Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 319, 2004 г.

**А. Ю. Лузгарев**

# О НАДГРУППАХ $\mathrm{E}(\mathrm{E}_6, R)$ И $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$ В МИНИМАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЯХ

## §1. Введение

В нашей работе исследуется вопрос классификации надгрупп элементарной подгруппы $\mathrm{E}(\Phi, R)$ группы Шевалле типа $\Phi = \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$ в минимальных неприводимых представлениях, где $R$ – коммутативное кольцо. Подобным задачам описания надгрупп посвящено большое количество работ, но подавляющее большинство из них касается классических групп, и почти всегда рассматриваются группы над полем. Таковы работы [9–11, 13–17]. Лишь в недавних работах Н. А. Вавилова и В. А. Петрова [4–6] получено стандартное описание надгрупп симплектической и ортогональной элементарных групп для случая коммутативного кольца, а в работе В. А. Петрова [19] – описание надгрупп обобщенных унитарных групп для произвольного кольца с некоторым ограничением на локальный стабильный ранг.

Доказательство подобных теорем о стандартном описании для исключительных групп представляло бы большой интерес. Поясним, что это означает. Говорят, что выполнено *стандартное описание* подгрупп в $G = \mathrm{GL}(n, R)$, содержащих $\mathrm{E}(\Phi, R)$, если для любой такой подгруппы $H$ существует единственный идеал $A \trianglelefteq R$ такой, что

$$\mathrm{E}(\Phi, R)\mathrm{E}(n, R, A) \le H \le N_G(\mathrm{E}(\Phi, R)\mathrm{E}(n, R, A)),$$

где $\mathrm{E}(n, R, A) = \mathrm{E}(n, A)^{\mathrm{E}(n,R)}$ – относительная элементарная группа, а $N_G$ означает взятие нормализатора в группе $G$. Для исключительных групп типа $\mathrm{E}_6$ и $\mathrm{E}_7$ в их минимальных неприводимых представлениях (размерностей 27 и 56 соответственно) не известно, имеет ли место стандартное описание, даже в случае, когда $R$ – поле. В нашей работе доказывается существование наибольшего такого идеала $A$, для которого

$$\mathrm{E}(\Phi, R)\mathrm{E}(n, R, A) \le H.$$

Кроме того, мы доказываем, что группы

$$\mathrm{EE}_6(27, R, A) = \mathrm{E}(\mathrm{E}_6, R)\mathrm{E}(27, R, A)$$

и

$$\mathrm{EE}_7(56, R, A) = \mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)\mathrm{E}(56, R, A)$$

являются совершенными. При этом $R$ – произвольное коммутативное кольцо с обратимыми элементами 2 и 3.

Для группы типа $\mathrm{E}_7$, видимо, стандартное описание должно выглядеть сложнее: необходимо рассматривать группу

$$\mathrm{EE}'_7(56, R, A, B) = \mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)\mathrm{E}(56, R, A)\,\mathrm{Ep}(56, R, B),$$

где $A \subseteq B$ – два идеала в $R$. Это связано с тем, что группа типа $E_7$ вкладывается в некоторую симплектическую группу матриц. Кроме того, поскольку такое вложение не единственно, на самом деле нужно рассматривать сопряжение $\mathrm{Ep}(56, R, B)$ при помощи некоторого диагонального элемента специального вида. В настоящей работе сделаны некоторые шаги к подобному описанию надгрупп $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$.

Структура работы такова: в §2 мы приводим важнейшие используемые определения и обозначения, в §3 – формулируем полученные результаты в шести теоремах. Дальнейшая часть статьи посвящена их доказательству. Четвертый параграф содержит доказательство теоремы 1. В параграфах 5, 6, 7 и 8 доказывается теорема 2, что устанавливает справедливость и теоремы 3, как замечено при их формулировке. §9 посвящен доказательству теоремы 4. Параграфы 10–12 посвящены частичному включению в описание надгрупп $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$ симплектической группы. В §10 мы занимаемся построением подходящей симплектической группы, а в параграфах 11 и 12 доказываем теоремы 5 и 6 соответственно.

## §2. Определения и обозначения

Далее везде $\Phi = \mathrm{E}_6$ или $\Phi = \mathrm{E}_7$. В ситуациях, когда имеет значение, какой именно из двух случаев имеет место, мы будем отделять высказывания для $\Phi = \mathrm{E}_6$ и $\Phi = \mathrm{E}_7$ знаком ‘risp’. Пусть $P$ – решетка, лежащая между решеткой корней $Q(\Phi)$ и решеткой весов $P(\Phi)$. Для некоторого фиксированного порядка на $\Phi$ мы обозначаем через $\Phi^+$, $\Phi^-$ множества положительных и отрицательных корней по отношению к этому порядку, и через $\Pi = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$ – соответствующее множество простых корней ($l = 6$ risp 7). В нумерации простых корней мы всегда следуем Бурбаки [1]. По системе корней $\Phi$, решетке $P$ и коммутативному кольцу с единицей $R$ можно построить *группу Шевалле* $\mathrm{G} = \mathrm{G}_P(\Phi, R)$, являющуюся группой точек над $R$ аффинной групповой *схемы Шевалле-Демазюра*. Мы всегда будем считать, что наша группа Шевалле *односвязна*, то есть $P = P(\Phi)$ и опускать указание на $P$ в записи группы.

Мы считаем, что в комплексной простой алгебре Ли $L$ типа $\Phi$ выбран положительный базис Шевалле и построена алгебра Шевалле $L_R$. Таким образом, задан расщепимый максимальный тор $\mathrm{T}(\Phi, R)$ в $\mathrm{G}$ и выбрана параметризация корневых унипотентных подгрупп $X_\alpha$, $\alpha \in \Phi$ относительно этого тора. Мы обозначаем через $x_\alpha(\xi)$, где $\alpha \in \Phi$, $\xi \in R$, соответствующий элементарный корневой унипотент. В дальнейшем мы неоднократно будем пользоваться соотношениями Стейнберга между элементами $x_\alpha(\xi)$, в особенности коммутационной формулой Шевалле [8]. Группа $X_\alpha = \{x_\alpha(\xi), \xi \in R\}$ называется *элементарной корневой подгруппой*, а группа $\mathrm{E}(\Phi, R) = \langle X_\alpha, \alpha \in \Phi\rangle$, порожденная всеми элементарными корневыми подгруппами, называется (абсолютной) *элементарной подгруппой* группы Шевалле $\mathrm{G}(\Phi, R)$.

Мы будем рассматривать группу $\mathrm{E}(\Phi, R)$ как подгруппу в $\mathrm{GL}(n, R)$, где $n = 27$ risp 56, в обычных (минимальных) представлениях. Это означает, что группа $\mathrm{G}$ действует на *модуле Вейля* $V = V(\omega)$, где $\omega$ – некоторый доминантный вес. Мы предполагаем, что старший вес $\omega$ модуля $V$ фундаментальный и равен $\omega_1$ risp $\omega_7$. Тогда соответствующие модули $V$ *микровесовые*, см. [2, 3, 23] для более подробной информации и дальнейших ссылок. Через $\Lambda = \Lambda(\omega)$ обозначается множество весов модуля $V = V(\omega)$ с учетом кратности. На самом деле, для микровесового представления все веса имеют кратность 1, и поэтому $\Lambda$ совпадает с орбитой старшего веса $\omega$ под действием группы Вейля $W$.

Мы фиксируем *допустимый* базис $v^\lambda$, $\lambda \in \Lambda$ модуля $V$. Это означает, что $x_\alpha(\xi)v^\lambda$ выражается как целочисленная линейная комбинация векторов $v^\mu$, $\mu \in \Lambda$. Для микровесовых представлений можно так нормировать допустимый базис, чтобы $x_\alpha(\xi)v^\lambda = v^\lambda + c_{\lambda\alpha}\xi v^{\lambda+\alpha}$, где все структурные константы действия $c_{\lambda\alpha}$ равны $\pm 1$ ('лемма Мацумото', [18, 20]). В действительности, мы всегда выбираем *кристаллический* базис, в котором все структурные константы $c_{\lambda\alpha}$ равны $+1$ для $\alpha\in\pm\Pi$ (элементарное доказательство существования такого базиса приведено в [22]).

Мы мыслим вектор $a\in V$, $a=\sum a_\lambda v^\lambda$ как столбец координат $a=(a_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$. При этом элемент $b$ контраградиентного модуля $V^*$ естественно представлять себе как строку $b=(b_\lambda)$, $\lambda\in\Lambda$. Мы индексируем как столбцы, так и строки весами модуля $V$, то есть элементами $\Lambda$. Таким образом, строки и столбцы матриц из $\mathrm{GL}(V,R)=\mathrm{GL}(n,R)$ нумеруются весами представления, то есть элементами $\lambda,\mu,\nu,\rho,\sigma,\tau,\ldots\in\Lambda$. Везде в работе под коммутатором $[x,y]$ имеется в виду левонормированный коммутатор: $[x,y]=xyx^{-1}y^{-1}$.

Основное средство для дальнейших вычислений заключено в следующем утверждении, скопированном из [3]:

**Лемма 0.** *Для любых $g\in\mathrm{GL}(n,R)$, $\alpha\in\Phi$ и $\xi\in R$ имеют место формулы*

$$(x_\alpha(\xi)g)_{\rho\sigma}=g_{\rho\sigma}\pm\xi g_{\rho-\alpha,\sigma},\quad (gx_\alpha(\xi))_{\rho\sigma}=g_{\rho\sigma}\pm\xi g_{\rho,\sigma+\alpha}.$$

## §3. Формулировка основных результатов

Нашей целью является доказательство следующих двух теорем:

**Теорема 1.** *Пусть $A\trianglelefteq R$. Тогда*

$$\mathrm{E}(n,A)^{\mathrm{E}(\Phi,R)}=\mathrm{E}(n,R,A),$$

*где, как обычно,* $\mathrm{E}(n,R,A)=\mathrm{E}(n,A)^{\mathrm{E}(n,R)}$.

**Теорема 2.** *Пусть $H$ – подгруппа в $\mathrm{GL}(n,R)$, содержащая $\mathrm{E}(\Phi,R)$, причем $2,3\in R^*$. Для $\lambda,\mu\in\Lambda$, $\lambda\neq\mu$ положим $A_{\lambda\mu}=\{\xi\in R\mid t_{\lambda\mu}(\xi)\in H\}$. Тогда для любых $\rho,\sigma\in\Lambda$, $\rho\neq\sigma$ имеем $A_{\lambda\mu}=A_{\rho\sigma}=A$, причем $A\trianglelefteq R$.*

Из этих двух теорем немедленно следует

**Теорема 3.** *Пусть $H$ – подгруппа в $\mathrm{GL}(n,R)$, содержащая $\mathrm{E}(\Phi,R)$, причем $2,3\in R^*$. Тогда существует единственный наибольший идеал $A\trianglelefteq R$ такой, что $\mathrm{E}(n,R,A)\le H$. При этом, если $t_{\lambda\mu}(\xi)\in H$ для некоторых $\lambda,\mu\in\Lambda$, $\lambda\neq\mu$, то $\xi\in A$.*

Теорема 3 утверждает, что для любой промежуточной подгруппы между $\mathrm{E}(\Phi,R)$ и $\mathrm{GL}(n,R)$ найдется идеал $A\trianglelefteq R$ такой, что $H$ содержит группу $\mathrm{E}(\Phi,R)\mathrm{E}(n,R,A)$. В теореме 4 мы доказываем, что последняя группа является совершенной.

