

Виктору Абрамовичу Залгаллеру  
с любовью и глубоким почтением  
к восьмидесятипятилетию

## О ГИПОТЕЗЕ С. Л. ТАБАЧНИКОВА

© А. И. НАЗАРОВ, Ф. В. ПЕТРОВ

Доказана гипотеза С. Л. Табачникова о том, что средняя абсолютная кривизна  $T(\Gamma)$  замкнутой кривой  $\Gamma$ , лежащей внутри выпуклой замкнутой кривой  $\Gamma_1$  на плоскости, больше  $T(\Gamma_1)$ , если  $\Gamma \neq k\Gamma_1$ .

### §1. Постановка задачи. План действий

Рассмотрим на плоскости естественно параметризованную замкнутую кривую  $\Gamma(s)$ ,  $s \in [0, L(\Gamma)]$ . Будем говорить, что  $\Gamma(s)$  принадлежит классу  $BV^1$ , если скорость  $\Gamma'(s)$  существует, непрерывна всюду на  $[0, L(\Gamma)]$ , за исключением счетного числа точек, в которых имеет односторонние пределы, и имеет конечную вариацию.<sup>1</sup> Полную вариацию  $\Gamma'$  назовем *полным поворотом* кривой  $\Gamma$  и будем обозначать  $V(\Gamma)$ .

Отметим следующие свойства полного поворота:

1°. Для  $C^2$ -гладких кривых полный поворот равен интегралу от модуля кривизны по длине дуги.

2°. Полный поворот замкнутой ломаной равен сумме внешних углов во всех вершинах ломаной.

---

Работа поддержана грантами для поддержки ведущих научных школ РФ НШ-8336.2006.1 (первый автор) и НШ-2251.2003.1 (второй автор), а также грантом РФФИ 05-01-00899 (второй автор).

<sup>1</sup>Вариация функции  $f$ , действующей в единичную окружность, определяется как точная верхняя грань сумм  $\sum_{i=1}^n \rho(f(t_i), f(t_{i-1})) + \rho(f(t_n), f(t_0))$  взятой по всем разбиениям  $t_0 < t_1 < \dots < t_n$  отрезка задания функции  $f$ , для которых  $f$  определена в узлах разбиения  $t_i$ ;  $\rho$  — внутренняя метрика окружности.

3°. Полный поворот замкнутой выпуклой кривой существует и равен  $2\pi$ .

Определим *среднюю абсолютную кривизну* кривой  $\Gamma \in BV^1$  как ее полный поворот, деленный на длину.

С. Л. Табачников [1] сформулировал следующую гипотезу, названную им *неравенством ДНК*.

**Теорема Р.** 1. *Средняя абсолютная кривизна  $T(\Gamma)$  замкнутой кривой  $\Gamma \in BV^1$  („ДНК“), лежащей внутри выпуклой замкнутой кривой  $\Gamma_1$  („клетки“), не меньше  $T(\Gamma_1)$ .*

2. *Если  $T(\Gamma) = T(\Gamma_1)$ , то кривая  $\Gamma$  есть кратный обход кривой  $\Gamma_1$ .*

Обзор результатов, связанных с этой гипотезой и ее обобщениями, приведен в [1]. Первая часть теоремы Р доказана в [2].

Мы докажем неравенство ДНК полностью. Доказательство первой части теоремы Р частично следует из [2], но является более прозрачным и кратким и используется при доказательстве второй части теоремы. Для полноты изложения мы приводим (во многом упрощенные) доказательства всех используемых лемм из [2].

Не умаляя общности, можно считать, что  $\Gamma_1$  совпадает с границей выпуклой оболочки  $\Gamma$ .

Будем говорить, что кривая  $\tilde{\Gamma}$  *лучше* кривой  $\Gamma$ , если  $T(\Gamma) \geq T(\tilde{\Gamma})$ , и *строго лучше*, если  $T(\Gamma) > T(\tilde{\Gamma})$ . Замену кривой на лучшую (соответственно на строго лучшую) кривую с не большей выпуклой оболочкой будем называть *улучшением* (соответственно *строгим улучшением*) кривой. Заметим, что если в результате последовательности улучшений кривой  $\Gamma$  получен кратный обход кривой  $\Gamma_1$ , утверждение 1 теоремы Р для кривой  $\Gamma$  доказано, а если хотя бы одно из улучшений было строгим, доказано строгое неравенство  $T(\Gamma) > T(\Gamma_1)$ .

Первым делом утверждение 1 сводится к случаю ломаных. Затем вершины ломаной „загоняются“ на границу (здесь и далее: границу выпуклой оболочки). После этого каждая смена направления поворота ломаной позволяет ее улучшить. Конечное число таких улучшений приводит к ломаной, поворачивающей только в одном направлении, для которой утверждение 1 практически очевидно. Далее, мы докажем, что каждую кривую, отличную от несколько раз обойденной границы, можно строго улучшить. Из этого будет следовать утверждение 2.

## §2. Сведение к ломаной

Заметим, что если в точке разрыва (скачка) функции  $\Gamma'$  доопределить  $\Gamma'$  как произвольный вектор на единичной окружности, лежащий между<sup>2</sup>

<sup>2</sup>То есть на меньшей из двух дуг единичной окружности.

левым и правым односторонними пределами  $\Gamma'$ , вариация  $\Gamma'$  не изменится. Далее, говоря о множестве значений скорости на некотором подынтервале задания  $\Gamma'$ , мы будем иметь в виду, что к множеству значений  $\Gamma'$  в точках непрерывности добавлены именно эти множества допустимых значений во всех точках разрыва. Легко видеть, что при таком подходе множество значений скорости на любом интервале есть дуга окружности.

