

© 2005 г.

ВЫСОЦКИЙ В. В.*

**ЭНЕРГИЯ И КОЛИЧЕСТВО КЛАСТЕРОВ В
СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ
НЕУПРУГИХ ПРИТЯГИВАЮЩИХСЯ ЧАСТИЦ**

Мы рассматриваем одномерную модель гравитационного газа, частицы которого в начальный момент имеют случайные скорости и координаты. При столкновениях частицы слипаются, образуя «кластеры». В случае нулевых начальных скоростей («холодный газ») в терминах сходимости по вероятности изучено асимптотическое поведение количества кластеров $K_n(t)$ при $n \rightarrow \infty$, где n означает число исходных частиц. Кроме того, исследуется асимптотика суммарной энергии газа $E_n(t)$. Здесь при ненулевых начальных скоростях («теплый газ») основным результатом является описание мгновенного «охлаждения» газа, т.е. $E_n(+0) \rightarrow 0$.

Ключевые слова и фразы: гравитационный газ, слипание частиц, неупругие соударения, система частиц, количество кластеров, энергия.

1. Введение. В этой статье мы изучаем одномерную модель гравитационного газа. Газ в начальный момент состоит из n расположенных на прямой частиц, каждая из которых характеризуется массой, начальной координатой и начальной скоростью. Частицы начинают движение под действием сил взаимного тяготения. При столкновениях частицы *слипаются*, образуя новую частицу («кластер»), характеристики которой определяются законами сохранения массы и импульса. Движение частиц между столкновениями подчинено законам классической механики.

Слипание отдельных частиц в один большой кластер напоминает процесс образования звезды из космической пыли. Более подробно об использовании рассматриваемой модели в астрофизике можно узнать из статьи [1].

Нашей целью является изучение свойств газа при условии, что начальные положения и начальные скорости частиц являются *случайными* величинами, а число исходных частиц стремится к бесконечно-

* Санкт-Петербургский государственный университет; математико-механический факультет, Старый Петергоф, Библиотечная пл., 2, 198504 С.-Петербург, Россия; e-mail: vysotsky@vv9034.spb.edu

сти. Различные предельные свойства таких систем рассмотрены в работах [2]–[6]. Мы исследуем поведение ранее не изученной величины $K_n(t)$, которая обозначает *количество кластеров* в системе. Также нас интересует $E_n(t)$ — *энергия* системы, т.е. сумма кинетических энергий всех кластеров.

Оказывается, что результаты абсолютно различны при рассмотрении моделей с нулевыми («холодный газ») и ненулевыми («теплый газ») начальными скоростями. Мы докажем, что в холодном газе при любом $t \geq 0$

$$\frac{K_n(t)}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} f(t), \quad n \rightarrow \infty,$$

где $f(t)$ — детерминированная функция; $f(t) = 0$ при $t \geq 1$. Отсюда в любой фиксированный момент времени $t \in [0, 1)$ среднее число частиц в одном кластере для холодного газа есть константа.

В случае теплого газа, наоборот, мгновенно образуются сколь угодно большие кластеры. За счет этого происходит «охлаждение», т.е. энергия газа мгновенно падает до нуля. В статье дано теоретическое обоснование этого феномена, который был эмпирически обнаружен в [5]. Кроме того, доказано, что и в холодном, и в теплом газе при любом $t \in (0, 1)$

$$E_n(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{t^2}{6}, \quad n \rightarrow \infty.$$

2. Описание модели.

2.1. Детерминированная модель. В начальный момент времени $t = 0$ газ состоит из n частиц, расположенных на прямой в точках с координатами $x_1(0), \dots, x_n(0)$. Частицы в рассматриваемой модели являются материальными точками и характеризуются массами m_i и координатами $x_i(t)$ на оси. Обладая в начальный момент скоростями $v_i(0)$, частицы начинают движение под действием гравитационных сил. Сила притяжения здесь пропорциональна произведению масс, т.е. частица массы \tilde{m}_1 , находящаяся в точке \tilde{x}_1 , действует на частицу массы \tilde{m}_2 , находящуюся в точке \tilde{x}_2 , с силой

$$F = \gamma \tilde{m}_1 \tilde{m}_2 \operatorname{sign}(\tilde{x}_1 - \tilde{x}_2),$$

где $\gamma > 0$ — постоянная тяготения. Особо подчеркнем, что сила притяжения не зависит от расстояния, что свойственно одномерным моделям. Сил, отличных от гравитационной, в нашей модели нет.

Итак, система полностью определяется количеством частиц n , их массами, координатами и скоростями в начальный момент, а также постоянной γ . Газ называется *холодным*, если все начальные скорости нулевые, и *теплым* в противном случае. Для простоты описания мы предполагаем, что $x_i(0)$ упорядочены по возрастанию.

При описании системы частиц мы придерживаемся правил классической ньютоновской механики. Отсюда ускорение любой частицы пропорционально разности суммарных масс частиц, находящихся справа и слева от нее.

Одной из ключевых характеристик газа является поведение частиц при столкновениях: частицы *слипаются*, подчиняясь законам сохранения массы и импульса. Отметим, что при этом энергия системы падает. Такие столкновения называются *абсолютно неупругими*.

Новые частицы, образовавшиеся в результате слипания, называются *кластерами*. В дальнейшем сам термин *частица* мы будем использовать только для обозначения исходных частиц. А кластером будем называть не только результат слипания, но и любую исходную частицу, не успевшую испытать столкновение. Таким образом, газ в любой момент $t > 0$ является набором кластеров, каждый из которых состоит из одной или нескольких частиц.

Очевидно, что все частицы рано или поздно слипнутся в один кластер. Тот момент, когда произойдет указанное событие, назовем *временем коллапса* системы и обозначим t_n^{coll} .

В этой работе мы изучаем только те системы, в которых все массы исходных частиц равны между собой, а их сумма есть 1, т.е. $m_i = n^{-1}$, где $1 \leq i \leq n$. Не умаляя общности, положим $\gamma = 1$. Для краткости обозначим $x_i = x_i(0)$ и $v_i = v_i(0)$.

2.2. Вероятностная модель. Теперь будем считать, что x_i и v_i являются случайными величинами, а законы, которым подчиняется поведение системы, остались прежними, детерминистическими. Каждая модель газа, таким образом, полностью характеризуется выбором указанных случайных величин. Задача, которая возникает при таком подходе, — описание в терминах теории вероятностей различных свойств системы в пределе при $n \rightarrow \infty$. Таким образом, мы исследуем характеристики «типичной» системы, состоящей из большого числа частиц.

Начальные положения частиц варьируются в рамках следующих трех моделей, которые на самом деле обладают многими одинаковыми предельными свойствами.

Пуассоновская модель предполагает, что x_i есть момент i -го скачка пуассоновского процесса интенсивности n . Эта модель удобна тем, что для любого $i \geq 0$ разности $x_{i+1} - x_i$ независимы и распределены экспоненциально, со средним n^{-1} . Здесь мы формально полагаем $x_0 = 0$. Для краткости начальные положения частиц в этой модели будем обозначать X_i .

Во второй модели, именуемой нами *независимой равномерно распределенной (н.р.) моделью*, x_i есть i -я порядковая статистика выборки из n независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин. Начальные положения частиц в н.р. модели будем обозначать X'_i .

В рамках *решетчатой модели* начальные положения частиц фиксированы: $x_i = i/n$.

Хотя н.р.р. модель более интересна, но пуассоновская проще из-за уже упомянутой независимости расстояний между частицами. Связь между моделями излагает следующая известная лемма.

Лемма 1. Пусть X_i — моменты скачков пуассоновского процесса (произвольной интенсивности). Тогда совместное распределение случайных величин $X'_i = X_i/X_{n+1}$, где $1 \leq i \leq n$, совпадает с совместным распределением порядковых статистик выборки из n независимых равномерно распределенных на $[0, 1]$ случайных величин.

Начальные скорости v_i полагаются *независимыми* (в совокупности) с x_i . Кроме того, v_i должны быть *независимы между собой и одинаково распределены*. В холодном газе, как уже говорилось, $v_i = 0$. В случае теплого газа часто рассматривается нормальное распределение начальных скоростей. Однако мы потребуем лишь $\mathbf{D}v_1^2 = \sigma^2 < \infty$.

Будем считать, что $\mathbf{E}v_1 = 0$. Общий случай получается из рассматриваемого добавлением к движениям частиц сдвига с постоянной скоростью $\mathbf{E}v_1$. При этом все основные характеристики системы, за исключением энергии, остаются прежними.