**Теорема 4.** *Пусть $R$ – коммутативное кольцо, $A\trianglelefteq R$. Тогда группы* $\mathrm{EE}_6(27,R,A)=\mathrm{E}(\mathrm{E}_6,R)\mathrm{E}(27,R,A)$ *и* $\mathrm{EE}_7(56,R,A)=\mathrm{E}(\mathrm{E}_7,R)\mathrm{E}(56,R,A)$ *совершенны.*

Следующая теорема является аналогом теоремы 1 для симплектической группы, которая возникает в случае $\Phi=\mathrm{E}_7$.

**Теорема 5.** *Пусть $A\trianglelefteq R$, $2\in R^*$. Тогда*

$$\mathrm{Ep}(56,A)^{\mathrm{E}(\mathrm{E}_7,R)}=\mathrm{Ep}(56,R,A),$$

*где, как обычно,* $\mathrm{Ep}(56,R,A)=\mathrm{Ep}(56,A)^{\mathrm{Ep}(56,R)}$.

Построение симплектической группы, обозначенной выше $\mathrm{Ep}(56,R)$, проведено в §10.

Последняя теорема – аналог теоремы 4.

**Теорема 6.** *Пусть $R$ – коммутативное кольцо, $A\trianglelefteq R$, $B\trianglelefteq R$, $A\subseteq B$, $2\in R^*$. Группа* $\mathrm{EE}'_7(56,R,A,B)=\mathrm{E}(\mathrm{E}_7,R)\mathrm{E}(56,R,A)\,\mathrm{Ep}(56,R,B)$ *совершенна.*

К сожалению, автору пока не удалось получить аналога теоремы 2 в этом случае; кроме того, пока не учитывается тот факт, что существуют различные симплектические группы, содержащие $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7,R)$ в данном представлении (см. краткое обсуждение в §1).

## §4. Доказательство теоремы 1

**Доказательство.** Очевидно, что левая часть содержится в правой. Для доказательства обратного включения вспомним, что при $n\geq 3$ группа $\mathrm{E}(n,R,A)$ порождается всеми трансвекциями вида $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)={}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi)$ для $\xi\in A,\zeta\in R$, $\lambda,\mu\in\Lambda$, $\lambda\neq\mu$ (этот факт доказан Титсом в [21]). Таким образом, достаточно убедиться, что $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)$ содержится в $H=\mathrm{E}(n,A)^{\mathrm{E}(\Phi,R)}$. Доказательство этого содержится в леммах 1, 2 и 3; в лемме $i$ мы разбираем случай $d(\lambda,\mu)=i$, $i=1,\ 2,\ 3$. Очевидно, что в нашем представлении 2 risp 3 – это максимальное расстояние между весами, и теорема доказана, как только проверена справедливость следующих лемм.

В дальнейшем везде $\zeta \in R$, $\xi \in A$. Мы будем пользоваться следующим прямым вычислением:

$$\begin{aligned} z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) &= t_{\mu\lambda}(\zeta)t_{\lambda\mu}(\xi)t_{\mu\lambda}(-\zeta) \\ &= (e+\zeta e_{\mu\lambda})(e+\xi e_{\lambda\mu})(e-\zeta e_{\mu\lambda}) \\ &= e+\xi e_{\lambda\mu}+\xi\zeta(e_{\mu\mu}-e_{\lambda\lambda})-\xi\zeta^2 e_{\mu\lambda}. \end{aligned}$$

**Лемма 1.** *Пусть $d(\lambda,\mu)=1$. Тогда ${}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\rho\sigma}(\xi) \in H$ для любых $\rho$, $\sigma \in \Lambda$ $\rho \neq \sigma$. В частности, $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) \in H$.*

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай $\rho=\lambda$, $\sigma=\mu$. Обозначим $\mu-\lambda=\alpha\in\Phi$ и рассмотрим

$${}^{x_\alpha(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi) = x_\alpha(\zeta)t_{\lambda\mu}(\xi)x_\alpha(-\zeta) \in H.$$

Из леммы 0 легко видеть, что

$$g = x_\alpha(\zeta)t_{\lambda\mu}(\xi) = e+\xi e_{\lambda\mu} \pm \zeta\xi e_{\mu\mu} \pm \zeta e_{\mu\lambda} + \sum_{i=1}^{s}(-1)^{\varepsilon_i}\zeta e_{\nu_i+\alpha,\nu_i},$$

где $\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_s$ – все отличные от $\lambda$ веса $\nu$ из $\Lambda$, для которых $\nu+\alpha$ также является весом. Знаки $(-1)^{\varepsilon_i}$, с которыми они входят в эту запись, нас не интересуют; мы обращаем внимание только на знак при действии “между” весами $\lambda$ и $\mu$, который будем выражать знаками $\pm$ и $\mp$.

После этого осталось домножить получившееся на $x_\alpha(-\zeta)$ и проследить за матричными элементами. Очевидно (см. снова лемму 0), подвергнутся изменению только элементы в позициях $(\tau,\tau')$, для которых $\tau,\tau',\tau'+\alpha\in\Lambda$. Но мы уже знаем все такие $\tau'$, для которых и $\tau'$, и $\tau'+\alpha$ являются весами: это в точности $\lambda,\nu_1,\dots,\nu_s$. Проанализировав, при каких $\tau$ добавка $g_{\tau,\tau'+\alpha}$ не равняется нулю, мы видим, что знаки для действия “между” весами $\nu_i$ и $\nu_i+\alpha$ противоположны, что приводит к уничтожению слагаемых, в которые входят $\nu_i$ – именно поэтому нас не интересует, какие именно знаки там были. Остается следующее выражение:

$${}^{x_\alpha(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi) = gx_\alpha(-\zeta) = e \mp \xi\zeta e_{\lambda\lambda} + \xi e_{\lambda\mu} - \xi\zeta^2 e_{\mu\lambda} \pm \xi\zeta e_{\mu\mu}.$$

Мы видим, что это выражение совпадает с полученным выше выражением для $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)$ с точностью до знаков в позициях $e_{\lambda\lambda}$ и $e_{\mu\mu}$, который легко поменять, заменив с самого начала $\zeta$ на $-\zeta$.

Оставшиеся случаи, когда либо $\rho \neq \lambda$, либо $\sigma \neq \mu$, на самом деле еще проще. Действительно, $y = {}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\rho\sigma}(\xi) = [t_{\mu\lambda}(\zeta), t_{\rho\sigma}(\xi)] \cdot t_{\rho\sigma}(\xi)$. Если $\rho = \lambda$, но $\sigma \neq \mu$, то $y = t_{\mu\sigma}(\xi\zeta)t_{\rho\sigma}(\xi) \in \mathrm{E}(n, A)$. Аналогично рассматривается случай, когда $\sigma = \mu$, но $\rho \neq \lambda$. Если же $\sigma \neq \mu$ и $\rho \neq \lambda$, то эти трансвекции коммутируют, и $y = t_{\rho\sigma}(\xi) \in \mathrm{E}(n, A)$. Лемма доказана.

**Следствие.** *Пусть* $d(\lambda, \mu) = 1$. *Тогда* $\mathrm{E}(n, A)^{t_{\mu\lambda}(\zeta)} \leq H$.

**Лемма 2.** *Пусть* $d(\lambda, \mu) = 2$. *Тогда* $z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) \in H$.

**Доказательство.** Найдем $\alpha, \beta \in \Phi$ такие, что $\lambda - \mu = \alpha + \beta$, причем $\lambda - \alpha = \mu + \beta \in \Lambda$ и $\lambda - \beta = \mu + \alpha \in \Lambda$. Это легко сделать: пара $(\lambda, \mu)$ переводится элементом группы Вейля в пару $(\omega, -\omega)$ risp $(\omega, \omega - \begin{smallmatrix}0&1&2&2&2&2\\&&1&&&\end{smallmatrix})$. Тогда можно взять, например, $\alpha = \begin{smallmatrix}1&2&2&1&1\\&&1&&\end{smallmatrix}$ risp $\alpha = \alpha_7$ и $\beta = \begin{smallmatrix}1&1&2&2&1\\&&1&&\end{smallmatrix}$ risp $\beta = \begin{smallmatrix}0&1&2&2&2&1\\&&1&&&\end{smallmatrix}$.

Обозначим $\lambda - \alpha = \mu + \beta = \kappa$, $\lambda - \beta = \mu + \alpha = \nu$. Тогда

$$\begin{aligned} z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) &= {}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi) \\ &= {}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}[t_{\lambda\nu}(\xi), t_{\nu\mu}(1)] \\ &= [t_{\lambda\nu}(\xi)t_{\mu\nu}(\xi\zeta), t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)] \\ &= t_{\lambda\nu}(\xi)t_{\mu\nu}(\xi\zeta) \cdot {}^{t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi). \end{aligned}$$

Таким образом, достаточно доказать, что

$${}^{t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi) \in H.$$

В дальнейшем мы ограничим все наши вычисления на четыре веса: $\lambda$, $\nu$, $\mu$, $\kappa$, то есть будем рассматривать четырехмерное подпространство $W$ в пространстве представления $V = \langle v^\rho | \rho \in \Lambda \rangle$, порожденное $v^\lambda$, $v^\nu$, $v^\mu$, $v^\kappa$. Этого достаточно для наших вычислений, потому что они будут включать лишь элементарные трансвекции $t_{\rho\sigma}(\zeta)$, где $\zeta \in R$, $\{\rho, \sigma\} \subset \{\lambda, \nu, \mu, \kappa\}$ и сопряжения при помощи элементов $x_\alpha(\zeta)$, $x_\beta(\zeta)$. Эти сопряжения также не выведут нас за пределы этого пространства: действительно, если элемент $g \in \mathrm{GL}(n, R)$ таков, что “нетривиальность действия” $g$ заключена внутри $W$, то таков же и элемент ${}^{x_\alpha(r)}g$ – это немедленно следует из того, что представление микровесовое, поэтому ни один из элементов $\lambda + \alpha$, $\nu + \alpha$, $\mu - \alpha$, $\kappa - \alpha$ не является весом. Таким образом, “действия” между весами $\rho$ и $\sigma$ (где $\rho - \sigma = \alpha$)

будут уничтожать друг друга так же, как было в доказательстве леммы 1. Конечно, то же самое касается и $\beta$.

Мы будем изображать матрицы действия элементов $\mathrm{GL}(n, R)$ в ограничении на $W$ в базисе $(v^\lambda, v^\nu, v^\mu, v^\kappa)$. Обозначим $h = {}^{t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi)$, $g = {}^{t_{\nu\mu}(1)}h$ – элемент, принадлежность которого $H$ нам необходимо установить. Заметим, что по следствию леммы 1 элемент $h$ лежит в $H$. Будем обозначать $\widetilde{g}$, $\widetilde{h}$ матрицы из $\mathrm{GL}(4, R)$, соответствующие $g$ и $h$, ограниченным на $W$, в указанном базисе. Легко видеть, что

$$\widetilde{h} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & -\xi & 0 & 0 \\ \xi\zeta^2 & 1+\xi\zeta & 0 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \widetilde{g} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & -\xi & \xi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{x_\alpha(\zeta)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \zeta \\ 0 & 1 & \zeta & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда элементу ${}^{x_\alpha(1)}h \in H$ соответствует следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & -\xi & \xi & \xi\zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta & \xi\zeta^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

После умножения слева на $t_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2) \in \mathrm{E}(n, R)$ мы получаем также элемент из $H$, который записывается матрицей $\widetilde{g}$.