Нам потребуется следующая

**Лемма 1.** *Рассмотрим две точки  $A$  и  $B$  на кривой  $\Gamma$ . Если существуют  $\Gamma'(A)$  и  $\Gamma'(B)$ , то полный поворот кривой  $\Gamma$  между  $A$  и  $B$  (такой участок будем обозначать  $\Gamma_{AB}$ ) не меньше  $\rho(\Gamma'(A), e) + \rho(\Gamma'(B), e)$ , где  $e$  — единичный вектор, направленный вдоль отрезка  $AB$ .*

**Доказательство.** Если вектор  $e$  лежит в множестве значений  $\Gamma'$  на участке от  $A$  до  $B$ , утверждение очевидно (достаточно рассмотреть разбиение  $\Gamma_{AB}$ , в котором узлами будут  $A$ ,  $B$  и точка  $C$ , для которой  $\Gamma'(C) = e$ ). В противном случае множество значений  $\Gamma'$  от  $A$  до  $B$  — дуга, не меньшая полуокружности (иначе можно было бы построить полуплоскость, содержащую это множество значений и не содержащую вектор  $\overline{AB}$ ). Рассмотрев достаточно мелкое разбиение  $\Gamma_{AB}$ , получим, что поворот  $\Gamma'$  от  $A$  до  $B$  не меньше большей дуги между  $\Gamma'(A)$  и  $\Gamma'(B)$ , что доказывает лемму и в этом случае. •

**Лемма 2.** *Пусть для некоторой кривой  $\Gamma$  утверждение 1 теоремы  $\mathcal{P}$  не выполнено. Тогда существует ломаная, для которой оно также не выполнено.*

**Доказательство.** По условию  $T(\Gamma) < T(\Gamma_1)$ . Впишем в  $\Gamma$  ломаную  $\Delta$ , длина которой достаточно близка к длине  $\Gamma$  (именно  $L(\Delta) > L(\Gamma) \cdot \frac{T(\Gamma)}{T(\Gamma_1)}$ ). Очевидно, выпуклая оболочка  $\Delta$  (обозначим ее границу  $\Delta_1$ ) лежит в  $\Gamma_1$ . Можно также считать, что  $\Gamma'$  определена во всех вершинах  $\Delta$ .

Докажем, что  $V(\Delta) \leq V(\Gamma)$ . Для этого достаточно сложить неравенства леммы 1 по всем звеньям  $\Delta$  и затем применить неравенство треугольника.

Отсюда

$$T(\Delta) = \frac{V(\Delta)}{L(\Delta)} < \frac{V(\Gamma)}{L(\Gamma)} \cdot \frac{T(\Gamma_1)}{T(\Gamma)} = T(\Gamma_1) \leq T(\Delta_1),$$

и лемма доказана. •

Для замкнутой ломаной  $A_1 A_2 \dots A_n A_1$  обозначим  $L$  ее длину,  $P$  — периметр выпуклой оболочки и  $V := \sum_{i=1}^n (\pi - \angle A_{i-1} A_i A_{i+1})$  — полный поворот (нумерация индексов циклическая по модулю  $n$ ). Будем предполагать, что ни одна из вершин  $A_i$  ломаной не лежит на отрезке  $[A_{i-1} A_{i+1}]$ . Если у

одной из получаемых в процессе улучшения ломаных появятся такие вершины, сразу будем их удалять.

С учетом введенных обозначений утверждение 1 теоремы  $\mathcal{P}$  переформулируется для ломаных так:

**Лемма 3.**  $\frac{L}{V} \leq \frac{P}{2\pi}$ .

Заметим, что из лемм 2 и 3 следует утверждение 1 в общем случае.

### §3. Четырехзвенные ломаные

Докажем две леммы, которые составляют утверждение леммы 3 для четырехзвенных ломаных и, кроме того, в дальнейшем будут использоваться для улучшения произвольной ломаной.

**Лемма 4.** В треугольнике  $ABC$  выполнено неравенство

$$\frac{AB + BC}{2\pi - \beta} < \frac{AB + BC + AC}{2\pi}, \quad (1)$$

где  $\beta = \angle ABC$ .

**Доказательство.** По теореме синусов имеем

$$\begin{aligned} \frac{AB + BC}{AC} &= \frac{\sin \angle A + \sin \angle C}{\sin \beta} \\ &= \frac{2 \sin(\frac{\angle A + \angle C}{2}) \cos(\frac{\angle A - \angle C}{2})}{2 \sin \frac{\beta}{2} \cos \frac{\beta}{2}} = \frac{\cos(\frac{\angle A - \angle C}{2})}{\sin \frac{\beta}{2}} \leq \frac{1}{\sin \frac{\beta}{2}}. \end{aligned}$$

Из выпуклости синуса на  $]0, \pi/2[$  имеем

$$\sin \frac{\beta}{2} > \frac{\beta}{\pi}.$$

Поэтому

$$\frac{AB + BC}{AC} < \frac{\pi}{\beta} < \frac{2\pi - \beta}{\beta},$$

что равносильно (1). •

**Лемма 5.** Пусть  $ABCD$  — выпуклый четырехугольник, диагонали которого пересекаются в точке  $O$ . Положим  $\varphi = \angle AOB$ . Тогда

$$\frac{AB + BD + DC + CA}{2(\pi + \varphi)} < \frac{AB + BC + CD + DA}{2\pi}. \quad (2)$$

**Доказательство.** По лемме 4 имеем  $AB > \frac{\varphi}{\pi}(AO + OB)$ ,  $CD > \frac{\varphi}{\pi}(CO + OD)$ . Складывая, получаем  $AB + CD > \frac{\varphi}{\pi}(AC + BD)$ .

Аналогично

$$BC + AD > (1 - \frac{\varphi}{\pi})(AC + BD).$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{\pi} \cdot \frac{AB + CD}{AC + BD} + \left(1 + \frac{\varphi}{\pi}\right) \cdot \frac{BC + DA}{AC + BD} \\ > \frac{\varphi}{\pi} \cdot \frac{\varphi}{\pi} + \left(1 + \frac{\varphi}{\pi}\right) \cdot \left(1 - \frac{\varphi}{\pi}\right) = 1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$\frac{AB + CD}{AC + BD} + 1 < \left(1 + \frac{\varphi}{\pi}\right) \left(\frac{AB + CD}{AC + BD} + \frac{BC + DA}{AC + BD}\right),$$

что равносильно (2). •

К леммам 4 и 5 сводятся частные случаи леммы 3 для случая вогнутого и самопересекающегося четырехугольника соответственно.