3. Динамика и кинематика систем. При исследовании систем частиц ключевую роль играет свойство, сформулированное ниже в предложении 1. Оно многократно использовалось в статьях [2]–[7] и поэтому хорошо известно. Для большей общности все формулировки даются для систем с произвольными массами начальных частиц.

В этом разделе число частиц n считается фиксированным.

3.1. Блоки частиц и центры масс. *Блоком* частиц назовем произвольный набор частиц с идущими подряд номерами. Условимся блок частиц с номерами $i + 1, \dots, i + k$ обозначать $J = (i, i + k]$, сопоставляя ему подмножество отрезка натуральных чисел $[1, n]$. Размером блока естественно называть число его элементов. Заметим, что некоторые частицы блока в какой-то момент могут находиться в одном кластере с частицами, не входящими в блок. Будем говорить, что блок *свободен* к моменту t , если его частицы еще не сталкивались с частицами вне блока. Это определение можно немного ослабить: блок *свободен справа* (слева) к моменту t , если его частицы еще не сталкивались с частицами, находящимися справа (слева) от блока. Введем еще одно обозначение: кластер, состоящий из частиц, входящих в блок $J = (i, i + k]$ (и только из них), будем записывать $K(i, i + k] = KJ$.

Очень удобно считать, что исходные частицы не исчезают при столкновениях, а продолжают существовать в составе образовавшихся кластеров. При этом их координаты $x_i(t)$ и скорости $v_i(t)$ понимаются

как соответствующие характеристики содержащего их кластера. Таким образом, $x_i(t)$ и $v_i(t)$ определены при всех $t \geq 0$.

Учитывая все сказанное, при $t \geq 0$ определим *центр тяжести* блока, который будем обозначать

$$x_J(t) = M_J^{-1} \sum_{j \in J} m_j x_j(t), \quad \text{где} \quad M_J = \sum_{j \in J} m_j.$$

Аналогично определяется

$$v_J(t) = M_J^{-1} \sum_{j \in J} m_j v_j(t).$$

Предложение 1. Пусть блок $J = (i, i+k]$ свободен к моменту t . Тогда его центр тяжести движется как единая частица суммарной массы и суммарного импульса, т.е.

$$x_J(s) = x_J(0) + v_J(0)s + \frac{(M_J^{(R)} - M_J^{(L)})s^2}{2}, \quad 0 \leq s \leq t,$$

где $M_J^{(R)} = \sum_{j > i+k} m_j$ и $M_J^{(L)} = \sum_{j \leq i} m_j$ — массы частиц, изначально находящихся соответственно справа и слева от J .

Следствие. В холодном газе при любых начальных положениях частиц $t_n^{\text{coll}} \leq \sqrt{2}$.

Доказательство. Очевидно, существует такое $k \in [1, n]$, что блоки $[1, k]$ и $(k, n]$ свободны к моменту t_n^{coll} . После несложных преобразований (газ холодный, т.е. $v_i = 0$) получаем $x_{(k,n]}(s) - x_{[1,k]}(s) = x_{(k,n]}(0) - x_{[1,k]}(0) - s^2/2$ для любого $s \leq t_n^{\text{coll}}$. Поскольку в момент столкновения справедливо $x_{[1,k]}(t_n^{\text{coll}}) = x_{(k,n]}(t_n^{\text{coll}})$, то $(t_n^{\text{coll}})^2/2 = x_{(k,n]}(0) - x_{[1,k]}(0) \leq 1$.

В более общем случае, когда частицы блока могли испытывать столкновения с частицами, находящимися слева (справа) от блока, справедливо следующее предложение.

Предложение 2. Пусть блок $J = (i, i+k]$ свободен справа (слева) к моменту t . Тогда

$$x_J(s) \geq (\leq) x_J(0) + v_J(0)s + \frac{(M_J^{(R)} - M_J^{(L)})s^2}{2}, \quad 0 \leq s \leq t.$$

Наконец, введем функцию

$$x_J^*(s) = x_J(0) + v_J(0)s + \frac{(M_J^{(R)} - M_J^{(L)})s^2}{2}, \quad s \geq 0,$$

которая описывает воображаемую траекторию движения центра тяжести блока J без учета столкновений со внешними частицами.

3.2. Время кластеризации. *Временем кластеризации* t_J^{cl} блока J назовем тот момент, когда все его частицы впервые окажутся в одном кластере (который может содержать частицы не из J). Время кластеризации t_j^{cl} частицы с номером j — это тот момент, когда она слиплась с $(j+1)$ -й частицей. По определению, $t_j^{\text{cl}} = t_{[j,j+1]}^{\text{cl}}$. Очевидно, что для любого блока $J = (i, i+k]$ выполняется

$$t_J^{\text{cl}} = \max_{i < j < i+k} t_j^{\text{cl}}. \quad (1)$$

Отсюда понятно наше стремление найти способ вычисления t_j^{cl} . Его дает следующее предложение.

Предложение 3. *Для любой частицы $1 \leq j < n$ время ее кластеризации есть*

$$t_j^{\text{cl}} = \inf \left\{ s \geq 0: \min_{\substack{0 \leq l < j \\ j < k \leq n}} (x_{(j,k]}^*(s) - x_{(l,j]}^*(s)) = 0 \right\}. \quad (2)$$

Несложное доказательство, вытекающее из предложения 2, можно найти в [4].

З а м е ч а н и е. Все уравнения (относительно s) вида $x_{(j,k]}^*(s) - x_{(l,j]}^*(s) = 0$ имеют ровно один неотрицательный корень.

Действительно, из определения величин $x_j^*(s)$, получаем

$$x_{(j,k]}^*(s) - x_{(l,j]}^*(s) = x_{(j,k]}(0) - x_{(l,j]}(0) + (v_{(j,k]}(0) - v_{(l,j]}(0))s - \frac{M_{(l,k]}s^2}{2}. \quad (3)$$

Свободный член неотрицателен, а коэффициент при s^2 меньше нуля.

Теперь мы готовы приступить к изучению стохастических систем частиц.

4. Предел времени кластеризации частицы. Для начала нам потребуется исследовать асимптотику времени кластеризации частиц. До сих пор, когда мы имели дело с подобными величинами, число частиц n было фиксированным и указание на него не требовалось. Теперь же, при переменном n , старая запись становится некорректной. Заменяем ее на $t_{j,n}^{\text{cl}}$ (время кластеризации j -й из n частиц).

При меняющемся n естественно менять и номера частиц. Например, «средняя» частица должна иметь номер $n/2$. Назовем последовательность (номеров частиц) $r(n)$ *типичной*, если $\lim r(n) = \lim (n - r(n)) = +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ и $r(n) \in [1, n]$ для любого n .

Лемма 2. *В холодном газе для пуассоновской и независимой равнономерно распределенной моделей верно следующее. Для любой типичной последовательности $r(n)$ величины $t_{r(n),n}^{\text{cl}}$ сходятся по распределению к не зависящему от $r(n)$ пределу. Обозначим*

$$f(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{t_{r(n),n}^{\text{cl}} > t\}, \quad t \geq 0.$$

Для $f(t)$ существует явное выражение (8). Эта функция непрерывна, монотонно убывает и равна нулю при $t \geq 1$.

Более того, если $r(n) < n/2$ для любого n , то при $t \geq 0$

$$\max_{j \in [r(n), n-r(n)]} |\mathbf{P}\{t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} - f(t)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (4)$$

З а м е ч а н и е. Вычислить $f(t)$ автору пока не удалось. Однако компьютерное моделирование показывает, что $f(t) = 1 - t^2$ при $t \in [0, 1]$. Столь простой ответ просто обязывает продолжать усилия.

Функцию $f(t)$ будем называть *функцией кластеризации* (холодного газа). Это определение навеяно теоремой 1 из следующего раздела.