Вообще говоря, последнее рассуждение проходит только тогда, когда знаки действия у элемента $x_\alpha(\zeta)$ в ограничении на $W$ одинаковы; тогда $x_\alpha(\zeta)$ действительно имеет такой вид, как показано выше. Но если знаки противоположны, то рассуждение не сильно меняется; при сопряжении $h$ с помощью $x_\alpha(\pm 1)$ получается *почти* та же самая матрица, что и в рассмотренном случае. А именно, недиагональные элементы последнего столбца будут иметь противоположный знак. Понятно, что после этого нужно домножать на элементарные трансвекции с противоположными знаками в аргументах, и вновь получится в точности матрица $\widetilde{g}$. Значит, в любом случае $g \in H$, и лемма доказана.

**Лемма 3.** *Пусть* $d(\lambda,\mu)=3$. *Тогда* $z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)\in H$.

**Доказательство.** Здесь $\Phi=\mathrm{E}_7$. Сейчас, как всегда, мы построим некую конфигурацию весов для конкретного случая $\lambda=\omega$, $\mu=-\omega$, и "перенесем" ее элементом группы Вейля на произвольную пару весов на расстоянии 3 друг от друга. Возьмем $\alpha=\alpha_7$, $\beta=\begin{smallmatrix}123221\\2\end{smallmatrix}$, $\gamma=\begin{smallmatrix}123321\\1\end{smallmatrix}$. Нетрудно видеть, что $-\omega+\alpha+\beta+\gamma=\omega$ и $\alpha,\beta,\gamma\in\Phi$. Обозначим также вес $\nu=\mu+\alpha$.

Такое же вычисление, как и в начале доказательства леммы 2, показывает, что достаточно проверить включение

$$g={}^{t_{\nu\mu}(1)t_{\nu\lambda}(-\zeta)}t_{\lambda\nu}(-\xi)t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)\in H.$$

Преобразуем далее:

$$g=t_{\nu\mu}(1)\cdot t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi)t_{\nu\lambda}(\zeta)\cdot t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\nu\lambda}(\zeta)\cdot t_{\nu\mu}(-1).$$

Из леммы 2 следует, что $t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi)t_{\nu\lambda}(\zeta)\in H$, так как $d(\lambda,\nu)=2$. Преобразуем множитель $t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\nu\lambda}(\zeta)$:

$$\begin{aligned}&t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\nu\lambda}(\zeta)\\&=t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)\cdot[t_{\mu\nu}(\xi\zeta),t_{\nu\lambda}(-\zeta)]\\&=t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\mu\lambda}(-\xi\zeta^2)\in\mathrm{E}(n,A).\end{aligned}$$

Мы получили, что $g={}^{t_{\nu\mu}(1)}h$, где $h\in H$. Теперь все аналогично финальному шагу в доказательстве леммы 2: посмотрим на конкретные матрицы, чтобы сравнить $g$ и ${}^{x_\alpha(1)}h\in H$. Элементы, которые у нас получились, "затрагивают" только веса $\lambda$, $\mu$ и $\nu$. Мы хотим коммутировать с $x_\alpha(1)$, поэтому необходимо еще включить в рассмотрение вес $\kappa=\lambda-\alpha$. Получившиеся четыре веса уже образуют подпространство, которым можно ограничиться: прибавления и вычитания корня $\alpha$ не приводят к новым весам. Итак, можно ограничить все рассмотрение четырехмерным подпространством $W$, порожденным векторами $v^\lambda$, $v^\kappa$, $v^\nu$, $v^\mu$. Мы будем записывать эти ограничения матрицами из $\mathrm{GL}(4,R)$ в базисе $(v^\lambda,v^\kappa,v^\nu,v^\mu)$:

$$\widetilde{h}=\begin{pmatrix}1+\xi\zeta&0&-\xi&0\\0&1&0&0\\\xi\zeta^2&0&1+\xi\zeta&0\\-\xi\zeta^2&0&-\xi\zeta&1\end{pmatrix},\qquad\widetilde{x_\alpha(1)}=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

$$\widetilde{{}^{x_\alpha(1)}h} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & \xi\zeta & -\xi & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & \xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{g} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & 0 & -\xi & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & 0 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta \end{pmatrix}.$$

Теперь видно, что после умножения слева ${}^{x_\alpha(1)}h$ на

$$t_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2) \in \mathrm{E}(n,A)$$

получается $g$. К сожалению, $\widetilde{x_\alpha(1)}$ не всегда имеет такой вид, как указано выше. Знаки действия могут быть различными для пар весов $(\lambda,\kappa)$ и $(\nu,\mu)$. Очевидно, что есть только два приниципиально разных случая: когда знаки одинаковые (выше мы рассмотрели именно его), и когда они разные – все сводится к ним заменой $x_\alpha(1)$ на $x_\alpha(-1)$. Таким образом, когда знаки разные, можно считать, что

$$\widetilde{x_\alpha(1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

тогда

$$\widetilde{{}^{x_\alpha(1)}h} = \begin{pmatrix} 1-\xi\zeta & -\xi\zeta & -\xi & \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta^2 & -\xi\zeta & 1+\xi\zeta \end{pmatrix},$$

и результат достигается умножением слева на $t_{\lambda\kappa}(\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(\xi\zeta^2) \in \mathrm{E}(n,A)$.

## §5. Начало доказательства теоремы 2

Напомним, что далее везде $H$ – подгруппа в $\mathrm{GL}(n,R)$, содержащая $\mathrm{E}(\Phi,R)$. Следующая лемма проверяется прямым вычислением.

**Лемма 4.** *Пусть* $\lambda,\ \mu \in \Lambda,\ \lambda \neq \mu,\ \alpha \in \Phi,\ \lambda - \mu \neq \pm\alpha$.

а) *Если* $\mu - \alpha \notin \Lambda,\ \lambda + \alpha \in \Lambda$, *то* $[t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\zeta)] = t_{\lambda+\alpha,\mu}(\pm\xi\zeta)$.

б) *Если* $\lambda - \alpha \notin \Lambda,\ \mu + \alpha \in \Lambda$, *то* $[t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\zeta)] = t_{\lambda,\mu+\alpha}(\pm\xi\zeta)$.

**Лемма 5.** *Пусть $\lambda$, $\mu \in \Lambda$, $d(\lambda,\mu)=1$. Тогда если $\alpha \in \Phi$ таков, что $\lambda+\alpha \in \Lambda$ и $\lambda+\alpha \neq \mu$, то $\mu-\alpha \notin \Lambda$.*

**Доказательство.** Посмотрим на диаграмму весов. Можно считать, что $\lambda=\omega$, $\mu=\omega-\delta$. Тогда если $\lambda+\alpha \in \Lambda$, то $\alpha \in \Phi^-$ и в разложение $\alpha$ по простым корням должен входить $-\alpha_1$ risp $-a_7$. Но для того, чтобы $\mu-\alpha \in \Lambda$, нужно, чтобы между $\mu-\alpha$ и $\mu$ был корень $-\alpha_1$ risp $-a_7$, что возможно только при $\alpha=\mu-\lambda$.

Теперь можно доказать часть теоремы 2:

**Лемма 6.** *Пусть $\lambda,\mu,\rho,\sigma \in \Lambda$, причем $d(\lambda,\mu)=d(\rho,\sigma)=1$. Тогда $A_{\lambda\mu}=A_{\rho\sigma}=A_1$, причем $A_1 \trianglelefteq R$.*

**Доказательство.** Очевидно, что $A_{\lambda\mu}$ является подгруппой $R$ по сложению. Пункт а) леммы 4 фактически утверждает, что если $\lambda,\mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$, $\alpha \in \Phi$, $\lambda-\mu \neq \pm\alpha$, $\mu-\alpha \notin \Lambda$, то $RA_{\lambda\mu} \subset A_{\lambda+\alpha,\mu}$. Тогда по лемме 5 получаем $RA_{\lambda\mu} \subset A_{\rho\sigma}$ (можно “прошагать” по ребрам диаграммы и заменить оба веса в индексах на нужные нам) и, кроме того, $A_{\lambda\mu}$ является идеалом в $R$. Значит, все такие идеалы совпадают.

Еще одно продвижение к теореме:

**Лемма 7.** *Пусть $\lambda,\mu,\rho,\sigma \in \Lambda$, причем $d(\lambda,\mu)=d(\rho,\sigma)=2$. Тогда $A_{\lambda\mu}=A_{\rho\sigma}=A_2$, причем $A_2 \trianglelefteq R$.*

**Доказательство.** Снова будем смотреть на диаграмму весов. Можно считать, что $\mu=\omega$ и $\lambda=\omega-\begin{smallmatrix}22210\\1\end{smallmatrix}$ risp $\lambda=\omega-\begin{smallmatrix}012222\\1\end{smallmatrix}$ ($\begin{smallmatrix}22210\\1\end{smallmatrix}$ risp $\begin{smallmatrix}012222\\1\end{smallmatrix}$ не является корнем, поэтому $d(\lambda,\mu)=2$). Тогда для любого $\alpha \in \Phi^-$ выполнено $\mu-\alpha \notin \Lambda$. Значит, можно применять пункт а) леммы 4 для $\alpha \in \Phi^-$ таких, что $\lambda+\alpha \in \Lambda$. Так можно добиться, чтобы $\rho=\lambda+\alpha$ было любым другим весом таким, что $d(\rho,\mu)=2$, кроме $\rho=-\omega$ в случае $\mathrm{E}_6$, то есть получить $RA_{\lambda\mu} \subset A_{\rho\mu}$. Если же $\Phi=\mathrm{E}_6$ и $\rho=-\omega$, нужно действовать в два шага: сначала добиться $RA_{\lambda\mu} \subset A_{\rho\mu}$, где $\rho=\lambda-\begin{smallmatrix}01221\\1\end{smallmatrix}$, а затем перейти к $\rho-\begin{smallmatrix}00001\\0\end{smallmatrix}=-\omega$, то есть сопряжением с $x_{\alpha_6}(\pm 1)$ получить $RA_{\lambda\mu} \subset A_{\rho\mu} \subset A_{-\omega,\mu}$. Доказательство завершается так же, как в предыдущей лемме.

Теперь мы установим равенство идеалов $A_1$ и $A_2$. Для этого в следующих двух леммах доказываются включения в обе стороны. Интересно, что включение $A_1 \subset A_2$ легко получается теми же методами, что и предыдущие леммы в доказательстве теоремы 2. Обратное же включение потребует того, что $H$ *содержит* $\mathrm{E}(\Phi,R)$ (ранее мы использовали только то, что $H$ *нормализуется* $\mathrm{E}(\Phi,R)$), и возникнет ограничение $2,3\in R^*$.