**Замечание 1.** Неравенства (1) и (2) (со знаком  $\leq$ ) выполнены и для вырожденных треугольника  $ABC$  и четырехугольника  $ABCD$  соответственно.

#### §4. Перемещение вершин на границу

В этом параграфе мы сведем лемму 3 к случаю, когда все вершины ломаной лежат на границе ее выпуклой оболочки.

Пусть вершина  $A_i$  лежит строго внутри выпуклой оболочки. Разберем три случая.

Случай а). Если точки  $A_{i-1}$  и  $A_{i+2}$  лежат по одну сторону от прямой  $A_i A_{i+1}$ , ломаную можно строго улучшить, увеличив длину и не изменив поворота, подвинув вершину  $A_i$  за отрезок  $A_{i-1} A_i$ , пока она не наткнется либо на границу, либо на продолжение отрезка  $A_{i+1} A_{i+2}$ . Тем самым мы получим лучшую ломаную с меньшим количеством вершин внутри выпуклой оболочки (возможно, уменьшится и общее количество вершин). Аналогичным образом поступим, если  $A_{i+1}$  и  $A_{i-2}$  лежат по одну сторону от  $A_i A_{i-1}$ .

Случай б). Предположим теперь, что точки  $A_{i-1}$  и  $A_{i+2}$  лежат по разные стороны от прямой  $A_i A_{i+1}$ ; а точки  $A_{i+1}$  и  $A_{i-2}$  — по разные стороны от прямой  $A_i A_{i-1}$ .

Пусть точки  $A_{i-2}$  и  $A_{i+2}$  лежат в углах, дополнительных (по стороне, содержащей точку  $A_i$ ) к  $\angle A_{i+1} A_{i-1} A_i$  и  $\angle A_{i-1} A_{i+1} A_i$  соответственно. Рассмотрим ломаную, получающуюся из  $A_1 A_2 \dots A_n$  заменой звеньев  $A_{i-1} A_i$  и  $A_i A_{i+1}$  на одно звено  $A_{i-1} A_{i+1}$ . Предположим, что исходная ломаная не

удовлетворяет неравенству леммы 3, а новая — удовлетворяет, т.е. имеет место двойное неравенство

$$\frac{L}{V} > \frac{P}{2\pi} \geq \frac{L - (A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} - A_{i-1}A_{i+1})}{V - 2(\pi - \beta)}, \quad (3)$$

где  $\beta := \angle A_{i-1}A_iA_{i+1}$ . Тогда

$$P \cdot V - 2(\pi - \beta) \cdot P + 2\pi(A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} - A_{i-1}A_{i+1}) \geq 2\pi L > P \cdot V,$$

откуда

$$\begin{aligned} & 2\pi(A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} - A_{i-1}A_{i+1}) \\ & > 2(\pi - \beta)P \geq 2(\pi - \beta)(A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} + A_{i-1}A_{i+1}), \end{aligned}$$

что противоречит лемме 4. Поэтому новая ломаная также является контр-примером к лемме 3 и имеет меньшее количество внутренних вершин.

Осталось рассмотреть случай с), когда, скажем,  $A_{i+2}$  и  $A_i$  лежат по разные стороны от прямой  $A_{i-1}A_{i+1}$  (в этом случае вершина  $A_{i+1}$  также лежит строго внутри выпуклой оболочки). Не умаляя общности, угол  $A_{i-1}A_{i+1}A_i$  — наименьший для всех номеров  $i$ , обладающих таким свойством. Заменим  $i$  на  $i + 1$  и разберем аналогичные случаи. Точка  $A_{i-1}$  лежит в угле, дополнительном к  $A_iA_{i+2}A_{i+1}$  по стороне  $A_iA_{i+1}$ . Если точка  $A_{i+3}$  не лежит в угле, вертикальном к углу  $A_{i+1}A_{i+2}A_i$ , ломаная улучшается так, как уже показано (с заменой  $i$  на  $i + 1$ ). Если же точка  $A_{i+3}$  лежит в этом угле, получаем противоречие с выбором  $i$ : угол  $\angle A_iA_{i+2}A_{i+1}$  меньше, чем  $\angle A_iA_{i+1}A_{i-1}$  (так как  $\angle A_iA_{i+1}A_{i-1} + \angle A_iA_{i+1}A_{i+2} > \angle A_iA_{i+2}A_{i+1} + \angle A_iA_{i+1}A_{i+2}$ ).

Итак, за конечное число шагов дело сводится к случаю, когда все вершины  $A_i$  ломаной  $A_1A_2 \dots A_n$  лежат на границе выпуклой оболочки.

## §5. Уменьшение количества перемен направления

Введем на плоскости ориентацию. Будем говорить, что ломаная  $A_1A_2 \dots A_n$  в вершине  $A_i$  поворачивает вправо, если базис  $\overrightarrow{A_{i-1}A_i}$ ,  $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$  отрицательно ориентирован. В противном случае (в частности, если векторы  $\overrightarrow{A_iA_{i-1}}$  и  $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$  сонаправлены) будем говорить, что ломаная в вершине  $A_i$  поворачивает влево.

Если ломаная дважды подряд поворачивает в одном направлении, то звено между этими поворотами можно заменить на участок границы в том же направлении — ломаная улучшится. Назовем эту операцию вытягиванием ломаной.

**Лемма 6.** *Предположим, что несколько последовательных звеньев нашей ломаной образуют полный обход границы, причем первое и последнее ребра участка совпадают (т.е. граница — многоугольник  $C_1C_2 \dots C_m$ , а в ломаной есть участок  $XC_1C_2 \dots C_mC_1C_2Y$ ). Тогда истинность леммы 3 для такой ломаной равносильна ее истинности для ломаной, в которой обход исключен (т.е. для ломаной, в которой указанный участок заменен на  $XC_1C_2Y$ ).*

**Доказательство.** Легко видеть, что периметр ломаной, полученной после удаления обхода, равен  $L - P$ , а полный поворот —  $V - 2\pi$ . Утверждение леммы 3 для новой ломаной записывается в виде неравенства  $\frac{L-P}{V-2\pi} \leq \frac{P}{2\pi}$ , равносильного утверждению леммы 3 для исходной ломаной. •

Будем повторять операцию леммы 6 до тех пор, пока это возможно. Этот процесс когда-нибудь прекратится: из ломаной на каждом шаге убираются некоторые звенья и не добавляется новых. Заметим, что количество перемен направления не будет изменяться.

