\ &= \bigl\|A(0)^{1/2}\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}(k,\zeta)\bigr\| + \bigl\|g^{1/2}k\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}(k,\zeta)\bigr\| \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left\| \left(g^{1/2} k A(0)^{1/2} R_0(\zeta^*)\right)^* \mathcal{X}(k,\zeta) \right\| + \left\| g^{1/2} k \mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^* \mathcal{X}(k,\zeta) \right\| \\
&\quad \leqslant C_{2,l} \check{C}_{2,l} C_4 |k| + C_{1,l} \check{C}_{2,l} C_4 k^2, \qquad |k| \leqslant \varkappa_l,\ \zeta \in \gamma_l.
\end{aligned}
$$

Далее оценим $A(k)^{1/2}\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(k,\zeta)$. Применяя (2.18), (2.19) и вторую оценку (2.20), получаем

$$
\begin{aligned}
\left\| A(k)^{1/2} \mathcal{X}_0(\zeta^*)^* \mathcal{Y}(k,\zeta) \right\| &= \left\| g^{1/2} (D+k) \mathcal{X}_0(\zeta^*)^* \mathcal{Y}(k,\zeta) \right\| \\
&\leqslant \left\| \left(g^{1/2} D A(0)^{1/2} R_0(\zeta^*)\right)^* \mathcal{Y}(k,\zeta) \right\| + \left\| g^{1/2} k \mathcal{X}_0(\zeta^*)^* \mathcal{Y}(k,\zeta) \right\| \\
&\leqslant \left\| A(0) R_0(\zeta^*) \right\| \cdot \left\| \mathcal{Y}(k,\zeta) \right\| + \left\| g^{1/2} k \mathcal{X}_0(\zeta^*)^* \mathcal{Y}(k,\zeta) \right\| \\
&\quad \leqslant C_{1,l} C_{3,l} |k| + C_{1,l} C_{2,l} C_4 k^2, \qquad |k| \leqslant \varkappa_l,\ \zeta \in \gamma_l.
\end{aligned}
$$

Наконец, рассмотрим $A(k)^{1/2}\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{Y}(k,\zeta)$. С помощью (2.18) и первой оценки (2.20) мы приходим к

$$
\begin{aligned}
\left\| A(k)^{1/2} \mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^* \mathcal{Y}(k,\zeta) \right\| &= \left\| g^{1/2} (D+k) \mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^* \mathcal{Y}(k,\zeta) \right\| \\
&\leqslant \left\| \left(g^{1/2} k A(0)^{1/2} R_0(\zeta)\right)^* \mathcal{Y}(k,\zeta) \right\| + \left\| g^{1/2} k \mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^* \mathcal{Y}(k,\zeta) \right\| \\
&\quad \leqslant C_{1,l} C_{2,l} C_4 k^2 + C_{1,l}^2 C_4 |k|^3, \qquad |k| \leqslant \varkappa_l,\ \zeta \in \gamma_l.
\end{aligned}
$$

Из полученных оценок вместе с (2.15) и (2.17) следует (2.13).

Вторая оценка (2.13) следует из равенства

$$
A(k)^{1/2} P_l = A(k)^{1/2} F_l(k) - A(k)^{1/2} \left(F_l(k) - P_l\right),
$$

первой оценки (2.13), а также $\left\| A(k)^{1/2} F_l(k) \right\| \leqslant \sqrt{\lambda_l^\circ + d_l/3}$, $|k| \leqslant \varkappa_l$. □

Теорема 2.4. *Пусть $\tau \in \mathbb{R}$ и $|k| \leqslant \varkappa_l$, где $\varkappa_l$ подчинено дополнительному условию*

$$
\varkappa_l \leqslant \min\{(4C_{5,l})^{-1}\lambda_l^\circ, (8\mathscr{C}_{1,l})^{-1}\}.
$$

Тогда справедливы оценки

$$
\left\| \left(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau \mathfrak{A}_l(k) P_l}\right) P_l \right\| \leqslant 3\mathscr{C}_{1,l}|k| + \mathscr{C}_{2,l}|\tau| k^2, \tag{2.21}
$$

$$
\left\| A(k)^{1/2} \left(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau \mathfrak{A}_l(k) P_l}\right) P_l \right\| \leqslant (2\mathscr{C}'_{1,l} + \mathscr{C}''_{1,l})|k| + \mathscr{C}'_{2,l}|\tau| k^2. \tag{2.22}
$$

Константа $\mathscr{C}'_{1,l}$ определена в (2.14), а $C_{5,l}$, $\mathscr{C}_{1,l}$, $\mathscr{C}''_{1,l}$, $\mathscr{C}_{2,l}$ и $\mathscr{C}'_{2,l}$ заданы выражениями

$$
\begin{aligned}
C_{5,l} &= (2\pi)^{-1}(\lambda_l^\circ + d_l/2)\ell_l (C_{1,l}C_{2,l} + C_{1,l}\check{C}_{2,l} + C_{1,l}^2 \varkappa_l), \\
\mathscr{C}_{1,l} &= (2\pi)^{-1}\ell_l (C_{1,l}C_{2,l} + C_{1,l}\check{C}_{2,l} + C_{1,l}^2 \varkappa_l), \\
\mathscr{C}''_{1,l} &= \left(\mathscr{C}'_{1,l}\varkappa_l + \sqrt{\lambda_l^\circ + d_l/3}\right)\mathscr{C}_{1,l}, \\
\mathscr{C}_{2,l} &= 4\left(\sqrt{\lambda_l^\circ} C_{7,l}^2 + \sqrt{\lambda_l^\circ} C_{8,l}\varkappa_l + (\lambda_l^\circ)^{-1/2} C_{9,l} + (\lambda_l^\circ)^{-3/2} C_{5,l} C_{10,l}\right), \\
\mathscr{C}'_{2,l} &= \left(\mathscr{C}'_{1,l}\varkappa_l + \sqrt{\lambda_l^\circ + d_l/3}\right)\mathscr{C}_{2,l},
\end{aligned}
$$

где

$$
\begin{aligned}
C_{6,l} &= 2C_{1,l}C_{2,l}\check{C}_{2,l}C_4 + C_{1,l}^2 C_{3,l} + 2C_{1,l}^2 C_{2,l} C_4 \varkappa_l + C_{1,l}C_{2,l}^2 C_4 + C_{1,l}^2, \\
C_{7,l} &= \pi^{-1}\ell_l C_{1,l}C_{2,l}, \qquad C_{8,l} = 2^{-1}\pi^{-2}\ell_l^2 C_{1,l}C_{2,l}C_{6,l}, \\
C_{9,l} &= (2\pi)^{-1}(\lambda_l^\circ + d_l/2)\ell_l C_{6,l}, \qquad C_{10,l} = \pi^{-1}(\lambda_l^\circ + d_l/2)\ell_l C_{1,l}C_{2,l}.
\end{aligned}
$$

Доказательство. Оценка (2.21) была доказана в [33, теорема 4.15]. Проверим (2.22). Справедливо равенство

$$\begin{aligned}A(k)^{1/2}\big(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} &- e^{-i\tau\mathfrak{A}_l(k)P_l}P_l\big)P_l\\ &= A(k)^{1/2}P_l\big(e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_l(k) - e^{-i\tau\mathfrak{A}_l(k)P_l}P_l\big)\\ &+ A(k)^{1/2}e^{-i\tau A(k)^{1/2}}(P_l - F_l(k))\\ &+ A(k)^{1/2}(F_l(k) - P_l)e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_l(k).\end{aligned}$$

В силу первой оценки (2.13) последние два слагаемых допускают оценки

$$\begin{aligned}\|A(k)^{1/2}e^{-i\tau A(k)^{1/2}}(P_l - F_l(k))\| &\leqslant \mathscr{C}'_{1,l}|k|, \qquad |k|\leqslant \varkappa_l,\\ \|A(k)^{1/2}(F_l(k) - P_l)e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_l(k)\| &\leqslant \mathscr{C}'_{1,l}|k|, \qquad |k|\leqslant \varkappa_l.\end{aligned}$$

Первое слагаемое оценивается с помощью второй оценки (2.13) и [33, (119)–(122)]:

$$\begin{aligned}&\big\|A(k)^{1/2}P_l\big(e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_l(k) - e^{-i\tau\mathfrak{A}_l(k)P_l}P_l\big)\big\|\\ &\qquad\leqslant \left(\mathscr{C}'_{1,l}\varkappa_l + \sqrt{\lambda_l^\circ + d_l/3}\right)(\mathscr{C}_{1,l}|k| + \mathscr{C}_{2,l}|\tau||k^2|), \qquad |k|\leqslant\varkappa_l.\end{aligned}$$