Д о к а з а т е л ь с т в о. *Часть первая:* доказательство для пуассоновской модели. Пусть n фиксировано и $j \in [r(n), n - r(n)]$. Для вычисления $t_{j,n}^{\text{cl}}$ мы воспользуемся формулой (2) из предложения 3. Так как $m_i = n^{-1}$, а газ холодный ($v_i = 0$), то формула (3) примет вид

$$x_{(j,k]}^*(s) - x_{(l,j]}^*(s) = \frac{1}{k-j} \sum_{i=j+1}^k X_i - \frac{1}{j-l} \sum_{i=l+1}^j X_i - \frac{k-l}{2n} s^2.$$

Поскольку это выражение монотонно убывает при $s \geq 0$, из формулы (2) для любого $t \geq 0$ получаем

$$\{t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} \iff \left\{ \min_{\substack{0 \leq l < j \\ j < k \leq n}} \left(\frac{1}{k-j} \sum_{i=j+1}^k X_i - \frac{1}{j-l} \sum_{i=l+1}^j X_i - \frac{k-l}{2n} t^2 \right) > 0 \right\}. \quad (5)$$

Преобразуем выражение, соответствующее расстоянию между центрами тяжести:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k-j} \sum_{i=j+1}^k X_i - \frac{1}{j-l} \sum_{i=l+1}^j X_i \\ &= \frac{1}{k-j} \sum_{i=j+1}^k (X_i - X_j) + X_j - \frac{1}{j-l} \sum_{i=l+1}^j X_i \\ &= \frac{1}{k-j} \sum_{i=j+1}^k (X_i - X_j) + \frac{1}{j-l} \sum_{i=l+1}^j (X_j - X_i). \end{aligned} \quad (6)$$

Ввиду независимости приращений и стационарности пуассоновского процесса, эта случайная величина имеет такое же распределение, как и

$$\frac{1}{k-j} \sum_{i=1}^{k-j} Z_i + \frac{1}{j-l} \sum_{i=1}^{j-l-1} W_i,$$

где Z_i и W_i — моменты скачков независимых пуассоновских процессов интенсивности n . Отсюда с учетом формулы (5) для времени кластеризации получаем

$$\mathbf{P}\{t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} = \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{1 \leq q \leq j \\ 1 \leq p \leq n-j}} \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p Z_i + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q-1} W_i - \frac{p+q}{2n} t^2\right) > 0\right\}.$$

Завершим преобразования переходом к моментам скачков P_i и Q_i стандартных независимых пуассоновских процессов:

$$\mathbf{P}\{t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} = \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{1 \leq q \leq j \\ 1 \leq p \leq n-j}} \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p P_i + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q-1} Q_i - \frac{p+q}{2} t^2\right) > 0\right\}.$$

Поэтому при любом t предел по n выражения $\mathbf{P}\{t_{r(n),n}^{\text{cl}} > t\}$ существует и не зависит от $r(n)$ (см. определение типичной последовательности). Далее, если $j \in [r(n), n - r(n)]$, то

$$f(t) < \mathbf{P}\{t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} < \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{1 \leq q \leq r(n) \\ 1 \leq p \leq r(n)}} \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p P_i + \frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q-1} Q_i - \frac{p+q}{2} t^2\right) > 0\right\}. \quad (7)$$

Отсюда получаем равномерную оценку (4), так как правая часть стремится к $f(t)$ при $n \rightarrow \infty$.

Осталось показать, что $1 - f(t)$ является функцией распределения. Это незамедлительно следует из теоремы Прохорова. Действительно, так как $0 \leq t_{r(n),n}^{\text{cl}} \leq t_n^{\text{coll}}$, то, по следствию предложения 1, распределения случайных величин $t_{r(n),n}^{\text{cl}}$ сосредоточены на $[0, \sqrt{2}]$.

Таким образом, функция кластеризации непрерывна справа. Чтобы получить непрерывность слева, положим $r(n) = n/3$. Тогда при $n \rightarrow \infty$ правая часть выражения (7) поточечно сходится к $f(t)$, монотонно убывая по n . Поскольку сходящиеся функции непрерывны, отсюда следует искомая непрерывность слева для $f(t)$.

Равенство $f(t) = 0$ при $t > 1$ следует из следующего хорошо известного факта (например, см. [3]): в холодном газе (при любой из трех моделей начальных положений)

$$t_n^{\text{coll}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Наконец, для получения более удобного выражения для $f(t)$, в (7) перейдем к пределу по n и воспользуемся свойством непрерывности вероятностной меры:

$$f(t) = \mathbf{P}\left\{\min_{p \in \mathbf{N}} \left(\frac{1}{p} \sum_{i=1}^p P_i - \frac{p+1}{2} t^2\right) + \min_{q \in \mathbf{N}} \left(\frac{1}{q} \sum_{i=1}^{q-1} Q_i - \frac{q-1}{2} t^2\right) > 0\right\}. \quad (8)$$

Напомним, что P_i и Q_i — моменты скачков стандартных независимых пуассоновских процессов. Можно также показать, что

$$f(t) = e^{t^2} \mathbf{P} \left\{ \min_{k \in \mathbf{N}} \sum_{i=1}^k (P_i - t^2 i) > 0 \right\}^2.$$

Часть вторая. Покажем, что н.р.р. модель дает такой же результат, как и пуассоновская. Ограничимся проверкой условия (4).

Преобразуя выражение (5) для того, чтобы явно выделить t , положим

$$G_j[y_1, \dots, y_n] = \min_{\substack{1 \leq l < j \\ j < k \leq n}} \frac{2n}{k-l} \left(\frac{1}{k-j} \sum_{i=j+1}^k y_i - \frac{1}{j-l} \sum_{i=l+1}^j y_i \right).$$

С использованием этого обозначения (5) примет вид

$$\{t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} \iff \{G_j[X_1, \dots, X_n] > t^2\}$$

($t_{j,n}^{\text{cl}}$ здесь, естественно, для пуассоновской модели). В н.р.р. модели выражение для времени кластеризации частицы будет абсолютно таким же, X_i лишь заменяется на X'_i . Воспользуемся леммой 1 и осуществим переход от одной модели к другой:

$$\mathbf{P}\{G_j[X'_1, \dots, X'_n] > t^2\} = \mathbf{P}\left\{G_j\left[\frac{X_1}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}}\right] > t^2\right\}.$$

Из определения G_j легко видеть, что

$$G_j\left[\frac{X_1}{X_{n+1}}, \dots, \frac{X_n}{X_{n+1}}\right] = \frac{G_j[X_1, \dots, X_n]}{X_{n+1}}.$$

Значит, доказывая (4), мы должны установить справедливость равенства

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \max_{j \in [r(n), n-r(n)]} \left| \mathbf{P}\{G_j[X_1, \dots, X_n] > X_{n+1} t^2\} - f(t) \right| = 0. \quad (9)$$

Для начала заметим, что

$$X_{n+1} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1. \quad (10)$$

Действительно, переходя к стандартному пуассоновскому процессу, получаем $X_{n+1} \stackrel{d}{=} P_{n+1}/n$. Но P_{n+1} является суммой $n+1$ независимой экспоненциально распределенной случайной величины со средним 1, и, следовательно, применим закон больших чисел.

Для произвольных $\varepsilon \in (0, 1/2)$ и $j \in [1, n]$ можно вывести

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} t^2 < G_j\} < \mathbf{P}\{(1 - \varepsilon) t^2 < G_j\} + 1 - \mathbf{P}\{|1 - X_{n+1}| < \varepsilon\}$$

и

$$\mathbf{P}\{X_{n+1} t^2 < G_j\} > \mathbf{P}\{(1 + \varepsilon) t^2 < G_j\} - 1 + \mathbf{P}\{|1 - X_{n+1}| < \varepsilon\}.$$

С помощью этих оценок получаем неравенства

$$\begin{aligned} & |\mathbf{P}\{X_{n+1} t^2 < G_j\} - f(t)| < |\mathbf{P}\{(1 + \varepsilon) t^2 < G_j\} - f(t)| \\ & \quad + |\mathbf{P}\{(1 - \varepsilon) t^2 < G_j\} - f(t)| + 1 - \mathbf{P}\{|1 - X_{n+1}| < \varepsilon\} \\ & < |\mathbf{P}\{(1 + \varepsilon) t^2 < G_j\} - f((1 + \varepsilon)^{1/2} t)| \\ & \quad + |\mathbf{P}\{(1 - \varepsilon) t^2 < G_j\} - f((1 - \varepsilon)^{1/2} t)| \\ & \quad + \{f((1 - \varepsilon)^{1/2} t) - f((1 + \varepsilon)^{1/2} t)\} + \{1 - \mathbf{P}\{|1 - X_{n+1}| < \varepsilon\}\}, \end{aligned}$$

во втором переходе использовалась монотонность $f(t)$. В последнем неравенстве возьмем максимум по $j \in [r(n), n - r(n)]$ и осуществим два предельных перехода, сперва по $n \rightarrow \infty$, а затем по $\varepsilon \rightarrow 0$. При этом мы получим (9). Действительно, максимум суммы не превосходит суммы максимумов. Два первых слагаемых будут равны нулю на основании доказанной первой части, третье — по непрерывности $f(t)$, а четвертое — в силу (10). Лемма 2 доказана.

Обратимся теперь к теплomu газу. Оказывается, типичным явлением будет мгновенное слипание произвольной частицы с соседней. Более того, мы увидим, что типично мгновенное образование сколь угодно больших кластеров.

