

Ф. Петров

ДВА ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ПОДХОДА К ПРЕДЕЛЬНЫМ ФОРМАМ ДИАГРАММ ЮНГА

**Дорогой Нине Николаевне Уральцевой
в связи с ее юбилеем**

Задача о вычислении предельных форм диаграмм Юнга и других геометрических и комбинаторных конфигураций с теми или иными статистиками была во всей общности поставлена в 70-х гг. А. М. Вершиком (см [4] и указанную там более раннюю литературу). Особо подчеркивалась важность изучения предельных форм диаграмм Юнга в связи с теорией разбиений натуральных чисел, статфизикой, теорией представлений и др. Асимптотики различных индивидуальных функционалов от разбиений рассматривались ранее в венгерской школе (Эрдеш, Туран и др.). Нахождение предельной формы позволяет судить об асимптотическом поведении сразу всех непрерывных функционалов. Для наиболее естественного случая – равномерного распределения на разбиениях натурального числа – предельная форма была приведена А. М. Вершиком и С. В. Керовым в работе [1] и неявно найдена в [2]. В физической работе [3] она также была приведена, но без всяких комментариев. Широкий класс примеров таких задач рассмотрен в [4], там же, по-видимому впервые, поставлена задача о боксе (предельная форма разбиений с ограниченным числом и размером слагаемых) и приведен ответ (см. также [5]).

В данной заметке мы, минуя большой канонический ансамбль, на котором основан метод [4], элементарными методами получаем предельную форму для неограниченных и ограниченных разбиений в случае равномерной статистики. При этом мы фактически используем функцию, задающую предельную форму, что упрощает оценки. Попутно приводится еще один элементарный вывод главного члена асимптотики Харди–Рамануджана функции Эйлера числа разбиений.

Ключевые слова : разбиения, предельные формы.

Работа выполнена при финансовой поддержке грантов РФФИ-08-01-00379-а и НШ-2460.2008.1.

Затем мы рассматриваем более общую задачу о мультипликативных статистиках, поставленную и решенную во многих частных случаях в [4]. Тут мы приводим общую схему рассуждений, которая опять же минует рассмотрение большого канонического ансамбля, и демонстрируем ее работу для случая разбиений на различные слагаемые.

Я благодарен Анатолию Моисеевичу Вершику за постановку задачи и многочисленные полезные обсуждения.

Эта работа основана на двух текстах, написанных в 2004–2005 годах. Один из них был опубликован как препринт ПОМИ, второй не был опубликован вообще. Он составил основу моей дипломной работы, выполненной на кафедре математической физики матмеха СПбГУ. Математическое и человеческое влияние, оказанное на меня ее руководителем, Ниной Николаевной Уральцевой, трудно переоценить. Я рад возможности опубликовать этот текст в сборнике, посвященном юбилею Нины Николаевны.

1. АСИМПТОТИКА ЧИСЛА ДИАГРАММ ЮНГА В ПОЛОСАХ

Определим $p(n, k)$ как количество разбиений натурального числа n на слагаемые, не превосходящие k (порядок слагаемых не учитывается). Для $k = n$ получаем $p(n, n) = p(n)$ — количество всех разбиений числа n .

Разбиению $\lambda \vdash n : n = k_0 + k_1 + k_2 \dots$ на слагаемые $k_0 \geq k_1 \geq k_2 \geq \dots$ сопоставим *диаграмму Юнга*: $Y_\lambda = \cup_{i=0}^{\infty} \{(x, y) : i \leq y \leq i + 1, x \leq k_i\}$. *Границей* диаграммы нам будет удобно называть только часть границы, не принадлежащую координатным осям.

Рассмотрим множество $P_{n,k}$ разбиений n на слагаемые, не превосходящие k . Разобьем его на два подмножества: в первый отнесем те, в которых есть слагаемое, равное k , во второй — все остальные. Подсчитывая количества разбиений в этих подмножествах, получаем

$$p(n, k) = p(n - k, k) + p(n, k - 1) \quad (1)$$

Геометрически разбиениям из $P_{n,k}$ соответствуют диаграммы с шириной (горизонтальным размером) не больше k . Симметрия относительно прямой $y = x$ показывает, что количество диаграмм с высотой не больше k также равно $p(n, k)$.

Определим функции $\varphi(s)$, $F(s)$ ($s > 0$) равенствами

$$\varphi(s) = -\ln(1 - e^{-s}), \quad F(s) = \frac{1}{s} \int_0^s \varphi(t) dt.$$

Лемма 1 (оценка сверху). Для всех $s > 0$ и натуральных n, k выполняется неравенство

$$p(n, k) \leq e^{kF(s) + \frac{n}{k}s}. \quad (2)$$

Доказательство. Индукция по n и k . (2) очевидно для $n = 1$ или $k = 1$. Пусть $n, k > 1$ и (2) доказано для пар $(n, k-1)$ и $(n-k, k)$. Тогда из (1) имеем

$$p(n, k) \leq e^{kF(s_1) + \frac{n-k}{k}s_1} + e^{(k-1)F(s_2) + \frac{n}{k-1}s_2}$$

для произвольных положительных s_1, s_2 .

Выберем $s_1 = s, s_2 = \frac{k-1}{k}s$.

Получим неравенство

$$p(n, k) \leq A := e^{kF(s) + \frac{n}{k}s - s} + e^{(k-1)F(\frac{k-1}{k}s) + \frac{n}{k}s}.$$

Докажем, что $A \leq e^{kF(s) + \frac{n}{k}s}$. Имеем

$$\begin{aligned} Ae^{-kF(s) - \frac{n}{k}s} &= e^{-s} + e^{(k-1)F(\frac{k-1}{k}s) - kF(s)} = e^{-s} + e^{-\frac{k}{s} \int_{s-s/k}^s \varphi(t) dt} \\ &= e^{-s} + e^{\ln(1-e^{-s'})} = 1 - e^{-s'} + e^{-s} < 1 \end{aligned}$$

(здесь $s' \in [s - k/s, s]$ — число, удовлетворяющее теореме о среднем $\frac{k}{s} \int_{s-k/s}^s \varphi(t) dt = \varphi(s')$).

