

© 2010 г.

Р. С. Пусев*

АСИМПТОТИКА МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ПРОЦЕССОВ БОГОЛЮБОВА В КВАДРАТИЧНОЙ НОРМЕ

Получены результаты о малых отклонениях гауссовской меры Боголюбова, возникающей в теории статистического равновесия квантовых систем. Найдена точная асимптотика вероятностей малых отклонений в гильбертовой норме для некоторых случайных процессов, связанных с процессами Боголюбова.

Ключевые слова: мера Боголюбова, малые отклонения.

Мера Боголюбова, введенная в работах [1], [2], играет важную роль в теории статистического равновесия квантовых систем. Она возникает в представлении гиббсовских равновесных средних от бозе-операторов в виде функциональных интегралов с использованием метода T -произведений Боголюбова (см. работу [3]).

Определим процесс Боголюбова $\xi(t)$, $t \in [0, 1]$, как гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$E\xi(t)\xi(s) = \frac{1}{2\omega \operatorname{sh}(\omega/2)} \operatorname{ch}\left(\omega|t-s| - \frac{\omega}{2}\right), \quad t, s \in [0, 1], \quad \omega > 0. \quad (1)$$

Из общих результатов теории случайных процессов следует, что траектории процесса Боголюбова почти наверное (п. н.) непрерывны. Из определения (1) получаем $E(\xi(1) - \xi(0))^2 = 0$, значит, $\xi(0) = \xi(1)$ п. н. Таким образом, почти все траектории процесса Боголюбова принадлежат пространству $C^0[0, 1]$ непрерывных функций $x(t)$, определенных на отрезке $[0, 1]$ и удовлетворяющих условию $x(0) = x(1)$. Мерой Боголюбова μ_B называется распределение процесса $\xi(t)$ в пространстве $C^0[0, 1]$, снабженном равномерной метрикой.

Свойства меры Боголюбова, функциональных интегралов по этой мере и траекторий процесса Боголюбова изучались в работах [2], [4], [5]. В статье [2] были построены приближенные формулы для функциональных интегралов по мере Боголюбова, точные для функциональных многочленов. В работе [4] установлено, что подобно винеровскому процессу почти все траектории процесса Боголюбова не удовлетворяют условию Гёльдера с показателем $\gamma > 1/2$, а значит, являются недифференцируемыми. В статье [5] получены некоторые асимптотические формулы для

* Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия.
E-mail: Ruslan.Pusev@math.spbu.ru

функциональных интегралов по мере Боголюбова, а также вычислена важная для многих задач теории вероятностей и математической физики асимптотика вероятностей больших уклонений процессов Боголюбова в L_p -нормах.

Еще одной фундаментальной характеристикой случайных процессов, используемой, например, при оценке точности приближений случайных процессов и вычислении метрической энтропии различных множеств, является асимптотика их малых уклонений в той или иной норме. Теория малых уклонений для норм гауссовских процессов бурно развивается в последнее десятилетие (см., например, работы [6], [7]). Недавно была установлена связь малых уклонений с задачами математической статистики: функциональным анализом данных и непараметрическим байесовским оцениванием [8]–[10].

В большинстве случаев удается найти грубую (логарифмическую) асимптотику вероятностей малых уклонений гауссовских процессов. Вычисление точной асимптотики является значительно более трудной задачей, решение которой известно лишь для немногих процессов [11]–[16].

В настоящей работе мы вычисляем точную асимптотику вероятностей малых уклонений в L_2 -норме для самого процесса Боголюбова и некоторых процессов, связанных с ним. Для случайного процесса $X(t)$, $t \in [0, 1]$, положим

$$\|X\| = \left(\int_0^1 X^2(t) dt \right)^{1/2}.$$

Нас интересует асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ вероятности $P\{\|X\| \leq \varepsilon\}$.