Теперь ломаная разбивается на участки с поворотами в одну сторону, причем на каждом участке все ребра, кроме — возможно — первого и последнего, идут по границе (но, благодаря лемме 6, не повторяются).

Будем проводить такую операцию: возьмем участок  $A_iA_{i+1} \dots A_k$ , состоящий, для определенности, из поворотов влево; именно, повороты в вершинах  $A_{i+1}, A_{i+2}, \dots, A_{k-1}$  направлены влево, а в  $A_i$  и  $A_k$  вправо. Заменяем  $A_iA_{i+1} \dots A_k$  на участок границы  $A_i \dots A_k$ , обходящий границу в противоположном (в данном случае отрицательном) направлении. Количество перемен направления поворота при этой операции уменьшается.

Предположим, что исходная ломаная не удовлетворяет неравенству леммы 3. Покажем, что тогда и новая ломаная не удовлетворяет этому неравенству. Необходимо проверить 6 разных случаев, определяемых порядком следования вершин  $A_i, A_{i+1}, A_{k-1}, A_k$  при обходе границы в положительном направлении:

- 1°.  $A_iA_{i+1}A_{k-1}A_k$ ;
- 2°.  $A_iA_kA_{i+1}A_{k-1}$ ;
- 3°.  $A_iA_{i+1}A_kA_{k-1}$ ;
- 4°.  $A_iA_{k-1}A_kA_{i+1}$ ;
- 5°.  $A_iA_{k-1}A_{i+1}A_k$ ;
- 6°.  $A_iA_{k-1}A_kA_{i+1}$ .

Случаи 3 и 4 переводятся друг в друга переобозначениями и симметрией. Обозначим  $s$  длину ломаной  $A_iA_{i+1} \dots A_k$ , а  $s'$  — длину нового участка.

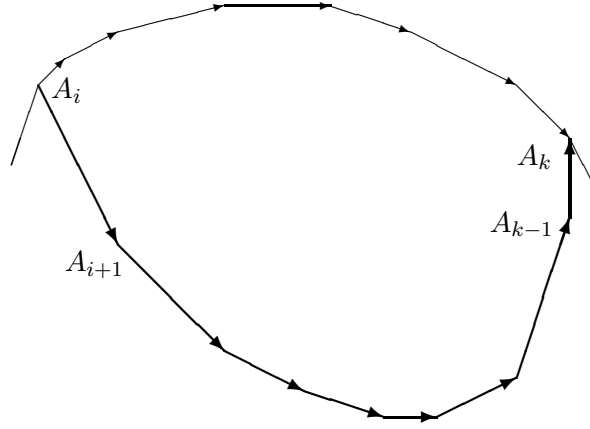


Рис. 1.

1° (см. рис. 1). Обозначим  $\angle A_{i+1}A_iA_k = \alpha$ ,  $\angle A_{k-1}A_kA_i = \beta$ . При замене ломаной ее полный поворот уменьшился на  $2(\alpha + \beta)$ , а длина — на  $s - s'$ .

Если новая ломаная удовлетворяет неравенству леммы 3, то справедливо двойное неравенство

$$\frac{L}{V} > \frac{P}{2\pi} \geq \frac{L + s' - s}{V - 2(\alpha + \beta)}, \quad (4)$$

или

$$P \cdot V - 2P(\alpha + \beta) + 2\pi(s - s') \geq 2\pi L > P \cdot V,$$

откуда  $2\pi(s - s') > 2(\alpha + \beta)P \geq 2(\alpha + \beta)(s + s')$  и  $2(\pi - \alpha - \beta)s > 2(\pi + \alpha + \beta)s'$ .

Последнее неравенство может выполняться, только если  $\alpha + \beta < \pi$ . В этом случае лучи  $A_iA_{i+1}$  и  $A_kA_{k-1}$  пересекаются в точке  $C$ , причем  $CA_i + CA_k \geq s$ ,  $A_iA_k \leq s'$ . Поэтому

$$(\pi - \alpha - \beta)(CA_i + CA_k) > (\pi + \alpha + \beta)A_iA_k,$$

что противоречит лемме 4.



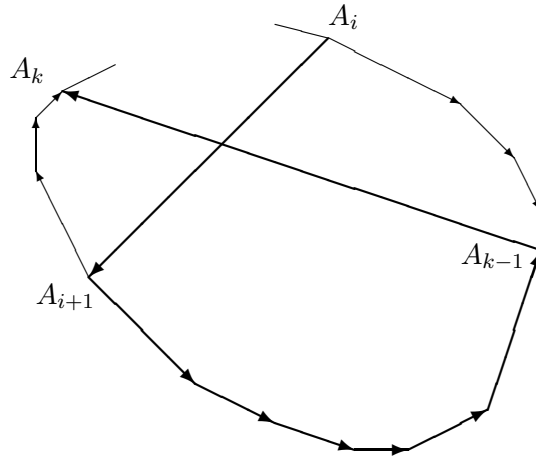


Рис. 2.

2° (см. рис. 2). Обозначим  $O$  точку пересечения отрезков  $A_i A_{i+1}$  и  $A_k A_{k-1}$ ,  $\angle A_i O A_k = \varphi$ . При замене ломаной ее полный поворот уменьшился на  $2\varphi$ , а длина — на  $s - s'$ .

Если новая ломаная удовлетворяет неравенству леммы 3, то справедливо двойное неравенство

$$\frac{L}{V} > \frac{P}{2\pi} \geq \frac{L + s' - s}{V - 2\varphi}.$$

Отсюда аналогично пункту 1° получаем неравенство  $2\pi(s - s') > 2\varphi P$ , из которого следует, что

$$\frac{A_i A_{i+1} + A_k A_{k-1} - (A_i A_{k-1} + A_k A_{i+1})}{A_i A_k + A_k A_{i+1} + A_{i+1} A_{k-1} + A_i A_{k-1}} > \frac{\varphi}{\pi}.$$

Это противоречит лемме 5 (для четырехугольника  $A_i A_{k-1} A_{i+1} A_k$ ).