Лемма 3. В теплом газе (при любой из рассматриваемых моделей начальных положений) для любой типичной последовательности $r(n)$ выполняется

$$t_{r(n),n}^{\text{cl}} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Более того, если $r(n) < n/2$ для любого n , то при $\tau > 0$ справедлива равномерная оценка

$$\min_{j \in [r(n), n - r(n)]} \mathbf{P}\{t_{j,n}^{\text{cl}} < \tau\} \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Пусть зафиксировано произвольное $\tau > 0$, а $j \in [r(n), n - r(n)]$. Снова воспользуемся условием кластеризации из предложения 3. Формула (3) примет вид

$$x_{(j,k]}^*(s) - x_{(l,j]}^*(s) = x_{(j,k]}(0) - x_{(l,j]}(0) + (v_{(j,k]}(0) - v_{(l,j]}(0))s - \frac{k-l}{2n}s^2.$$

Коэффициенты этого квадратного трехчлена обозначим $a_{l,k}$, $b_{l,k}$ и $c_{l,k}$, начиная со старшей степени. Сам трехчлен обозначим $h_{l,k}(s)$. При этом условие кластеризации (2) запишется как

$$t_{j,n}^{\text{cl}} = \inf \left\{ s \geq 0: \min_{\substack{0 \leq l < j \\ j < k \leq n}} h_{l,k}(s) = 0 \right\}.$$

Изучим подробнее уравнения $h_{m,m}(s) = a_{m,m}s^2 + b_{m,m}s + c_{m,m} = 0$. Для них $h_{m,m}(0) = c_{m,m} \geq 0$ и $h_{m,m}(-c_{m,m}/b_{m,m}) = a_{m,m} \cdot (c_{m,m}/b_{m,m})^2 < 0$. Поэтому если $b_{m,m} < 0$ для какого-то m , то неотрицательный корень будет меньше, чем $-c_{m,m}/b_{m,m}$. Значит,

$$\{b_{m,m} < 0\} \implies \left\{ t_{j,n}^{\text{cl}} < -\frac{c_{m,m}}{b_{m,m}} \right\}. \quad (11)$$

Выясним, насколько вероятно найти такое m , что $b_{m,m} < 0$. Положим $\tilde{v}_1 = v_1 - v_2$ и введем новую последовательность центрированных независимых одинаково распределенных случайных величин $\{\tilde{v}_i\}_{i=1}^\infty$. Тогда

$$mb_{m,m} = \sum_{i=j+1}^{j+m} v_i - \sum_{i=j-m+1}^j v_i \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i. \quad (12)$$

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Существует такое $N = N(\varepsilon)$, что

$$\mathbf{P} \left\{ \min_{1 \leq m \leq N} \sum_{i=1}^m \tilde{v}_i < -1 \right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (13)$$

Справедливость этого утверждения вытекает из соотношения

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{\sqrt{n\mathbf{D}u_1}} \max_{1 \leq m \leq n} \sum_{i=1}^m u_i > \alpha \right\} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\alpha}^{\infty} e^{-x^2/2} dx, \quad n \rightarrow \infty,$$

где $\alpha \geq 0$, а u_i — независимые одинаково распределенные случайные величины такие, что $\mathbf{D}u_1 < \infty$ и $\mathbf{E}u_1 = 0$ (см. [8, гл. 2, § 10]). Напомним читателю, что у нас $\mathbf{D}\tilde{v}_1 = 2\sigma^2 < \infty$.

Условимся, что n достаточно велико (такое, что $N \leq r(n)$ и $r(n) + N \leq n$). Поскольку

$$\left\{ \min_{1 \leq m \leq N} mb_{m,m} < -1 \right\} \implies \left\{ \min_{1 \leq m \leq N} b_{m,m} < -\frac{1}{N} \right\},$$

из (12) и (13) получаем

$$\mathbf{P} \left\{ \min_{1 \leq m \leq N} b_{m,m} < -\frac{1}{N} \right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (14)$$

Теперь изучим коэффициенты $c_{m,m}$. Учитывая, что $x_{(j,k]}(0) \leq x_k$ и $x_{l+1} \leq x_{(l,j]}(0)$, имеем

$$\max_{1 \leq m \leq N} c_{m,m} = c_{N,N} \leq x_{j+N} - x_{j-N+1}. \quad (15)$$

Относительно правой части можно сказать, что для любой из трех моделей начальных положений справедливо

$$\max_{i \in [r(n), n-r(n)]} (x_{i+N} - x_{i-N+1}) \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (16)$$

Для н.р.р. модели это вытекает из теоремы Гливленко, которая гарантирует, что

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| X'_i - \frac{i}{n} \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (17)$$

А для пуассоновской модели справедливость соотношения (16) следует из его справедливости для н.р.р. модели. Достаточно осуществить уже известный переход от одной модели к другой и вспомнить (10).

Из (15) и (16) получаем, что при всех достаточно больших n

$$\mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq m \leq N} c_{m,m} < \frac{\tau}{N} \right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}. \quad (18)$$

Формулы (14) и (18) дают

$$\mathbf{P} \left\{ \exists m \in [1, N]: 0 < -\frac{c_{m,m}}{b_{m,m}} < \tau \right\} > 1 - \varepsilon.$$

С учетом импликации (11) отсюда следует, что при больших n выполнено $\mathbf{P}\{t_{j,n}^{\text{cl}} < \tau\} > 1 - \varepsilon$. Равномерность этой оценки по $j \in [r(n), n-r(n)]$ вытекает из равномерности оценки (16) и независимости оценки (14) от j .

Следствие. Для любого натурального M

$$\min_{j \in [r(n), n-r(n)]} \mathbf{P}\{t_{[j, j+M], n}^{\text{cl}} < \tau\} \longrightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Легко получается из формулы (1).

5. Предельное количество кластеров. Здесь излагается один из основных полученных результатов — формула для количества кластеров в холодном газе.

Теорема 1. В холодном газе для пуассоновской и н.р.р. моделей при любом $t \geq 0$

$$\frac{K_n(t)}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} f(t), \quad n \rightarrow \infty. \quad (19)$$

Доказательство. Из-за ограниченности объема статьи мы проведем доказательство лишь для пуассоновской модели. Доказательство для н.р.р. модели абсолютно аналогично второй части доказательства леммы 2.

Заметим, что доказательство можно проводить лишь для $0 \leq t < 1$, поскольку для остальных t оно получается автоматически. Действительно, если утверждение теоремы уже доказано для всех $t < 1$, то при

$t = 1$ его справедливость сразу следует из непрерывности $f(t)$, равенства $f(1) = 0$ и монотонного убывания по t величин $K_n(t)$. Для $t > 1$ оно очевидно тем более.

Итак, зафиксируем произвольное $t < 1$. Каждая слипшаяся со своим правым соседом частица уменьшает исходное количество кластеров (т.е. n) на один. Следовательно, $K_n(t)$ есть разница между n и числом слипшихся со своим соседом частиц (к моменту t). Иначе, это есть число частиц, не слипшихся со своим соседом справа, т.е.

$$K_n(t) = \#\{j \in [1, n-1]: t_{j,n}^{\text{cl}} > t\}.$$

Для любого $\delta \in (0, 1/6)$ последовательность $r(n) = \delta n$ является типичной. Поэтому при доказательстве мы будем пользоваться тем, что известно предельное время кластеризации каждой частицы с номером $j \in [\delta n, n - \delta n]$ (см. лемму 2).

Имеет место такая оценка:

$$\#\{j \in [\delta n, n - \delta n]: t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} \leq K_n(t) \leq \#\{j \in [\delta n, n - \delta n]: t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} + 2\delta n.$$

Поскольку δ выбрано так, что $(1 - 2\delta)^{-1} < 1 + 3\delta$, то отсюда

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{K_n(t)}{n} - \frac{\#\{j \in [\delta n, n - \delta n]: t_{j,n}^{\text{cl}} > t\}}{(1 - 2\delta)n} \right| \leq 5\delta. \quad (20)$$

Теперь для каждой частицы с номером $j \in [\delta n, n - \delta n]$ определим случайную величину $\xi_j^{(n)} = \mathbf{1}_{(t, +\infty)}(t_{j,n}^{\text{cl}})$. Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_j^{(n)} = 0\} = \mathbf{P}\{t_{j,n}^{\text{cl}} \leq t\} \quad \text{и} \quad \mathbf{P}\{\xi_j^{(n)} = 1\} = \mathbf{P}\{t_{j,n}^{\text{cl}} > t\}. \quad (21)$$

В терминах этих величин

$$\#\{j \in [\delta n, n - \delta n]: t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} = \sum_{j=\delta n}^{n-\delta n} \xi_j^{(n)}.$$

Наша задача — показать, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \left| \frac{1}{(1 - 2\delta)n} \left(\sum_{j=\delta n}^{n-\delta n} \xi_j^{(n)} - \sum_{j=\delta n}^{n-\delta n} \mathbf{P}\{t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} \right) \right| > \delta^{1/3} \right\} < 10\delta^{1/3}. \quad (22)$$

По лемме 2, $\mathbf{P}\{t_{j,n}^{\text{cl}} > t\} \rightarrow f(t)$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно по $j \in [\delta n, n - \delta n]$. Поэтому из (22)

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{ \left| \frac{1}{(1 - 2\delta)n} \sum_{j=\delta n}^{n-\delta n} \xi_j^{(n)} - f(t) \right| > 2\delta^{1/3} \right\} < 10\delta^{1/3}.$$

Полученное соотношение, а также формула (20) справедливы при всех $\delta \in (0, \frac{1}{6})$. Из них предельным переходом $\delta \rightarrow 0$ получаем (19), что и требовалось.