Тем самым индукционный переход завершен, и лемма 1 доказана.

Следствие. Для $k = n$ и $s := \sqrt{\zeta(2) \cdot n}$ получаем

$$\begin{aligned} \ln p(n) = \ln p(n, n) &\leq s + \frac{n}{s} \int_0^s \varphi(t) dt < s + \frac{n}{s} \int_0^\infty \varphi(t) dt \\ &= s + \frac{n}{s} \zeta(2) = 2\sqrt{\zeta(2) \cdot n}. \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь мы понимаем $\zeta(2)$ как $\zeta(2) = \sum \frac{1}{n^2} = \int_0^\infty -\ln(1-e^{-t}) dt$; то, что на самом деле $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, не используется.

Следующая лемма нам понадобится лишь для вывода известного соотношения $\ln p(n) = 2\sqrt{\zeta(2) \cdot n} + O(\ln n)$.

Лемма 2 (оценка снизу). Для достаточно большого $M > 0$ следующее неравенство справедливо для всех натуральных n и k

$$\ln p(n, k) \geq A(n, k) := \min_{s>0} kF(s) + \frac{n}{k}s - M(\ln n + \ln k + 1) \quad (4)$$

Доказательство. весьма рутинно. Многие детали опускаются.

Прежде всего заметим, что за счет выбора M оценку (4) можно считать выполненной для $k = 1$ или $n = 1$. Действительно, выражение $\min_{s>0} kF(s) + \frac{n}{k}s$ не больше $kF(k) + 1 \leq \zeta(2) + 1$ для $n = 1$ и не больше $F(1/n) + 1 = O(\ln n)$ для $k = 1$. Также можно считать оценку доказанной для любого наперед заданного конечного множества пар (n, k) .

Пусть $n, k > 1$ и пара (n, k) удовлетворяет условию $\max(n, k) > c$, где константа c будет выбрана в дальнейшем. Будем считать (4) доказанным для пар $(n, k-1)$ и, если $n > k$, для пары $(n-k, k)$.

Имеем

$$\begin{aligned} p(n, k)e^{-A(n, k)} &= p(n, k-1)e^{-A(n, k)} + p(n-k, k)e^{-A(n, k)} \\ &\geq e^{A(n, k-1)-A(n, k)} + e^{A(n-k, k)-A(n, k)} \end{aligned}$$

(если $n \leq k$, второе слагаемое опускается).

Заметим, что минимум $\min_{s>0} kF(s) + \frac{n}{k}s$ достигается в точке $s_{n, k}$, определяемой уравнением $-F'(s_{n, k}) = n/k^2$. Определим функцию $s(t)$ равенством $-F'(s(t)) = t$. Введем также функцию $E(t) = e^{-s(t)}$, определенную нулем для $t \leq 0$.

Несложно видеть, что функция $E(t)$ является плоской в нуле и ведет себя как $1 - 1/t$ на бесконечности.

Нам понадобится следующее техническое утверждение: для некоторой константы $C > 0$

$$0 < E\left(\frac{n}{(k-1)^2}\right) - E\left(\frac{n-k}{k^2}\right) \leq C \min(1/k, k/n) \quad (5)$$

при всех натуральных $n, k > 1$.

Действительно, по теореме о среднем

$$\begin{aligned} E\left(\frac{n}{(k-1)^2}\right) - E\left(\frac{n-k}{k^2}\right) &= \left(\frac{n}{(k-1)^2} - \frac{n-k}{k^2}\right) E'(t), \\ \frac{n}{(k-1)^2} &> t > \frac{n-k}{k^2}. \end{aligned}$$

Имеем $\frac{n}{(k-1)^2} - \frac{n-k}{k^2} = O(1/k + n/k^3)$, и из равенств $1/k + n/k^3 = \frac{1}{k}(1 + n/k^2) = \frac{k}{n}(n/k^2 + (n/k^2)^2)$ получаем, что

$$\frac{E(\frac{n}{(k-1)^2}) - E(\frac{n-k}{k^2})}{\min(1/k, k/n^2)} = E'(t) \cdot O(1 + t^2)$$

Последнее выражение равномерно ограничено: $E'(t) = -E(t)s'(t)$ убывает как t^{-2} при больших t .

Обозначим $s_1 = s(n, k-1)$ и $s_2 = s(n-k, k)$ (для $n \leq k$ положим $s_2 = +\infty$).

По определению минимума имеем

$$\min_{s>0} kF(s) + \frac{n}{k}s \leq kF(\frac{ks_1}{k-1}) + \frac{n}{k-1}s_1 \quad (6)$$

и для $n > k$

$$\min_{s>0} kF(s) + \frac{n}{k}s \leq kF(s_2) + \frac{n}{k}s_2 \quad (7)$$

Из (6) получаем

$$\begin{aligned} A(n, k-1) - A(n, k) &\geq (k-1)F(s_1) - kF(\frac{ks_1}{k-1}) + M \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \\ &= -\frac{1}{k-1} \int_{s_1}^{\frac{ks_1}{k-1}} \varphi(t)dt + M \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \\ &\geq -\varphi(s_1) + M \ln\left(\frac{k}{k-1}\right) \geq -\varphi(s_1) + \ln(1 + M/k). \end{aligned}$$

Из (7): $A(n-k, k) - A(n, k) \geq -s_2 + M \ln \frac{n}{n-k} \geq -s_2 + \ln(1 + Mk/n)$. Отсюда, используя (5), получаем

$$\begin{aligned} p(n, k)e^{-A(n, k)} &\geq (1 + M/k)e^{-\varphi(s_1)} + (1 + Mk/n)e^{-s_2} \\ &= (1 + M/k)(1 - e^{-s_1}) + (1 + Mk/n)e^{-s_2} \\ &\geq (1 + M \min(1/k, k/n))(1 - e^{-s_1} + e^{-s_2}) \\ &\geq (1 + M \min(1/k, k/n))(1 - C \min(1/k, k/n)) > 1 \end{aligned}$$

для достаточно большой константы M и всех n, k , для которых $\max(n, k) \geq 1 + C^{-2}$. Для тех пар (n, k) , для которых $\max(n, k) \geq$

$1 + C^{-2}$, неравенство можно считать уже проверенным и включить в базу индукции. Лемма доказана.

