О соотношении алгебраических MSL-кобордизмов и производных групп Витта

А. С. Ананьевский *

(alseang@gmail.com)

В работе [7] было предложено следующее описание эрмитовой K-теории [8] при помощи алгебраических симплектических кобордизмов.

Теорема. *Рассмотрим поле k, $\operatorname{char} k \neq 2$. Для любого многообразия X (малого мотивного пространства) над k имеет место изоморфизм*

$$MSp^{*,*}(X) \otimes_{MSp^{4*,2*}(pt)} BO^{4*,2*}(pt) \cong BO^{*,*}(X). \tag{1}$$

Здесь и далее для биградуированной теории когомологий $A^{*,*}(-)$ положим

$$A^{*,*}(X) = \bigoplus_{m,n} A^{m,n}(X), \quad A^{4*,2*}(X) = \bigoplus_{n} A^{4n,2n}(X).$$

Эта теорема является алгебраическим аналогом теоремы Коннера-Флойда [3, Теорема 10.2], восстанавливающей вещественную K-теорию по симплектическим кобордизмам. В настоящей статье доказывается теорема, выражающая производные группы Витта [2] в терминах групп кобордизмов.

В качестве первого шага доказывается существование изоморфизма $BO^{*,*}(X)/\langle \eta - 1 \rangle \cong W^*(X)$, где $\eta \in \pi^{-1,-1}(pt)$ – стабильное отображение Хопфа. Далее, опираясь на вышеприведенную теорему, уже не составляет труда получить формулу, выражающую производные группы Витта в терминах симплектических кобордизмов. Однако оказывается, что в этой формуле, в отличие от случая эрмитовой K-теории, можно заменить группы симплектических кобордизмов на MSL-кобордизмы, что мы и показы-

*Санкт-Петербургский государственный университет

ваем во второй половине работы. Отметим, что в алгебраическом контексте MSL-кобордизмы являются аналогом топологических ориентированных кобордизмов, которые, вообще говоря, устроены проще, чем симплектические (см. [1]).

Технически большая часть работы происходит в нестабильной и стабильной мотивных гомотопических категориях $\mathcal{H}_{\bullet}(k)$, $\mathcal{SH}(k)$, построенных в [5, 9]. Большую часть используемых определений и конструкций, относящихся к категории $\mathcal{SH}(k)$, можно найти в [4].

Связь эрмитовой K-теории с производными группами Витта. Для гладкого многообразия X и индекса $i < 0$ имеют место канонические отождествления

$$\gamma\colon BO^{2n-i,n-i}(X) \xrightarrow{\cong} W^n(X).$$

Таким образом, чтобы получить производные группы Витта из эрмитовой K-теории, достаточно некоторым образом сократить градуировку в направлении (i,i). Для этого мы воспользуемся стабильным отображением Хопфа.

Определение. *Отображением Хопфа называется отображение*

$$H\colon \mathbb{A}^2 - \{0\} \to \mathbb{P}^1,\ H(x,y) = [x\colon y].$$

Отмечая точки $(1,1)$ и $[1:1]$ на $\mathbb{A}^2 - \{0\}$ и $\mathbb{P}^1$ и рассматривая надстроечные спектры, мы получаем морфизм

$$\Sigma^\infty H \in Hom_{\mathcal{SH}(k)}(\Sigma^\infty(\mathbb{A}^2 - \{0\}), \Sigma^\infty(\mathbb{P}^1)) \cong \pi^{2,1}(S^{3,2}).$$

Стабильным отображением Хопфа называется

$$\eta = \Sigma^{-3,-2}(\Sigma^\infty H) \in \pi^{-1,-1}(pt).$$

Напомним, что все представимые в $\mathcal{SH}(k)$ кольцевые теории когомологий $A^{*,*}(-)$ являются алгебрами над стабильными когомотопическими группами $\pi^{*,*}(pt)$, в частности, для любого гладкого многообразия X существует некоторый канонический элемент $\eta \in BO^{-1,-1}(X)$, соответствующий стабильному отображению Хопфа.