Нам осталось «лишь» доказать (22), в чем и состоит вся сложность. Рассмотрим ковариации

$$\text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) = \mathbf{P}\{\xi_i^{(n)} = 1, \xi_j^{(n)} = 1\} - \mathbf{P}\{\xi_i^{(n)} = 1\} \mathbf{P}\{\xi_j^{(n)} = 1\}.$$

Отсюда $\text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) < 1$. Оценим дисперсию суммы величин $\xi_j^{(n)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\left(\sum_{j=\delta n}^{n-\delta n} \xi_j^{(n)}\right) &= \sum_{i,j=\delta n}^{n-\delta n} \text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) = \sum_{k=0}^{n-2\delta n} \sum_{\substack{|i-j|=k \\ i,j \in [\delta n, n-\delta n]}} \text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) \\ &= \sum_{k=0}^{2\delta n} \sum_{\substack{|i-j|=k \\ i,j \in [\delta n, n-\delta n]}} \text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) + \sum_{k=2\delta n+1}^{n-2\delta n} \sum_{\substack{|i-j|=k \\ i,j \in [\delta n, n-\delta n]}} \text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) \\ &< \sum_{k=0}^{2\delta n} 2n + \sum_{k=2\delta n+1}^{n-2\delta n} 2n \max_{\substack{2\delta n < |i-j| \\ i,j \in [\delta n, n-\delta n]}} \text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) \\ &< 4\delta n^2 + 2n^2 \max_{\substack{2\delta n < |i-j| \\ i,j \in [\delta n, n-\delta n]}} \text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}). \end{aligned}$$

Если мы докажем, что

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{\substack{2\delta n < |i-j| \\ i,j \in [\delta n, n-\delta n]}} \text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) \leq 0, \quad (23)$$

то из неравенства Чебышева

$$\begin{aligned} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left\{\left|\frac{1}{(1-2\delta)n} \left(\sum_{j=\delta n}^{n-\delta n} \xi_j^{(n)} - \sum_{j=\delta n}^{n-\delta n} \mathbf{P}\{t_j^{\text{cl}} > t\}\right)\right| > \delta^{1/3}\right\} \\ \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(1-2\delta)^2 n^2 \delta^{2/3}} \mathbf{D}\left(\sum_{j=\delta n}^{n-\delta n} \xi_j^{(n)}\right) \leq \frac{4\delta^{1/3}}{(1-2\delta)^2}, \end{aligned}$$

откуда следует искомое (22).

Таким образом, все свелось к доказательству соотношения (23). Покажем, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется

$$i, j \in [\delta n, n - \delta n], \quad 2\delta n < |i - j| \implies \text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) < \varepsilon. \quad (24)$$

Для краткости введем обозначение

$$C_m[l, k, y_1, \dots, y_n] = \frac{1}{k-m} \sum_{i=m+1}^k y_i - \frac{1}{m-l} \sum_{i=l+1}^m y_i - \frac{k-l}{2n} t^2.$$

Ранее было получено (формула (5)), что в холодном газе для пуассоновской модели

$$\mathbf{P}\{\xi_m^{(n)} = 1\} = \mathbf{P}\{t_{m,n}^{\text{cl}} > t\} = \mathbf{P}\left\{\min_{\substack{0 \leq l < m \\ m < k \leq n}} C_m[l, k, X_1, \dots, X_n] > 0\right\}.$$

Сперва мы докажем, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ верна импликация

$$m \in [\delta n, n - \delta n] \implies \mathbf{P} \left\{ \min_{\substack{\delta n < k - l \\ 0 \leq l < m < k \leq n}} C_m[l, k, X_1, \dots, X_n] > 0 \right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{3} \quad (25)$$

и автоматически

$$\begin{aligned} m \in [\delta n, n - \delta n] \\ \implies \mathbf{P} \left\{ \min_{\substack{k-l \leq \delta n \\ 0 \leq l < m < k \leq n}} C_m[l, k, X_1, \dots, X_n] > 0 \right\} < \mathbf{P} \{ \xi_m^{(n)} = 1 \} + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned} \quad (26)$$

В самом деле, по теореме Гливленко имеет место соотношение (17), из которого, с учетом (10), вытекает

$$\max_{1 \leq i \leq n} \left| X_i - \frac{i}{n} \right| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Отсюда следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что

$$n > N(\varepsilon) \implies \mathbf{P} \left\{ \max_{1 \leq i \leq n} \left| X_i - \frac{i}{n} \right| < \delta \frac{1-t^2}{4} \right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{3}. \quad (27)$$

Найденное $N(\varepsilon)$ — искомое. Действительно, справедливо

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} \left| X_i - \frac{i}{n} \right| < \delta \frac{1-t^2}{4} \\ \implies \forall l, k, m \in [1, n] \quad \left| \frac{1}{k-m} \sum_{i=m+1}^k X_i - \frac{1}{m-l} \sum_{i=l+1}^m X_i - \frac{k-l}{2n} \right| < \delta \frac{1-t^2}{2}, \end{aligned}$$

и поэтому

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq n} \left| X_i - \frac{i}{n} \right| < \delta \frac{1-t^2}{4} \\ \implies \forall l, k, m \in [1, n] \quad C_m[l, k, X_1, \dots, X_n] > \left(\frac{k-l}{2n} - \frac{\delta}{2} \right) (1-t^2). \end{aligned}$$

Легко видеть, что отсюда, с учетом условия (27), следует (25).

Теперь, когда получено (25), завершим наши усилия, доказав (23), а точнее, эквивалентное ему (24). В качестве искомого $N(\varepsilon)$ возьмем найденное в (25). Пусть $n > N(\varepsilon)$ и $i, j \in [\delta n, n - \delta n]$ таковы, что $2\delta n < |i - j|$. Считая без ограничения общности, что $i < j$, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{P} \{ \xi_i^{(n)} = 1, \xi_j^{(n)} = 1 \} \\ = \mathbf{P} \left\{ \min_{\substack{0 \leq l < i \\ i < k \leq n}} C_i[l, k, X_1, \dots, X_n] > 0, \min_{\substack{0 \leq p < j \\ j < q \leq n}} C_j[p, q, X_1, \dots, X_n] > 0 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \mathbf{P} \left\{ \min_{\substack{k-l \leq \delta n \\ 0 \leq l < i < k \leq n}} C_i[l, k, X_1, \dots, X_n] > 0, \min_{\substack{q-p \leq \delta n \\ 0 \leq p < j < q \leq n}} C_j[p, q, X_1, \dots, X_n] > 0 \right\} \\
&= \mathbf{P} \left\{ \min_{\substack{k-l \leq \delta n \\ 0 \leq l < i < k \leq n}} C_i[l, k, X_1, \dots, X_n] > 0 \right\} \\
&\quad \times \mathbf{P} \left\{ \min_{\substack{q-p \leq \delta n \\ 0 \leq p < j < q \leq n}} C_j[p, q, X_1, \dots, X_n] > 0 \right\}.
\end{aligned}$$

Объясним последний переход. Первый минимум есть функция от $X_1, \dots, X_{i+\delta n-1}$. Согласно преобразованиям (6),

$$\begin{aligned}
C_j[p, q, X_1, \dots, X_n] \\
= C_j[p, q, X_j - X_1, \dots, X_j - X_{j-1}, 0, X_{j+1} - X_j, \dots, X_n - X_j].
\end{aligned}$$

Поэтому второй минимум есть функция от $X_j - X_{j-\delta n+1}, \dots, X_j - X_{j-1}, 0, X_{j+1} - X_j, \dots, X_n - X_j$. Остается лишь вспомнить, что $2\delta n < |i - j|$, и воспользоваться независимостью приращений пуассоновского процесса.