Остальные случаи разбираются аналогично с применением леммы 4 (в случаях 3 и 6) или леммы 5 (в случае 5).

Таким образом, за конечное число шагов мы придем к ломаной, поворачивающей все время в одном направлении. Но из такой ломаной с помощью вытягивания получается кратный обход границы, поэтому утверждение леммы 3 для нее выполнено. Следовательно, исходное предположение неверно, и лемма 3 доказана. Доказано и утверждение 1 теоремы  $\mathcal{P}$ .

### §6. Доказательство утверждения 2

Пусть кривая  $\Gamma$  не есть (кратный) обход границы, но  $T(\Gamma) = T(\Gamma_1)$ . Выделим на  $\Gamma$  конечное число точек так, чтобы сумма скачков скорости в оставшихся точках была достаточно мала (к примеру, меньше одного градуса). Объединение этого множества с множеством  $\Gamma \cap \Gamma_1$  замкнуто. Прообраз его дополнения — объединение счетного числа интервалов. Рассмотрим один из таких интервалов, пусть он соответствует участку  $\Gamma$  между точками  $A$  и  $B$ .

Будем говорить, что участок кривой  $\Gamma_{CD}$  *маленький*, если множество значений скорости на этом участке является дугой не более  $\pi/4$ , и окружность с диаметром  $CD$  лежит строго внутри  $\Gamma_1$ . Легко видеть, что для каждой внутренней точки участка  $\Gamma_{AB}$  есть содержащий ее маленький подучасток.

Рассмотрим маленький участок  $\Gamma_{CD}$ . Определим, если это необходимо, скорости  $\Gamma'(C)$  и  $\Gamma'(D)$  как их правые пределы. Построим параллелограмм  $CPDQ$ , в котором  $\overline{CP}$  и  $\overline{CQ}$  направлены по крайним направлениям скорости кривой  $\Gamma$  на участке  $\Gamma_{CD}$ . Он полностью лежит внутри  $\Gamma_1$  (поскольку крайние направления скорости достаточно близки к направлению вектора  $\overline{CD}$ ).

Будем считать для определенности, что на пути от  $C$  до  $D$  на кривой  $\Gamma$  сначала встречается точка  $X$ , в которой касательная параллельна  $CP$ , а потом — точка  $Y$ , в которой касательная параллельна  $CQ$ . Заменяем участок  $\Gamma_{CD}$  на двузвенную ломаную  $CPD$ .

Заметим, что полный поворот кривой  $\Gamma_{CD}$  не меньше

$$v := \rho(\Gamma'(C), \Gamma'(X)) + \rho(\Gamma'(X), \Gamma'(Y)) + \rho(\Gamma'(Y), \Gamma'(D)),$$

в то время как полный поворот участка новой кривой равен  $v$ . Равенство достигается лишь в случае, когда  $\Gamma$  выпукла от  $C$  до  $X$ , от  $X$  до  $Y$  и от  $Y$  до  $D$ .

Далее, длина участка  $\Gamma_{CD}$  не превосходит  $CP + PD$ . Чтобы это доказать, рассмотрим произвольную вписанную в  $\Gamma_{CD}$  ломаную. Направления ее могут меняться между направлениями векторов  $\overline{CP}$  и  $\overline{CQ}$ . Поэтому после их перестановки в монотонном порядке от самого близкого (в смысле направления) к  $\overline{CP}$  до самого близкого к  $\overline{CQ}$  получится выпуклая ломаная  $C \dots D$ , лежащая внутри треугольника  $CPD$ , длина которой, очевидно, не превосходит  $CP + PD$ .

Итак, при замене участка  $\Gamma_{CD}$  на ломаную  $CPD$  не уменьшается поворот и не увеличивается длина, т.е. кривая  $\Gamma$  улучшается. Но по уже

доказанному утверждению 1  $\Gamma$  нельзя строго улучшить. Поэтому при такой замене остаются неизменными и поворот, и длина. Первое возможно, только если  $\Gamma_{CD}$  разбивается на не более чем три выпуклых участка  $(C - X, X - Y, Y - D)$ . Второе же возможно, лишь если каждый из этих участков есть ломаная с не более чем двумя звеньями. Таким образом,  $\Gamma_{CD}$  — ломаная с не более чем шестью звеньями (количество звеньев можно еще уменьшить, но нам это сейчас не требуется).

Зафиксируем теперь точки  $A'$  и  $B'$  на открытой дуге  $\Gamma_{AB}$  и покроем  $\Gamma_{A'B'}$  конечным числом маленьких участков. На каждом из них  $\Gamma$  является ломаной, так что и  $\Gamma_{A'B'}$  — ломаная.

Покажем, что если в ней хотя бы 4 звена, то кривую  $\Gamma$  можно строго улучшить. Рассмотрим случаи, фигурирующие в §4. В случае а) используется лишь локальная структура ломаной, и он без изменений переносится в нашу ситуацию.

В случае б), используя утверждение 1 для преобразованной кривой, мы получаем неравенство, аналогичное (3),

$$\frac{L(\Gamma)}{V(\Gamma)} = \frac{L(\Gamma_1)}{2\pi} \geq \frac{L(\Gamma) - (A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} - A_{i-1}A_{i+1})}{V(\Gamma) - 2(\pi - \beta)},$$

откуда

$$2\pi(A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} - A_{i-1}A_{i+1}) \geq 2(\pi - \beta)(A_{i-1}A_i + A_iA_{i+1} + A_{i-1}A_{i+1}),$$

что противоречит лемме 4.

