Препринт Санкт-Петербургского математического общества
Поступил 28 октября 2026 г.
Доступен на сайте http://www.mathsoc.spb.ru/preprint/

Об L_2-малых уклонениях процесса Слепяна

Я.С. Зонова*

28 октября 2026 г.

1 Введение

Теория малых уклонений случайных процессов активно изучается в последние десятилетия (см. [6]). Наиболее разработанным является случай гауссовских процессов в гильбертовой норме (см. [8]).

Если процесс $X(t), t \in [0,1]$ имеет нулевое среднее ($\mathbb{E}X(t) \equiv 0$), то для него справедливо разложение Кархунена–Лоэва (см., напр., [5, гл. 2]). Поэтому

$$\mathbb{P}\Big\{ \int_0^1 X^2(t)\, dt < \varepsilon^2 \Big\} = \mathbb{P}\Big\{ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2 \Big\},$$

где ξ_k – независимые стандартные гауссовские с.в., λ_k – собственные числа[1] интегрального оператора с ядром

$$K(s,t) = \mathbb{E}X(s)X(t), \quad s,t \in [0,1].$$

*ПОМИ РАН и Санкт-Петербургский государственный университет, СПб, Россия. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (соглашение № 075-15-2025-344 от 29.04.2025 в Санкт-Петербургском международном математическом институте имени Леонарда Эйлера, ПОМИ РАН).
Препринт представлен к публикации Назаровым А.И.

[1]Мы будем считать $\lambda_k > 0$ занумерованными по убыванию с учетом кратности.

Мы рассмотрим задачу о малых уклонениях в $L_2(0,1)$ для процесса Слепяна с параметром $a > 0$:

$$S_a(t) \stackrel{d}{=} W(t+a) - W(t), \quad 0 \le t \le 1$$

(здесь $W(t)$ — винеровский процесс). Таким образом, нас интересует асимптотика

$$\mathbb{P}\Big\{ \int_0^1 S_a^2(t)\, dt < \varepsilon^2 \Big\} \sim ?, \quad \varepsilon \to 0.$$

Точная асимптотика малых уклонений в случае $a = 1$ была найдена в работе [9], в случае $a \ge 1$ — в [3, 7], в случае $\frac{1}{2} \le a < 1$ – в [10]. Случай $a < \frac{1}{2}$ более сложен и раньше не рассматривался.

В этой работе вычисляется точная асимптотика малых уклонений процесса Слепяна при $a = \frac{1}{3}$. Предлагаемый метод основан на сведении интегрального уравнения для собственных чисел и собственных функций к матричной задаче Штурма-Лиувилля. В дальнейшем предполагается распространить этот метод на случай $a = \frac{1}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$.

2 Уравнение для собственных чисел

Ковариационная функция процесса $S_{\frac{1}{3}}(t)$:

$$K(s,t) = \begin{cases} \frac{1}{3} - |t-s|, & |t-s| \le \frac{1}{3} \\ 0, & |t-s| > \frac{1}{3} \end{cases}.$$

Собственные числа λ_k удовлетворяют уравнению

$$\lambda f(t) = \int_0^1 K(s,t) f(s)\, ds. \tag{1}$$

Разделим область определения собственных функций на три промежутка:

$$f(t) = \begin{cases} f_1, & t \in [0, \frac{1}{3}) \\ f_2, & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) \\ f_3, & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}$$

Дифференцируя уравнение (1) дважды, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda f_1''(t) = -2f_1(t) + f_2(t + \frac{1}{3}), & t \in [0, \frac{1}{3}] \\ \lambda f_2''(t) = f_1(t - \frac{1}{3}) - 2f_2(t) + f_3(t + \frac{1}{3}), & t \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}] \\ \lambda f_3''(t) = f_2(t - \frac{1}{3}) - 2f_3(t), & t \in [\frac{2}{3}, 1] \end{cases}.$$

Эта система является частным случаем уравнения на квантовых графах (см., напр., [1]). В данном случае она сводится к матричной задаче Штурма–Лиувилля.