Определение. *Для произвольной кольцевой теории когомологий $A^{*,*}(-)$, представимой в стабильной гомотопической категории $\mathcal{SH}(k)$, обозначим через $\widetilde{A}^{*,*}(-) = A^{*,*}(-)[\eta^{-1}]$ теорию когомологий, индуцированную обращением стабильного отображения Хопфа η.*

После обращения η теория когомологий становится $(1,1)$-периодичной, поэтому зачастую имеет смысл положить $\eta - 1 = 0$, отождествляя группы $\widetilde{A}^{m+i,n+i}(X) \cong \widetilde{A}^{m,n}(X)$. Разумеется, можно сразу же положить $\eta - 1 = 0$, получая те же самые группы,

$$A^{*,*}(X)/\langle \eta - 1 \rangle \cong \widetilde{A}^{*,*}(X)/\langle \eta - 1 \rangle.$$

Описанная конструкция, примененная к эрмитовой K-теории, дает производные группы Витта.

Теорема. *Для любого гладкого многообразия X имеет место естественный изоморфизм*

$$BO^{*,*}(X)/\langle \eta - 1 \rangle \xrightarrow{\cong} W^{*}(X). \tag{2}$$

Полагая $\eta - 1 = 0$ в формуле 1, мы получаем следующее описание производных групп Витта в терминах симплектических кобордизмов.

Следствие. *Для любого многообразия X имеет место изоморфизм*

$$MSp^{*,*}(X)/\langle \eta - 1 \rangle \otimes_{MSp^{4*,2*}(pt)} W^{2*}(pt) \cong W^{*}(X).$$

Связь MSL-кобордизмов с производными группами Витта. Заметим, что при вещественной реализации стабильное отображение Хопфа становится стабилизацией двукратного наматывания окружности на себя, т.е. элемент $\eta \in \pi^{-1,-1}(pt)$ переходит в $2 \in \pi_0(pt)$. Таким образом, обращение η соответствует обращению 2 в рассматриваемой теории когомологий, что зачастую сильно упрощает вычисления, использующие характеристические классы ориентированных расслоений. В алгебраическом контексте аналогом топологических ориентированных векторных расслоений являются векторные SL-расслоения.

Определение. *Векторным SL-расслоением над гладким многообразием X называется пара (E, λ), состоящая из векторного расслоения E над X и тривиализации определителя $\lambda\colon \det E \xrightarrow{\cong} \mathcal{O}_X$.*

Определение. *Для векторного расслоения E над многообразием X положим $Th(E) = E/(E - X)$. Это пространство называется пространством Тома векторного расслоения X.*

Определение. *Представимая кольцевая теория когомологий $A^{*,*}(-)$ называется SL-ориентированной [6], если задано функториальное правило, сопоставляющее каждому векторному SL-расслоению (E,λ) ранга n над каждым гладким многообразием X некоторый мультипликативный класс $th(E,\lambda) \in A^{2n,n}(Th(E))$ таким образом, что отображения*

$$-\cup th(E,\lambda)\colon A^{*,*}(X) \to A^{*+2n,*+n}(Th(E))$$

являются изоморфизмами, и, кроме того, выполнены следующие условия нормализации:

1. *$th(\mathbf{0}) = 1$ для нулевого расслоения $\mathbf{0} \to pt$.*
2. *$th(\mathcal{O}_{pt}, 1) = \Sigma^{2,1}(1)$ для тривиального одномерного векторного SL-расслоения над точкой.*

Класс $th(E,\lambda)$ называется классом Тома векторного SL-расслоения (E,λ), а получаемый из него расширением носителя класс $e(E,\lambda) \in A^{2n,n}(X)$ называется классом Эйлера.

Эрмитова K-теория является SL-ориентированной, а MSL-кобордизмы являются универсальной SL-ориентированной теорией [6]. Обращение η для SL-ориентированных теорий влечет выполнение аналога теоремы о проективизированном расслоении. Зафиксируем некоторую SL-ориентированную представимую кольцевую теорию когомологий $A^{*,*}(-)$.

Теорема. *Для векторного SL-расслоения (E,λ) ранга $2n+1$ над многообразием X имеет место естественный изоморфизм*

$$\widetilde{A}^{*,*}(E-X) \cong \widetilde{A}^{*,*}(X) \oplus \widetilde{A}^{*-4n,*-2n}(X).$$

Из этой теоремы следует вычисление для классифицирующих пространств BSL_n и универсальных пространств Тома MSL_n в терминах характеристических классов. Для градуированного кольца R и набора переменных $t_1, t_2, \dots, t_n$ степеней $d_1, d_2, \dots, d_n$ обозначим через $R[[t_1, t_2, \dots, t_n]]_h$ алгебру однородных формальных степенных рядов.

