Отзыв
официального оппонента
о диссертации Лузгарева Александра Юрьевича
"Надгруппы исключительных групп",
представленной на соискание ученой степени кандидата
физико-математических наук по специальности
01.01.06-математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация посвящена актуальной проблеме – исследованию структуры подгрупп в группах Шевалле над кольцами. Появление групп Шевалле в середине XX века оказало большое влияние на развитие математики в целом и особенно в таких областях, как теория алгебраических групп и их представлений, теория конечных простых групп, К-теория. Уже в 50-60-х годах К. Шевалле, М. Демазюр, А. Гротендик построили групповые схемы над $\mathbb{Z}$, соответствующие группам Шевалле над полем, которые давали единый подход к изучению линейных алгебраических групп над коммутативными кольцами. Следует отметить, что группы над кольцами возникают во многих областях математики и ее приложений, например, калибровочные группы или группы токов (группы над кольцом регулярных функций на многообразии) применяются в теории нелинейных уравнений, в квантовой теории поля, в "струнных"моделях элементарных частиц.

Пусть Φ – система корней, $Q(\Phi)$ – решетка корней, $P(\Phi)$ – решетка весов. Зафиксируем решетку $P, Q(\Phi) \subseteq P \subseteq P(\Phi)$. Пусть π – неприводимое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$ на пространстве V с решеткой весов P, $\mathfrak{g}_{\mathbb{Z}}$ – решетка Шевалле, $V_{\mathbb{Z}}$ – допустимая решетка в V с базисом $\{v_\lambda\}$, $G = G_P(\Phi, \mathbb{C})$ – группа Шевалле над $\mathbb{C}$, соответствующая нашим данным. Матричные координатные функции x_{ij} в базисе $\{v_\lambda\}$ порождают подалгебру Хопфа над $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}[G]$, в алгебре регулярных функций на G. Для комутативного кольца R группа Шевалле $G_P(\Phi, R)$ определяется как группа R-значных точек схемы Шевалле над $\mathbb{Z}$, представленной алгеброй Хопфа $\mathbb{Z}[G]$. Группа $G_P(\Phi, R)$ естественно действует на свободном R-модуле $V_R = V_{\mathbb{Z}} \otimes R$. Элементарная группа Шевалле типа Φ над кольцом R, обозначаемая через $E_P(\Phi, R)$, является группой автоморфизмов R-модуля V_R, порожденной корневыми элементами $x_\alpha(t) = \sum_{i\geq 0} t^i(\pi(e_\alpha))^i/i!$, $t \in R$, где e_α – корневой вектор из базиса Шевалле алгебры $\mathfrak{g}_{\mathbb{C}}$.

Очевидно, $E_P(\Phi, R) \subseteq G_P(\Phi, R)$. Соответствующие односвязные группы, т.е. когда $P = P(\Phi)$, обозначаются через $E(\Phi, R)$ и $G(\Phi, R)$. Пусть θ –представление группы $G(\Phi_1, R)$ в группе $G(\Phi_2, R)$. Подгруппы в $G(\Phi_2, R)$, содержащие $\theta(E(\Phi_1, R))$, называются надгруппами элементарной группы $E(\Phi_1, R)$ в группе $G(\Phi_2, R)$. В диссертации исследуются надгруппы элементарных исключительных групп Шевалле типов E_6, E_7 в минимальных представлениях размерностей 27 и 56,сответствующих фундаментальным весам ω_1 и ω_7, и элементарной группы типа F_4 в группе Шевалле типа E_6. Задача описания надгрупп групп Шевалле представляет значительный интерес в связи с теоремой М. Ашбахера о строении подгрупп в конечных классических группах и проблемой классификации максимальных подпрупп конечных простых групп. Для групп лиевского типа эта проблема связана с классификацией максимальных подгрупп алгебраических групп над алгебрачески замкнутым полем. В этом направлении получено много результатов. В частности, в работах М. Либека и Г. Зейтца исследовались надгруппы классических подгрупп в исключительных группах Шевалле над полем, конечным или алгебраически замкнутым. Первые результаты о надгруппах в группах Шевалле над коммутативными кольцами были получены З.И. Боревичем и его учениками в 80-х годах. Они получили описание надгрупп клеточно-диагональных подгрупп в классических группах. Надгруппы элементарных групп в группах Шевалле над кольцами интенсивно изучаются с начала 80-х годов. Центральные результаты были получены в петербургской и московской математических школах (Н.А. Вавилов,А.А. Суслин, В.И. Копейко, А.В. Степанов, В.А. Петров, Л.Н. Васерштейн, А.В. Михалев, И.З. Голубчик,С.Г. Хлебутин и др.). Однако, в основном, рассматривались классические группы. Так, Н.А. Вавиловым и В.А. Петровым, а также Хон Ю было получено стандартное описание надгрупп симплектической и ортогональной элементарных групп над коммутативным кольцом. Описание надгрупп элементарной группы $E(\Phi, R)$ в минимальном представлении ранга n принято называть стандартным, если для любой надгруппы H в $G = GL(n, R)$ существет единственный идеал A кольца R, такой, что

$$E(\Phi, R)E(n, R, A) \leq H \leq N_G(E(\Phi, R)E(n, R, A)),$$

где $E(n, R, A) = E(n, A)^{E(n,R)}$ – относительная элементарная группа уровня A. Здесь $E(n, R)$ – элементарная подруппа группы $GL(n, R)$.

Для исключительных элементарных подгрупп типов E_6, E_7, даже для случая поля, неизвестно, имеет ли место стандартное описание надгрупп в минимальных представлениях. Все это говорит о том, что тема диссертации весьма актуальна.