Таким образом, оценка (2.22) доказана. □

Теперь получим спектральные приближения в окрестности пары собственных чисел λ_l° и λ_{l+1}°, $l\in\Upsilon^{(1,>)}$, оператора $A(0)$. Как было проверено в [32, § 3, п. 3.2], при $|k|\leqslant\varkappa^{(>)}$, где

$$\varkappa^{(>)} = \frac{1}{3\sqrt{2}}\|g\|_{L_\infty}^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{-1/2}, \tag{2.23}$$

на отрезке $[q(l)^2 - 4q(l)/3, q(l)^2 + 4q(l)/3]$ имеется 2 собственных числа оператора $A(k)$ и

$$\big(\big[q(l)^2 - 8q(l)/3, q(l)^2 - 4q(l)/3\big) \cup \big(q(l)^2 + 4q(l)/3, q(l)^2 + 8q(l)/3\big]\big)\cap \operatorname{spec} A(k) = \varnothing. \tag{2.24}$$

Обозначим через $F_{l,l+1}(k)$ спектральный проектор оператора $A(k)$, $|k|\leqslant\varkappa^{(>)}$, отвечающий отрезку $[q(l)^2 - 4q(l)/3, q(l)^2 + 4q(l)/3]$. Далее, пусть $\tilde\gamma_l$ — контур, эквидистантно охватывающий этот отрезок и проходящий через точку $q(l)^2 + 2q(l)$. Его длина равна

$$\tilde\ell_l = \frac{\pi+4}{3}\cdot 4q(l).$$

Лемма 2.5. *Пусть $l\in\Upsilon^{(1,>)}$ и $|k|\leqslant\varkappa^{(>)}$. Справедливы оценки*

$$\big\|A(k)^{1/2}\big(F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1}\big)\big\| \leqslant \widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l}|k|, \qquad \big\|A(k)^{1/2}P_{l,l+1}\big\| \leqslant 2q(l) + \widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l}|k|. \tag{2.25}$$

Здесь константа $\widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l}$ задана выражением

$$\widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l} = (2\pi)^{-1}\tilde\ell_l\Big(\widetilde{C}_2\check{\widetilde{C}}_2C_4 + \widetilde{C}_{1,l}\check{\widetilde{C}}_2C_4\varkappa^{(>)} + \widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_{3,l} + 2\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2C_4\varkappa^{(>)} + \widetilde{C}_{1,l}^2C_4\big(\varkappa^{(>)}\big)^2\Big), \tag{2.26}$$

где

$$\widetilde{C}_{1,l} = \frac{3}{2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}q(l)^{-1}, \quad \widetilde{C}_2 = 3, \quad \check{\widetilde{C}}_2 = 3 + \frac{3}{2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\varkappa^{(>)}, \quad \widetilde{C}_{3,l} = 4 + \frac{3}{2}q(l).$$

Доказательство. Докажем первую оценку (2.25). Следующее представление следует из [32, (6.1), (6.3)]:

$$A(k)^{1/2}\big(F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1}\big) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\tilde{\gamma}_l} A(k)^{1/2} T(k,\zeta)\, d\zeta, \tag{2.27}$$

где оператор $T(k,\zeta)$ определён в (2.15), (2.16). Справедливы оценки [32, (6.5), (6.6)]

$$\|\mathcal{Y}(k,\zeta)\| \leqslant \widetilde{C}_{1,l}|k|, \qquad \|\mathcal{Y}_0(k,\zeta)\| \leqslant \widetilde{C}_{1,l}|k|, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)},\ \zeta \in \tilde{\gamma}_l; \tag{2.28}$$

$$\|\mathcal{X}_0(\zeta)\| \leqslant \widetilde{C}_2, \qquad \|\mathcal{X}(k,\zeta)\| \leqslant \check{\widetilde{C}}_2, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)},\ \zeta \in \tilde{\gamma}_l, \tag{2.29}$$

а также (ср. [39, (3.6)])

$$\|A(0)^{1/2} R_0(\zeta)\| \leqslant \widetilde{C}_2, \qquad \|A(0) R_0(\zeta)\| \leqslant \widetilde{C}_{3,l}, \qquad \zeta \in \tilde{\gamma}_l. \tag{2.30}$$

Действуя аналогично доказательству леммы 2.3 с использованием оценок (2.28)–(2.30), получаем

$$\begin{aligned}
\big\|A(k)^{1/2}\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{X}(k,\zeta)\big\| &\leqslant \widetilde{C}_2\check{\widetilde{C}}_2 C_4|k| + \widetilde{C}_{1,l}\check{\widetilde{C}}_2 C_4 k^2, && |k| \leqslant \varkappa^{(>)},\ \zeta \in \tilde{\gamma}_l,\\
\big\|A(k)^{1/2}\mathcal{X}_0(\zeta^*)^*\mathcal{Y}(k,\zeta)\big\| &\leqslant \widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_{3,l}|k| + \widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2 C_4 k^2, && |k| \leqslant \varkappa^{(>)},\ \zeta \in \tilde{\gamma}_l,\\
\big\|A(k)^{1/2}\mathcal{Y}_0(k,\zeta^*)^*\mathcal{Y}(k,\zeta)\big\| &\leqslant \widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2 C_4 k^2 + \widetilde{C}_{1,l}^2 C_4|k|^3, && |k| \leqslant \varkappa^{(>)},\ \zeta \in \tilde{\gamma}_l.
\end{aligned}$$

Из этих оценок вместе с (2.27) получаем первую оценку (2.25).

Вторая оценка (2.25) следует из равенства

$$A(k)^{1/2} P_{l,l+1} = A(k)^{1/2} F_{l,l+1}(k) - A(k)^{1/2}\big(F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1}\big),$$

первой оценки (2.25) и $\big\|A(k)^{1/2}F_{l,l+1}(k)\big\| \leqslant \sqrt{q(l)^2 + 4q(l)/3} \leqslant 2q(l)$. □

Теорема 2.6. *Пусть $l \in \Upsilon^{(1,>)}$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$. Справедливы оценки*

$$\big\|\big(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau \widetilde{\mathfrak{A}}_l(k) P_{l,l+1}}\big) P_{l,l+1}\big\| \leqslant 3\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l}|k| + \widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}|\tau| k^2, \tag{2.31}$$

$$\big\|A(k)^{1/2}\big(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau \widetilde{\mathfrak{A}}_l(k) P_{l,l+1}}\big) P_{l,l+1}\big\| \leqslant (2\widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l} + \widetilde{\mathscr{C}}''_{1,l})|k| + \widetilde{\mathscr{C}}'_{2,l}|\tau| k^2. \tag{2.32}$$

Константа $\widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l}$ определена в (2.26), а $\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l}$, $\widetilde{\mathscr{C}}''_{1,l}$, $\widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}$ и $\widetilde{\mathscr{C}}'_{2,l}$ заданы выражениями

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l} &= (2\pi)^{-1}\tilde{\ell}_l(\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2 + \widetilde{C}_{1,l}\check{\widetilde{C}}_2 + \widetilde{C}_{1,l}^2\varkappa^{(>)}),\\
\widetilde{\mathscr{C}}''_{1,l} &= \Big(2q(l) + \widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l}\varkappa^{(>)}\Big)\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l},\\
\widetilde{\mathscr{C}}_{2,l} &= 20\sqrt{2}\big(q(l)\widetilde{C}_{6,l}^2 + q(l)\widetilde{C}_{7,l}\varkappa^{(>)} + q(l)^{-1}\widetilde{C}_{9,l} + q(l)^{-3}\widetilde{C}_{8,l}\widetilde{C}_{10,l}\big),\\
\widetilde{\mathscr{C}}'_{2,l} &= \Big(2q(l) + \widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l}\varkappa^{(>)}\Big)\widetilde{\mathscr{C}}_{2,l},
\end{aligned}$$

где

$$\begin{gathered}
\widetilde{C}_{5,l} = 2\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2\check{\widetilde{C}}_2 C_4 + \widetilde{C}_{1,l}^2\widetilde{C}_{3,l} + 2\widetilde{C}_{1,l}^2\widetilde{C}_2 C_4\varkappa^{(>)} + \widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2^2 C_4 + \widetilde{C}_{1,l}^2,\\
\widetilde{C}_{6,l} = \pi^{-1}\tilde{\ell}_l\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2, \qquad \widetilde{C}_{7,l} = 2^{-1}\pi^{-2}\tilde{\ell}_l^2\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2\widetilde{C}_{5,l},\\
\widetilde{C}_{8,l} = 3(2\pi)^{-1}q(l)^2\tilde{\ell}_l(\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2 + \widetilde{C}_{1,l}\check{\widetilde{C}}_2 + \widetilde{C}_{1,l}^2\varkappa^{(>)}),\\
\widetilde{C}_{9,l} = 3(2\pi)^{-1}q(l)^2\tilde{\ell}_l\widetilde{C}_{5,l}, \qquad \widetilde{C}_{10,l} = 3\pi^{-1}q(l)^2\tilde{\ell}_l\widetilde{C}_{1,l}\widetilde{C}_2.
\end{gathered}$$