В случае с), если  $A_{i+2}$  и  $A_i$  лежат по разные стороны от прямой  $A_{i-1}A_{i+1}$  (в этом случае вершина  $A_{i+1}$  также лежит строго внутри выпуклой оболочки), ломаную можно строго улучшить, заменив звено  $A_iA_{i+1}$  на параллельное более длинное  $A'_iA'_{i+1} \parallel A_iA_{i+1}$ , где  $A_i \in [A_{i-1}A'_i[, A'_{i+1} \in ]A_{i+1}A_{i+2}]$ .

Итак,  $\Gamma_{A'B'}$  является ломаной не более чем с тремя звеньями. Значит, в силу произвольности выбора точек  $A'$  и  $B'$ , и  $\Gamma_{AB}$  является ломаной не более чем с тремя звеньями.

Присоединим теперь к рассмотренным интервалам точки „большого поворота“, которые мы ранее исключили. Тогда вся внутренняя часть кривой  $\Gamma$  разбивается на не более чем счетное число участков, каждый из которых — ломаная с конечным числом звеньев.

Если на одном из таких участков число звеньев ломаной больше одного, то она содержит внутренние вершины, и  $\Gamma$  опять строго улучшаема с помощью приемов §4.

Итак, все точки  $\Gamma$  лежат на границе либо на одном из отрезков, соединяющих точки границы.

Допустим, что отрезков бесконечно много. Тогда существует последовательность отрезков, длина которых стремится к нулю, а концы сходятся к некоторой точке  $C \in \Gamma_1$ . Зафиксируем достаточно малую окрестность точки  $C$ , в которой поворот  $\Gamma_1$  равен  $\varphi_0 < \pi$ . Рассмотрим один из отрезков  $\overline{AB}$  ( $A, B \in \Gamma_1$ ), лежащий в этой окрестности. Если векторы  $\Gamma'(A-)$  и  $\Gamma'(B+)$  направлены в разные полуплоскости относительно прямой  $AB$ , то кривая  $\Gamma$  строго ухудшаема (вытягиванием отрезка  $AB$  на границу), что невозможно. Поэтому вариация  $\Gamma'$  на отрезке  $AB$  не меньше  $\pi - \varphi_0$  и, таким образом, бесконечного числа отрезков быть не может.

Таким образом,  $\Gamma$  состоит из конечного числа кусков, идущих по границе, и конечного числа внутренних отрезков между ними. Если на границе имеются точки возврата, то ввиду  $\Gamma \in BV^1$  таких точек лишь конечное число, и мы будем интерпретировать их как „внутренние отрезки нулевой длины“.

Если два последовательных куска границы имеют одинаковое направление обхода, то  $\Gamma$  опять строго улучшится, если мы вытянем соединяющий их отрезок на границу. Далее, можно исключить все полные обходы границы аналогично лемме 6.

Рассмотрим теперь дугу  $\Gamma_{AB}$ , состоящую из отрезка  $AA_1$ , участка границы  $\Gamma_{A_1B_1}$ , проходимо, для определенности, в положительном направлении, и отрезка  $B_1B$ . Аналогично §5, заменим  $\Gamma_{AB}$  на участок границы между  $A$  и  $B$ , проходимый в отрицательном направлении. Здесь вновь необходимо рассмотреть 6 случаев, разобранных в §5, в зависимости от порядка следования точек  $A, A_1, B, B_1$  при обходе границы в положительном направлении. Например, в случае 1° (порядок  $AA_1B_1B$ ), используя утверждение 1 для преобразованной кривой, мы получаем неравенство, аналогичное (4),

$$\frac{L(\Gamma)}{V(\Gamma)} = \frac{L(\Gamma_1)}{2\pi} \geq \frac{L(\Gamma) + s' - s}{V(\Gamma) - 2(\angle A_1AB + \angle B_1BA)}.$$

Из этого неравенства, как и в §5, выводим, что лучи  $AA_1$  и  $BB_1$  пересекаются в точке  $C$ , причем

$$(\pi - \angle A_1AB - \angle B_1BA)(CA + CB) \geq (\pi + \angle A_1AB + \angle B_1BA)AB,$$

что противоречит лемме 4.

Аналогично к противоречию приводят и остальные случаи. Это показывает, что кривая  $\Gamma$  не может содержать внутренних отрезков и потому представляет собой обход границы, а с учетом исключенных ранее обходов — кратный обход границы. Утверждение 2 доказано. •

### §7. О поверхностях постоянной кривизны

В этом параграфе мы докажем аналог неравенства ДНК на поверхности сферы.

Пусть  $\Gamma$  — замкнутая кривая, лежащая в некоторой полусфере (здесь и далее: единичного радиуса) и имеющая конечную вариацию  $V(\Gamma)$  правого поворота (определения см. в [3]). Отметим, что если  $\Gamma : A_1 A_2 \dots A_n A_1$  — замкнутая ломаная, то  $V(\Gamma) = \sum_{i=1}^n (\pi - \angle A_{i-1} A_i A_{i+1})$  (нумерация индексов, как обычно, циклическая). Если  $\Gamma$  — замкнутая  $C^2$ -гладкая кривая, то  $V(\Gamma)$  есть интеграл (по натуральному параметру) от длины вектора геодезической кривизны.

Определим *среднюю абсолютную геодезическую кривизну*  $T(\Gamma)$  замкнутой кривой:

$$T(\Gamma) := V(\Gamma)/L(\Gamma).$$

**Теорема  $S$ .** Пусть  $\Gamma$  — замкнутая кривая на полусфере, имеющая конечную вариацию правого поворота;  $\Gamma_1$  — граница ее выпуклой оболочки. Тогда  $T(\Gamma) \geq T(\Gamma_1) = (2\pi - S)/L(\Gamma_1)$ , где  $S$  — площадь выпуклой оболочки.

План доказательства теоремы  $S$  такой же, как и в плоском случае. Сформулируем сначала соответствующую теорему для ломаных.

**Теорема  $S'$ .** Пусть  $\Gamma$  — замкнутая ломаная на полусфере,  $\Gamma_1$  — граница ее выпуклой оболочки, и  $\Gamma$  не есть кратный обход  $\Gamma_1$ . Тогда  $T(\Gamma) > T(\Gamma_1)$ .