**Лемма 8.** *$A_1\subseteq A_2$.*

**Доказательство.** Возьмем $\xi\in A_1$. По лемме 6 имеем $t_{\lambda\mu}(\xi)\in H$ для $\mu=\omega$ и $\lambda=\omega-\begin{smallmatrix}12210\\1\end{smallmatrix}$ risp $\lambda=\omega-\begin{smallmatrix}012221\\1\end{smallmatrix}$. В таком случае по лемме 4 $[t_{\lambda\mu}(\xi),x_{-\alpha_1}(1)]=t_{\lambda-\alpha_1,\mu}(\xi)$ risp $[t_{\lambda\mu}(\xi),x_{-\alpha_7}(1)]=t_{\lambda-\alpha_7,\mu}(\xi)$. Но так как $d(\lambda-\alpha_1,\mu)=2$ risp $d(\lambda-\alpha_7,\mu)=2$, то $\xi\in A_2$.

**Лемма 9.** *Если $2,3\in R^*$, то $A_2\subseteq A_1$.*

**Доказательство.** Сейчас нам придется посмотреть, что происходит при коммутировании трансвекции $t_{\lambda\mu}(\xi)$ с корневым элементом $x_\alpha(\zeta)$, если все еще $\lambda-\mu\neq\pm\alpha$, но $\lambda+\alpha$, $\mu-\alpha\in\Lambda$, где $\alpha\in\Phi$. Итак, возьмем $\xi\in A_2$, $\zeta\in R$ (на самом деле далее мы возьмем $\zeta=1$). Будем также считать, что $d(\lambda,\mu)=2$. Снова воспользовавшись техникой из доказательства теоремы 1, легко видеть, что

$$\begin{aligned}&[t_{\lambda\mu}(\xi),x_\alpha(\zeta)]=\\&(e+\xi e_{\lambda\mu}+(-1)^\varepsilon\xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha}+(-1)^\eta\zeta e_{\lambda+\alpha,\lambda}+(-1)^\varepsilon\zeta e_{\mu,\mu-\alpha})\cdot\\&(e-\xi e_{\lambda\mu}+(-1)^\varepsilon\xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha}-(-1)^\eta\zeta e_{\lambda+\alpha,\lambda}-(-1)^\varepsilon\zeta e_{\mu,\mu-\alpha})\\&\ =e+(-1)^\varepsilon\xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha}-(-1)^\eta\xi\zeta e_{\lambda+\alpha,\mu}+(-1)^{\varepsilon+\eta}\xi\zeta^2e_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}\in H.\end{aligned}\tag{1}$$

Заметим, что $d(\lambda+\alpha,\mu-\alpha)\geq 2$ (это легко проверить непосредственно: можно считать, что $\lambda=\omega-\begin{smallmatrix}22210\\1\end{smallmatrix}$ risp $\lambda=\omega-\begin{smallmatrix}012222\\1\end{smallmatrix}$ и что $\alpha=\alpha_1$ risp $\alpha=\alpha_7$, после чего взглянуть на диаграмму весов). Значит, по лемме 7 имеем $t_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}(\pm\xi\zeta^2)\in H$, и умножением на такой элемент можно добиться $e+(-1)^\varepsilon\xi\zeta e_{\lambda,\mu-\alpha}-(-1)^\eta\xi\zeta e_{\lambda+\alpha,\mu}\in H$. Итак, мы получили, что произведение двух трансвекций $t_{\lambda,\mu-\alpha}((-1)^\varepsilon\xi\zeta)t_{\lambda+\alpha,\mu}((-1)^{\eta+1}\xi\zeta)$ лежит в $H$. Но нам необходимо найти какую-нибудь *одну* трансвекцию, лежащую в $H$.

Теперь нас будут интересовать случаи, когда $\lambda-(\mu-\alpha)=(\lambda+\alpha)-\mu=\beta$, где $\beta\in\Phi$ – фиксированный корень. Идея состоит в том, чтобы рассмотреть все трансвекции $t_{\rho\sigma}(\dots)$, для которых $\rho-\sigma=\beta$. Очевидно, что количество $k$ таких пар $(\rho,\sigma)$ равно 6 risp 12. Обозначим их $(\rho_i,\sigma_i)$, $1\leq i\leq k$.

Последняя часть наших рассуждений несколько замысловата, поэтому мы сначала разберем случай $\Phi = \mathrm{E}_6$, а затем внесем изменения, необходимые для случая $\Phi = \mathrm{E}_7$.

## §6. Доказательство леммы 9: Случай $\Phi = \mathrm{E}_6$

Мы утверждаем, что для каждой *пары* таких пар $(\rho_i, \sigma_i)$ и $(\rho_j, \sigma_j)$ разность $\rho_i - \rho_j = \sigma_i - \sigma_j$ является корнем. Действительно, одна такая пара, скажем, $(\rho_i, \sigma_i)$ переводится элементом группы Вейля в пару $(\omega, \omega - \alpha_1)$. Тогда легко взглянуть на оставшиеся пять пар $(\rho_j, \sigma_j)$ на диаграмме весов и убедиться, что всегда $\rho_i - \rho_j = \omega - \rho_j$ будет корнем. Значит, можно применить наше вычисление, подставить $\zeta = 1$ и получить, что произведение трансвекций $t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm\xi)t_{\rho_j,\sigma_j}(\pm\xi)$ лежит в $H$ для любых $1 \le i, j \le 6$, $i \ne j$. В то же время, про знаки при $\xi$ мы пока ничего не говорили. Очевидно, есть два случая: когда в таком произведении знаки совпадают, и когда они различны. То есть можно считать, что произведение $t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)t_{\rho_j,\sigma_j}(\pm\xi)$ лежит в $H$.

Финальная идея доказательства выглядит так: поскольку корневой элемент $x_\beta$ есть произведение шести трансвекций

$$x_\beta(\xi) = \prod_{i=1}^{6} t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm\xi),$$

можно постараться из наших попарных произведений и этого произведения составить *одну* трансвекцию $t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm n\xi)$ с некоторым $n \in R^*$ и получить таким образом, что $\xi \in A_1$, что и требовалось. Теперь можно взять $\beta = \delta$, чтобы все знаки в выражении $x_\beta(\xi)$ были положительны.

Сейчас нам понадобятся некоторые факты относительно знаков действия корневого элемента $x_\alpha(1)$, потому что без всякого предположения о знаках реализация нашей финальной идеи невозможна. Нам понадобится теорема 1 из [22], в которой утверждается, что если $\alpha$ – простой корень или $-\alpha$ – простой корень, то все знаки в разложении $x_\alpha(1)$ на трансвекции равны единице. В нашем случае это означает, что в формуле (1) $\eta = \varepsilon = 0$. Таким образом, если $\alpha$ или $-\alpha$ – простой корень, то полученное с помощью $x_\alpha(1)$ произведение трансвекций имеет *разные* знаки при

$\xi$. Мы взяли $\beta = \delta$, и можно взять

$$\begin{gathered}\rho_1 = \omega, \quad \rho_2 = \omega - \begin{smallmatrix}10000\\0\end{smallmatrix},\\ \rho_3 = \omega - \begin{smallmatrix}11000\\0\end{smallmatrix}, \quad \rho_4 = \omega - \begin{smallmatrix}11100\\0\end{smallmatrix},\\ \rho_5 = \omega - \begin{smallmatrix}11110\\0\end{smallmatrix}, \quad \rho_6 = \omega - \begin{smallmatrix}11111\\0\end{smallmatrix},\\ \sigma_i = \rho_i - \delta, \quad 1 \le i \le 6.\end{gathered}$$

Теперь заметим, что когда мы составляем произведение трансвекций

$$t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)t_{\rho_{i+1},\sigma_{i+1}}(\pm\xi),$$

мы используем коммутирование при помощи $x_\alpha$, где $\alpha = \rho_i - \rho_{i+1}$ всегда является простым корнем. Значит, мы получим следующие произведения:

$$\begin{gathered}y_1 = t_{\rho_1,\sigma_1}(\xi)t_{\rho_2,\sigma_2}(-\xi) \in H, \quad y_2 = t_{\rho_2,\sigma_2}(\xi)t_{\rho_3,\sigma_3}(-\xi) \in H,\\ y_3 = t_{\rho_3,\sigma_3}(\xi)t_{\rho_4,\sigma_4}(-\xi) \in H, \quad y_4 = t_{\rho_4,\sigma_4}(\xi)t_{\rho_5,\sigma_5}(-\xi) \in H,\\ y_5 = t_{\rho_5,\sigma_5}(\xi)t_{\rho_6,\sigma_6}(-\xi) \in H.\end{gathered}$$

Посмотрим на произведение $h = y_1 y_2^2 y_3^3 y_4^4 y_5^5 x_\beta(-\xi) \in H$. Несложно понять, что $h = t_{\rho_6,\sigma_6}(-6\xi)$, откуда $6\xi \in A_1$ и, следовательно, $\xi \in A_1$, что завершает доказательство в рассматриваемом случае.

## §7. Доказательство леммы 9: Случай $\Phi = \mathrm{E}_7$

Теперь мы не можем утверждать, что для *каждой пары* пар $(\rho_i, \sigma_i)$ и $(\rho_j, \sigma_j)$ разность $\rho_i - \rho_j = \sigma_i - \sigma_j$ является корнем. Если посмотреть на пару $(\rho_i, \sigma_i) = (\omega, \omega - \alpha_7)$, то эта разность является корнем только для десяти из оставшихся одиннадцати пар $(\rho_j, \sigma_j)$. Но нетрудно заметить, что в доказательстве для $\Phi = \mathrm{E}_6$ мы использовали не все возможные комбинации таких пар, а только пять штук, из которых “составлялись” элементы $y_1$, $y_2$, $y_3$, $y_4$, $y_5$. Сейчас мы покажем, что в случае $E_7$ нам понадобится ровно одиннадцать подобных комбинаций. Итак, точно так же, как и выше, можно показать, что произведение трансвекций $t_{\rho_i,\sigma_i}(\pm\xi)t_{\rho_j,\sigma_j}(\pm\xi)$ лежит в $H$ для тех $i$, $j$, для которых разность $\rho_i - \rho_j = \sigma_i - \sigma_j$ является корнем.