Доказательство. Оценка (2.31) была проверена в [32, теорема 3]. Докажем (2.32). Справедливо равенство

$$\begin{aligned}A(k)^{1/2}\bigl(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} &- e^{-i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}P_{l,l+1}\bigr)P_{l,l+1}\\&= A(k)^{1/2}P_{l,l+1}\bigl(e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_{l,l+1}(k) - e^{-i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}P_{l,l+1}\bigr)\\&+ A(k)^{1/2}e^{-i\tau A(k)^{1/2}}(P_{l,l+1} - F_{l,l+1}(k))\\&+ A(k)^{1/2}(F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1})e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_{l,l+1}(k).\end{aligned}$$

В силу первой оценки (2.25) последние два слагаемых допускают оценки

$$\begin{aligned}\|A(k)^{1/2}e^{-i\tau A(k)^{1/2}}(P_{l,l+1} - F_{l,l+1}(k))\| &\leqslant \widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l}|k|, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)},\\ \|A(k)^{1/2}(F_{l,l+1}(k) - P_{l,l+1})e^{-i\tau A(k)^{1/2}}F_{l,l+1}(k)\| &\leqslant \widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l}|k|, \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}.\end{aligned}$$

Первое слагаемое оценивается с помощью второй оценки (2.25) и [32, (6.39)–(6.42)]:

$$\begin{aligned}\|A(k)^{1/2}P_{l,l+1}\bigl(e^{-i\tau A(k)^{1/2}}&F_{l,l+1}(k) - e^{-i\tau\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}P_{l,l+1}\bigr)\|\\&\leqslant \bigl(2q(l) + \widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l}\varkappa^{(>)}\bigr)\bigl(\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l}|k| + \widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}|\tau||k^2\bigr), \qquad |k| \leqslant \varkappa^{(>)}.\end{aligned}$$

Таким образом, оценка (2.32) доказана. □

Наконец, получим спектральные приближения в окрестности собственного числа λ_l°, $l \in \Upsilon^{(2,>)}$. Аналогично, при $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$ на отрезке $[q(l)^2 - 4q(l)/3, q(l)^2 + 4q(l)/3]$ имеется 2 собственных числа оператора $A(k)$ и выполнено (2.24) (с заменой $l \in \Upsilon^{(1,>)}$ на $l \in \Upsilon^{(2,>)}$). Через $F_l(k)$ обозначим спектральный проектор оператора $A(k)$, отвечающий отрезку $[q(l)^2 - 4q(l)/3, q(l)^2 + 4q(l)/3]$, и пусть $\tilde{\gamma}_l$ — контур, эквидистантно охватывающий этот отрезок и проходящий через точку $q(l)^2 + 2q(l)$. Его длина равна $\tilde{\ell}_l = \frac{\pi+4}{3}\cdot 4q(l)$. По аналогии с теоремами 2.4 и 2.6 можно получить следующий результат.

Теорема 2.7. *Пусть $l \in \Upsilon^{(2,>)}$, $\tau \in \mathbb{R}$ и $|k| \leqslant \varkappa^{(>)}$. Справедливы оценки*

$$\begin{aligned}\bigl\|\bigl(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau\mathfrak{A}_l(k)P_l}\bigr)P_l\bigr\| &\leqslant 3\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l}|k| + \widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}|\tau||k^2,\\ \bigl\|A(k)^{1/2}\bigl(e^{-i\tau A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau\mathfrak{A}_l(k)P_l}\bigr)P_l\bigr\| &\leqslant (2\widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l} + \widetilde{\mathscr{C}}''_{1,l})|k| + \widetilde{\mathscr{C}}'_{2,l}|\tau||k^2.\end{aligned}$$

Замечание 2.8. *Теорема 2.4 верна для всех номеров $l \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Однако, она не позволяет получить нужные нам оценки при больших l.*

Замечание 2.9. *Для нас важно отследить зависимость констант в теоремах 2.6 и 2.7 от l (при больших l). Так как $\widetilde{C}_{1,l} = O\bigl(q(l)^{-1}\bigr)$, $\widetilde{C}_{3,l} = O\bigl(q(l)\bigr)$ и $\tilde{\ell}_l = O\bigl(q(l)\bigr)$, то мы имеем $\widetilde{C}_{5,l} = O\bigl(q(l)^{-1}\bigr)$, $\widetilde{C}_{6,l} = O(1)$, $\widetilde{C}_{7,l} = O(1)$, $\widetilde{C}_{8,l} = O\bigl(q(l)^2\bigr)$, $\widetilde{C}_{9,l} = O\bigl(q(l)^2\bigr)$, $\widetilde{C}_{10,l} = O\bigl(q(l)^2\bigr)$, а значит*

$$\widetilde{\mathscr{C}}_{1,l} = O(1), \qquad \widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l} = O\bigl(q(l)\bigr), \qquad \widetilde{\mathscr{C}}''_{1,l} = O\bigl(q(l)\bigr), \qquad \widetilde{\mathscr{C}}_{2,l} = O\bigl(q(l)\bigr), \qquad \widetilde{\mathscr{C}}'_{2,l} = O\bigl(q(l)^2\bigr).$$

3. Матричные элементы

Материал этого пункта заимствован из [39, п. 3.3] и [32, § 4]. Пусть $\boldsymbol{\varsigma}_l = \{\varsigma_l^p\}_{p=1}^{p_l}$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_l$, $l \in \Upsilon^{(<)} \cup \Upsilon^{(2,>)}$, причём $\varsigma_l^1 = \varsigma_{q(l)}$, $l \in \Upsilon^{(<)} \cup \Upsilon^{(2,>)}$, и $\varsigma_l^2 = \varsigma_{q(l)+1}$, если $l \in \Upsilon^{(2)}$. Тогда оператор (2.11) в базисе $\boldsymbol{\varsigma}_l$ изображается числом

$$\mathfrak{a}_l(k) = \sqrt{\lambda_l^\circ}, \qquad \text{если} \quad l \in \Upsilon^{(1)},$$

или матрицей

$$\mathfrak{a}_l(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_l^\circ} + \frac{1}{2}(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,11}k & \frac{1}{2}(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,12}k \\ \frac{1}{2}(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,21}k & \sqrt{\lambda_l^\circ} + \frac{1}{2}(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,22}k \end{pmatrix}, \qquad \text{если} \quad l \in \Upsilon^{(2)}, \tag{3.1}$$

где

$$\mathfrak{g}_l^{1,qp} = i\int_0^\nu g(x)\left(\varsigma_l^p(x)\frac{d}{dx}\varsigma_l^q(x)^* - \varsigma_l^q(x)^*\frac{d}{dx}\varsigma_l^p(x)\right)dx. \tag{3.2}$$

Теперь, пусть $\boldsymbol{\varsigma}_l = \{\varsigma_l^p\}_{p=1}^2$ — ортонормированный базис в $\mathfrak{N}_{l,l+1}$, $l \in \Upsilon^{(1,>)}$, причём $\varsigma_l^1 = \varsigma_{q(l)}$, $\varsigma_l^2 = \varsigma_{q(l)+1}$. Тогда оператор (2.12) изображается матрицей

$$\mathfrak{a}_l(k) = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_l^\circ} & \frac{1}{\sqrt{\lambda_l^\circ}+\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}}\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,12}k \\ \frac{1}{\sqrt{\lambda_l^\circ}+\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}}\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,21}k & \sqrt{\lambda_{l+1}^\circ} \end{pmatrix}. \tag{3.3}$$

Здесь

$$\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,qp} = i\int_0^\nu g(x)\left(\varsigma_l^p(x)\frac{d}{dx}\varsigma_l^q(x)^* - \varsigma_l^q(x)^*\frac{d}{dx}\varsigma_l^p(x)\right)dx. \tag{3.4}$$

4. Основные результаты работы

Пусть $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Рассмотрим в $L_2(\mathbb{R})$ оператор, заданный дифференциальным выражением

$$A_\varepsilon = -\frac{d}{dx}g^\varepsilon(x)\frac{d}{dx}, \qquad \operatorname{Dom} A = H^2(\mathbb{R}). \tag{4.1}$$

Здесь ν-периодическая функция g удовлетворяет условиям (1.2), (1.3). Операторы (1.1) и (4.1) связаны между собой соотношением

$$A_\varepsilon = \varepsilon^{-2}T_\varepsilon^* A T_\varepsilon,$$

где T_ε — оператор масштабного преобразования: $(T_\varepsilon u)(x) = \varepsilon^{1/2}u(\varepsilon x)$.