Введём вектор-функцию $u = (u_1, u_2, u_3)$, где

$$\begin{aligned} u_1(t) &= f_1(t), \\ u_2(t) &= f_2\left(t + \tfrac{1}{3}\right), \\ u_3(t) &= f_3\left(t + \tfrac{2}{3}\right), \end{aligned}$$

и перепишем систему в виде

$$-\lambda u'' = Au, \quad t \in \left[0, \tfrac{1}{3}\right] \tag{2}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Известно, что

$$\Lambda_1 = 2 + \sqrt{2}, \quad \Lambda_2 = 2, \quad \Lambda_3 = 2 - \sqrt{2}$$

— собственные числа матрицы A,

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

— соответствующие им собственные векторы.

Обозначая $l_1 = \sqrt{\Lambda_1}$, $l_2 = \sqrt{\Lambda_2}$, $l_3 = \sqrt{\Lambda_3}$, $\omega^2 = \lambda^{-1}$ и решая систему (2), получаем

$$\begin{aligned} u(t) = (C_1 \sin(t\omega l_1) + C_2 \cos(t\omega l_1))v_1 + (C_3 \sin(t\omega l_2) + \\ C_4 \cos(t\omega l_2))v_2 + (C_5 \sin(t\omega l_3) + C_6 \cos(t\omega l_3))v_3 \end{aligned}$$

Уравнения для констант $C = (C_1, \ldots, C_6)$ следуют из условий согласования

$$u_1\left(\tfrac{1}{3}\right) = u_2(0), \quad u_2\left(\tfrac{1}{3}\right) = u_3(0), \quad u_1'\left(\tfrac{1}{3}\right) = u_2'(0), \quad u_2'\left(\tfrac{1}{3}\right) = u_3'(0),$$

а также равенств

$$\frac{1}{\omega^2} u_1(0) = \int_0^{\frac{1}{3}} s u_1(\tfrac{1}{3} - s)\, ds,$$

$$\frac{1}{\omega^2} u_3'(\tfrac{1}{3}) = -\int_0^{\frac{1}{3}} u_3(s)\, ds.$$

Первое из равенств получается подстановкой $t = 0$ в (1), второе — дифференцированием (1) и подстановкой $t = 1$.

Введём обозначения

$$\begin{aligned} s_1 &= \sin\frac{\omega l_1}{3}, \qquad c_1 = \cos\frac{\omega l_1}{3}, \\ s_2 &= \sin\frac{\omega l_2}{3}, \qquad c_2 = \cos\frac{\omega l_2}{3}, \\ s_3 &= \sin\frac{\omega l_3}{3}, \qquad c_3 = \cos\frac{\omega l_3}{3} \end{aligned}$$

и запишем эти уравнения в матричном виде:

$$\mathcal{A}C = 0,$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} s_1 & c_1+\sqrt{2} & -s_2 & -c_2 & s_3 & c_3-\sqrt{2} \\ -\sqrt{2}s_1 & -(\sqrt{2}c_1+1) & 0 & -1 & \sqrt{2}s_3 & \sqrt{2}c_3-1 \\ l_1(c_1+\sqrt{2}) & -l_1 s_1 & -l_2 c_2 & l_2 s_2 & l_3(c_3-\sqrt{2}) & -l_3 s_3 \\ -l_1(\sqrt{2}c_1+1) & \sqrt{2}l_1 s_1 & -l_2 & 0 & l_3(\sqrt{2}c_3-1) & -\sqrt{2}l_3 s_3 \\ \left(\frac{\omega}{3l_1}-\frac{s_1}{l_1^2}\right) & \frac{1-c_1-l_1^2}{l_1^2} & -\left(\frac{\omega}{3l_2}-\frac{s_2}{l_2^2}\right) & -\left(\frac{1-c_2-l_2^2}{l_2^2}\right) & \left(\frac{\omega}{3l_3}-\frac{s_3}{l_3^2}\right) & \frac{1-c_3-l_3^2}{l_3^2} \\ l_1c_1-\frac{c_1-1}{l_1} & -\left(l_1s_1-\frac{s_1}{l_1}\right) & l_2c_2-\frac{c_2-1}{l_2} & -\left(l_2s_2-\frac{s_2}{l_2}\right) & l_3c_3-\frac{c_3-1}{l_3} & -\left(l_3s_3-\frac{s_3}{l_3}\right) \end{pmatrix}.$$