Финальная идея доказательства, описанная в предыдущем параграфе, применяется к нашему случаю следующим образом. Мы снова берем $\beta = \delta$, чтобы все знаки в недиагональных матричных элементах $x_\beta(\xi)$ были положительны, и, пользуясь теоремой 1 из [22], получаем, что если $\alpha$ или $-\alpha$ – простой корень, то знаки для $x_\alpha(1)$ также равны единице, благодаря чему в формуле (1) для этих случаев $\eta = \varepsilon = 0$. Теперь берем

$$\rho_1 = \omega, \quad \rho_2 = \omega - \begin{smallmatrix}000001\\0\end{smallmatrix}, \quad \rho_3 = \omega - \begin{smallmatrix}000011\\0\end{smallmatrix},$$
$$\rho_4 = \omega - \begin{smallmatrix}000111\\0\end{smallmatrix}, \quad \rho_5 = \omega - \begin{smallmatrix}001111\\0\end{smallmatrix}, \quad \rho_6 = \omega - \begin{smallmatrix}011111\\0\end{smallmatrix},$$
$$\rho_7 = \omega - \begin{smallmatrix}001111\\1\end{smallmatrix}, \quad \rho_8 = \omega - \begin{smallmatrix}011111\\1\end{smallmatrix}, \quad \rho_9 = \omega - \begin{smallmatrix}012111\\1\end{smallmatrix},$$
$$\rho_{10} = \omega - \begin{smallmatrix}012211\\1\end{smallmatrix}, \quad \rho_{11} = \omega - \begin{smallmatrix}012221\\1\end{smallmatrix}, \quad \rho_{12} = \omega - \begin{smallmatrix}012222\\1\end{smallmatrix},$$
$$\sigma_i = \rho_i - \delta, \quad 1 \leq i \leq 6.$$

Когда мы составляем произведение трансвекций для последовательных пар $(\rho_i, \sigma_i)$, $(\rho_{i+1}, \sigma_{i+1})$, получаем

$$t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi) t_{\rho_{i+1},\sigma_{i+1}}(\pm\xi),$$

и мы используем коммутирование при помощи $x_\alpha$, где $\alpha = \rho_i - \rho_{i+1}$ является простым корнем для всех $i$, $1 \leq i \leq 11$, кроме $i = 6$. Кроме этого,

$$t_{\rho_5,\sigma_5}(\xi) t_{\rho_7,\sigma_7}(\pm\xi)$$

получается коммутированием при помощи $x_{\alpha_2}$. Итак, поскольку используются простые корни, то мы имеем произведения $y_i = t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi) t_{\rho_{i+1},\sigma_{i+1}}(-\xi) \in H$, где $1 \leq i \leq 11$, $i \neq 6$. Положим также $y_6 = t_{\rho_5,\sigma_5}(\xi) t_{\rho_7,\sigma_7}(-\xi)$. Теперь остается посмотреть на произведение

$$h = y_1^1 y_2^2 y_3^3 y_4^4 y_5^{-1} y_6^6 y_7^7 y_8^8 y_9^9 y_{10}^{10} y_{11}^{11} x_\alpha(-\xi) \in H.$$

Несложно понять, что $h = t_{\rho_{12},\sigma_{12}}(-12\xi)$ (здесь точно так же, как в случае $\Phi = \mathrm{E}_6$, используется разложение $x_\beta(-\xi)$ в произведение двенадцати трансвекций $t_{\rho_i,\sigma_i}(\xi)$), откуда $12\xi \in A_1$ и, следовательно, $\xi \in A_1$. Лемма доказана.

## §8. Окончание доказательства теоремы 2

Заметим, что доказательство теоремы 2 для случая $\Phi = \mathrm{E}_6$ было закончено (еще в параграфе 6), потому что 2 – максимальное расстояние между весами микровесового представления $\mathrm{E}_6$. В случае $\Phi = \mathrm{E}_7$ придется еще немного потрудиться, чтобы включить случай расстояния, равного трем. Обозначим $A = A_1 = A_2$.

**Лемма 10.** *Если* $\lambda,\mu\in\lambda$ *и* $d(\lambda,\mu)=3$, *то* $A\subset A_{\lambda\mu}$.

**Доказательство.** Эта лемма доказывается почти так же, как лемма 8. Любая пара весов $(\lambda,\mu)$ на расстоянии 3 переводится элементом группы Вейля в пару $(\omega,-\omega)$. Поэтому мы будем считать, что $\lambda=-\omega$, $\mu=\omega$. По доказанному $t_{\lambda+\alpha_7,\mu}(1)\in H$. Воспользовавшись леммой 4, видим, что $[t_{\lambda+a_7,\mu}(1),x_{-\alpha_7}(\pm\zeta)]=t_{\lambda,\mu}(\zeta)$ при надлежащем выборе знака, откуда $\zeta\in A_{\lambda\mu}$.

**Лемма 11.** *Если* $\lambda,\mu,\rho,\sigma\in\lambda$ *и* $d(\lambda,\mu)=d(\rho,\sigma)=3$, *то* $A_{\lambda\mu}\subset A_{\rho\sigma}$.

**Доказательство.** Здесь, как и в начале доказательства леммы 9, мы коммутируем элемент $t_{\lambda\mu}(\xi)$ с $x_\alpha(\zeta)$ (см. формулу (1)), где $\xi\in A_{\lambda\mu}$, $\zeta\in R$, $\alpha\in\Phi$. Снова будем записывать ограничения наших матриц на четырехмерное подпространство $W$, порожденное базисными векторами, отвечающими весам $\mu,\mu-\alpha,\lambda+\alpha,\lambda$ (в указанном порядке). Также будем считать, что $\alpha$ или $-\alpha$ – простой корень, поэтому недиагональные матричные элементы в $x_\alpha(\zeta)$ имеют одинаковые знаки. Тогда формула (1) с учетом данных о знаках утверждает, что матрица ограничения элемента $h_1=[t_{\lambda\mu}(\xi),x_\alpha(\zeta)]$ имеет вид

$$\widetilde{h_1}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\-\xi\zeta&\xi\zeta^2&1&0\\0&\xi\zeta&0&1\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Теперь подставим в полученное выражение $\zeta=1$, поменяем знак у $\xi$ и прокоммутируем результат с $x_{-\alpha}(\zeta)$. Заметим, что при нашем выборе $\alpha$ недиагональные матричные элементы в $x_{-\alpha}(\zeta)$ снова имеют одинаковые знаки. Обозначим результат $h_2=[[t_{\lambda\mu}(-\xi),x_\alpha(1)],x_{-\alpha}(\zeta)]$. Вычисления показывают, что

$$\widetilde{h_2}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\\xi\zeta&0&1&0\\2\xi\zeta+\xi\zeta^2&-\xi\zeta&0&1\end{pmatrix}.$$

Так как по построению $h_1,h_2\in H$, то и произведение $h=h_1h_2t_{\lambda\mu}(-2\xi\zeta-\xi\zeta^2)$ лежит в $H$ и имеет вид

$$\widetilde{h}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&\xi\zeta^2&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}.$$

В частном случае $\zeta = 1$ получаем, что $t_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}(\xi)$ лежит в $H$. Легко видеть, что расстояние между $\lambda+\alpha$ и $\mu-\alpha$ равно трем. Действительно, два веса на расстоянии 3 соответствуют точкам в диаграмме, симметричным относительно центра, и если $\lambda$ и $\mu$ были симметричны, то $\lambda+\alpha$ и $\mu-\alpha$ останутся симметричными. Итак, мы получили, что $\xi \in A_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}$, откуда $A_{\lambda\mu} \subset A_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}$.

Теперь уже нетрудно завершить доказательство леммы. Действительно, если мы можем брать в качестве $\alpha$ любой простой или противоположный простому корень, значит, можно “прошагать” по ребрам диаграммы и перейти от любой пары весов на расстоянии 3 к любой другой такой паре.

Обозначим через $A_3$ множество $A_{\lambda\mu}$ для $d(\lambda,\mu) = 3$. Заметим, что, в отличие от лемм 6 и 7, мы еще не показали, что $A_3$ является идеалом в $R$. Мы и не будем доказывать этого напрямую, а лишь покажем совпадение аддитивной подгруппы $A_3$ и идеала $A$. Включение $A \subset A_3$ показано в лемме 10, и сейчас мы докажем обратное.

**Лемма 12.** *$A_3 \subset A$.*

**Доказательство.** Возьмем $\xi \in A_3$. Для наглядности зафиксируем веса $\lambda = -\omega$, $\mu = \omega$, $\alpha = \alpha_7$. Воспользуемся обозначениями из доказательства предыдущей леммы: $h_1 = [t_{\lambda\mu}(\xi), x_\alpha(\zeta)]$. Возьмем $\zeta = 1$, тогда из формулы (2) легко видеть, что после умножения $h_1$ на $t_{\lambda+\alpha,\mu-\alpha}(-\xi)$ получится элемент $h = e - \xi e_{\lambda+\alpha,\mu} + \xi e_{\lambda,\mu-\alpha}$. К счастью, в нашем случае $d(\lambda+\alpha,\mu) = d(\lambda,\mu-\alpha) = 2$, поэтому нам не придется снова проводить головокружительные трюки в духе доказательства леммы 9. Достаточно взять $\beta = \alpha_6$ и посмотреть на элемент $[h, x_\beta(1)] \in H$ (явный вид элемента $x_\beta(1)$ нам известен, потому что $\beta$ – простой корень). Несложное вычисление показывает, что $[h, x_\beta(1)] = e + \xi e_{\lambda,\mu-\alpha-\beta}$, а так как $d(\lambda,\mu-\alpha-\beta) = 2$, то получаем $\xi \in A$, что доказывает лемму, а вместе с ней и теорему 2.

## §9. Доказательство теоремы 4

Здесь мы докажем, что группа, естественным образом появившаяся в теореме 3, является совершенной. Пусть $n = 27$ risp $n = 56$, $E = \mathrm{EE}_6(27,R,A)$ risp $E = \mathrm{EE}_7(56,R,A)$. Так как группа $\mathrm{E}(\Phi,R)$ совершенна (см. [22, 7, 12]), то достаточно доказать, что образующие группы $\mathrm{E}(n,R,A)$ лежат в $[E,E]$. Возьмем

$x=z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)$, где, как обычно,

$$z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)={}^{t_{\mu\lambda}(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi),\quad \xi\in A,\zeta\in R.$$

Из теоремы 1 следует, что $x\in \mathrm{E}(n,A)^{\mathrm{E}(\Phi,R)}$, то есть $x$ можно представить в виде произведения

$$x=\prod_i x_iy_ix_i^{-1},\qquad \text{где } x_i\in \mathrm{E}(\Phi,R), y_i\in \mathrm{E}(n,A)\subset \mathrm{E}(n,R,A).$$

Тогда $x=\prod_i[x_i,y_i]y_i$, и для любого $i$ коммутатор $[x_i,y_i]$ лежит в $[E,E]$. Остается доказать, что $\mathrm{E}(n,A)\subset[E,E]$, а это легко следует из леммы 4 в доказательстве теоремы 2. Действительно, возьмем $t_{\rho\sigma}(\xi)\in \mathrm{E}(n,A)$ и попытаемся найти такие $\lambda,\mu\in\Lambda$, $\alpha\in\Phi$, чтобы выполнялось условие пункта а) леммы 4 и при этом $\lambda+\alpha=\rho$, $\mu=\sigma$, Если это удастся, то мы получим $t_{\rho\sigma}(\xi)=[t_{\lambda\mu}(\xi),x_\alpha(\pm1)]\in[\mathrm{E}(n,A),\mathrm{E}(\Phi,R)]\subset[E,E]$.

Для этого можно считать, что $\mu=\sigma=\omega$ – старший вес. Если $\rho\neq\omega-\alpha_1$ risp $\rho\neq\omega-\alpha_7$, то можно взять простой корень $\beta$ такой, что $\rho+\beta\in\Lambda$ и положить $\lambda=\rho+\beta$, $\alpha=-\beta$. Тогда $\lambda+\alpha=\rho$, $\mu-\alpha\notin\Lambda$, потому что $\alpha\in\Phi^-$, а $\mu$ – максимальный вес. Легко понять, что $\lambda\neq\mu$, $\lambda-\mu\neq\pm\alpha$ (поскольку может быть только $\lambda-\mu=\alpha$, но тогда $\lambda-\alpha$, $\lambda$, $\lambda+\alpha\in\Lambda$, чего не может быть).