Пусть $\Psi(x)$ — периодическое решение задачи (0.2) в одномерном случае. Мы изучаем поведение при $\varepsilon \to 0$ решения $u_\varepsilon(x,\tau)$, $x \in \mathbb{R}$, $\tau \in \mathbb{R}$, задачи Коши для гиперболического уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}u_\varepsilon(x,\tau) = -(A_\varepsilon u_\varepsilon)(x,\tau), \\ u_\varepsilon(x,0) = \varepsilon\Psi^\varepsilon(x)\phi'(x), \ (\partial_\tau u_\varepsilon)(x,0) = 0. \end{cases} \tag{4.2}$$

Здесь $\phi(x)$ — заданная функция, далее мы будем считать, что $\phi \in H^4(\mathbb{R})$. Разложим Ψ в ряд Фурье по собственным функциям задачи (2.4):

$$\Psi = \sum_{j=2}^\infty \beta_j\varsigma_j, \qquad \beta_j = (\Psi, \varsigma_j)_{L_2(0,\nu)}. \tag{4.3}$$

Введём также обозначение $\beta_j' := (g', \varsigma_j)_{L_2(0,\nu)}$, $j \geqslant 2$. Следующая лемма была установлена в [32, лемма 5.1].

Лемма 4.1 ([32]). *Справедливо равенство*

$$|\beta_j| = \frac{|\beta_j'|}{\lambda_j}. \tag{4.4}$$

Замечание 4.2. *Из* (2.8) *и* (4.4) *следует, что* $|\beta_j| = O(j^{-2})$ *при больших* j*. Учитывая* (2.9)*, получаем, что ряд* (4.3) *сходится абсолютно и равномерно. Далее, ряд из производных* $\sum_{j=2}^{\infty}\beta_j\varsigma_j'$ *также сходится абсолютно и равномерно. Действительно, применяя* (2.8), (2.10), (4.4) *с учётом* $g' \in L_2(0,\nu)$*, имеем*

$$\sum_{j=2}^{\infty}|\beta_j\varsigma_j'| \leqslant \sum_{j=2}^{\infty}\frac{|\beta_j'|}{\lambda_j}C_\varsigma' j \leqslant C_\varsigma'\left(\sum_{j=2}^{\infty}\left(\frac{j}{\lambda_j}\right)^2 + \sum_{j=2}^{\infty}|\beta_j'|^2\right) < \infty.$$

Поэтому ряд (4.3) *сходится по* $C^1[0,\nu]$*-норме (а значит и по норме мультипликаторов из* $H^1(\mathbb{R})$ *в* $H^1(\mathbb{R})$*; см.* [45, гл. 2, теорема 2.1.1(i)]).

Рассмотрим задачи

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial\tau^2}u_{j,\varepsilon}(x,\tau) = -(A_\varepsilon u_{j,\varepsilon})(x,\tau), \\ u_{j,\varepsilon}(x,0) = \varepsilon\beta_j\varsigma_j^\varepsilon(x)\phi'(x),\ (\partial_\tau u_{j,\varepsilon})(x,0) = 0. \end{cases} \tag{4.5}$$

В $L_2(\mathbb{R})$ определим операторы

$$A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon} = \varepsilon^{-1}\sqrt{\lambda_l^\circ}I, \qquad l \in \Upsilon^{(1,<)};$$

$$A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\sqrt{\lambda_l^\circ}I - i(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,11}\frac{d}{dx} & -i(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,12}\frac{d}{dx} \\ -i(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,21}\frac{d}{dx} & \varepsilon^{-1}\sqrt{\lambda_l^\circ}I - i(\lambda_l^\circ)^{-1/2}\mathfrak{g}_l^{1,22}\frac{d}{dx} \end{pmatrix}, \qquad l \in \Upsilon^{(2)};$$

$$A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon^{-1}\sqrt{\lambda_l^\circ}I & -i\frac{1}{\sqrt{\lambda_l^\circ}+\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}}\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,12}\frac{d}{dx} \\ -i\frac{1}{\sqrt{\lambda_l^\circ}+\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}}\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,21}\frac{d}{dx} & \varepsilon^{-1}\sqrt{\lambda_{l+1}^\circ}I \end{pmatrix}, \qquad l \in \Upsilon^{(1,>)};$$

которые назовём *эффективными операторами*. Напомним, что $\mathfrak{g}_l^{1,lp}$ и $\widetilde{\mathfrak{g}}_l^{1,lp}$ определены в (3.2) и (3.4). Пусть $v^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}(x,\tau)$ и $\mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{lr,\varepsilon}(x,\tau) = \big(v^{\mathrm{eff}}_{lr,1,\varepsilon}(x,\tau), v^{\mathrm{eff}}_{lr,2,\varepsilon}(x,\tau)\big)^{\mathrm{t}}$ — решения соответствующих “эффективных” задач

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}v^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}(x,\tau) = A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}v^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}(x,\tau), \\ v^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}(x,0) = \phi'(x), \end{cases} \qquad l \in \Upsilon^{(1,<)}; \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} i\dfrac{\partial}{\partial\tau}\mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{lr,\varepsilon}(x,\tau) = A^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}\mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{lr,\varepsilon}(x,\tau), \\ \mathbf{v}^{\mathrm{eff}}_{lr,\varepsilon}(x,0) = \phi'(x)\mathbf{e}_r, \end{cases} \qquad l \in \Upsilon^{(2)} \cup \Upsilon^{(1,>)}, \quad r = 1,2. \tag{4.7}$$

Здесь $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ — стандартный базис в $\mathbb{C}^2$. Определим “эффективные” приближения:

$$u^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}(x,\tau) := \frac{1}{2}\varepsilon\beta_{q(l)}\varsigma^\varepsilon_{q(l)}(x)\big(v^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}(x,\tau) + v^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}(x,-\tau)\big), \qquad l \in \Upsilon^{(1,<)}; \tag{4.8}$$

$$u^{\mathrm{eff}}_{l,1,\varepsilon}(x,\tau) := \frac{1}{2}\varepsilon\sum_{s=1}^{2}\beta_{q(l)}\varsigma^\varepsilon_{q(l)+s-1}(x)\big(v^{\mathrm{eff}}_{l1,s,\varepsilon}(x,\tau) + v^{\mathrm{eff}}_{l1,s,\varepsilon}(x,-\tau)\big), \qquad l \in \Upsilon^{(2)} \cup \Upsilon^{(1,>)}; \tag{4.9}$$

$$u^{\mathrm{eff}}_{l,2,\varepsilon}(x,\tau) := \frac{1}{2}\varepsilon\sum_{s=1}^{2}\beta_{q(l)+1}\varsigma^\varepsilon_{q(l)+s-1}(x)\big(v^{\mathrm{eff}}_{l2,s,\varepsilon}(x,\tau) + v^{\mathrm{eff}}_{l2,s,\varepsilon}(x,-\tau)\big), \qquad l \in \Upsilon^{(2)} \cup \Upsilon^{(1,>)}. \tag{4.10}$$

Для решений задачи (4.5), “эффективных” систем (4.6), (4.7) и “эффективных” приближений (4.8)–(4.10) справедливы операторные представления

$$\begin{aligned} u_{j,\varepsilon}(\cdot,\tau) &= \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\varepsilon i\beta_j\varsigma_j^\varepsilon D\phi, && \\ v_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) &= e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} iD\phi, && l\in\Upsilon^{(1,<)}, \\ \mathbf{v}_{lr,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) &= e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} J_r iD\phi, && l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}, \\ u_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) &= \frac{1}{2} i\varepsilon\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}+e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)D\phi, && l\in\Upsilon^{(1,<)}, \\ u_{l,1,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) &= \frac{1}{2} i\varepsilon\sum_{s=1}^{2}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)+s-1}^\varepsilon\check{J}_s\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}+e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)J_1D\phi, && l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}, \\ u_{l,2,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau) &= \frac{1}{2} i\varepsilon\sum_{s=1}^{2}\beta_{q(l)+1}\varsigma_{q(l)+s-1}^\varepsilon\check{J}_s\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}+e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)J_2D\phi, && l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}, \end{aligned} \tag{4.11}$$

где оператор $J_r\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}^2$ действует по правилу $a\mapsto a\mathbf{e}_r$, а $\check{J}_s\colon\mathbb{C}^2\to\mathbb{C}$ задаётся формулой $\check{J}_s\mathbf{c} = \langle\mathbf{c},\mathbf{e}_s\rangle$.

Теорема 4.3. *Пусть* $0<\varepsilon\leqslant 1$, $\tau\in\mathbb{R}$, $\phi\in H^4(\mathbb{R})$.