Из леммы 2 при $k = n > 1$ получаем оценку $\ln p(n) \geq 2\sqrt{\zeta(2) \cdot n} - C \ln n$ для подходящей константы $C > 0$. В самом деле, если $s < \sqrt{n}/5$, то

$$nF(s) + s > nF(\sqrt{n}/5) = 5\sqrt{n} \int_0^{\sqrt{n}/5} \varphi(t) dt > 5\sqrt{n}$$

для достаточно больших n . Если же $s > \sqrt{n}/5$, то

$$nF(s) = \frac{n}{s} \int_0^s \varphi(t) dt \geq \zeta(2) \cdot n/s - n \int_{\sqrt{n}/5}^{\infty} \varphi(s) ds = \zeta(2) \cdot n/s + o(1),$$

так что

$$\min_s (nF(s) + s) \geq \min_s (\zeta(2) \cdot n/s + s) + o(1) = 2\sqrt{\zeta(2)n} + o(1).$$

Вместе со следствием из леммы 1 получаем, что

$$\ln p(n) = 2\sqrt{\zeta(2) \cdot n} + O(\ln n).$$

2. ПРЕДЕЛЬНАЯ ФОРМА ДИАГРАММ ЮНГА ДАННОЙ БОЛЬШОЙ ПЛОЩАДИ

Следующее утверждение отчасти проясняет геометрическую природу концентрации диаграмм Юнга вблизи предельной кривой.

Лемма 3. Пусть s_1, s_2 — положительные числа. Обозначим через d расстояние от точки (s_1, s_2) до кривой $e^{-x} + e^{-y} = 1$. Тогда

$$\int_0^{s_1} \varphi(t) dt + \int_0^{s_2} \varphi(t) dt - s_1 s_2 \leq \zeta(2) - \frac{\pi d^2}{4}$$

Доказательство. Это утверждение в духе неравенства Юнга. Выражение $\zeta(2) - \left(\int_0^{s_1} \varphi(t) dt + \int_0^{s_2} \varphi(t) dt - s_1 s_2 \right)$ есть площадь криволинейного треугольника на рисунке 1, которая очевидно не меньше, чем $\pi d^2/4$.

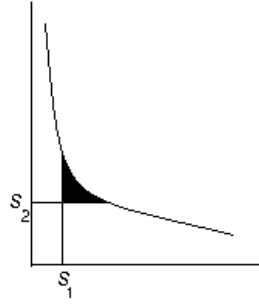


Рис. 1.

Вернемся к разбиениям. Как уже было сказано, каждому разбиению числа n соответствует диаграмма Юнга площади n .

Рассмотрим диаграммы Юнга с фиксированной граничной точкой (a, b) .

Пусть площадь диаграммы выше прямой $y = b$ равна A , правее прямой $x = a - A$. Количество диаграмм с данными A и B очевидно равно $p(A, a) \cdot p(B, b)$. Отметим также, что $A + B + ab = n$. Имеем

$$p(A, a)p(B, b) \leq e^{aF(s_a) + \frac{A}{a}s_a + bF(s_b) + \frac{B}{b}s_b}$$

для произвольных $s_a, s_b > 0$. Выбирая $s_a = \lambda a, s_b = \lambda b$, получаем, что

$$\ln p(A, a) + \ln p(B, b) \leq \frac{1}{\lambda} \left(\int_0^{\lambda a} \varphi(t) dt + \int_0^{\lambda b} \varphi(t) dt - \lambda^2 ab \right) + \lambda n.$$

Выбирая $\lambda = \sqrt{\zeta(2)/n}$ и пользуясь леммой 3, заключаем, что

$$\ln p(A, a) + \ln p(B, b) \leq 2\sqrt{\zeta(2)n} - \frac{d^2}{2}\sqrt{n},$$

где d — расстояние от точки $(a\sqrt{\zeta(2)/n}, b\sqrt{\zeta(2)/n})$ до кривой $e^{-x} + e^{-y} = 1$.

Рассмотрим гомотетичные копии диаграмм Юнга площади n с коэффициентом $\sqrt{\zeta(2)/n}$ (и центром в начале координат). Получится $p(n)$ нормированных диаграмм площади $\zeta(2)$. Они концентрируются в окрестности кривой $e^{-x} + e^{-y}$:

Теорема 1. *Количество нормированных диаграмм Юнга, граница которых не лежит в ε -окрестности кривой $\gamma : e^{-x} + e^{-y} = 1$, есть $p(n)O(n^C e^{-\frac{\varepsilon^2}{2}\sqrt{n}})$ для некоторой константы $C > 0$. В частности, для подходящей константы C_1 уже при $\varepsilon = \frac{C_1\sqrt{\ln n}}{\sqrt[4]{n}}$ количество диаграмм, граница которых не лежит в ε -окрестности кривой γ есть $o(p(n))$.*

Доказательство. Ясно, что если все вершины нормированной диаграммы Юнга содержатся в некоторой окрестности кривой γ , то и вся граница диаграммы содержится в этой окрестности. Вершина же, не принадлежащая окрестности, имеет координаты $\sqrt{\zeta(2)/n}(a, b)$ для некоторых натуральных a, b , для которых $ab \leq n$. Для каждой гипотетической вершины (a, b) диаграммы Юнга существует не более n способов зафиксировать площадь части диаграммы, лежащей выше прямой $y = b$. Таким образом, общее количество нормированных диаграмм, содержащих хотя бы одну граничную точку на расстоянии не менее ε от кривой γ , не больше, чем

$$n^3 e^{2\sqrt{\zeta(2)n - \frac{\varepsilon^2}{2}\sqrt{n}}} = p(n) e^{O(\ln n) - \frac{\varepsilon^2}{2}\sqrt{n}},$$

что и требовалось.

3. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ ДИАГРАММ В ПРЯМОУГОЛЬНИКЕ И В ПОЛОСЕ

Оказывается, что знание предельной формы типичной диаграммы Юнга позволяет почти автоматически получить аналогичные результаты для диаграмм, лежащих в полосе или прямоугольнике.