Теперь, используя (26), немедленно получаем

$$\mathbf{P}\{\xi_i^{(n)} = 1, \xi_j^{(n)} = 1\} < \left(\mathbf{P}\{\xi_i^{(n)} = 1\} + \frac{\varepsilon}{3} \right) \left(\mathbf{P}\{\xi_j^{(n)} = 1\} + \frac{\varepsilon}{3} \right).$$

Значит, $\text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) < 2\varepsilon/3 + \varepsilon^2/9 < \varepsilon$, это и есть (24). Теорема 1 доказана.

Теперь попытаемся сформулировать аналогичное утверждение для теплого газа. Следующая лемма не дает точной оценки количества кластеров. Однако она будет чрезвычайно полезна в следующем разделе.

Зафиксируем произвольное натуральное M , а также $\tau > 0$. Обозначим

$$\mathcal{K}_n^{M, \tau} = \left\{ k \in \left[1, \frac{n}{M} \right] : t_{((k-1)M, kM], n}^{\text{cl}} < \tau \right\}. \quad (28)$$

Эта величина описывает количество кластеризовавшихся к моменту τ блоков вида $((k-1)M, kM]$.

Лемма 4. В теплом газе (при любой из трех моделей начальных положений) для произвольных $M \in \mathbf{N}$ и $\tau > 0$ справедливо

$$\frac{\#\mathcal{K}_n^{M, \tau}}{n/M} \xrightarrow{\mathbf{P}} 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Оно идентично доказательству теоремы 1 и самостоятельного интереса не представляет. Там мы воспользовались леммой 2, а здесь, соответственно, потребуется следствие леммы 3.

Итак, рассмотрим произвольное $\delta \in (0, 1/6)$. Аналогично определению (21), для каждого $k \in [\delta n/M, (1-\delta)n/M]$ положим $\xi_k^{(n)} = \mathbf{1}_{[0, \tau)}(t_{((k-1)M, kM], n}^{\text{cl}})$. Как и ранее, достаточно доказать аналог (24), т.е.

проверить, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ выполняется

$$i, j \in \left[\frac{\delta n}{M}, (1 - \delta) \frac{n}{M} \right], \quad \frac{2\delta n}{M} < |i - j| \implies \text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) < \varepsilon.$$

В отличие от предыдущего доказательства, проверка не составит труда. По следствию леммы 3, существует $N(\varepsilon)$ такое, что если $n > N(\varepsilon)$, то

$$j \in [\delta n, (1 - \delta)n] \implies \mathbf{P}\{t_{[j, j+M], n}^{\text{cl}} < \tau\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, при $n > N(\varepsilon)$

$$k \in \left[\frac{\delta n}{M}, (1 - \delta) \frac{n}{M} \right] \implies \mathbf{P}\{\xi_k^{(n)} = 1\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поэтому, если $n > N(\varepsilon)$ и $i, j \in [\delta n/M, (1 - \delta)n/M]$, то

$$\text{cov}(\xi_i^{(n)}, \xi_j^{(n)}) < 1 - \mathbf{P}\{\xi_i^{(n)} = 1\} \mathbf{P}\{\xi_j^{(n)} = 1\} < 1 - \left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right)^2 < \varepsilon.$$

Положив $M = 1$, получаем такое следствие.

Следствие. В теплом газе для любого $t > 0$ справедливо

$$\frac{K_n(t)}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

6. Предельная энергия. Основная теорема этого раздела описывает мгновенное охлаждение теплого газа. Кроме того, здесь дается явная формула для энергии.

Поясним полученные результаты. Изменение энергии холодного газа происходит по следующим причинам. С одной стороны, абсолютные скорости подавляющего большинства частиц возрастают из-за гравитации, и в силу этого энергия системы увеличивается. С другой стороны, при столкновениях частиц энергия падает. В теореме 3, в частности, показано, что в холодном газе процессом уменьшения энергии при столкновениях можно пренебречь. В случае теплого газа происходит мгновенное образование больших кластеров, за счет чего начальные скорости усредняются и практически исчезают. После этого они меняются так же, как и в холодном газе, т.е. опять можно не учитывать уменьшение энергии из-за столкновений.

Теорема 2. Теплый газ (при любой из трех моделей начальных положений) мгновенно охлаждается: в начальный момент времени

$$E_n(0) \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{\sigma^2}{2}, \quad n \rightarrow \infty,$$

но для любого $\rho > 0$ при $t \in (0, \min\{\sqrt{2\rho/3}, \rho/(3\sigma)\})$ выполняется

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\{E_n(t) < \rho\} = 1.$$

Доказательство. Первая часть теоремы немедленно следует из закона больших чисел.

Для оценки энергии системы в произвольный момент времени $t \in (0, \min\{\sqrt{2\rho/3}, \rho/(3\sigma)\})$ представим множество $[1, n]$ в виде $[1, n] = \bigcup_{j=1}^m J_j$, где J_j — блоки, соответствующие существующим в момент t кластерам.

Рассмотрим произвольный кластер $K = KJ_j$, состоящий из $k = \#J_j$ исходных частиц. Так как все абсолютные ускорения $|a_i|$ меньше 1, то $|v_K(t)| < k^{-1}|\sum_{i \in J_j} v_i| + t$. Отсюда для энергии кластера K

$$E_K(t) < \frac{k}{2n} \left(k^{-1} \left| \sum_{i \in J_j} v_i \right| + t \right)^2 \leq \frac{1}{2nk} \left(\sum_{i \in J_j} v_i \right)^2 + \frac{t}{n} \sum_{i \in J_j} |v_i| + \frac{kt^2}{2n}.$$

Значит, для энергии всей системы

$$E_n(t) < \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^m \#J_j^{-1} \left(\sum_{i \in J_j} v_i \right)^2 + \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n |v_i| + \frac{t^2}{2}. \quad (29)$$

Разберемся с каждым из трех слагаемых по отдельности. Для третьего слагаемого, которое не является случайным,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{t^2}{2} < \frac{\rho}{3} \right\} = 1. \quad (30)$$

Напоминаем, что t было выбрано достаточно маленьким. Далее, для второго слагаемого, используя закон больших чисел и то, что $\mathbf{E}|v_1| \leq \sigma$, получаем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{t}{n} \sum_{i=1}^n |v_i| < \frac{\rho}{3} \right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |v_i| < \frac{\rho}{3t} \right\} = 1. \quad (31)$$

Таким образом, мы оценили возможное увеличение энергии из-за гравитации. Оставшееся слагаемое является функцией от начальных скоростей. Для его оценки воспользуемся неравенством Коши–Буняковского.

Пусть $M \in \mathbf{N}$. Снова рассмотрим произвольный кластер $K = KJ_j$. Максимальное по включению множество вида $(kM, (k+i)M]$, содержащееся в J_j , обозначим I^M ; возможно, это множество пусто. Теперь $J_j = I^M \cup I$, где I — дополнение I^M до J_j . Далее, разобьем I^M на непересекающиеся подмножества I_1, \dots, I_s , каждое из которых есть отрезок вида $((k-1)M, kM]$. Естественно, что для таких k справедливо $k \in \mathcal{K} := \mathcal{K}_n^{M,t}$; напоминаем, что определение множества $\mathcal{K}_n^{M,t}$ было дано в (28). Таким образом, $J_j = (\bigcup_{\ell=1}^s I_\ell) \cup I$.

В этих обозначениях из неравенства Коши–Буняковского получаем

$$\#J_j^{-1} \left(\sum_{i \in J_j} v_i \right)^2 \leq \sum_{\ell=1}^s \frac{1}{M} \left(\sum_{i \in I_\ell} v_i \right)^2 + \sum_{i \in I} v_i^2.$$

Отсюда для первого слагаемого суммы (29)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^m \#J_j^{-1} \left(\sum_{i \in J_j} v_i \right)^2 &\leq \frac{1}{2n} \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{1}{M} \left(\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i \right)^2 \\ &+ \frac{1}{2n} \sum_{k \notin \mathcal{K}} \sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i^2. \end{aligned} \quad (32)$$

По лемме 4, для любых $\delta, \varepsilon > 0$ существует такое $N_1(\varepsilon)$, что при всех $n > N_1(\varepsilon)$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{\#\mathcal{K}}{n/M} > 1 - \delta \right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, с вероятностью, превосходящей $1 - \varepsilon/2$, во втором слагаемом суммы (32) суммируется менее чем δn величин v_i^2 . Поэтому

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{k \notin \mathcal{K}} \sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i^2 < \frac{1}{2n} \sum_{i=(1-\delta)n}^n (v^2)_{i:n} \right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \quad (33)$$

(где $(v^2)_{i:n}$ — порядковые статистики для серий величин $\{v_i^2\}_{i=1}^n$).