Осталось рассмотреть случай $\sigma=\omega$, $\rho=\omega-\alpha_1$ risp $\rho=\omega-\alpha_7$. Но тогда можно взять $\alpha=\alpha_3$ risp $\alpha=\alpha_6$ и $\lambda=\rho-\alpha$ и убедиться, что все условия для применения леммы 4 выполнены. Это завершает доказательство.

## §10. Вложение $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7,R)$ в симплектическую группу

Этот параграф посвящен описанию вложения $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7,R)$ в некоторую симплектическую группу матриц порядка 56. Заметим, что мы уже вложили $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7,R)$ в полную линейную группу $\mathrm{GL}(56,R)$, поэтому мы будем строить симплектическую билинейную форму $\varphi$ в имеющемся базисе. Весовая диаграмма нашего представления $\mathrm{E}_7$ симметрична: каждому весу $\lambda$ соответствует симметричный вес $-\lambda$. Положим симплектическое произведение $\varphi(v^\lambda,v^\mu)=0$, если $\mu\neq-\lambda$. В случае $\mu=-\lambda$ представим $\omega-\lambda$ в виде суммы простых корней. Число слагаемых в полученной сумме – это “расстояние” от веса $\lambda$ до старшего веса $\omega$ на весовой диаграмме, то есть количество ребер в минимальном пути между ними (в отличие от введенного ранее расстояния $d$ –

расстояния в *весовом графе*). На время обозначим эту величину $d'(\omega,\lambda)$. Нам понадобится только четность этой величины: обозначим $\varepsilon_\lambda = (-1)^{d'(\omega,\lambda)}$; иногда мы будем называть $\varepsilon_\lambda$ *знаком* веса $\lambda$ (если не возникает двусмысленностей). Нетрудно понять, что $\varepsilon_{-\lambda} = -\varepsilon_\lambda$, так что это название имеет некоторый смысл. Итак, положим $\varphi(v_\lambda, v_{-\lambda}) = \varepsilon_\lambda$.

Очевидно, что, задав произведение на базисных векторах, мы получим некоторую симплектическую билинейную форму на всем пространстве представления, и, следовательно, соответствующую симплектическую группу. Напомним, как выглядят симплектические трансвекции:

$$T_{\lambda\mu}(\xi) = T_{-\mu,-\lambda}(-\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu\xi) = \begin{cases} t_{\lambda\mu}(\xi)t_{-\mu,-\lambda}(-\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu\xi), & \text{если } \mu \neq -\lambda; \\ t_{\lambda,-\lambda}(\xi), & \text{если } \mu = -\lambda. \end{cases}$$

Мы будем говорить, что трансвекция $T_{\lambda\mu}(\xi)$ *соответствует короткому корню* (*"short root transvection"*), если $\mu \neq -\lambda$, и *соответствует длинному корню* (*"long root transvection"*), если $\mu = -\lambda$.

Мы часто без специальных оговорок будем пользоваться коммутационной формулой Шевалле для симплектических трансвекций. Приведем ее важнейшие случаи:

$$\begin{aligned} [T_{\lambda\mu}(\xi), T_{\mu\sigma}(\zeta)] &= T_{\lambda\sigma}(\xi\zeta), \quad \text{если } \lambda \neq \pm\mu,\ \mu \neq \pm\sigma,\ \lambda \neq \pm\sigma, \\ [T_{\lambda\mu}(\xi), T_{\mu,-\lambda}(\zeta)] &= T_{\lambda,-\lambda}(2\xi\zeta), \quad \text{если } \lambda \neq \pm\mu, \\ [T_{\lambda\mu}(\xi), T_{\mu,-\mu}(\zeta)] &= T_{\lambda,-\mu}(\xi\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(\varepsilon_\lambda\varepsilon_\mu\xi^2\zeta), \quad \text{если } \lambda \neq \pm\mu, \\ [T_{\lambda\mu}(\xi), T_{\rho\sigma}(\zeta)] &= 1, \quad \text{если } \lambda \neq \mu,\ \rho \neq \sigma,\ \mu \neq \rho, \\ &\qquad \lambda \neq \sigma,\ \mu \neq -\sigma,\ \lambda \neq -\rho. \end{aligned}$$

Остальные случаи формулы Шевалле легко получаются из приведенных. Соответствующую этой симплектической форме элементарную симплектическую группу мы будем обозначать $\mathrm{Ep}(56,R) = \langle T_{\lambda\mu}(\xi), \lambda \neq \mu, \xi \in R\rangle$, а $\mathrm{Ep}(56,R,A) = \mathrm{Ep}(56,A)^{\mathrm{Ep}(56,R)}$, где $\mathrm{Ep}(56,A) = \langle T_{\lambda\mu}(\xi), \lambda \neq \mu, \xi \in A\rangle$ для идеала $A \trianglelefteq R$.

Теперь проверим, что группа $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$ действительно лежит в построенной симплектической группе $\mathrm{Ep}(56,R)$. Достаточно доказать, что $x_\alpha(\xi) \in \mathrm{Ep}(56,R)$ при $\xi \in R$, $\alpha \in \mathrm{E}_7$. На самом деле даже достаточно проверить это только для *простых* корней $\alpha \in \mathrm{E}_7$ (в силу коммутационной формулы Шевалле). Мы покажем, что для простого корня $\alpha$ корневой элемент $x_\alpha(\xi)$ есть произведение шести симплектических трансвекций. Действительно, глядя на весовую диаграмму, легко понять, что ребро, помеченное $\alpha$, встречается 12 раз симметричным образом, то есть имеется 6 пар таких ребер, и в каждой паре ребра симметричны. Возьмем одну такую пару: пусть это ребра $(\lambda, \mu)$ и $(-\mu, -\lambda)$, где $\mu - \lambda = \alpha$. Рассмотрим симплектическую трансвекцию $T_{\mu\lambda}(1) = t_{\mu\lambda}(1)t_{-\lambda,-\mu}(1)$ (это так, поскольку веса $\lambda$ и $\mu$ соседние, значит, $\varepsilon_\mu = -\varepsilon_\lambda$). Но это ровно те две (элементарные) трансвекции, соответствующие взятой паре ребер, которые входят в разложение $x_\alpha$, поскольку у этого корневого элемента все знаки действия равны $+1$. Таким образом можно поступить с каждой парой ребер и написать 6 симплектических трансвекций, соответствующих коротким корням.

Мы получили, что $x_\alpha(\xi) \in \mathrm{Ep}(56, R)$, откуда $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R) \subset \mathrm{Ep}(56, R)$. Теперь мы покажем, что для *произвольного* корня $\alpha \in \mathrm{E}_7$ корневой элемент $x_\alpha(\xi)$ является произведением ровно шести симплектических трансвекций. Мы можем, как и выше, разбить все пары весов $(\lambda, \mu)$, для которых $\mu - \lambda = \alpha$, на 6 пар, в каждую из которых входят веса $(\lambda, \mu)$ и $(-\mu, -\lambda)$. Но мы уже знаем, что $x_\alpha(\xi)$ лежит в симплектической группе, поэтому этот элемент должен удовлетворять некоторым простым уравнениям. Несложными вычислениями легко получить, что знаки действия в этих парах согласованы нужным образом, то есть таковы же, как в симплектической трансвекции $T_{\lambda\mu}(\pm 1)$.

## § 11. Доказательство теоремы 5

Итак, мы начнем доказательство, стараясь вести его параллельно доказательству теоремы 1.

**Доказательство.** Очевидно, что левая часть содержится в правой. Для доказательства обратного включения вспомним, что при $n \geq 3$ группа $\mathrm{Ep}(n, R, A)$ порождается всеми трансвекциями вида $Z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) = {}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\lambda\mu}(\xi)$ для $\xi \in A, \zeta \in R$, $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$ (см. [21]). Таким образом, достаточно убедиться, что $Z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta)$ содержится в $H = \mathrm{Ep}(n, A)^{\mathrm{E}(\Phi, R)}$. Доказательство этого содержится в леммах 13, 14 и 15; в лемме $12 + i$ мы разбираем случай $d(\lambda, \mu) = i$, $i = 1, 2, 3$. Очевидно, что в нашем представлении 3 – это максимальное расстояние между весами, и теорема доказана, как только проверена справедливость следующих лемм.

**Лемма 13.** *Пусть* $d(\lambda,\mu)=1$. *Тогда* ${}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\rho\sigma}(\xi)\in H$ *для любых* $\rho$, $\sigma\in\Lambda$. *В частности,* $Z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)\in H$.

**Доказательство.** Сначала рассмотрим случай $\rho=\lambda$, $\sigma=\mu$ и обозначим $\alpha=\mu-\lambda$:

$$Z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)={}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\lambda\mu}(\xi).$$

Теперь вспомним, что в теореме 1 мы достигали успеха, рассматривая выражение ${}^{x_\alpha(\zeta)}t_{\lambda\mu}(\xi)$. Давайте посмотрим, на что можно рассчитывать теперь. Из обсуждения в параграфе 10 мы знаем, что корневой элемент $x_\alpha(\zeta)$ раскладывается в произведение шести симплектических трансвекций:

$$x_\alpha(\zeta)=\prod_{i=1}^{6}T_{\rho_i\sigma_i}(\pm\zeta).$$

Но при сопряжении с помощью $x_\alpha$ играет роль ровно одна трансвекция:

$${}^{x_\alpha(\zeta)}T_{\lambda\mu}(\xi)={}^{T_{\mu\lambda}(\pm\zeta)}T_{\lambda\mu}(\xi).$$

Это происходит по той же причине, что и в доказательстве теоремы 1: представление микровесовое, и из всех $T_{\rho_i,\sigma_i}$, входящих в разложение $x_\alpha(\zeta)$, имеют значение лишь те, которые "взаимодействуют" с весами $\pm\lambda$ и $\pm\mu$, то есть ровно те, которые образуют симплектическую трансвекцию $T_{\mu\lambda}(\pm\zeta)$: остальные коммутируют с $T_{\lambda\mu}(\xi)$ в силу коммутационной формулы Шевалле. Необходимый результат получен: при необходимости меняя знак у $\zeta$ в $x_\alpha(\pm\zeta)$, добиваемся, чтобы это выражение в точности совпадало с $Z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta)$.