Обозначим через $p(n, a, b)$ количество разбиений n на не более чем a слагаемых, каждое из которых не превосходит b — или, что то же самое, количество диаграмм Юнга площади n в прямоугольнике $a \times b$.

Нам понадобится следующая

Лемма 4. *Для всех натуральных чисел n, m, a, b имеем*

$$|\ln p(n, a, b) - \ln p(m, a, b)| \leq C\sqrt{|n - m|}.$$

Доказательство. Предположим, что $n = m + k$, $k > 0$. Рассмотрим разбиение λ числа n на слагаемые $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_N$. Выберем индекс j так, что $a_N + a_{N-1} + \dots + a_{N-j+1} < k \leq a_N + a_{N-1} + \dots + a_{N-j}$. Сопоставим разбиению $\lambda \vdash n$ разбиение $\lambda' \vdash m$ числа m на слагаемые $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_{N-j-1} \geq a'_{N-j}$, где $a'_{N-j} = (a_N + a_{N-1} + \dots + a_{N-j}) - k$. Отображение $\lambda \rightarrow \lambda'$ вообще говоря не является инъекцией. Однако каждое разбиение числа m имеет не больше, чем $(k+1)p(k)$ прообразов. В самом деле, величину $a_{N-j} - a'_{N-j}$ можно выбрать не более чем $k+1$ способами, а слагаемые $a_{N-j+1} \geq a_{N-j+2} \geq \dots \geq a_N$ — не более чем $p(k)$ способами. Отсюда получаем, что $p(m, a, b) \geq \frac{p(n, a, b)}{(k+1)p(k)}$, стало быть

$$\ln p(m, a, b) \geq \ln p(n, a, b) - C \ln p(k)$$

(мы неявно воспользовались тем, что при отображении $\lambda \rightarrow \lambda'$ не увеличивается ни количество слагаемых, ни максимальное слагаемое разбиения). Оценка $p(n, a, b) \geq \frac{p(m, a, b)}{kp(k)}$ сразу следует из доказанного и тождества $p(m, a, b) \equiv p(ab - m, a, b)$ (которое устанавливается заменой диаграммы Юнга на ее дополнение до прямоугольника $a \times b$).

Выбирая один или оба параметра a, b равными $\max(m, n)$, получаем аналогичные оценки $|\ln p(n, a) - \ln p(m, a)| \leq C\sqrt{|n-m|}$ и $|\ln p(n) - \ln p(m)| \leq C\sqrt{|n-m|}$, которые могут быть выведены напрямую из оценок (2), (4).

Рассмотрим положительные числа $s_1 < s_2$. Разобьем подграфик функции $y = \varphi(x)$ на три прямоугольника и области 1, 2, 3, как показано на рисунке 2.

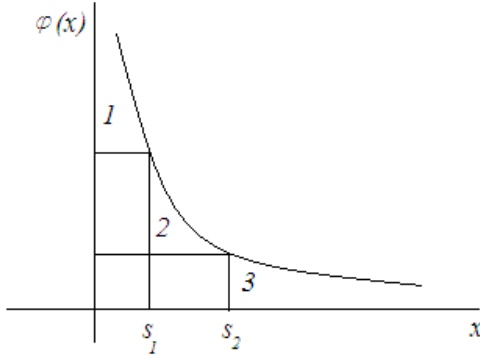


Рис. 2.

Рассмотрим нормированную диаграмму Юнга, соответствующую разбиению большого числа n . Обозначим через S_1, S_3, S_2 площади, занимаемые этой диаграммой в полосах $\{x \leq s_1, y \geq \varphi(s_1)\}, \{x \geq s_2, y \leq \varphi(s_2)\}$ и прямоугольнике $\{s_1 \leq x \leq s_2, \varphi(s_2) \leq y \leq \varphi(s_1)\}$.

Пользуясь принципом Дирихле, найдем такие числа c_1, c_2, c_3 , что хотя бы для $p(n)/n^3$ нормированных диаграмм $S_1 = c_1, S_2 = c_2, S_3 = c_3$.

Из теоремы 1 вытекает, что

$$\begin{aligned} c_1 &= \int_0^{s_1} \varphi(t) dt - s_1 \varphi(s_1) + o(1) \\ c_2 &= \int_{s_1}^{s_2} \varphi(t) dt - (s_2 - s_1) \varphi(s_2) + o(1) \\ c_3 &= \int_{s_2}^{\infty} \varphi(t) dt + o(1). \end{aligned}$$

Кроме того, обозначая $\sqrt{n/\zeta(2)}$ через N , получаем, что

$$\begin{aligned} \ln(p(c_1 N^2, s_1 N) \cdot p(c_2 N^2, (s_2 - s_1) N, (\varphi(s_1) - \varphi(s_2)) N \\ \cdot p(c_3 N^2, \varphi(s_2) N)) = \ln p(n) + o(\sqrt{n}). \end{aligned}$$

Выберем натуральные числа n_1, n_2, n_3 так, что

$$n_1 = N^2 c_1 + o(n), \quad n_2 = c_2 N^2 + o(n), \quad n_3 = c_3 N^2 + o(n).$$

Рассмотрим три диаграммы Юнга:

Y_1 — площади n_1 ширины не более $s_1 N$

Y_2 — площади n_2 ширины не более $(s_2 - s_1) N$ и высоты не более $(\varphi(s_2) - \varphi(s_1)) N$

Y_3 — площади n_3 и высоты не более $\varphi(s_2) N$.

Сопоставим им диаграмму Юнга Y площади

$$n_1 + n_2 + n_3 + [s_1 N] \cdot [\varphi(s_1) N] + [(s_2 - s_1) N] \cdot [\varphi(s_2) N] = n + o(n)$$

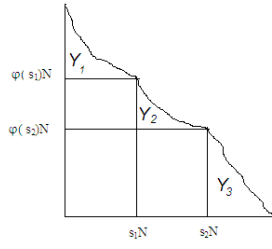


Рис. 3.

как показано на рис. 3.