Обозначим H_δ такой симметричный относительно 0 отрезок, что $P_v(H_\delta) = 1 - \delta$, где P_v — мера, являющаяся распределением скоростей. Используя теорему Гливенко и закон больших чисел, получаем

$$\frac{1}{2n} \sum_{i=(1-\delta)n}^n (v^2)_{i:n} \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{1}{2} \int_{\mathbf{R} \setminus H_\delta} x^2 dP_v(x).$$

По абсолютной непрерывности интеграла (второй момент скоростей существует) выражение в правой части стремится к 0 при $\delta \rightarrow 0$. Поэтому при всех достаточно малых $\delta > 0$ для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое $N_2(\varepsilon)$, что при всех $n > N_2(\varepsilon)$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{i=(1-\delta)n}^n (v^2)_{i:n} < \frac{\rho}{6} \right\} > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (33) следует, что при всех малых $\delta > 0$ для любого $\varepsilon > 0$ и всех $n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$

$$\mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{k \notin \mathcal{K}} \sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i^2 < \frac{\rho}{6} \right\} > 1 - \varepsilon.$$

Значит,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{1}{2n} \sum_{k \notin \mathcal{K}} \sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i^2 < \frac{\rho}{6} \right\} = 1. \quad (34)$$

Осталось разобраться лишь с первым слагаемым в правой части (32). Оно, очевидно, мажорируется полной суммой:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2n} \sum_{k \in \mathcal{K}} \frac{1}{M} \left(\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i \right)^2 &\leq \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{n/M} \frac{1}{M} \left(\sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i \right)^2 \\ &= \frac{M}{2n} \sum_{k=1}^{n/M} \left(\frac{1}{M} \sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i \right)^2. \end{aligned}$$

Определим новые серии случайных величин:

$$\eta_k^{(n)} := \left(\frac{1}{M} \sum_{i=(k-1)M+1}^{kM} v_i \right)^2, \quad k \in \left[1, \frac{n}{M} \right].$$

В каждой серии эти величины независимы, одинаково распределены и, как легко убедиться, имеют математические ожидания, равные $\sigma^2 M^{-1}$. Вспомним теперь про то, что M было произвольным, и выберем его так, чтобы $\sigma^2 M^{-1} < \rho/6$. Тогда по закону больших чисел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \frac{M}{2n} \sum_{k=1}^{n/M} \eta_k < \frac{\rho}{6} \right\} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| \frac{M}{n} \sum_{k=1}^{n/M} \eta_k - \frac{\sigma^2}{M} \right| < \frac{\rho}{6} \right\} = 1. \quad (35)$$

Учитывая (30), (31), (34) и (35), получаем искомое. Теорема 2 доказана.

Теперь мы можем приступить к доказательству формул для предельной энергии. Но сперва обозначим $L_n(t)$ размер максимального кластера к моменту t . В холодном газе для пуассоновской и н.р.р. моделей при $t < 1$ имеем $L_n(t) \sim \ln n$ по вероятности (см. [3] и [4]). Отсюда во всех трех моделях

$$\frac{L_n(t)}{n} \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (36)$$

(для решетчатой модели $L_n(t) = 1$ при $t < 1$).

Теорема 3. В холодном газе (при любой из трех моделей начальных положений) для любого $t \in [0, 1)$ справедливо

$$E_n(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{t^2}{6}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t \in [0, 1)$. Предположим, что к моменту t образовался кластер $K = K(l, l+k]$. В начальный момент времени произвольная частица с номером $i \in (l, l+k]$ испытывает ускорение $a_i(0) = (n-2i+1)/n$ (с вероятностью 1). Так как блок $(l, l+k]$ свободен к моменту t , а все его частицы уже входят в кластер K , то справедливо $x_{(l, l+k]}(t) = x_K(t) = x_i(t)$ и $v_{(l, l+k]}(t) = v_K(t) = v_i(t)$. Воспользуемся предложением 1 и получим $v_i(t) = ((n-2l-k)/n)t$.

Значит, $|v_i(t) - a_i(0)t| < kt/n$; учитывая $|a_i(0)| < 1$ и $k \leq n$, из формулы разности квадратов выводим неравенство

$$|v_i(t)^2 - a_i(0)^2 t^2| < 2 \frac{k}{n} t^2.$$

Учитывая (36), получаем

$$\sup_{i \in [1, n]} |v_i(t)^2 - a_i(0)^2 t^2| \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

и отсюда

$$E_n(t) - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \left(\frac{n-2i+1}{n} t \right)^2 \xrightarrow{\mathbf{P}} 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Вычисление суммы завершает доказательство.

Обратимся теперь к теплому газу. В доказательстве следующей теоремы мы снова воспользуемся идеей об оценке скорости произвольной частицы при помощи размера максимального кластера. Однако для этого потребуются наложить более жесткие условия на v_i . Согласно [4], при $t < 1$ для всех трех моделей начальных положений $L_n(t) \sim n^{2/3} \ln n^{1/3}$ по вероятности, но для этого нужно существование 7-х моментов у скоростей. Нам же требуется лишь $L_n(t) = o(n)$. Для решетчатой модели начальных положений этот результат присутствует в [6], при более слабом условии существования моментов порядка $4 + \varepsilon$.

Теорема 4. *В теплом газе (для любой из трех моделей начальных положений) справедливо*

$$E_n(0) \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{\sigma^2}{2}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Если для произвольного $t \in (0, 1)$ выполняется условие (36), то

$$E_n(t) \xrightarrow{\mathbf{P}} \frac{t^2}{6}, \quad n \rightarrow \infty. \quad (37)$$

В частности, если $\mathbf{E}|v_1|^c < \infty$ ($c = 7$ для пуассоновской и н.р.р. моделей, $c > 4$ для решетчатой), то (37) выполняется при всех $t \in (0, 1)$.

Доказательство. Снова зафиксируем произвольное $t \in (0, 1)$ и $\tau \in (0, t)$. Предположим, что к моменту t образовался кластер $K = K(l, l+k)$. Опять воспользуемся предложением 1:

$$v_i(t) = \frac{1}{k} \sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau) + \frac{n-2l-k}{n} (t-\tau).$$

Отсюда, аналогично предыдущему доказательству,

$$|v_i(t) - a_i(0)(t-\tau)| < \left| \frac{1}{k} \sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau) \right| + \frac{k}{n} (t-\tau) < \left| \frac{1}{k} \sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau) \right| + \frac{k}{n} t;$$

учитывая, что $k \leq n$, получаем

$$|v_i(t)^2 - a_i(0)^2(t - \tau)^2| < \left(\left| \frac{1}{k} \sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau) \right| + \frac{k}{n} t \right) \left(\left| \frac{1}{k} \sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau) \right| + 2t \right).$$

Раскрыв скобки, приходим к неравенству

$$|v_i(t)^2 - a_i(0)^2(t - \tau)^2| < \left(\frac{1}{k} \sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau) \right)^2 + \frac{3}{k} t \left| \sum_{j=l+1}^{l+k} v_j(\tau) \right| + 2 \frac{k}{n} t^2.$$

Значит, для энергии кластера $K = K(l, l + k]$

$$\begin{aligned} \left| E_K(t) - \frac{1}{2n} \sum_{i=l+1}^{l+k} a_i(0)^2(t - \tau)^2 \right| &< \frac{k}{2n} \left(\frac{1}{k} \sum_{i=l+1}^{l+k} v_i(\tau) \right)^2 \\ &+ \frac{3}{2n} t \left| \sum_{i=l+1}^{l+k} v_i(\tau) \right| + \frac{k^2}{n^2} t^2. \end{aligned}$$

Оценив второе слагаемое суммой модулей, а первое при помощи неравенства Коши–Буняковского, получаем

$$\left| E_K(t) - \frac{1}{2n} \sum_{i=l+1}^{l+k} a_i(0)^2(t - \tau)^2 \right| < \frac{1}{2n} \sum_{i=l+1}^{l+k} v_i(\tau)^2 + \frac{3}{2n} t \sum_{i=l+1}^{l+k} |v_i(\tau)| + \frac{k^2}{n^2} t^2.$$