Основные результаты диссертации сформулированы в трех теоремах. Первая (Теорема A) дает описание нормализатора элементарной группы $E(E_6, R)$ в группе $GL(27, R)$, сответствующей минимальному представлению веса ω_1 группы Шевалле типа E_6 над коммутативным кольцом R. Доказывается, что нормализатор совпадает с расширенной группой Шевалле $\bar{G}(E_6, R)$. То, что $\bar{G}(E_6, R)$ нормализует элементарную подгруппу типа E_6, следует, по существу, из результата Таддеи о нормальности элементарной подгруппы в группе группе Шевалле, или из более сильных результатов Л.Н. Васерштейна, Р. Хазрата и Н.А. Вавилова. Обратное включение основано на характеризации группы $\bar{G}(E_6, R)$ как группы подобий специальной трилинейной формы на 27-мерном модуле представления. Здесь автор приводит красивое комбинаторное описание формы, основанное на строении весовой диаграммы 27-мерного модуля. Эта форма, впервые построенная Л. Диксоном в начале XX века, имеет важное значение в алгебре и геометрии. Другие конструкции были предложены К. Шевалле и Г. Фройденталем. Форма исследовалась многими известными математиками и использовалась для реализации исключительной группы типа E_6. Доказательство Теоремы A использует то, что минимальное 27-мерное представление для E_6 является микровесовым, и, следовательно, все корневые унипотенты являются квадратичными. Поэтому формулы Мацумото для корневых унипотентов являются особенно простыми. Знаки в этих формулах были получены в работах Н.А. Вавилова. Кроме того, в диссертации получены явные уравнения нормализатора элементарной группы типа E_6 в терминах частных производных инвариантной кубической формы, соответствующей трилинейной инвариантной форме.

Одним из центральных результатов работы является Теорема B, в которой доказано существование нижнего уровня для любой надгруппы H элементарной подгруппы $E(\Phi, R)$ в $GL(n, R)$ для $\Phi = E_6$, E_7, $n = 27$, 56, соответственно, над коммутативным кольцом R, в котором 2, 3 обратимы. Таким образом, получена первая часть стандартного описания надгрупп. Более того, доказывается, что группа $E(\Phi, R)E(n, R, A)$ совершенна. Теорема B следует из двух фактов.

Во-первых, доказывается, что относительная элементарная подгруппа $E(n,R,A)$ совпадает с подгруппой $E(n,R)^{E(\Phi,R)}$ (предложение 2.1). Во-вторых, нижний уровень A корректно определен как множество параметров трансвекций, содержащихся в H, (предложение 2.2). Доказательство предложений оставляет сильное впечатление. Здесь используется описание образующих относительно элементарных групп $E(\Phi,R,A)$, принадлежащая Титсу, и тонкая техника вычислений с матричными элементами исключительных групп в минимальных представлениях, использующая свойства весовых диаграмм, основы которой разработаны Н.А. Вавиловым и его учениками.

Замечательным результатом работы является стандартное описание надгрупп элементарной подгруппы $E(F_4,R)$ в $G(E_6,R)$. Система корней F_4 строится из системы E_6 с помощью инволютивного графового автоморфизма. Корни F_4 соответствуют орбитам автоморфизма: одноэлементные орбиты являются длинными корнями в F_4, двухэлементная орбита дает короткий корень F_4, равный полусумме элементов орбиты. Отсюда получается вложение $G(F_4,R)$ в $G(E_6,R)$. Доказательство Теоремы С весьма нетривиально и показывает возможности разработанной автором техники вычислений в минимальном представлении алгебры E_6. При доказательстве используется метод локализации-пополнения Бака-Хазрата-Вавилова.

Работа содержит целый ряд других новых результатов, имеющих важное значение для теории надгрупп в исключительных группах: комбинаторное построение на основе весовой диаграммы симплектической структуры, инвариантной относительно $E(E_7,R)$, в минимальном 56-мерном модуле и доказательство совпадения относительной элементарной симплектической группы $Ep(56,R,A)$ с группой $Ep(56,R)^{E(E_7,R)}$; построение семейства совершенных подгрупп $EE_7'(56,R,A,B)$, зависящих от двух идеалов, которые, как предполагает автор, должны играть роль нижних границ для стандартного описания надгрупп типа E_7 в минимальном представлении; вычисление нормализатора $E(F_4,R)$ в $G(E_6,R)$.

На основании изложенного выше можно сделать вывод, что диссертационная работа является серьезным математическим исследованием, в котором получены глубокие новые результаты в теории групп Шевалле над коммутативными кольцами. Эти результаты могут найти применение в научных исследованиях, проводимых в Санкт-Петербургском госуниверситете, Московском госуниверситете им. М.В.

Ломоносова, Нижегородском госуниверситете им. Н.И. Лобачевского, Математическом институте им. В.А. Стеклова РАН, ПОМИ РАН. В работе получили развитие новые современные методы исследования структуры исключительных групп Шевалле. Все утверждения автора тщательно обоснованы строгими математическими доказательствами. Все основные результаты диссертации опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК или входивших в перечень на момент публикации. Диссертация хорошо оформлена, текст тщательно выверен, автореферат правильно отражает содержание диссертации.

Считаю, что диссертационная работа удовлетворяет всем требованиям, предъявляемым к кандидатским диссертациям, а ее автор, Лузгарев Александр Юрьевич, достоин присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.06 – математическая логика, алгебра и теория чисел.

Зав. кафедрой геометрии и высшей алгебры
Нижегородского госуниверситета им. Н.И. Лобачевского
д.ф.-м.н. профессор М.И. Кузнецов

Подпись Кузнецова М.И

заверяю Ученый секретарь ННГУ