Количество диаграмм, получаемых таким образом, есть

$$\begin{aligned} p(n_1, s_1N) \cdot p(n_2, (s_2 - s_1)N, (\varphi(s_2) - \varphi(s_1))N) \cdot p(n_3, \varphi(s_2)N) \\ = \exp(\ln p(n) + o(\sqrt{n})). \end{aligned}$$

Обозначим через $p'(n_1, s_1N)$ количество тех Y_1 , для которых диаграмма Y не лежит (после нормировки) в ε -окрестности предельной кривой \mathcal{T} .

По теореме 1 имеем

$$\begin{aligned} \ln p'(n_1, s_1N) + \ln p(n_2, (s_2 - s_1)N, (\varphi(s_1) - \varphi(s_2))N) \\ + \ln p(n_3, \varphi(s_2)N) \leq \ln p(n) - c(\varepsilon)\sqrt{n} \end{aligned}$$

для некоторой константы $c(\varepsilon) > 0$. Отсюда

$$\ln p'(n_1, s_1N) - \ln p(n_1, s_1N) \leq -c(\varepsilon)\sqrt{n}.$$

Это означает, что часть предельной кривой \mathcal{T} , лежащая в области 1, является предельной для диаграмм Юнга площади n_1 ширины не более s_1N (при соответствующем нормировании). Аналогично, часть кривой \mathcal{T} , лежащая в прямоугольнике 2, является предельной кривой для диаграмм площади n_2 ширины не более $(s_2 - s_1)N$ и высоты не более $(\varphi(s_1) - \varphi(s_2))N$.

Для любого прямоугольника $a \times b$ и положительного числа $S < ab$ можно поставить вопрос о предельной форме диаграммы с SN^2 клетками, расположенной в прямоугольнике $(Na) \times (Nb)$. Заменой диаграммы Y на диаграмму, Y' симметричную дополнению $((Na) \times (Nb)) \setminus Y$ относительно центра прямоугольника дело сводится к случаю $S \leq ab/2$.

Если $S < ab/2$, то найдутся такие положительные числа $s_1 < s_2$, для которых $(s_2 - s_1) : (\varphi(s_1) - \varphi(s_2)) = a : b$, а площадь подграфика кривой \mathcal{T} , заключенной в прямоугольнике $s_1 \leq x \leq s_2$, $\varphi(s_2) \leq y \leq \varphi(s_1)$, ровно в S раз больше площади всего прямоугольника. Это несложно получить из соображений непрерывности.

Если $S = ab/2$, то предельной кривой является диагональ прямоугольника, а если $S > ab/2$, то предельная форма есть часть надграфика кривой \mathcal{T} , лежащая в соответствующем прямоугольнике.

Аналогично, куском кривой \mathcal{T} является и предельная форма для разбиений числа N на $\alpha\sqrt{N}$ слагаемых.

4. МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫЕ СТАТИСТИКИ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ВОПРОСА

Опишем важный класс мер на разбиениях, введенный в [4].

Пусть $f_k(x) = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} a_{ik} x^i$ — последовательность формальных степенных рядов ($k = 1, 2, \dots$) с неотрицательными коэффициентами $a_{ik} \geq 0$.

Рассмотрим произведение

$$F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} f_k(x^k) = \sum_n \left(\sum_{\lambda \vdash n} a(\lambda) \right) x^n,$$

$a(\lambda)$ — вес разбиения $\lambda \vdash n$ — равен $a(\lambda) = a_{r_1(\lambda)1} \cdot a_{r_2(\lambda)2} \cdot \dots$, где $r_i(\lambda)$ обозначает количество слагаемых, равных i , в разбиении λ . Положим $p(\lambda) = a(\lambda) \left(\sum_{\lambda \vdash n} a(\lambda) \right)^{-1}$. Числа $p(\lambda)$, рассматриваемые как вероятности, задают меру на множестве разбиений числа n .

Аналогично можно задавать статистики на векторных разбиениях d -мерных векторов с целыми неотрицательными компонентами (надо лишь считать, что $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ — вектор, а мультистепень x^n , где $n = (n_1, \dots, n_d)$ понимать стандартным образом как $\prod_{i=1}^d x_i^{n_i}$).

Заметим, что эта мера получается сужением на разбиения числа n меры $\frac{a(\lambda)x^n}{F(x)}$, заданной на всех разбиениях всех натуральных чисел и характеризующейся следующим свойством: вероятность того, что число k встречается в разбиении r_k раз, равна $a_{r_k, k} x^{r_k \cdot k} / f_k(x^k)$. Эта мера является выпуклой комбинацией мер, возникающих при фиксированных n . В статистической физике говорят соответственно о *большом* и *малом* ансамблях. Мы будем работать только с малым ансамблем; аналогичные результаты для большого ансамбля будут вытекать из нашего замечания о выпуклой комбинации. Обратные импликации, как правило, нетривиальны и получаются с использованием теорем Тауберова типа. Этот подход изложен в [4].

Такие меры введены в [4] и названы мультипликативными статистиками на разбиениях; там же исследован вопрос о предельной форме порождаемой статистики на разбиениях при больших значениях n для случаев $f_k(x) = (1 - x)^{-P(k)}$, $f_k(x) = (1 + x)^{P(k)}$, $f_k(x) = \exp(xP(k))$ (т.н. статистики *Бозе–Эйнштейна*, *Ферми–Дирака* и *Больцмана*), где $P(k)$ – полином (так, для $P(k) \equiv 1$ в случаях Бозе–Эйнштейна и Ферми–Дирака получим соответственно равномерную статистику на разбиениях и равномерную статистику на разбиениях с различными слагаемыми).

Поставим в этом более общем контексте вопрос о предельной форме. Заметим, что вероятностная мера на разбиениях числа n естественным образом соответствует мере на диаграммах Юнга площади n . При аффинном преобразовании $(x, y) \rightarrow (x/X(n), y/Y(n))$, $X(n)Y(n) = n$, получается мера на нормированных диаграммах площади 1. Обозначим через L множество невозрастающих функций $[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ с единичным интегралом. Каждая нормированная диаграмма есть подграфик функции из L , так что можно говорить о мере μ_n на L (с конечным носителем).