1°. *Пусть* $l\in\Upsilon^{(1,<)}$. *Справедлива оценка*

$$\|u_{q(l),\varepsilon}(\cdot,\tau)-u_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R})}\leqslant\big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}_1+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_2+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_3|\tau|\big)\varepsilon\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})}. \tag{4.12}$$

2°. *Пусть* $l\in\Upsilon^{(2,<)}$. *Справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|u_{q(l),\varepsilon}(\cdot,\tau)-u_{l,1,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R})}&\leqslant\big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}_1+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_2+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_3|\tau|\big)\varepsilon\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})}, \\ \|u_{q(l)+1,\varepsilon}(\cdot,\tau)-u_{l,2,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R})}&\leqslant\big(|\beta_{q(l)+1}|\mathcal{C}_1+|\beta'_{q(l)+1}|\mathcal{C}_2+|\beta'_{q(l)+1}|\mathcal{C}_3|\tau|\big)\varepsilon\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

3°. *Пусть* $l\in\Upsilon^{(2,>)}\cup\Upsilon^{(1,>)}$. *Справедливы оценки*

$$\begin{aligned} \|u_{q(l),\varepsilon}(\cdot,\tau)-u_{l,1,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R})}&\leqslant\big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}_4+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_{5,l}+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_6|\tau|\big)\varepsilon\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})}, \\ \|u_{q(l)+1,\varepsilon}(\cdot,\tau)-u_{l,2,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}(\cdot,\tau)\|_{H^1(\mathbb{R})}&\leqslant\big(|\beta_{q(l)+1}|\mathcal{C}_4+|\beta'_{q(l)+1}|\mathcal{C}_{5,l}+|\beta'_{q(l)+1}|\mathcal{C}_6|\tau|\big)\varepsilon\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $\mathcal{C}_{5,l}=O(q(l)^{-1})$.

Доказательство. Докажем пункт 3°. В силу (4.11) оценки (4.14) допускают переформулировку в операторных терминах:

$$\begin{aligned} \Big\| &\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon D \\ &-\frac{1}{2}\varepsilon i\beta_{q(l)}\Big(\varsigma_{q(l)}^\varepsilon\check{J}_1\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}+e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)J_1+\varsigma_{q(l)+1}^\varepsilon\check{J}_2\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}+e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)J_1\Big)D\Big\|_{H^4(\mathbb{R})\to H^1(\mathbb{R})} \\ &\qquad\leqslant\big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}_4+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_{5,l}+|\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_6|\tau|\big)\varepsilon, \end{aligned} \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} \Big\| &\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\varepsilon i\beta_{q(l)+1}\varsigma_{q(l)+1}^\varepsilon D \\ &-\frac{1}{2} i\varepsilon\beta_{q(l)+1}\big(\varsigma_{q(l)}^\varepsilon\check{J}_1\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}+e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)J_2+\varsigma_{q(l)+1}^\varepsilon\check{J}_2\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}+e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)J_2\big)D\Big\|_{H^4(\mathbb{R})\to H^1(\mathbb{R})} \\ &\qquad\leqslant\big(|\beta_{q(l)+1}|\mathcal{C}_4+|\beta'_{q(l)+1}|\mathcal{C}_{5,l}+|\beta'_{q(l)+1}|\mathcal{C}_6|\tau|\big)\varepsilon, \end{aligned} \tag{4.16}$$

где $\tau \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$. Таким образом, наша цель — доказать (4.15) и (4.16). Докажем оценку (4.15), оценка (4.16) проверяется совершенно аналогично.

Отметим, что оценка по $(H^4(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R}))$-норме была получена в [32, теорема 5(3°), (5.15)]:

$$\begin{aligned} \Big\| \cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) \varepsilon i \beta_{q(l)} \varsigma_{q(l)}^\varepsilon D \\ - \frac{1}{2} \varepsilon i \beta_{q(l)} \Big(\varsigma_{q(l)}^\varepsilon \check{J}_1 \big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} + e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} \big) J_1 + \varsigma_{q(l)+1}^\varepsilon \check{J}_2 \big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} + e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} \big) J_1 \Big) D \Big\|_{H^4(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} \\ \leqslant \big(|\beta_{q(l)}| \mathcal{C}_4' + |\beta_{q(l)}'| \mathcal{C}_{6,l}' |\tau| \big) \varepsilon^2, \end{aligned} \tag{4.17}$$

где

$$\mathcal{C}_4' = 3C_\varsigma \big(\varkappa^{(>)}\big)^{-1} + \sup_{l \in \Upsilon^{(1,>)} \cup \Upsilon^{(2,>)}} \widetilde{\mathscr{C}}_{1,l}, \qquad \mathcal{C}_{6,l}' = (\lambda_l^\circ)^{-1} \widetilde{\mathscr{C}}_{2,l}.$$

Оценим норму производной. В силу формулы Эйлера $\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2}) = \frac{1}{2}\big(e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}} + e^{i\tau A_\varepsilon^{1/2}}\big)$ достаточно рассмотреть оператор

$$D\Big(e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}} \varepsilon i \beta_{q(l)} \varsigma_{q(l)}^\varepsilon D - \varepsilon i \beta_{q(l)} \big(\varsigma_{q(l)}^\varepsilon \check{J}_1 e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} J_1 + \varsigma_{q(l)+1}^\varepsilon \check{J}_2 e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} J_1 \big) D \Big).$$

Оператор $(-\Delta + I)^2$ осуществляет изометрический изоморфизм пространства Соболева $H^4(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})$, поэтому справедливо равенство

$$\begin{aligned} \Big\| D\big(e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}} \varepsilon i \beta_{q(l)} \varsigma_{q(l)}^\varepsilon D - \varepsilon i \beta_{q(l)} \big(\varsigma_{q(l)}^\varepsilon \check{J}_1 e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} J_1 + \varsigma_{q(l)+1}^\varepsilon \check{J}_2 e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} J_1 \big) D \big) \Big\|_{H^4(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} \\ = \Big\| D\Big(e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}} \varepsilon \beta_{q(l)} \varsigma_{q(l)}^\varepsilon D \\ - \varepsilon \beta_{q(l)} \big(\varsigma_{q(l)}^\varepsilon \check{J}_1 e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} J_1 + \varsigma_{q(l)+1}^\varepsilon \check{J}_2 e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} J_1 \big) D \Big) (-\Delta + I)^{-2} \Big\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Затем, в силу унитарности оператора масштабного преобразования имеем

$$\begin{aligned} \Big\| D\Big(e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}} \varepsilon \beta_{q(l)} \varsigma_{q(l)}^\varepsilon D \\ - \varepsilon \beta_{q(l)} \big(\varsigma_{q(l)}^\varepsilon \check{J}_1 e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} J_1 + \varsigma_{q(l)+1}^\varepsilon \check{J}_2 e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} J_1 \big) D \Big) (-\Delta + I)^{-2} \Big\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})} \\ = \varepsilon^{-1} \Big\| D\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A^{1/2}} \beta_{q(l)} \varsigma_{q(l)} D - \beta_{q(l)} \big(\varsigma_{q(l)} \check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A_l^{\mathrm{eff}}} J_1 + \varsigma_{q(l)+1} \check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1} A_l^{\mathrm{eff}}} J_1 \big) D \Big) \\ \times \varepsilon^4 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-2} \Big\|_{L_2(\mathbb{R}) \to L_2(\mathbb{R})}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

где $A_l^{\mathrm{eff}} := A_{l,1}^{\mathrm{eff}}$.

Далее,

$$\Phi^* k^m \varepsilon^4 (k^2 + \varepsilon^2)^{-2} \Phi = D^m \varepsilon^4 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-2}, \tag{4.20}$$

$$\Phi^* \check{J}_s e^{-i\tau\varepsilon^{-1} \mathfrak{a}_l(k)} J_r k \varepsilon^4 (k^2 + \varepsilon^2)^{-2} \Phi = \check{J}_s e^{-i\varepsilon^{-1}\tau A_l^{\mathrm{eff}}} J_r D \varepsilon^4 (-\Delta + \varepsilon^2 I)^{-2}, \tag{4.21}$$

где $s, r = 1, 2$, $m \in \mathbb{N}$, и $\mathfrak{a}_l(k)$ — символ эффективного оператора — определён в (3.1) (если $l \in \Upsilon^{(2,>)}$) или в (3.3) (если $l \in \Upsilon^{(1,>)}$). Введём проектор $F_{\varkappa^{(>)}} := \Phi^* \chi_{(-\varkappa^{(>)}, \varkappa^{(>)})}(k) \Phi$, где число $\varkappa^{(>)}$ было определено в (2.23). Очевидно,

$$\varepsilon^4 |k| (k^2 + \varepsilon^2)^{-2} \big(1 - \chi_{(-\varkappa^{(>)}, \varkappa^{(>)})}(k)\big) \leqslant \big(\varkappa^{(>)}\big)^{-1} \varepsilon^2, \tag{4.22}$$

$$\varepsilon^4 k^2 (k^2 + \varepsilon^2)^{-2} \big(1 - \chi_{(-\varkappa^{(>)}, \varkappa^{(>)})}(k)\big) \leqslant \varepsilon^2. \tag{4.23}$$