Теорема. *Имеют место изоморфизмы*

$$\widetilde{A}^{*,*}(MSL_{2n}) \cong \widetilde{A}^{*,*}(BSL_{2n}) \cong \widetilde{A}^{*,*}(pt)[[p'_1, p'_2, \dots, p'_{n-1}, e]]_h, \quad (3)$$

$$\widetilde{A}^{*,*}(MSL_{2n+1}) \cong \widetilde{A}^{*,*}(BSL_{2n+1}) \cong \widetilde{A}^{*,*}(pt)[[p'_1, p'_2, \dots, p'_n]]_h, \quad (4)$$

где $\deg p'_i = (8i, 4i)$, $\deg e = (4n, 2n)$.

Класс p'_i - это аналог класса Понтрягина. Поэтому его естественно обозначать p_i. Однако в [7] символ p_i обозначает характеристический класс симплектического расслоения.

Используя это вычисление, мы можем доказать следующую теорему, выражающую производные группы Витта через MSL-кобордизмы. Положим $pt = \mathrm{Spec}(k)$ и

$$MSL^{\#,\#}(pt) = \bigoplus_{m \geq 0,\, n \in \mathbb{Z}} MSL^{4n-m,2n-m}(pt).$$

Теорема. *Для любого гладкого многообразия X имеет место естественный изоморфизм*

$$MSL^{*,*}(X)/\langle \eta - 1 \rangle \otimes_{MSL^{\#,\#}(pt)} W^{2*}(pt) \xrightarrow{\simeq} W^*(X).$$

Доказательство. Универсальность MSL означает, что для каждого многообразия X существует функториальный гомоморфизм $MSL^{*,*}(X) \to BO^{*,*}(X)$, согласованный с классами Тома векторных SL-расслоений. Этот гомоморфизм индуцирует отображение

$$\psi \colon \widetilde{MSL}^{*,*}(X) \otimes_{\widetilde{MSL}^{4*,2*}(pt)} W^{2*}(pt) \to \widetilde{BO}^{*,*}(X).$$

Покажем, что ψ является изоморфизмом для произвольного малого мотивного пространства X и индексов $(4*, 2*)$.

Сечение, построенное в работе [7], задает сечение s для отображения ψ. Таким образом, $\psi s = id$ и ψ сюръективно. Для доказательства инъективности ψ достаточно проверить сюръективность s. В силу малости пространства X, общий случай вытекает из универсального $X = MSL_n$. Универсальный случай следует из формул (2)-(4) и тавтологического изоморфизма

$$\widetilde{MSL}^{4*,2*}(pt) \otimes_{\widetilde{MSL}^{4*,2*}(pt)} W^{2*}(pt) \cong \widetilde{BO}^{4*,2*}(pt).$$

Следовательно, ψ является изоморфизмом для индексов $(4*, 2*)$. Применяя изоморфизмы надстройки $\Sigma^{m,n}$, получаем, что ψ является изоморфизмом для всех возможных индексов. Для окончания доказательства осталось положить $\eta - 1 = 0$ и заметить, что в полученной формуле можно заменить $\widetilde{MSL}^{4*,2*}(pt)$ на $MSL^{\#,\#}(pt)$.

$\square$

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П.Л.Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026 и грантов РФФИ 10-01-00551-а и 12-01-31100. Автор выражает искреннюю благодарность И.А. Панину за многочисленные полезные обсуждения различных вопросов, связанных с тематикой статьи.

Список литературы

[1] С.П. Новиков, И.А. Тайманов, *Кобордизмы в Советском Союзе, 1967-1969,* Топологическая Библиотека, Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2011.

[2] P. Balmer, *Witt groups,* Handbook of K-theory. Vol. 1, 2, Springer, Berlin, 2005, pp. 539–576

[3] P.E. Conner and E.E. Floyd, *The relation of cobordism to K-theories,* Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag Berlin, 1966

[4] J. F. Jardine, *Motivic symmetric spectra,* Doc. Math., 5 (2000), pp. 445–552

[5] F. Morel, V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$*-homotopy theory of schemes,* Publications Mathematiques de l'IHES, 90 (1999), p. 45-143

[6] I. Panin and C. Walter, *On the algebraic cobordism spectra MSL and MSp,* arXiv:1011.0651.

[7] I. Panin and C. Walter, *On the relation of the symplectic algebraic cobordism to hermitian K-theory,* arXiv:1011.0652.

[8] M. Schlichting, *Hermitian K-theory of exact categories,* J. K-theory 5 (2010), no. 1, 105 - 165

[9] V. Voevodsky, $\mathbb{A}^1$*-homotopy theory,* Doc. Math., Extra Vol. I (1998), pp. 579-604