Перед тем, как приступить к леммам о четырехзвенных ломаных, мы докажем следующее утверждение, уточняющее (в частном случае) теорему А. Д. Александрова о сравнении углов.

**Лемма  $1_s$ .** Пусть  $ABC$  — невырожденный треугольник на сфере со сторонами  $BC = a$ ,  $CA = b$ ,  $AB = c$  и углами  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  соответственно. Обозначим через  $\alpha'$ ,  $\beta'$ ,  $\gamma'$  углы треугольника со сторонами  $a$ ,  $b$ ,  $c$  на плоскости. Тогда выполнено неравенство

$$\alpha - \alpha' < (\beta - \beta') + (\gamma - \gamma'). \quad (1_s)$$

**Доказательство.** Обозначим  $a + b + c = 4S$ ,  $S - a/2 = X$ ,  $S - b/2 = Y$ ,  $S - c/2 = Z$ ,  $\mathcal{E} = \alpha + \beta + \gamma - \pi$  — площадь треугольника  $ABC$ . Неравенство  $(1_s)$  равносильно неравенству  $\alpha' > \alpha - \mathcal{E}/2$  или, что то же самое,

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} > \operatorname{tg}(\alpha/2 - \mathcal{E}/4). \quad (2_s)$$

Подставляя сюда формулы

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{\sin 2Y \sin 2Z}{\sin 2X \sin 2S}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\alpha'}{2} &= \sqrt{\frac{YZ}{XS}}, \\ \operatorname{tg} \frac{\mathcal{E}}{4} &= \sqrt{\operatorname{tg} S \cdot \operatorname{tg} X \cdot \operatorname{tg} Y \cdot \operatorname{tg} Z}\end{aligned}$$

(первая формула — это [4, (28)], вторая — [5, (20)], третья — [6]), преобразуем (2<sub>s</sub>) к виду

$$\frac{\sin Z \sin Y}{\sin X \sin S} \cdot \frac{\cos Y \cos Z - \sin X \sin S}{\cos X \cos S + \sin Y \sin Z} < \sqrt{\frac{YZ}{XS}} \cdot \sqrt{\frac{\sin 2Z \sin 2Y}{\sin 2X \sin 2S}}. \quad (3_s)$$

Так как  $S = X + Y + Z$ , имеем  $\cos(S - X) = \cos(Y + Z)$ , и, значит, второй сомножитель в левой части (3<sub>s</sub>) равен 1. Если ввести обозначение  $f(x) = x \operatorname{ctg} x$ , то (3<sub>s</sub>) сводится к

$$f(Y)f(Z) > f(X)f(X + Y + Z). \quad (4_s)$$

Поскольку  $f'(x) = \frac{\sin(2x) - 2x}{2\sin^2 x} < 0$  при  $0 < x < \frac{\pi}{2}$ , то  $f$  строго убывает на  $[0, \frac{\pi}{2}]$ . Поскольку все аргументы в (4<sub>s</sub>) лежат в  $[0, \frac{\pi}{2}]$  (напомним, что  $X + Y + Z = (a + b + c)/4 \leq \pi/2$ ), достаточно считать, что  $X = 0$ , и доказывать неравенство

$$f(Y)f(Z) > f(0)f(Y + Z). \quad (5_s)$$

Имеем  $(\ln(f))''(x) = \frac{4}{\sin^2(2x)}(\cos(2x) - \frac{\sin^2(2x)}{4x^2})$ . Элементарными методами доказывается, что  $\cos t < (\frac{\sin t}{t})^2$  при  $t = 2x \in ]0, \pi[$ . Поэтому функция  $\ln(f)$  строго вогнута на  $[0, \frac{\pi}{2}]$ , откуда следует (5<sub>s</sub>). •

Теперь мы готовы доказать аналоги лемм 4 и 5 для сферы.

**Лемма 2s.** Пусть  $ABC$  — невырожденный треугольник на сфере. Тогда в обозначениях леммы 1s

$$\frac{a + c}{2\pi - \beta} < \frac{a + b + c}{2\pi - \mathcal{E}}.$$

**Доказательство.** Утверждение следует из цепочки неравенств

$$\frac{a + c}{a + b + c} < \frac{2\pi - \beta'}{2\pi} < \frac{2\pi - \beta + \mathcal{E}/2}{2\pi} \leq \frac{2\pi - \beta}{2\pi - \mathcal{E}}$$

(первое неравенство — это лемма 4, второе — лемма 1s, последнее сводится к очевидному  $\beta \leq \pi + \mathcal{E}/2$ ). •

**Лемма 3s.** Рассмотрим на полусфере выпуклый четырехугольник  $ABCD$ , диагонали которого пересекаются в точке  $O$ . Положим  $\varphi = \angle AOB$ . Обозначим  $AB = a$ ,  $BC = b$ ,  $CD = c$ ,  $DA = d$ ,  $BD = m$ ,  $AC = n$ ,  $\angle AOB = \varphi$ . Площади треугольников  $OAB$ ,  $OBC$ ,  $OCD$ ,  $ODA$  обозначим  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$ ,  $\mathcal{E}_3$ ,  $\mathcal{E}_4$  соответственно и положим  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_4$ . Тогда

$$\frac{a + c + m + n}{2\pi - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3) + 2\varphi} < \frac{a + b + c + d}{2\pi - \mathcal{E}}. \quad (6_s)$$

**Доказательство.** Обозначим  $\varphi'$  угол треугольника на плоскости со сторонами  $a$ ,  $AO$ ,  $BO$  напротив стороны  $a$ . Тогда

$$\frac{a}{AO + BO} > \frac{\varphi'}{\pi} > \frac{\varphi - \mathcal{E}_1/2}{\pi} > \frac{\varphi - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3)/2}{\pi} \quad (7_s)$$

(первое неравенство следует из доказательства леммы 4, второе — из леммы 1s). Аналогично

$$\frac{c}{CO + DO} > \frac{\varphi - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3)/2}{\pi}. \quad (8_s)$$

Из (7<sub>s</sub>) и (8<sub>s</sub>) немедленно следует, что

$$x := \frac{a + c}{m + n} > \frac{\varphi - (\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_3)/2}{\pi}.$$

Аналогично

$$y := \frac{b + d}{m + n} > \frac{\pi - \varphi - (\mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_4)/2}{\pi}.$$

Подставляя в равенство

$$z := \frac{a + c + m + n}{a + c + b + d} = \frac{x + 1}{x + y} = 1 + \frac{1 - y}{x + y}$$

полученные оценки снизу для  $x$  и  $y$ , в силу  $y < 1$  получаем оценку сверху для  $z$ . Это дает неравенство (6<sub>s</sub>). •

Изложим вкратце план дальнейшего доказательства теоремы  $S'$ .