Будем говорить, что функция $f_0 \in L$ задает предельную форму статистики на разбиениях, если для любого $\varepsilon > 0$ при всех достаточно больших n имеет место концентрация меры μ_n в окрестности f_0 :

$$\mu_n(B_{f_0, \varepsilon}) > 1 - \varepsilon,$$

где $B(f, r)$ – шар с центром f радиуса r в метрике L_1 .

Есть и другие подходы к определению предельной формы диаграмм Юнга. В основном они отличаются выбором топологии на множестве функций. Так, часто говорят о равномерной сходимости на

компактах, лежащих в $(0, \infty)$. Однако в некоторых случаях (когда, скажем, предельная функция оказывается разрывной), наше определение оказывается гибче.

Отметим также, что если радиус сходимости $F(x)$ равен 1 и $F(1) = \infty$, то предельная форма в смысле нашего определения оказывается также и предельной формой в смысле большого ансамбля при $x \rightarrow 1 - 0$. Это вытекает из того, что мера μ_x , задаваемая на L большим ансамблем, представима в виде $\mu_x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{F(x)} \mu_n$, причем сумма коэффициентов $\frac{x^k}{F(x)}$ при мерах μ_k с $k \leq N$ стремится к нулю при x , стремящимся к 1.

В [4] предлагается такая схема: сначала находится предельная форма для большого ансамбля, а затем с помощью подходящей тауберовой теоремы устанавливается, что она же будет и предельной формой для малого ансамбля.

Мы предлагаем более прямой и элементарный подход, не использующий большого ансамбля. Разумеется, от тауберовых условий все равно не убежать, они по существу: так, для разбиения нечетных чисел на четные слагаемые интересных результатов нет.

5. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ФОРМЫ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СТАТИСТИК. ТЕХНОЛОГИЯ

Теорема о предельной форме заданной статистики часто может быть получена изложенным ниже способом, состоящим из нескольких шагов.

Шаг первый. Оценка статсуммы сверху.

Пусть $A(n) = \left(\sum_{\lambda \vdash n} a(\lambda) \right)$, тогда $F(x) = \sum A(n)x^n$. Очевидно, что $A(n) \leq x^{-n}F(x)$ для любого $x > 0$, при котором $F(x) < \infty$. Эта тривиальная оценка оказывается весьма эффективной, если подобрать нужное значение аргумента x . Итак,

$$A(n) \leq \inf_x x^{-n}F(x) := B(n). \quad (8)$$

Шаг второй. Оценка статсуммы снизу.

Предположим, что нам априори известна монотонность последовательности $A(n)$: $1 = A(0) \leq A(1) \leq A(2) \leq \dots$. Например, она имеет место, если возрастают коэффициенты хотя бы ряда $f_1(x)$. Чтобы оценить $A(n)$ снизу, оценим функцию $F(x)$, равную сумме $\sum A(k)x^k$,

сверху следующим образом: слагаемые $A(k)x^k$ с $k > n$ оценим как $B(k)x^k$, а слагаемые с $k \leq n$ — как $\min(B(k), A(n))x^k$. Минимум оценим как $B(k)$ при $k < l$ и как $A(n)$ при $k \geq l$, где l — натуральное число от 1 до n , выбор которого в нашей власти. В итоге получим

$$F(x) \leq A(n)(x^l + x^{l+1} + \dots + x^n) + \sum_{k < l, k > n} B(k)x^k,$$

то есть

$$A(n) \geq \sup_{l, x} \frac{F(x) - \sum_{k < l, k > n} B(k)x^k}{x^l + \dots + x^n} := C(n). \quad (9)$$

Как правило, двусторонняя оценка $C(n) \leq A(n) \leq B(n)$ может быть улучшена (примерно в том же стиле), но является достаточной для дальнейших целей. Так, в случае Харди-Рамануджана ($f_i(x) = (1-x)^{-1}$, то есть $A(n) = p(n)$) таким образом легко получается равенство в логарифмической шкале: $p(n) = e^{2\sqrt{\zeta(2)}\sqrt{n} + o(\sqrt{n})}$, полученное ранее элементарным способом.

Отметим также, что монотонность статсумм часто можно заменить на подходящее более слабое условие.

Шаг третий. Замена топологии.

Удобнее доказывать, что мера диаграмм Юнга, отклоняющихся от предельной, мала, нежели чем оценивать снизу меру множества диаграмм, близких к предельной.

Большое L_1 -отклонение, видимо, не допускает удобного истолкования в терминах производящих функций. Поэтому сведем его к поточечной близости.

Предположим, что нам удалось доказать оценку вида

$$\mu_n(f : |f(a) - f_0(a)| > \varepsilon) < c(a, n, \varepsilon).$$

Тогда для любого множества $A \subset [0, \infty)$ имеем

$$\mu_n(f : \|f - f_0\|_{\infty, A} > \varepsilon) \leq n \sup_{a \in A} c(a, n, \varepsilon) \quad (10)$$

(здесь $\|g\|_{\infty, A} = \sup_A |g|$). Дело в том, что функция f_0 монотонно убывает, а все функции f , лежащие в носителе меры μ_n — кусочно-постоянны, причем имеют не более чем n точек разрыва вида $a/X(n)$, $a = 1, 2, \dots, n$. Значит, ∞ -норму можно считать лишь по не более чем n -элементному множеству. Отсюда и получается оценка (3).

Далее в зависимости от предельной функции f_0 выбирая подходящее A добьемся и малого L_1 -отклонения. Обычно, если функция f_0 непрерывна, в качестве A можно выбирать отрезки вида $[1/N, N]$, а если разрывна – замкнутые подмножества оси, отделенные от точек разрыва, нуля и бесконечности.

Шаг четвертый. Оценка меры разбиений с ограничениями.

Условие $|f(a) - f_0(a)| < \varepsilon$ легко переформулировать сначала в терминах разбиений, а потом – и производящих функций.

Действительно, из определения функции f получаем, что ограничения типа $f(a) < b$ и $f(a) > b$ на языке разбиений звучат как *количество слагаемых, не меньших $aX(n)$ меньше (соответственно больше), чем $bY(n)$* .