Далее, применяя (1.4), получаем

$$\begin{aligned}
&\big\|De^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\quad\leqslant \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\big\|A^{1/2}e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\quad= \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}|\beta_{q(l)}|\big\|A^{1/2}\varsigma_{q(l)}D\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\quad\leqslant \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}|\beta_{q(l)}|\big\|D\varsigma_{q(l)}D\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\quad\leqslant \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}|\beta_{q(l)}|\big\|-i\varsigma'_{q(l)}D\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\qquad+\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}|\beta_{q(l)}|\big\|\varsigma_{q(l)}D^2\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Также легко видеть, что

$$\begin{aligned}
&\big\|D\beta_{q(l)}\big(\varsigma_{q(l)}\check{J}_1e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}J_1+\varsigma_{q(l)+1}\check{J}_2e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}J_1\big)D\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\quad\leqslant|\beta_{q(l)}|\Big(\|\varsigma'_{q(l)}\|_{L_\infty}\big\|D\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\qquad+\|\varsigma_{q(l)}\|_{L_\infty}\big\|D^2\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\quad+\|\varsigma'_{q(l)+1}\|_{L_\infty}\big\|D\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\qquad+\|\varsigma_{q(l)+1}\|_{L_\infty}\big\|D^2\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\Big).
\end{aligned}$$

Поэтому в силу (4.20)–(4.23) с учётом (2.9), (2.10) имеем

$$\begin{aligned}
&\Big\|D\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D-\beta_{q(l)}\big(\varsigma_{q(l)}\check{J}_1e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}J_1+\varsigma_{q(l)+1}\check{J}_2e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}J_1\big)D\Big)\\
&\qquad\qquad\times\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa^{(>)}})\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\quad\leqslant|\beta_{q(l)}|\big((1+\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|g\|^{1/2}_{L_\infty})\|\varsigma'_{q(l)}\|_{L_\infty}+\|\varsigma'_{q(l)+1}\|_{L_\infty}\big)\big(\varkappa^{(>)}\big)^{-1}\varepsilon^2\\
&\qquad+|\beta_{q(l)}|\big((1+\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|g\|^{1/2}_{L_\infty})\|\varsigma_{q(l)}\|_{L_\infty}+\|\varsigma_{q(l)+1}\|_{L_\infty}\big)\varepsilon^2\\
&\quad\leqslant|\beta_{q(l)}|\big(2+\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\big)\Big(C'_\varsigma\big(q(l)+1\big)\big(\varkappa^{(>)}\big)^{-1}+C_\varsigma\Big)\varepsilon^2.
\end{aligned}\tag{4.24}$$

Теперь рассмотрим оператор

$$\begin{aligned}
&D\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D-\beta_{q(l)}\big(\varsigma_{q(l)}\check{J}_1e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}J_1+\varsigma_{q(l)+1}\check{J}_2e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}J_1\big)D\Big)\\
&\qquad\qquad\times\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}F_{\varkappa^{(>)}}.
\end{aligned}$$

В силу (1.4) справедлива оценка

$$\begin{aligned}
&\Big\|D\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D-\beta_{q(l)}\big(\varsigma_{q(l)}\check{J}_1e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}J_1+\varsigma_{q(l)+1}\check{J}_2e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}J_1\big)D\Big)\\
&\qquad\qquad\times\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}F_{\varkappa^{(>)}}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}\\
&\leqslant\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\Big\|A^{1/2}\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D-\beta_{q(l)}\big(\varsigma_{q(l)}\check{J}_1e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}J_1+\varsigma_{q(l)+1}\check{J}_2e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}J_1\big)D\Big)\\
&\qquad\qquad\times\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}F_{\varkappa^{(>)}}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.
\end{aligned}$$

Оператор под знаком нормы в правой части этого неравенства в силу тождеств (4.20), (4.21) можно записать как

$$\beta_{q(l)} A^{1/2}\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\varsigma_{q(l)} - \big(\varsigma_{q(l)}\Phi^*\check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1\Phi + \varsigma_{q(l)+1}\Phi^*\check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1\Phi\big)\Big) \\ \times \Phi^* k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)\Phi.$$

Напомним, что оператор A раскладывается в прямой интеграл (2.1). Принимая также во внимание соотношения (2.2) и (2.3), получаем равенство

$$\begin{aligned} &\Big\|\beta_{q(l)} A^{1/2}\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\varsigma_{q(l)} - \big(\varsigma_{q(l)}\Phi^*\check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1\Phi + \varsigma_{q(l)+1}\Phi^*\check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1\Phi\big)\Big) \\ &\qquad\qquad \times \Phi^* k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)\Phi\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \\ &= \operatorname*{ess\text{-}sup}_{k\in\widetilde{\Omega}} \Big\|\beta_{q(l)} A(k)^{1/2}\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A(k)^{1/2}}\varsigma_{q(l)} - \big(\varsigma_{q(l)}\check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1 + \varsigma_{q(l)+1}\check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1\big)\Big) \\ &\qquad\qquad \times k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)P_1\Big\|_{L_2(0,\nu)\to L_2(0,\nu)}. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Учитывая включения

$$\operatorname{Ran}\varsigma_{q(l)}P_1 \subset \mathfrak{N}_l,\ \operatorname{Ran}\varsigma_{q(l)+1}P_1 \subset \mathfrak{N}_l \qquad (\text{если } l \in \Upsilon^{(2,>)})$$

или

$$\operatorname{Ran}\varsigma_{q(l)}P_1 \subset \mathfrak{N}_{l,l+1},\ \operatorname{Ran}\varsigma_{q(l)+1}P_1 \subset \mathfrak{N}_{l,l+1} \qquad (\text{если } l \in \Upsilon^{(1,>)})$$

получаем, что

$$\begin{aligned} &A(k)^{1/2}\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A(k)^{1/2}}\varsigma_{q(l)} - \big(\varsigma_{q(l)}\check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1 + \varsigma_{q(l)+1}\check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1\big)\Big) \\ &\qquad \times k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)P_1 \\ &= A(k)^{1/2}\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{A}_l(k)P_l}\Big)P_l\varsigma_{q(l)}k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)P_1, \\ &\qquad \text{если} \quad l \in \Upsilon^{(2,>)}; \end{aligned} \tag{4.26}$$

$$\begin{aligned} &A(k)^{1/2}\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A(k)^{1/2}}\varsigma_{q(l)} - \big(\varsigma_{q(l)}\check{J}_1 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1 + \varsigma_{q(l)+1}\check{J}_2 e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\mathfrak{a}_l(k)}J_1\big)\Big) \\ &\qquad \times k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)P_1 \\ &= A(k)^{1/2}\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A(k)^{1/2}} - e^{-i\tau\varepsilon^{-1}\widetilde{\mathfrak{A}}_l(k)P_{l,l+1}}\Big)P_{l,l+1}\varsigma_{q(l)}k\varepsilon^4(k^2+\varepsilon^2)^{-2}\chi_{(-\varkappa^{(>)},\varkappa^{(>)})}(k)P_1, \\ &\qquad \text{если} \quad l \in \Upsilon^{(1,>)}. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Применение теоремы 2.6 (если $l \in \Upsilon^{(1,>)}$) или теоремы 2.7 (если $l \in \Upsilon^{(2,>)}$) с заменой τ на $\tau\varepsilon^{-1}$ при учёте равенства $\|\varsigma_{q(l)}\|_{L_2(0,\nu)} = 1$ даёт оценку для $\big(L_2(0,\nu)\to L_2(0,\nu)\big)$-норм правых частей равенств (4.26), (4.27) через

$$\big((2\widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l} + \widetilde{\mathscr{C}}''_{1,l})|k| + \widetilde{\mathscr{C}}'_{2,l}\varepsilon^{-1}|\tau|k^2\big)\varepsilon^4|k|(k^2+\varepsilon^2)^{-2} \leqslant \big((2\widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l} + \widetilde{\mathscr{C}}''_{1,l}) + \widetilde{\mathscr{C}}'_{2,l}|\tau|\big)\varepsilon^2.$$

Таким образом, из (4.17)–(4.19), (4.24)–(4.27) и теорем 2.6, 2.7 с учётом (4.4) следует оценка (4.15), где в качестве констант можно выбрать

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_4 &= \mathcal{C}'_4 + \big(2 + \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\big)C_\varsigma, \\ \mathcal{C}_{5,l} &= (\lambda_l^\circ)^{-1}\big(2 + \|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\|g\|^{1/2}_{L_\infty}\big)(q(l)+1)\big(\varkappa^{(>)}\big)^{-1}C'_\varsigma + (\lambda_l^\circ)^{-1}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\big(2\widetilde{\mathscr{C}}'_{1,l} + \widetilde{\mathscr{C}}''_{1,l}\big), \\ \mathcal{C}_6 &= \sup_{l\in\Upsilon^{(1,>)}\cup\Upsilon^{(2,>)}}\big(\mathcal{C}'_{6,l} + (\lambda_l^\circ)^{-1}\|g^{-1}\|^{1/2}_{L_\infty}\widetilde{\mathscr{C}}'_{2,l}\big). \end{aligned}$$

(конечность супремума в выражении для $\mathcal{C}_6$ и равенство $\mathcal{C}_{5,l} = O(q(l)^{-1})$ следуют из замечания 2.9 и (2.8)).