Нетривиальное решение существует только при условии вырожденности матрицы $\mathcal{A}$. Приравнивая её определитель к нулю, получаем уравнение на ω (вычисления проводились в Wolfram Mathematica):

$$\det\mathcal{A}(\omega) \equiv \omega M(\omega) + N(\omega) = 0,$$

где

$$\begin{aligned} M(\omega) = &-\frac{17\sqrt{2}}{3}s_1 + 2\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\,s_2 + 2\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\,s_3 - 8c_2s_1 + 8c_3s_1 \\ &- \frac{8}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,c_1s_2 - \frac{8}{3}\sqrt{2-\sqrt{2}}\,c_3s_2 + \frac{8}{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,c_1s_3 + \frac{8}{3}\sqrt{2+\sqrt{2}}\,c_2s_3 \\ &+ \frac{17\sqrt{2}}{3}c_2c_3s_1 + 2\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\,c_1c_3s_2 + 2\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\,c_1c_2s_3 - 2s_1s_2s_3, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N(\omega) = &-14 - 2c_1 - (8+4\sqrt{2})c_2 - (8-4\sqrt{2})c_3 - 2c_2c_3 - (8-4\sqrt{2})c_1c_2 - (8+4\sqrt{2})c_1c_3 \\ &- 2\sqrt{2}\,s_2s_3 - \left(10\sqrt{2+\sqrt{2}} - 8\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\right)s_1s_2 + \left(10\sqrt{2-\sqrt{2}} + 8\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\right)s_1s_3 \\ &+2\sqrt{2}\,c_1s_2s_3 - \left(10\sqrt{2+\sqrt{2}} - 8\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\right)c_3s_1s_2 + \left(10\sqrt{2-\sqrt{2}} + 8\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\right)c_2s_1s_3 \\ &- 14c_1c_2c_3. \end{aligned}$$

3 Асимптотика малых уклонений

Будем вычислять асимптотику малых уклонений, используя принцип сравнения Венбо Ли [4, 2]: если бесконечное произведение $\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k}$ сходится, то

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \sim \mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \cdot \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \varepsilon \to 0. \tag{3}$$

Обозначим

$$\mathcal{F}(\omega) = \frac{|\det \mathcal{A}(\omega)|}{|\det \mathcal{A}(0)|} = \frac{|\det \mathcal{A}(\omega)|}{64}.$$

Для сколь угодно малого $\varepsilon > 0$ в области

$$\arg \omega \in (\varepsilon, \pi - \varepsilon) \cup (\pi + \varepsilon, 2\pi - \varepsilon) \tag{4}$$

при $|\omega| \to \infty$ верно

$$M(\omega) \sim \frac{17\sqrt{2}}{3} c_2 c_3 s_1 + 2\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\, c_1 c_3 s_2 + 2\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\, c_1 c_2 s_3 - 2 s_1 s_2 s_3,$$

$$\begin{aligned} N(\omega) \sim 2\sqrt{2}\, c_1 s_2 s_3 - \left(10\sqrt{2+\sqrt{2}} - 8\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\right) c_3 s_1 s_2 + \\ + \left(10\sqrt{2-\sqrt{2}} + 8\sqrt{2(2-\sqrt{2})}\right) c_2 s_1 s_3 - 14 c_1 c_2 c_3, \end{aligned}$$

$$N(\omega) = o(\omega M(\omega)).$$

Вычисления в Wolfram Mathematica показывают, что в области (4)

$$\mathcal{F}(\omega) \sim \mathcal{C} \left|\omega \sin(\mathcal{D}\omega)\right|, \quad |\omega| \to \infty, \tag{5}$$

где

$$\mathcal{D} = \frac{l_1 + l_2 + l_3}{3}, \qquad \mathcal{C} = \frac{1}{192\sqrt{2}} \left(17 + 3\sqrt{2} + 6\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\right). \tag{6}$$

В качестве модельной последовательности возьмём $\tilde{\lambda}_k = \frac{1}{\tilde{\omega}_k^2}$, где $\tilde{\omega}_k$ — последовательность положительных корней функции $\tilde{\mathcal{F}}$:

$$\tilde{\mathcal{F}}(\omega) = \left| \left(1 - \frac{\omega^2}{(\sqrt{2}/\mathcal{D})^2}\right) \frac{\sin(\mathcal{D}\omega)}{\mathcal{D}\omega} \right|.$$

Асимптотика малых уклонений для $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k \xi_k^2$ при $\mathcal{D} = \sqrt{2}$ была вычислена в работе [9]. При помощи масштабирования получаем:

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\lambda}_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \sim \frac{8\varepsilon^2}{\sqrt{\pi}\mathcal{D}^2} \exp\left(-\frac{\mathcal{D}^2}{8}\varepsilon^{-2}\right), \qquad \varepsilon \to 0. \tag{7}$$

Чтобы вычислить константу расхождения $\left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}}$, воспользуемся тем, что $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ – целые функции переменной ω, и применим теорему Йенсена [11, 3.6.1]:

$$\ln \frac{R^n \left|\mathcal{F}(0)\right|}{r_1 r_2 ... r_n} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(\mathcal{F}(Re^{i\phi})\right) \, d\phi, \tag{8}$$

где r_i - модули корней функции $\mathcal{F}$, пронумерованные по возрастанию с учётом кратности и удовлетворяющие неравенствам $r_n \leq R \leq r_{n+1}$.

Поскольку функции $\mathcal{F}$ и $\tilde{\mathcal{F}}$ – чётные, их положительные корни ω_k и $\tilde{\omega}_k$ учитываются в произведении в левой части (8) дважды. Принимая во внимание $|\mathcal{F}(0)| = |\tilde{\mathcal{F}}(0)| = 1$, получаем

$$\left(\prod_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{\tilde{\omega}_k}\right)^2 = \lim_{|z|\to\infty} \exp\left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{|\tilde{\mathcal{F}}(z)|}{|\mathcal{F}(z)|} d(\arg z)\right).$$

В силу (5) подынтегральное выражение сходится к $\ln \frac{\mathcal{D}}{\mathcal{C}}$ поточечно п.в. Так как особенности подынтегральной функции – логарифмические, несложно подобрать суммируемую мажоранту. Тогда

$$\prod_{k=0}^{\infty} \frac{\omega_k}{\tilde{\omega}_k} = \left(\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\tilde{\lambda}_k}{\lambda_k}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{\mathcal{D}}{\mathcal{C}}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, асимптотика малых уклонений процесса Слепяна для $a = \frac{1}{3}$:

$$\mathbb{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 < \varepsilon^2\right\} \sim \frac{8\varepsilon^2}{\sqrt{\pi \mathcal{C} \mathcal{D}^3}} \exp\left(-\frac{\mathcal{D}^2}{8} \varepsilon^{-2}\right), \qquad \varepsilon \to 0, \tag{9}$$

где $\mathcal{D}$ и $\mathcal{C}$ определены в (6).

Я благодарю А.И. Назарова за постановку задачи и ценные консультации, а также Н.П. Бондаренко за указание на обзор [1].

Список литературы

[1] Berkolaiko G. An elementary introduction to quantum graphs // Contemp. Math. — 2017. — Vol. 700. — P. 41–72.

[2] Gao F., Hannig J., Torcaso F. Comparison theorems for small deviations of random series // Electron. J. Probab. — 2003. — Vol. 8, no. 21. — P. 1–17.

[3] Gao F., Li W.V. Small ball probabilities for the Slepian Gaussian fields // Trans. Amer. Math. Soc. — 2007. — Vol. 359. — P. 1339–1350.

[4] Li W.V. Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms // J. Theoret. Probab. — 1992. — Vol. 5, no. 1. — P. 1–31.

[5] Лифшиц М.А. Лекции по гауссовским процессам. — СПб.: Лань, 2016.

[6] Lifshits M.A. Bibliography of small deviation probabilities. — 2023. — URL: https://airtable.com/shrMG0nNxl9SiGxII/tbl7Xj1mZW2VuYur.

[7] Nazarov A.I. Exact L_2-small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary-value problems // J. Theoret. Probab. — 2009. — Vol. 22. — P. 640–665.

[8] Nazarov A.I., Petrova Yu.P. L_2-small ball asymptotics for Gaussian random functions: a survey // Probab. Surveys. — 2023. — Vol. 20. — P. 608–663.

[9] Nikitin Ya., Orsingher E. Sharp small ball asymptotics for Slepian and Watson processes in Hilbert norm // Записки научных семинаров ПОМИ. — 2004. — Т. 320. — С. 120–128; J. Math. Sci. — 2006. — Vol. 137, no. 1. — P. 4555–4560.

[10] Shi J. Gaussian processes: Karhunen–Loève expansion, small ball estimates and applications in time series models. — PhD thesis. — University of Delaware, 2014.

[11] Титчмарш Е. Теория функций. — М.: Наука, 1980.