В связи с этим попробуем оценить вес разбиений, в которых ровно m слагаемых не меньше, чем l (здесь m и l – натуральные числа). Этот вес – обозначим его $A(n, m, l)$ – равен коэффициенту при $z^m x^n$ в разложении в ряд функции

$$F_l(x, z) := \prod_{i < l} f_i(x^i) \prod_{i \geq l} f_i(zx^i).$$

Отсюда получаем, что

$$A(n, m, l) \leq \inf_{x, z} z^{-m} x^{-n} F_l(x, z) := B(n, m, l).$$

Тогда суммарный вес $V(a, \varepsilon)$ разбиений, соответствующих неравенству $|f(a) - f_0(a)| > \varepsilon$ оценится как

$$V(a, n, \varepsilon) \leq n \sup_{k: |k - f_0(a)Y(n)| > \varepsilon Y(n)} B(n, [aX(n)], k)$$

(множитель n связан с тем, что у количества слагаемых, не меньших m , не более чем n возможных значений. Это грубая оценка, но ее обычно хватает) и стало быть

$$c(a, n, \varepsilon) \leq \frac{n}{C(n)} \sup_{k: |k - f_0(a)Y(n)| > \varepsilon Y(n)} B(n, [aX(n)], k) \quad (11)$$

Неравенство (11) позволяет угадать нормировку и вид предельной формы. Грубо говоря, должно выполняться соотношение

$$f_0(a) = \frac{1}{Y(n)} \arg \max_k B(n, [aX(n)], k) + o(1) \quad (12)$$

Замечания.

1. Как правило, экстремумы в (8), (9) достигаются вблизи радиуса сходимости $F(x)$.

2. Для оценки функции $F(x)$ вблизи радиуса сходимости часто помогают двусторонние оценки $\log F(x)$ как интегральной суммы соответствующей монотонной функции. Именно с изучения этой асимптотики начинается исследование конкретной задачи.

3. Вместо инфимумов и супремумов в (8), (9), (11) удобнее использовать значения в конкретных точках, которые оцениваются через соответствующие экстремумы с нужной стороны.

4. Множители n , возникающие в неравенствах (10) и (11), могут пугать, однако они, как правило, не влияют на (сверхстепенную) оценку вероятности.

5. Иногда удастся упростить один из шагов. Так, достаточную оценку $A(n)$ снизу порой удастся получить, оценивая вес всего одного разбиения.

6. ПРИМЕР. РАЗБИЕНИЯ НА РАЗЛИЧНЫЕ СЛАГАЕМЫЕ

Приведем пример использования этой технологии к статистике Ферми–Дирака для разбиения на различные слагаемые. Производящая функция в этом случае равна $F(x) = \prod_{k=1}^{\infty} (1 + x^k)$. Из (8) получаем для количества $A(n)$ разбиений числа n на различные слагаемые оценку

$$A(n) \leq e^{nt} F(e^{-t}),$$

$t > 0$ произвольно. Логарифмируя и обозначая $h(t) = \ln(1 + e^{-t})$, имеем

$$\ln A(n) \leq nt + \sum_{k=1}^{\infty} h(kt) \leq nt + \int_0^{\infty} h(tx) dx = nt + \frac{\zeta(2)}{2t}.$$

Оптимизируя по t , получаем

$$\ln A(n) \leq \sqrt{2\zeta(2)n}.$$

Перейдем к получению оценки на $A(n)$ снизу. Отметим, что $A(n)$ очевидно возрастает, так как всякому разбиению числа $n - 1$ на различные слагаемые можно (инъективно) сопоставить разбиение числа

n , увеличив максимальное слагаемое на 1. Предварительно оценим снизу $F(e^{-t})$:

$$\ln F(e^{-t}) = \sum_{k=1}^{\infty} h(kt) \geq \int_1^{\infty} h(tx) dx = t^{-1} \int_t^{\infty} h(\tau) d\tau \geq \frac{\zeta(2)}{2t} - \ln 2,$$

так как

$$\int_t^{\infty} = \frac{\zeta(2)}{2} - \int_0^t \geq \frac{\zeta(2)}{2} - t \ln 2.$$

Меня обозначения в (9) имеем при подходящем m (скажем, $m = n^{5/6}$):

$$A(n+m) \geq \frac{F(e^{-t}) - \sum_{k: |n-k| \geq m} e^{\sqrt{2\zeta(2)k} - tk}}{e^{-(n-m)t} + \dots + e^{-(n+m)t}}$$

при произвольном $t > 0$. Выберем $t = \sqrt{\frac{\zeta(2)}{2n}}$ и оценим сверху слагаемые суммы в числителе:

$$\exp\left(\sqrt{2\zeta(2)k} - \sqrt{\frac{\zeta(2)}{2n}}k\right) = \exp\left(\sqrt{\frac{\zeta(2)n}{2}} - \frac{\zeta(2)n}{2}(1 - \sqrt{k/n})^2\right).$$

При $k \leq 100n$ и $|k - n| \geq m$ имеем

$$\sqrt{n}(1 - \sqrt{k/n})^2 = \frac{(n-k)^2}{\sqrt{n}(\sqrt{n} + \sqrt{k})^2} \geq n^{1/7}$$

при больших n . При $k \geq 100n$ имеем

$$\begin{aligned} \exp\left(\sqrt{2\zeta(2)k} - \sqrt{\frac{\zeta(2)}{2n}}k\right) \\ = \exp\left(-\sqrt{2\zeta(2)k}(\sqrt{k/4n} - 1)\right) \leq \exp(-\sqrt{k}). \end{aligned}$$

Таким образом, сумма $\sum_{k: |n-k| \geq m} e^{\sqrt{2\zeta(2)k} - tk}$ может быть оценена как

$$e^{nt} \cdot (100n \exp -n^{1/7} + \sum_{k \geq 100n} e^{-\sqrt{k}}).$$

При больших n выражение в скобках меньше четверти, так что

$$F(e^{-t}) - \sum_{k: |n-k| \geq m} e^{\sqrt{2\zeta(2)k} - tk} \geq \frac{1}{4} \exp(nt).$$

Знаменатель же не превосходит $(2m+1)e^{-(n-m)t} = e^{-nt+o(\sqrt{n})}$, так что в итоге имеем

$$A(n+m) \geq \exp(2nt + o(\sqrt{n})) = \exp(\sqrt{2\zeta(2)n} + o(\sqrt{n})).$$

Поскольку при этом $m = o(n)$, после замены переменных получаем

$$A(n) \geq \exp(\sqrt{2\zeta(2)n} + o(\sqrt{n})).$$

Таким образом, мы получили асимптотику $A(n)$ в логарифмической шкале. Конечно, об этой асимптотике давно известно гораздо больше, но нам было важно продемонстрировать, как работает технология. Асимптотика $p(n)$ получается аналогично. Можно сравнить этот вывод с приведенным ранее, не использующим производящей функции.