Докажем теперь пункт 1°. Аналогично (4.15), (4.16) в силу (4.11) оценка (4.12) допускает переформулировку в операторных терминах:

$$\begin{aligned}\Big\|\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon D - \frac{1}{2}\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} + e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)D\Big\|_{H^4(\mathbb{R})\to H^1(\mathbb{R})} \\ \leqslant \big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}_1 + |\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_2 + |\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}_3|\tau|\big)\varepsilon,\end{aligned} \tag{4.28}$$

Оценка по $(H^4(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R}))$-норме была получена в [32, теорема 5(1°), (5.25)]:

$$\begin{aligned}\Big\|\cos(\tau A_\varepsilon^{1/2})\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon D - \frac{1}{2}\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon\big(e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}} + e^{i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}\big)D\Big\|_{H^4(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \\ \leqslant \big(|\beta_{q(l)}|\mathcal{C}'_1 + |\beta'_{q(l)}|\mathcal{C}'_3|\tau|\big)\varepsilon^2.\end{aligned}$$

где

$$\mathcal{C}'_1 = \max_{l\in\Upsilon^{(<)}}\big(3C_\varsigma\varkappa_l^{-1} + 3\mathscr{C}_{1,l}\big), \qquad \mathcal{C}'_3 = \max_{l\in\Upsilon^{(<)}}(\lambda_l^\circ)^{-1}\mathscr{C}_{2,l}.$$

Оценим норму производной. В силу формулы Эйлера достаточно рассмотреть оператор

$$D\Big(e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}}\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon D - \varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}D\Big).$$

Справедливо равенство (ср. (4.18), (4.19))

$$\begin{aligned}&\Big\|D\Big(e^{-i\tau A_\varepsilon^{1/2}}\varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon D - \varepsilon i\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}^\varepsilon e^{-i\tau A_{l,\varepsilon}^{\mathrm{eff}}}D\Big)\Big\|_{H^4(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \\ &= \varepsilon^{-1}\Big\|D\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D - \beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}D\Big)\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Положим $F_{\varkappa_l} \coloneqq \Phi^*\chi_{(-\varkappa_l,\varkappa_l)}(k)\Phi$. По аналогии с доказательством пункта 3° получаем

$$\begin{aligned}&\Big\|D\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D - \beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}D\Big)\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}(I-F_{\varkappa_l})\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \\ &\qquad\leqslant |\beta_{q(l)}|\big(1+\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\big)\|\varsigma'_{q(l)}\|_{L_\infty}\varkappa_l^{-1}\varepsilon^2 \\ &\qquad\quad + |\beta_{q(l)}|\big(1+\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\big)\|\varsigma_{q(l)}\|_{L_\infty}\varepsilon^2, \\ &\Big\|D\Big(e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A^{1/2}}\beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}D - \beta_{q(l)}\varsigma_{q(l)}e^{-i\tau\varepsilon^{-1}A_l^{\mathrm{eff}}}D\Big)\varepsilon^4(-\Delta+\varepsilon^2 I)^{-2}F_{\varkappa_l}\Big\|_{L_2(\mathbb{R})\to L_2(\mathbb{R})} \\ &\qquad\leqslant \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}|\beta_{q(l)}|\big((2\mathscr{C}'_{1,l}+\mathscr{C}''_{1,l}) + \mathscr{C}'_{2,l}|\tau|\big)\varepsilon^2.\end{aligned}$$

Здесь при доказательстве второй оценки используется теорема 2.4. Это доказывает оценку (4.28), где в качестве констант можно выбрать

$$\mathcal{C}_1 = \mathcal{C}'_1 + \big(2+\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\big)C_\varsigma,$$
$$\mathcal{C}_2 = \max_{l\in\Upsilon^{(<)}}(\lambda_l^\circ)^{-1}\Big(\big(2+\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2}\big)\|\varsigma'_{q(l)}\|_{L_\infty}\varkappa_l^{-1} + \|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}(2\mathscr{C}'_{1,l}+\mathscr{C}''_{1,l})\Big),$$
$$\mathcal{C}_3 = \mathcal{C}'_3 + \max_{l\in\Upsilon^{(<)}}(\lambda_l^\circ)^{-1}\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\mathscr{C}'_{2,l}.$$

(Здесь максимумы конечны, поскольку множество $\Upsilon^{(<)}$ конечно; мы написали множитель $(2+\|g^{-1}\|_{L_\infty}^{1/2}\|g\|_{L_\infty}^{1/2})$ в выражениях для $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ и рассмотрели максимумы по $\Upsilon^{(<)}$ для того, чтобы эти же константы подошли для оценок пункта 2°).

Пункт 2° доказывается с помощью [32, теорема 5(2°)] и теоремы 2.4 по той же схеме, что и предыдущие два пункта. $\square$

Далее предположим, что выполнено следующее условие.

Условие 4.4. *Ряд из коэффициентов Фурье функции g' по собственным функциям задачи (2.4) сходится абсолютно:* $\sum_{j=2}^{\infty}|\beta'_j|<\infty$.

Лемма 4.5. *Пусть $g'\in\widetilde{H}^{\sigma}(0,\nu)$, $\sigma>\frac{1}{2}$. Тогда условие 4.4 выполнено.*

Доказательство. Имеем

$$\beta'_j=(g',\varsigma_j)_{L_2(0,\nu)}=\frac{1}{\lambda_j^{\sigma/2}}\big(g',A(0)^{\sigma/2}\varsigma_j\big)_{L_2(0,\nu)}=\frac{1}{\lambda_j^{\sigma/2}}\big(A(0)^{\sigma/2}g',\varsigma_j\big)_{L_2(0,\nu)}.$$

Поэтому

$$\sum_{j=2}^{\infty}|\beta'_j|\leqslant\sum_{j=2}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^{\sigma}}+\sum_{j=2}^{\infty}\big|\big(A(0)^{\sigma/2}g',\varsigma_j\big)_{L_2(0,\nu)}\big|^2<\infty.$$

Здесь были учтены асимптотика (2.8) и включение $g'\in\operatorname{Dom}A(0)^{\sigma/2}$ (см. [46, гл. 1, п. 1.18.10]). $\square$

Теорема 4.6. *Пусть $u_\varepsilon(x,\tau)$ — решение задачи (4.2), и пусть "эффективные" приближения $u^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}(x,\tau)$, $l\in\Upsilon^{(1,<)}$, и $u^{\mathrm{eff}}_{l,1,\varepsilon}(x,\tau)$, $u^{\mathrm{eff}}_{l,2,\varepsilon}(x,\tau)$, $l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}$, определены в (4.8)–(4.10). Дополнительно предположим, что выполнено условие 4.4. Положим*

$$u^{\mathrm{eff}}_{\varepsilon}(x,\tau):=\sum_{l\in\Upsilon^{(1,<)}}u^{\mathrm{eff}}_{l,\varepsilon}(x,\tau)+\sum_{l\in\Upsilon^{(2)}\cup\Upsilon^{(1,>)}}\big(u^{\mathrm{eff}}_{l,1,\varepsilon}(x,\tau)+u^{\mathrm{eff}}_{l,2,\varepsilon}(x,\tau)\big).$$

Тогда при $0<\varepsilon\leqslant1$, $\tau\in\mathbb{R}$ и $\phi\in H^4(\mathbb{R})$ выполнена оценка

$$\big\|u_\varepsilon(\cdot,\tau)-u^{\mathrm{eff}}_{\varepsilon}(\cdot,\tau)\big\|_{H^1(\mathbb{R})}\leqslant\big(\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2|\tau|\big)\varepsilon\|\phi\|_{H^4(\mathbb{R})},$$

где

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_1=\max\{\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_4\}\cdot\sum_{j=2}^{\infty}|\beta_j|+\mathcal{C}_2\sum_{l\in\Upsilon^{(1,<)}}|\beta'_{q(l)}|+\mathcal{C}_2\sum_{l\in\Upsilon^{(2,<)}}\big(|\beta'_{q(l)}|+|\beta'_{q(l)+1}|\big)\\+\sum_{l\in\Upsilon^{(2,>)}\cup\Upsilon^{(1,>)}}\big(|\beta'_{q(l)}|+|\beta'_{q(l)+1}|\big)\mathcal{C}_{5,l},\end{aligned}$$

$$\mathrm{C}_2=\max\{\mathcal{C}_3,\mathcal{C}_6\}\cdot\sum_{j=2}^{\infty}|\beta'_j|.$$

Доказательство. С учётом (4.3) и замечания 4.2 утверждение теоремы доказывается при помощи суммирования оценок (4.12)–(4.14). Остаётся проверить сходимость рядов

$$\sum_{j=2}^{\infty}|\beta_j|,\qquad\sum_{l\in\Upsilon^{(2,>)}\cup\Upsilon^{(1,>)}}\big(|\beta'_{q(l)}|+|\beta'_{q(l)+1}|\big)\mathcal{C}_{5,l}\qquad\text{и}\qquad\sum_{j=2}^{\infty}|\beta'_j|.$$

Сходимость первого ряда следует из равенства $|\beta_j|=O\big(j^{-2}\big)$. Сходимость второго ряда следует из $\sum_{j=2}^{\infty}|\beta'_j|^2<\infty$ (так как $g'\in L_2(0,\nu)$), $\sum_{l\in\Upsilon^{(2,>)}\cup\Upsilon^{(1,>)}}\mathcal{C}_{5,l}^2<\infty$ (поскольку $\mathcal{C}_{5,l}=O(q(l)^{-1})$) и неравенства Коши. Сходимость третьего ряда следует из условия 4.4. $\square$

Список литературы

[1] A. Bensoussan, J.-L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analisys for periodic structures*, AMS Chelsea Publishing, Providence, R.I., 2011 (Corrected reprint of the 1978 original).