Поскольку $k^2 \leq L_n(t) k$, а суммарное количество частиц во всех кластерах равно n ,

$$\begin{aligned} &\left| E_n(t) - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n a_i(0)^2(t - \tau)^2 \right| \\ &< \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n v_i(\tau)^2 + \frac{3}{2n} t \sum_{i=1}^n |v_i(\tau)| + \frac{L_n(t)}{n} t^2 \\ &\leq \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n v_i(\tau)^2 + \frac{3}{2} t \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n v_i(\tau)^2 \right)^{1/2} + \frac{L_n(t)}{n} t^2 \\ &= E_n(\tau) + \frac{3}{2} t \sqrt{2E_n(\tau)} + \frac{L_n(t)}{n} t^2, \end{aligned} \tag{38}$$

для второй оценки мы снова использовали неравенство Коши–Буняковского. Теперь зафиксируем произвольное $\rho > 0$. По теореме 2 и условию (36), из (38) имеем

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P} \left\{ \left| E_n(t) - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n a_i(0)^2(t - \tau)^2 \right| < \rho \right\} = 1$$

для всех достаточно малых τ . На этом доказательство завершается, ведь при всех малых τ и больших n справедливо

$$\mathbf{P} \left\{ \left| E_n(t) - \frac{t^2}{6} \right| < 2\rho \right\} \geq \mathbf{P} \left\{ \left| E_n(t) - \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n a_i(0)^2(t - \tau)^2 \right| < \rho \right\}.$$

7. Компьютерное моделирование. Теорема 1, являющаяся одним из основных результатов статьи, была обнаружена эмпирически. В результате многочисленных запусков программы, реализующей рассматриваемую модель холодного гравитационного газа, автор обнаружил, что график функции $K_n(t)/n$ при больших n сильно напоминает параболу $1 - t^2$, где $t \in [0, 1]$. Это соответствует соотношению (19). Как уже говорилось, равенство $f(t) = 1 - t^2$ пока доказать не удалось, однако проведенное компьютерное моделирование случайной величины из выражения (8) недвусмысленно указывает на его справедливость.

При моделировании была реализована н.р.р. модель начальных положений. В случае теплого газа начальные скорости брались нормальными с параметрами 0 и 1.

На рис. 1 представлены графики функций $K_n(t)$ при $n = 100$ и $n = 1000$ соответственно. Каждый из них получен в результате однократного запуска моделирующей программы. При $n = 5000$ отклонение от предельной функции оказалось настолько малым, что было абсолютно незаметно при выбранном размере рисунка.

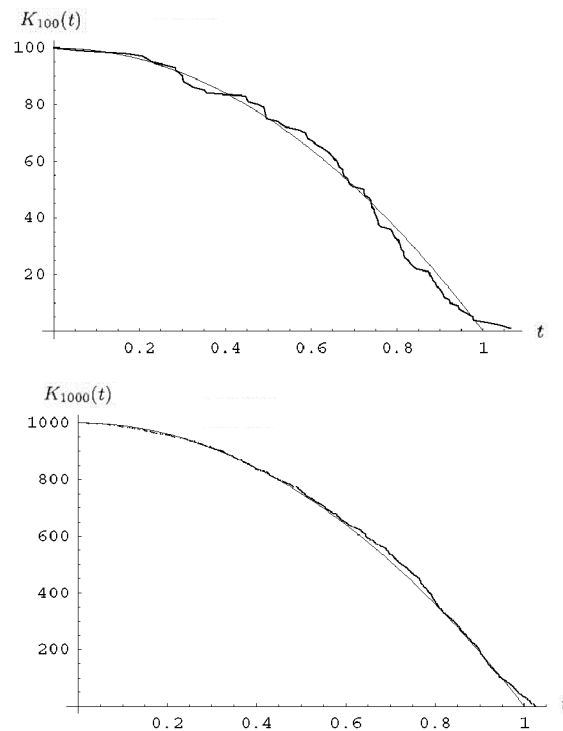


Рис. 1. $K_{100}(t)$ и $K_{1000}(t)$ в холодном газе.

При изучении энергии оказалось, что в холодном газе достаточно хорошее приближение к предельной функции (см. теорему 3) достигается

уже при $n = 100$. Это подтверждает рис. 2.

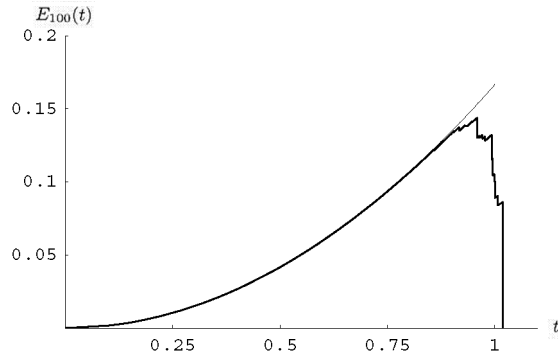


Рис. 2. $E_{100}(t)$ в холодном газе.

В теплом газе сходимость энергии к пределу (см. теорему 4) происходит гораздо медленнее. На рис. 3 изображены графики функций $E_n(t)$ при $n = 500$ и $n = 5000$.

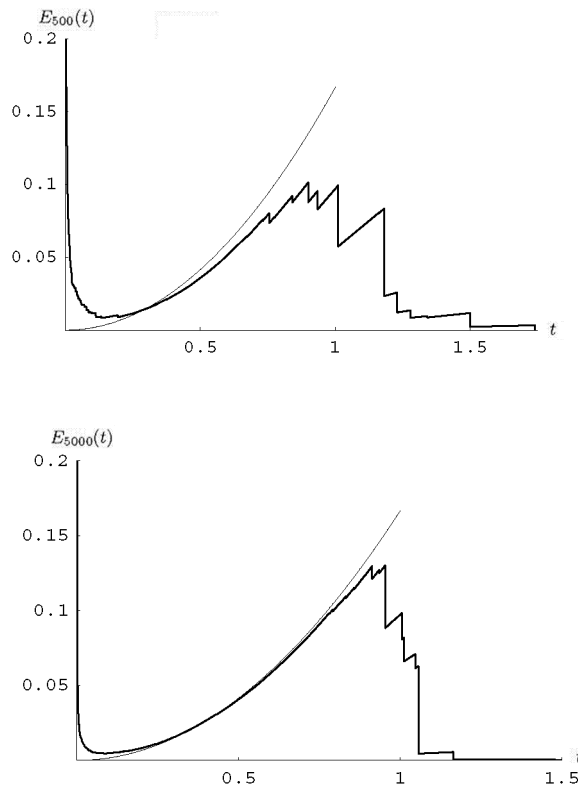


Рис. 3. $E_{500}(t)$ и $E_{5000}(t)$ в теплом газе.

Отклонение от предельной функции при t , близких к 1, достаточно велико даже при $n = 10\,000$. Однако рис. 3 убедительно свидетельствует об описываемом теоремой 2 мгновенном охлаждении теплого газа.

Автор выражает глубокую признательность своему руководителю М. А. Лифшицу, чьи замечания позволили значительно улучшить изложение результатов и исправить ряд неточностей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Shandarin S. F., Zel'dovich Ya. B.* The large-scale structure of the universe: turbulence, intermittency, structures in a self-gravitating medium. — *Rev. Modern Phys.*, 1989, v. 61, № 2, p. 185–220.
2. *Martin Ph. A., Piasecki J.* Aggregation dynamics in a self-gravitating one-dimensional gas. — *J. Statist. Phys.*, 1996, v. 84, № 3–4, p. 837–857.
3. *Giraud C.* Clustering in a self-gravitating one-dimensional gas at zero temperature. — *J. Statist. Phys.*, 2001, v. 105, № 3–4, p. 585–604.
4. *Lifshits M., Shi Z.* Aggregation rates in one-dimensional stochastic systems with adhesion and gravitation. — *Ann. Probab.*, 2005, v. 33, p. 53–81.
5. *Bonvin J. C., Martin Ph. A., Piasecki J., Zotos X.* Statistics of mass aggregation in a self-gravitating one-dimensional gas. — *J. Statist. Phys.*, 1998, v. 91, № 1–2, p. 177–197.
6. *Судан Т. М.* Одномерный гравитационно взаимодействующий газ и выпуклая миноранта броуновского движения. — *Успехи матем. наук*, 2001, т. 56, № 4, с. 73–96.
7. *E W., Rykov Yu. G., Sinai Ya. G.* Generalized variational principles, global weak solutions and behavior with random initial data for systems of conservation laws arising in adhesion particle dynamics. — *Comm. Math. Phys.*, 1996, v. 177, № 2, p. 349–380.
8. *Биллингсли П.* Сходимость вероятностных мер. М.: Наука, 1977, 352 с.

Поступила в редакцию
11.VIII.2003