Рассуждения случаев а) и с) §4 переносятся на сферический случай почти без изменений (естественные изменения, связанные с появлением сферического дефекта  $\mathcal{E}$ , лишь улучшают соответствующие неравенства).

В случае b) следует выбирать номер  $i$  таким, чтобы угол, вертикальный к углу  $\angle A_{i-1}A_{i+1}A_i$ , имел наименьшую площадь пересечения с полусферой. Угол, вертикальный к  $\angle A_iA_{i+2}A_{i+1}$ , содержится в угле, вертикальном к  $\angle A_{i-1}A_{i+1}A_i$  (в пересечении с полусферой) из-за отсутствия на полусфере сопряженных точек, и это опять же приводит к противоречию.

Рассуждения §5 подвергаются тем же изменениям, что и в случае с) §4.

**Вывод теоремы  $\mathcal{S}$  из теоремы  $\mathcal{S}'$ .** Прежде всего заметим, что кривая  $\Gamma$  разбивается на конечное число кусков без кратных точек. Действительно, если кусок достаточно малой длины содержит кратные точки, то его поворот не меньше  $\pi/2$ , поэтому таких кусков не может быть бесконечно много.

Пусть  $0 = t_1 < t_2 < \dots < t_n < t_{n+1} = L(\Gamma)$  — узлы такого разбиения (мы считаем, что  $\Gamma$  параметризована натурально, начиная с одного из узлов). Положим  $A_i := \Gamma(t_i)$ ,  $\Gamma_i := \Gamma_{[t_i, t_{i+1}]}$ . По теореме 1 [7], для  $i = 1, \dots, n$  существует последовательность ломаных  $g_k^i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow S^2$  ( $k = 1, 2, \dots$ ) такая, что  $g_k^i(t_i) = A_i$ ,  $g_k^i(t_{i+1}) = A_{i+1}$ , последовательность  $g_k^i$  сходится к  $\Gamma_i$  справа, и  $\limsup V(g_k^i) \leq V(\Gamma_i)$ . Кроме того, направления ломаных  $g_k^i$  в точках  $A_i$  и  $A_{i+1}$  сходятся к направлениям (соответственно правому и левому) кривой  $\Gamma$  в этих точках.

Обозначим  $g_k$  объединение (по всем  $i = 1, \dots, n$ ) ломаных  $g_k^i$ , а  $G_k$  — границу выпуклой оболочки ломаной  $g_k$ . Тогда  $\limsup V(g_k) \leq V(\Gamma)$ . Далее,  $L(\Gamma) \leq \liminf L(g_k)$ . Наконец, поскольку  $g_k \rightarrow \Gamma$  равномерно, то  $G_k \rightarrow \Gamma_1$ , откуда  $L(G_k) \rightarrow L(\Gamma_1)$  и  $T(G_k) \rightarrow T(\Gamma_1)$ . Следовательно, по теореме  $\mathcal{S}'$

$$T(\Gamma) \geq \limsup T(g_k) \geq \limsup T(G_k) = T(\Gamma_1),$$

что и требовалось. •

К сожалению, перенести утверждение 2 теоремы  $\mathcal{P}$  на сферический случай пока не удалось.

Отметим, что на плоскости Лобачевского неравенство ДНК не имеет места. Действительно, возьмем на плоскости Лобачевского (кривизны  $-1$ ) треугольник  $ABC$ , выберем точки  $B_1 \in AB$ ,  $C_1 \in AC$  и рассмотрим ломаную  $\Gamma = ABCC_1B_1BCA$ . Тогда  $\Gamma_1 = AB_1C_1$ , и

$$\frac{V(\Gamma)}{V(\Gamma_1)} = 2 - \frac{S(AB_1C_1)}{V(\Gamma_1)} < 2 - \frac{S(AB_1C_1)}{3\pi}.$$

Если отодвинуть вершину  $B$  достаточно далеко по лучу  $AB_1$ , то отношение  $L(\Gamma)/L(\Gamma_1)$  можно сделать сколь угодно близким к 2, что даст  $T(\Gamma) < T(\Gamma_1)$ .

Мы благодарны В. А. Залгаллеру, обратившему наше внимание на ссылки [3, 7]. Мы также признательны С. В. Дужину за внимание к работе.

#### Список литературы

- [1] Tabachnikov S., *The tale of a geometric inequality*, MASS Selecta, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003, pp. 254–262.
- [2] Lagarias J., Richardson T., *Convexity and the average curvature of the plane curves*, Geom. Dedicata **67** (1997), 1–38.



- [3] Александров А. Д., *Внутренняя геометрия выпуклых поверхностей*, Гостехиздат, М.-Л., 1948.
- [4] <http://mathworld.wolfram.com/SphericalTrigonometry.html>
- [5] <http://mathworld.wolfram.com/Triangle.html>
- [6] <http://mathworld.wolfram.com/SphericalExcess.html>
- [7] Залгаллер В. А., *О кривых с ограниченной вариацией поворота на выпуклой поверхности*, Мат. сб. **26 (68)** (1950), №2, 205–214.

Поступило 1 августа 2006 г.

С.-Петербургский  
государственный университет  
198504, Санкт-Петербург  
Россия  
*E-mail:* an@AN4751.spb.edu

С.-Петербургское отделение  
Математического института  
им. В. А. Стеклова РАН  
191023, Санкт-Петербург  
наб. р. Фонтанки, 27  
Россия  
*E-mail:* fedorpetrov@mail.ru