Теперь перейдем к общему случаю: $\rho\neq\lambda$ или $\sigma\neq\mu$. Здесь придется рассматривать больше случаев, нежели при доказательстве теоремы 1. Пусть для начала $\rho=\lambda$, но $\sigma\neq\mu$. Нетрудно проверить, что

$${}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\lambda,-\lambda}(\xi)=T_{\mu,-\lambda}(\xi\zeta)\cdot T_{\mu,-\mu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)\cdot T_{\lambda,-\lambda}(\xi)\in H;\quad \text{и}$$
$${}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\lambda\sigma}(\xi)=T_{\mu\sigma}(\xi\zeta)\cdot T_{\rho\sigma}(\xi)\in H,\quad \text{если } \sigma\neq-\lambda.$$

Аналогично рассматривается случай $\sigma=\mu$ и $\rho\neq\lambda$. Необходимо также рассмотреть случаи $\rho=-\mu$ и $\sigma=-\lambda$. Пусть, например, выполняется $\sigma=-\lambda$, тогда если $\rho=\lambda$, приходим к рассмотренному выше случаю. Если же $\rho\neq-\lambda$, то $T_{\rho\sigma}(\xi)$ – трансвекция, соответствующая короткому корню, следовательно, ее можно переписать в виде $T_{-\sigma,-\rho}(-\varepsilon_\rho\varepsilon_\sigma\xi) = T_{\lambda,-\rho}(-\varepsilon_\sigma\varepsilon_\rho\xi)$, и такой случай мы уже рассмотрели. Понятно, что в случае $\rho = \mu$ все абсолютно аналогично. Во всех же остальных случаях симплектические трансвекции $T_{\mu\lambda}(\zeta)$ и $T_{\rho\sigma}(\xi)$ коммутируют.

**Следствие.** *Пусть* $d(\lambda, \mu) = 1$. *Тогда* $Ep(56, A)^{T_{\mu\lambda}(\zeta)} \le H$.

**Лемма 14.** *Пусть* $d(\lambda, \mu) = 2$. *Тогда* $Z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) \in H$.

**Доказательство.** Посмотрим повнимательнее на то, что произошло в ходе доказательства аналогичной леммы 2. Мы будем свободно пользоваться всеми обозначениями, введенными для этого доказательства. Несложными выкладками мы сводим задачу к доказательству того, что некоторый элемент $g$ лежит в $H$. При этом мы вводим “вспомогательный” элемент $h \in H$ такой, что $g = {}^{t_{\nu\mu}(1)}h$ и фактически доказываем, что $t_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2) \cdot {}^{x_\alpha(1)}h = g$. Для того, чтобы это доказать, мы заметили, что все самое интересное происходит в подпространстве, порожденном векторами $v^\lambda$, $v^\nu$, $v^\mu$, $v^\kappa$, после чего работали с матрицами порядка 4. На самом деле эти прямые вычисления с матрицами можно формально записать как некоторые преобразования произведения трансвекций. Действительно, немного повозившись, мы сможем получить требуемое равенство, пользуясь лишь элементарными соотношениями между трансвекциями и коммутационной формулой Шевалле, то есть фактически проводя вычисления в группе Стейнберга. В расписанном виде это равенство выглядит так:

$$t_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)t_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2) \cdot {}^{t_{\lambda\kappa}(1)t_{\nu\mu}(1)}h = {}^{t_{\nu\mu}(1)}h,$$

где $h = t_{\nu\lambda}(-\zeta)t_{\mu\nu}(-\xi\zeta)t_{\lambda\nu}(-\xi)t_{\nu\lambda}(\zeta)$ (мы просто раскрыли выражение для $g$ и написали вместо элемента $x_\alpha(1)$ его ограничение на наше четырехмерное подпространство).

Сейчас мы займемся тем, что введем в действие симплектические трансвекции вместо элементарных. Ключевое наблюдение состоит в том, что фактически в нашем доказательстве ничего не меняется – ведь коммутационная формула Шевалле остается справедливой, пока в наших вычислениях участвуют только трансвекции, соответствующие коротким корням. Итак, полностью переписав доказательство вышеприведенного равенства с заменой элементарных трансвекций на симплектические, получаем результат:

$$T_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)T_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2)\cdot {}^{T_{\lambda\kappa}(1)T_{\nu\mu}(1)}h = {}^{T_{\nu\mu}(1)}h,$$

где

$$h = T_{\nu\lambda}(-\zeta)T_{\mu\nu}(-\xi\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)T_{\nu\lambda}(\zeta).$$

Теперь вспомним, что произведение $t_{\lambda\kappa}(1)t_{\nu\mu}(1)$ появлялось из разложения корневого элемента $x_\alpha(1)$ в произведение элементарных трансвекций. Совершенно аналогично произведение $T_{\lambda\kappa}(1)T_{\nu\mu}(1)$ – это ограничение действия $x_\alpha(1)$ на восьмимерное подпространство, порожденное векторами $v^\lambda$, $v^\nu$, $v^\mu$, $v^\kappa$, $v^{-\kappa}$, $v^{-\mu}$, $v^{-\nu}$, $v^{-\lambda}$, потому что этот корневой элемент является произведением шести симплектических трансвекций, ровно две из которых действуют в выбранном подпространстве.

Все эти действия законны, поскольку попарные расстояния между весами $\kappa$, $\lambda$, $\mu$ и $\nu$ не превосходят 2; поэтому все получающиеся в процессе вычисления симплектические трансвекции действительно будут соответствовать коротким корням.

Так же, как и в доказательстве леммы 2, мы до сих пор рассматривали только один случай распределения знаков действия $x_\alpha(1)$. Здесь снова возможны ровно четыре таких случая, то есть ограничение $x_\alpha(1)$ на указанное подпространство в действительности имеет вид $T_{\lambda\kappa}(\pm 1)T_{\nu\mu}(\pm 1)$. Как и прежде, их число сокращается до двух путем рассмотрения $x_\alpha(-1)$ вместо $x_\alpha(1)$, и оставшийся случай совершенно аналогичен рассмотренному с точностью до замены знака в аргументах дописанных трансвекций $T_{\lambda\kappa}(-\xi\zeta)T_{\mu\kappa}(-\xi\zeta^2)$. Доказательство леммы завершено.

**Лемма 15.** *Пусть $d(\lambda,\mu) = 3$. Тогда $Z_{\lambda\mu}(\xi,\zeta) \in H$.*

**Доказательство.** Мы снова используем все обозначения из аналогичной леммы 3. Как и при доказательстве предыдущей леммы, заменяем элементарные трансвекции на симплектические. Вычисления усложняются, поскольку теперь в игру вступают симплектические трансвекции, соответствующие длинным корням. Поскольку $d(\lambda,\mu) = 3$, мы будем, в соответствии с принятыми соглашениями, вместо $\mu$ писать $-\lambda$. Нам, как и в доказательстве леммы 3, понадобятся вспомогательные веса $\nu = -\lambda + \alpha$ и $-\nu = \lambda - \alpha$, где $\alpha$ – некоторый корень.

Итак, мы будем доказывать, что $Z_{\lambda,-\lambda}(\xi,\zeta) = {}^{T_{-\lambda,\lambda}(\zeta)}T_{\lambda,-\lambda}(\xi) \in H$, где $\zeta \in R$, $\xi \in A$. Для начала заметим, что обратимость двойки позволяет нам заменить $\xi$ на $2\xi$ и написать после этого $[T_{\lambda\nu}(\xi),T_{\nu,-\lambda}(1)]$ вместо $T_{\lambda,-\lambda}(2\xi)$. Таким образом,

$$\begin{aligned}
&Z_{\lambda,-\lambda}(\xi,\zeta)={}^{T_{-\lambda,\lambda}(\zeta)}[T_{\lambda\nu}(\xi),T_{\nu,-\lambda}(1)]\\
&=[[T_{-\lambda,\lambda}(\zeta),T_{\lambda\nu}(\xi)]T_{\lambda\nu}(\xi),[T_{-\lambda,\lambda}(\zeta),T_{\nu,-\lambda}(1)]T_{\nu,-\lambda}(1)]\\
&=[T_{-\lambda,\nu}(\xi\zeta)T_{-\nu,\nu}(-\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(\xi),T_{\nu,\lambda}(-\zeta)T_{\nu,-\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\zeta)T_{\nu,-\lambda}(1)].
\end{aligned}$$

Достаточно проверить, что

$$g={}^{T_{\nu,\lambda}(-\zeta)T_{\nu,-\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\zeta)T_{\nu,-\lambda}(1)}T_{-\lambda,\nu}(-\xi\zeta)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)\in H.$$

Обозначим $f=T_{\nu,\lambda}(-\zeta)T_{\nu,-\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\zeta)$, тогда

$$\begin{aligned}
g&=fT_{\nu,-\lambda}(1)T_{-\lambda,\nu}(-\xi\zeta)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)T_{\nu,-\lambda}(-1)f^{-1}\\
&=fT_{\nu,-\lambda}(1)T_{-\lambda,\nu}(-\xi\zeta)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\nu,-\lambda}(-1)T_{\lambda,-\lambda}(2\xi)T_{\lambda\nu}(-\xi)f^{-1}\\
&=fT_{\nu,-\lambda}(1)T_{-\lambda,\nu}(-\xi\zeta)T_{\lambda\nu}(\xi^2\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(\xi^2\zeta+2\xi)\cdot\\
&\qquad T_{\nu,-\lambda}(-1)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)f^{-1}\\
&=fT_{\nu,-\lambda}(1)T_{-\lambda,\nu}(-\xi\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(-2\xi^2\zeta)T_{\nu,-\lambda}(-1)\cdot\\
&\qquad T_{\lambda\nu}(\xi^2\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(\xi^2\zeta+2\xi)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)f^{-1}\\
&=fZ_{-\lambda,\nu}(\xi^2\zeta,1)T_{\lambda\nu}(\xi^2\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(-\xi^2\zeta+2\xi)\cdot\\
&\qquad T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi)f^{-1}={}^f h,
\end{aligned}$$

где

$$h=Z_{-\lambda,\nu}(\xi^2\zeta,1)T_{\lambda\nu}(\xi^2\zeta)T_{\lambda,-\lambda}(-\xi^2\zeta+2\xi)T_{-\nu,\nu}(\varepsilon_i\varepsilon_j\xi^2\zeta)T_{\lambda\nu}(-\xi).$$

Заметим, что $h\in H$ (расстояние между $-\lambda$ и $\nu$ равно 1, поэтому $Z_{-\lambda,\nu}(\xi^2\zeta,1)\in H$). Кроме того, $f=T_{\nu\lambda}(-\zeta)[T_{\nu\lambda}(\varepsilon_i\varepsilon_j\zeta),T_{\lambda,-\nu}(1)]$. Далее, можно расписать $T_{\nu\lambda}(\dots)$: поскольку $d(\nu,\lambda)=2$, можно найти вес $\tau$ такой, что $d(\nu,\tau)=d(\tau,\lambda)=1$. Тогда $T_{\nu\lambda}(x)=[T_{\nu\tau}(x),T_{\tau\lambda}(1)]$. Так мы добились того, что в разложение $f$ входят только такие симплектические трансвекции $T_{\rho\sigma}(\dots)$, для которых $\rho-\sigma$ является корнем. Теперь мы снова применим трюк с ограничением вычислений на четырехмерное пространство. Мы утверждаем, что сопряжения при помощи таких симплектических трансвекций, которые входят в $f$, это то же самое, что сопряжения при помощи *корневых элементов*, в разложения которых входят соответствующий трансвекции. То есть если в $f$ мы заменим каждую трансвекцию $T_{\rho\sigma}(x)$ на корневой элемент $x_{\rho-\sigma}(\pm x)$, то результат сопряжения $h$ при помощи $f$ не изменится. Знак в таком корневом элементе следует выбирать так, чтобы в разложение его на симплектические трансвекции входил множитель $T_{\rho\sigma}(x)$, а не $T_{\rho\sigma}(-x)$. Для начала посмотрим, что произойдет с $T_{\nu\lambda}(x)$. Мы заменили эту трансвекцию на $[T_{\nu\tau}(x), T_{\tau\lambda}(1)]$, а потом на $[x_{\nu-\tau}(\pm x), x_{\tau-\lambda}(\pm 1)]$. Теперь мысленно распишем каждый из этих корневых элементов в произведение шести симплектических трансвекций и посмотрим, что происходит в подпространстве, натянутом на весовые вектора $v^{\nu}$, $v^{\tau}$, $v^{\lambda}$, $v^{\kappa}$, $v^{-\nu}$, $v^{-\tau}$, $v^{-\lambda}$, $v^{-\kappa}$ (здесь $\kappa = \lambda + (\nu - \tau)$). Совершенно понятно, что будут "влиять" друг на друга только те симплектические трансвекции, действие которых заключено в этом подпространстве, а остальные будут коммутировать с ними и между собой. Рассуждения здесь точно такие же, как и в доказательстве теоремы 1, где мы постоянно применяли подобный трюк. Значит, $T_{\nu\lambda}(x)$ есть коммутатор двух корневых элементов, то есть лежит в $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$.