[2] В. В. Жиков, С. М. Козлов, О. А. Олейник, *Усреднение дифференциальных операторов*, Физматлит, М., 1993.

[3] Н. С. Бахвалов, Г. П. Панасенко, *Осреднение процессов в периодических средах*, Наука, М., 1984.

[4] Е. В. Севостьянова, "Асимптотическое разложение решения эллиптического уравнения второго порядка с периодическими быстро осциллирующими коэффициентами", *Матем. сб.*, **115(157)**:2(6) (1981), 204–222.

[5] В. В. Жиков, "Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии", *Дифференц. уравнения*, **25**:1 (1989), 44–50.

[6] C. Conca, R. Orive, M. Vanninathan, "Bloch approximation in homogenization and applications", *SIAM J. Math. Anal.*, **33**:5 (2002), 1166–1198.

[7] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, "Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства и усреднения", *Алгебра и анализ*, **15**:5 (2003), 1–108.

[8] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, "Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учётом корректора", *Алгебра и анализ*, **17**:6 (2005), 1–104.

[9] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, "Усреднение периодических дифференциальных операторов с учётом корректора. Приближение решений в классе Соболева $H^1(\mathbb{R}^d)$", *Алгебра и анализ*, **18**:6 (2006), 1–130.

[10] Т. А. Суслина, "Об усреднении периодических параболических систем", *Функц. анализ и его прил.*, **38**:4 (2004), 86–90.

[11] T. A. Suslina, "Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem", Amer. Math. Soc. Transl. (2), **220**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007, 201–233.

[12] Е. С. Василевская, "Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учёте корректора", *Алгебра и анализ*, **21**:1 (2009), 3–60.

[13] T. A. Suslina, "Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space $H^1(\mathbb{R}^d)$", *Math. Model. Nat. Phenom.*, **5**:4 (2010), 390–447.

[14] В. В. Жиков, "О некоторых оценках из теории усреднения", *Докл. РАН*, **406**:5 (2006), 597–601.

[15] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, "On operator estimates for some problems in homogenization theory", *Russ. J. Math. Phys.*, **12**:4 (2005), 515–524.

[16] V. V. Zhikov, S. E. Pastukhova, "Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients", *Russ. J. Math. Phys.*, **13**:2 (2006), 224–237.

[17] В. В. Жиков, С. Е. Пастухова, "Об операторных оценках в теории усреднения", *УМН*, **71**:3 (2016), 27–122.

[18] М. Ш. Бирман, Т. А. Суслина, "Операторные оценки погрешности при усреднении нестационарных периодических уравнений", *Алгебра и анализ*, **20**:6 (2008), 30–107.

[19] Yu. M. Meshkova, "On operator error estimates for homogenization of hyperbolic systems with periodic coeffcients", *J. Spectr. Theory*, **11**:2 (2021), 587–660.

[20] T. A. Suslina, "Spectral approach to homogenization of nonstationary Schrödinger-type equations", *J. Math. Anal. Appl.*, **446**:2 (2017), 1466–1523.

[21] M. A. Dorodnyi, T. A. Suslina, "Spectral approach to homogenization of hyperbolic equations with periodic coefficients", *J. Differ. Equ.*, **264**:12 (2018), 7463–7522.

[22] М. А. Дородный, Т. А. Суслина, "Усреднение гиперболических уравнений с периодическими коэффициентами в $\mathbb{R}^d$: точность результатов", *Алгебра и анализ*, **32**:4 (2020), 3–136.

[23] M. A. Dorodnyi, "Operator error estimates for homogenization of the nonstationary Schrödinger-type equations: sharpness of the results", *Appl. Anal.*, **101**:16 (2022), 5582–5614.

[24] S. Brahim-Otsmane, G. A. Francfort, F. Murat, "Correctors for the homogenization of the wave and heat equations", *J. Math. Pures Appl.*, **71**:3 (1992), 197–231.

[25] M. Brassart, M. Lenczner, "A two scale model for the periodic homogenization of the wave equation", *J. Math. Pures Appl.*, **93**:3 (2010), 474–517.

[26] J. Casado-Diaz, J. Couce-Calvo, F. Maestre, J. D. Martin-Gomez, “Homogenization and correctors for the wave equation with periodic coefficients”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **24**:7 (2014), 1343–1388.

[27] Ю. М. Мешкова, *Усреднение периодических гиперболических систем при учёте корректора по $L_2(\mathbb{R}^d)$-норме*, https://dx.doi.org/10.13140/RG.2.2.15658.08643, 2018 (черновик).

[28] М. А. Дородный, Т. А. Суслина, “Усреднение гиперболических уравнений: операторные оценки при учёте корректоров”, *Функц. анализ и его прил.*, **57**:4 (2023), 123–129.

[29] М. А. Дородный, Т. А. Суслина, “Теоретико-операторный подход к усреднению гиперболических уравнений: операторные оценки при учёте корректоров”, *Алгебра и анализ*, **37**:5 (2025), 1–178.

[30] Т. А. Суслина, “Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами”, *УМН*, **78**:6 (2023), 47–178.

[31] F. Lin, Zh. Shen, “Uniform boundary controllability and homogenization of wave equation”, *J. Eur. Math. Soc.*, **24**:9 (2021), 3031–3053.

[32] М. А. Дородный, “Усреднение одномерных гиперболических уравнений с корректором”, *Матем. сборник* (принято к печати).

[33] M. A. Dorodnyi, “High-frequency homogenization of multidimensional hyperbolic equations”, *Appl. Anal.*, **104**:2 (2025), 231–276.

[34] A. Piatnitski, V. Sloushch, T. Suslina, E. Zhizhina, “On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type”, *J. Differ. Equ.*, **352** (2023), 153–188.

[35] A. Piatnitski, V. Sloushch, T. Suslina, E. Zhizhina, *Homogenization of nonlocal convolution type operators: approximation for the resolvent with corrector*, https://arxiv.org/abs/2311.16574, 2023.

[36] A. Piatnitski, V. Sloushch, T. Suslina, E. Zhizhina, “On the homogenization of nonlocal convolution type operators”, *Russ. J. Math. Phys.*, **31**:1 (2024), 137–145.

[37] P. Djakov, B. Mityagin, “Spectral gaps of Schrödinger operators with periodic singular potentials”, *Dynamics of PDE*, **6**:2 (2009), 95–165.

[38] М. Рид, Б. Саймон, *Методы современной математической физики. Т. 4. Анализ операторов*, Мир, М., 1982.

[39] M. A. Dorodnyi, “High-energy homogenization of a multidimensional nonstationary Schrödinger equation”, *Russ. J. Math. Phys.*, **30**:4 (2023), 480–500.

[40] B. M. Brown, M. S. P. Eastham, K. M. Schmidt, *Periodic differential operators*, Oper. Theory Adv. Appl., **230**, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2013.

[41] А. М. Савчук, А. А. Шкаликов, “Операторы Штурма–Лиувилля с сингулярными потенциалами”, *Матем. заметки*, **66**:6 (1999), 897–912.

[42] L. Barletti, N. Ben Abdallah, “Quantum transport in crystals: effective mass theorem and $k \cdot p$ Hamiltonians”, *Comm. Math. Phys.*, **307**:3 (2011), 567–607.

[43] O. Veliev, *Multidimensional periodic Schrödinger operator. Perturbation theory and applications*, Springer Tracts in Modern Physics, **263**, Springer, Cham, 2015.

[44] В. Е. Владыкина, А. А. Шкаликов, “Асимптотика решений уравнения Штурма–Лиувилля с сингулярными коэффициентами”, *Матем. заметки*, **98**:6 (2015), 832–841.

[45] V. G. Maz’ya, T. O. Shaposhnikova, *Theory of Sobolev multipliers with applications to differential and integral operators*, Grundlehren Math. Wiss., **337**, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[46] Х. Трибель, *Теория интерполяции, функциональные пространства, дифференциальные операторы*, Мир, М., 1980.