Переходим собственно к получению предельной формы. Из общих соображений ясно, что подходящая нормировка — \sqrt{n} по обеим координатам. Попробуем оценить количество разбиений, в которых имеется $\beta\sqrt{n}$ слагаемых больших, чем $\alpha\sqrt{n}$ (то есть тех, для которых граница нормированной диаграммы проходит через точку (α, β)). Это количество есть коэффициент при $z^{\beta\sqrt{n}}x^n$ двойной производящей функции

$$F_{\alpha\sqrt{n}}(x, z) = \prod_{k \leq \alpha\sqrt{n}} (1 + x^k) \prod_{k > \alpha\sqrt{n}} (1 + zx^k)$$

и потому не превосходит

$$z^{-\beta\sqrt{n}}x^{-n}F_{\alpha\sqrt{n}}(x, t) = x^{-n}F(x) \cdot z^{-\beta\sqrt{n}} \prod_{k > \alpha\sqrt{n}} \frac{1 + tx^k}{1 + x^k}.$$

Полагая $x = e^{-\rho}$, $\rho = \sqrt{\frac{\zeta(2)}{2n}}$, $z = e^{\tau}$, по τ будем оптимизировать. Заметим, что выражение $x^{-n}F(x)$ в логарифмической шкале имеет асимптотику как $A(n)$. Поэтому если удастся подобрать такое τ , что

$$U(\tau) := -\beta\sqrt{n}\tau + \sum_{k > \alpha\sqrt{n}} (\ln(1 + e^{\tau-k\rho}) - \ln(1 + e^{-k\rho})) < -c\sqrt{n}$$

для квалифицированной константы c , то окажется, что вероятность соответствующих диаграмм оценивается как $O(e^{-c\sqrt{n}})$ (с другим $c > 0$). Имеем $U(\tau) = 0$,

$$U'(\tau) = -\beta\sqrt{n} + \sum_{k>\alpha\sqrt{n}} \frac{e^{\tau-k\rho}}{1+e^{\tau-k\rho}},$$

$$U''(\tau) = \sum_{k>\alpha\sqrt{n}} \frac{e^{\tau-k\rho}}{(1+e^{\tau-k\rho})^2}$$

(ряды можно почленно дифференцировать, поскольку ряды из производных сходятся как геометрические прогрессии). Из формулы Тейлора имеем

$$|U(\tau) - \tau U'(0)| \leq \tau^2 \max_{|\tau'| \leq \tau} U''(\tau').$$

Поскольку $U''(\tau) = O(\sqrt{n})$ при достаточно малых τ , получается, что если $U'(0)$ имеет порядок \sqrt{n} , то нужная оценка получена. Но

$$U'(0)n^{-1/2} = -\beta + n^{-1/2} \sum_{k>\alpha\sqrt{n}} \frac{1}{1+e^{k\rho}}$$

последнее выражение есть интегральная сумма для

$$\sqrt{\frac{2}{\zeta(2)}} \int_{\alpha\sqrt{\zeta(2)/2}}^{\infty} \frac{dx}{1+e^x},$$

и она приближает интеграл с точностью до $o(1)$ при больших n равномерно по α . Так что $U'(0) = 0$ при

$$\beta = \sqrt{2/\zeta(2)} \ln(1 + e^{-\alpha\sqrt{d/2}}), \quad e^{\beta\sqrt{\zeta(2)/2}} = 1 + e^{-\alpha\sqrt{\zeta(2)/2}}.$$

Это и есть предельная форма диаграмм Юнга с различными длинами строк, а вероятность поточечного существенного отклонения от нее мала, что следует из сказанного выше.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. М. Вершик, С. В. Керов, *Асимптотика максимальной и типичной размерностей неприводимых представлений симметрической группы*. — Функци. анализ и его прил. **19**, вып. 1 (1985), 25–36.
2. M. Szalay, P. Turan, *On some problems of the statistical theory of partitions with application to characters of the symmetric group. I, II*. — Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **29**, No. 3–4 (1977) 361–379, 381–392.
3. H. N. V. Temperley, *Statistical mechanics and partitions of number. II*. — Proc. Cambridge. Philos. Soc **48** (1952), 683–697.
4. А. М. Вершик, *Статистическая механика комбинаторных разбиений и их предельные конфигурации*. — Функци. анализ и его прил. **30**, вып. 2 (1996), 19–30.
5. А. М. Вершик, Ю. В. Якубович, *Асимптотика равномерной меры на симплексах, случайные композиции и разбиения*. — Функци. анализ и его прил. **37**, вып. 4 (2003), 39–48.
6. A. Vershik, Yu. Yakubovich, *Limit shape and fluctuations of random partitions of naturals with fixed number of summands*. — Moscow Math. J. **1**, No. 3 (2001), 457–468.

Petrov F. Limits shapes of Young diagrams. Two elementary approaches.

We present a techniques for obtaining the limit shapes of Yong diagrams with respect to multiplicative measures, which arise in statistical mechanics. Our approach does not use neither complex analysis, nor Tauberian theorems. Also, we get the limit shape for bounded and unbounded partitions with respect to uniform measure, avoiding even generating functions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191011
С.-Петербург, Россия
E-mail: fedyapetrov@gmail.com

Поступило 8 октября 2009 г.