К сожалению, в $f$ осталась трансвекция $T_{\lambda,-\nu}(1)$, которая не лежит в $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$. Но итог наших вычислений включает сопряжение при помощи $f$, поэтому здесь снова можно применить наш трюк. Теперь нужно ограничиться рассмотрением четырехмерного подространства $W$, натянутого на $v^{\lambda}$, $v^{\nu}$, $v^{-\lambda}$ и $v^{-\nu}$. Рассуждения, аналогичные проведенным, показывают, что сопряжение при помощи $T_{\lambda,-\nu}(\dots)$ – это то же самое, что и сопряжение при помощи $x_{\lambda-(-\nu)}(\dots)$, если то, что мы сопрягаем, действует исключительно внутри подпространства $W$ (а так оно и есть, поскольку про все остальные множители, входящие в выражение для $g$, мы это показали).

Итак, мы получили, что сопряжение $h$ при помощи $f$ можно представить как последовательное сопряжение при помощи элементов $\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)$. Понятно, что такое сопряжение не выводит за пределы $H$, то есть $g = {}^f h \in H$, что и требовалось доказать.

## §12. Доказательство теоремы 6

Обозначим

$$E = \mathrm{EE}'_7(56, R, A, B) = \mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)\mathrm{E}(56, R, A)\,\mathrm{Ep}(56, R, B).$$

Из теоремы 4 видно, что осталось доказать лишь включение $\mathrm{Ep}(56, R, B) \subset [E, E]$, то есть, что образующие группы $\mathrm{Ep}(56, R, B)$ лежат в $[E, E]$. Возьмем $x = Z_{\lambda\mu}(\xi, \zeta) = {}^{T_{\mu\lambda}(\zeta)}T_{\lambda\mu}(\xi)$, где $\xi \in B$,

$\zeta \in R$. Из теоремы 1 следует, что $x \in \mathrm{Ep}(56, A)^{\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)}$, то есть $x$ можно представить в виде произведения

$$x = \prod_i x_i y_i x_i^{-1}, \quad \text{где} \quad x_i \in \mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R), y_i \in \mathrm{E}(56, B) \subset \mathrm{E}(56, R, B).$$

Тогда $x = \prod_i [x_i, y_i] y_i$, и для любого $i$ коммутатор $[x_i, y_i]$ лежит в $[E, E]$. Остается доказать, что $\mathrm{E}(56, B) \subset [E, E]$.

Возьмем трансвекцию $T_{\rho\sigma}(\xi) \in \mathrm{E}(56, B)$, соответствующую короткому корню (то есть $\rho \neq \pm\sigma$), и попытаемся найти такой корень $\alpha \in \mathrm{E}_7$, чтобы можно было применить коммутационную формулу Шевалле

$$T_{\rho\sigma}(\xi) = [T_{\rho,\rho-\alpha}(1), T_{\rho-\alpha,\sigma}(\xi)],$$

а потом попытаться заменить $T_{\rho,\rho-\alpha}(1)$ на $x_\alpha(\pm 1)$, чтобы получить

$$T_{\rho\sigma}(\xi) = [x_\alpha(\pm 1), T_{\rho-\alpha,\sigma}(\xi)] \in [\mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R), \mathrm{E}(56, B)] \subset [E, E].$$

Для того, чтобы применить коммутационную формулу Шевалле в таком виде, необходимо $-\rho \neq \rho - \alpha$ (это автоматически так, поскольку между противоположными весами всегда расстояние 3, а $\alpha$ – корень), $\rho \neq \pm\sigma$ (этого мы потребовали с самого начала), $\rho - \alpha \neq \pm\sigma$.

Для того, чтобы стал возможным второй шаг, замена $T_{\rho,\rho-\alpha}(1)$ на $x_\alpha(1)$, необходимо лишь, чтобы остальные трансвекции, получающиеся в разложении $x_\alpha(\pm 1)$, не повлияли на коммутирование с $T_{\rho-\alpha,\sigma}(\xi)$, то есть чтобы $\sigma - \alpha$ не являлось весом.

Можно считать, что $\sigma = \omega$ – старший вес, а потом перенести построение на любую другую ситуацию действием группы Вейля. Предположим, что $\rho \neq \sigma - \alpha_7$; тогда возьмем в качестве $\alpha$ такой отрицательный простой корень, чтобы $\rho - \alpha$ являлось весом (понятно, что такой существует, поскольку $\rho$ – не старший вес). Тогда очевидно, что $\rho - \alpha \neq \pm\sigma$ и $\sigma - \alpha$ весом не является, то есть все условия выполнены. Если же $\rho = \sigma - \alpha_7$, возьмем $\alpha = \alpha_6$, и необходимые условия снова тривиально проверяются.

Теперь рассмотрим трансвекцию $T_{\rho,-\rho}(\xi)$, соответствующую длинному корню ($\xi \in B$). Возьмем произвольный вес $\sigma$ такой, что $\sigma - (-\rho) = \alpha$ является корнем. Тогда $T_{\rho,-\rho}(\xi) = [T_{\rho\sigma}(\xi), T_{\sigma,-\rho}(2^{-1})] = [T_{\rho\sigma}(\xi), x_\alpha(\pm 2^{-1})] \in [\mathrm{E}(56, B), \mathrm{E}(\mathrm{E}_7, R)] \subset [E, E]$, что нетрудно проверить аналогичными рассуждениями. Теорема доказана.

Я хочу искренне поблагодарить своего научного руководителя Николая Александровича Вавилова за постоянную поддержку и помощь в данном исследовании. Именно под его руководством автор выполнил дипломную работу, положенную в основу данной статьи. Также я выражаю свою благодарность университету города Билефельда, в котором проходила часть работы над текстом, и Энтони Баку за руководство стажировкой и плодотворные беседы.

## Литература


1. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Главы* IV–VI. М., 1972.
2. Н. Бурбаки, *Группы и алгебры Ли, Главы* VII, VIII. М., 1978.
3. Н. А. Вавилов, М. Р. Гаврилович, *$A_2$-доказательство структурных теорем для групп Шевалле типов* $\mathrm{E}_6$ *и* $\mathrm{E}_7$. — Алгебра и анализ **16**, № 4 (2004), 54–87.
4. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(2l, R)$. — Записки научн. семин. ПОМИ **272** (2000), 68–85.
5. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{Ep}(2l, R)$. — Алгебра и анализ **15**, № 4 (2003), 72–114.
6. Н. А. Вавилов, В. А. Петров, *О надгруппах* $\mathrm{EO}(n, R)$. — Алгебра и анализ (2004), (в печати).
7. Н. А. Вавилов, Е. Б. Плоткин, А. В. Степанов, *Вычисления в группах Шевалле над коммутативными кольцами.* — Докл. АН СССР **40**, № 1 (1990), 145–147.
8. Р. Стейнберг, *Лекции о группах Шевалле.* М., 1975.
9. R. H. Dye, *Interrelations of symplectic and orthogonal groups in characteristic 2.* — J. Algebra **59** no. 1 (1979), 202–221.
10. R. H. Dye, *On the maximality of the orthogonal groups in the symplectic groups in characteristic two.* — Math. Z. **172** no. 3 (1980), 203–212.
11. R. H. Dye, *Maximal subgroups of* $\mathrm{GL}_{2n}(K)$, $\mathrm{SL}_{2n}(K)$, $\mathrm{PGL}_{2n}(K)$, $\mathrm{PSL}_{2n}(K)$ *associated with symplectic polarities.* — J. Algebra **66**, no. 1 (1980), 1–11.
12. R. Hazrat, N. A. Vavilov, $\mathrm{K}_1$ *of Chevalley groups are nilpotent.* — J. Pure Appl. Algebra **179** (2003), 99–116.
13. O. H. King, *On subgroups of the special linear group containing the special orthogonal group.* — J. Algebra **96**, no. 1 (1985), 178–193.
14. O. H. King, *On subgroups of the special linear group containing the special unitary group.* — Geom. Dedic. **19**, no. 3 (1985), 297–310.
15. Sh. Li, *Overgroups of* $\mathrm{SU}(n, K, f)$ *or* $\Omega(n, K, Q)$ *in* $\mathrm{GL}(n, K)$. — Geom. Dedic. **33**, no. 3 (1990), 241–250.
16. Sh. Li, *Overgroups of a unitary group in* $\mathrm{GL}(2, K)$. — J. Algebra **149**, no. 2 (1992), 275–286.
17. Sh. Li, *Overgroups in* $\mathrm{GL}(n, F)$ *of a classical group over a subfield of* $F$. — Algebra Colloq. **1**, no. 4 (1994), 335–346.
18. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* — Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 4ème sér. no. 2 (1969), 1–62.

19. V. Petrov, *Overgroups of unitary groups.* — K-Theory **29** (2003), 147–174.
20. M. R. Stein, *Stability theorems for* $\mathrm{K}_1$, $\mathrm{K}_2$ *and related functors modeled on Chevalley groups.* — Japan J. Math. **4** no. 1 (1978), 77–108.
21. J. Tits, *Systèmes générateurs de groupes de congruences.* — C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A **283** (1976), 693–695.
22. N. Vavilov, *A third look at weight diagrams.* — Rendiconti del Sem. Mat. Univ. Padova **104** (2000), 201–250.
23. N. A. Vavilov, *Structure of Chevalley groups over commutative rings.* Proc. Conf. Non-associative algebras and related topics (Hiroshima – 1990). London et al., World Sci. Publ., 1991, pp. 219–335.

Luzgarev A. Yu. On overgroups of $E(E_6, R)$ and $E(E_7, R)$ in their minimal representations.

The article is dedicated to description of overgroups of elementary Chevalley groups of types $E_6$ and $E_7$ in their minimal irreducible representations. One of the first step towards such description, namely construction of the series of perfect intermediate groups, is made. Probably all perfect intermediate groups for groups of type $E_6$ are described. The hypothesis concerning the structure of perfect overgroups of type $E_7$ is made.

Санкт-Петербургский
государственный университет

Поступило 21 октября 2004 г.