В силу классического разложения Карунена–Лозева (см., например, работу [17]) имеет место равенство по распределению

$$\|X\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \eta_k^2,$$

где η_k , $k \in \mathbb{N}$, – независимые стандартные гауссовские случайные величины, а числа $\lambda_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\sum_k \lambda_k < \infty$, суть собственные значения интегрального уравнения

$$\lambda f(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s) ds, \quad t \in [0, 1], \quad (2)$$

в котором ядро $G(t, s)$ – это ковариационная функция процесса X . Таким образом, исходная задача сводится к описанию поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ вероятности $P\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \eta_k^2 \leq \varepsilon^2\}$.

Мы используем следующую лемму, принадлежащую М. А. Лифшицу.

ЛЕММА. Пусть $V_1, V_2 > 0$ – независимые случайные величины с известной асимптотикой вероятностей малых уклонений: при $r \rightarrow 0$

$$P\{V_1 \leq r\} \sim K_1 r^{a_1} \exp(-D_1^{d+1} r^{-d}), \quad P\{V_2 \leq r\} \sim K_2 r^{a_2} \exp(-D_2^{d+1} r^{-d}),$$

где a_1, a_2 – произвольные вещественные числа, а K_1, K_2, D_1, D_2, d – произвольные положительные числа. Тогда для суммы $V_1 + V_2$ верно соотношение

$$P\{V_1 + V_2 \leq r\} \sim K r^a \exp(-D^{d+1} r^{-d}),$$

где

$$D = D_1 + D_2, \quad a = a_1 + a_2 - \frac{d}{2}, \quad K = K_1 K_2 \sqrt{\frac{2\pi d}{d+1}} \cdot \frac{D_1^{a_1+1/2} D_2^{a_2+1/2}}{D^{a+1/2}}.$$

Доказательство леммы аналогично получению формулы (5) ниже.

Рассмотрим задачу о нахождении точной асимптотики малых уклонений для процесса Боголюбова.

ТЕОРЕМА 1. При $\varepsilon \rightarrow 0$ верно соотношение

$$\mathbf{P}\{\|\xi\| \leq \varepsilon\} \equiv \mu_B \left\{ x: \int_0^1 x^2(t) dt \leq \varepsilon^2 \right\} \sim \frac{4\sqrt{2} \operatorname{sh}(\omega/2)}{\sqrt{\pi}} \varepsilon \exp\left(-\frac{1}{8} \varepsilon^{-2}\right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Собственные числа ковариации равны [2]

$$\lambda_k = \frac{1}{\omega^2 + (2\pi k)^2}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Согласно теореме 1 из работы [12] при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\left\{ \sum_{k \geq 1} (4\pi^2 k^2 + \omega^2)^{-1} \eta_k^2 \leq \varepsilon^2 \right\} \sim 4 \sqrt{\frac{\operatorname{sh}(\omega/2)}{\pi \omega}} \exp\left(-\frac{1}{32} \varepsilon^{-2}\right).$$

Применение леммы дает

$$\mathbf{P}\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}, k \neq 0} (4\pi^2 k^2 + \omega^2)^{-1} \eta_k^2 \leq \varepsilon^2 \right\} \sim \frac{4 \operatorname{sh}(\omega/2)}{\sqrt{2\pi} \omega} \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{1}{8} \varepsilon^{-2}\right).$$

Асимптотику вероятности $\mathbf{P}\{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (4\pi^2 k^2 + \omega^2)^{-1} \eta_k^2 \leq \varepsilon^2\}$ вычислим, действуя аналогично работе [13] (см. предложение 6.4 в этой работе). Данная вероятность представляет собой свертку двух функций распределения с известным поведением в нуле. Именно, при $x \rightarrow 0$

$$\frac{d}{dx} \mathbf{P}\{\omega^{-2} \eta_0^2 \leq x\} = \frac{d}{dx} (2\Phi(\omega\sqrt{x}) - 1) \sim \frac{\omega}{\sqrt{2\pi x}},$$

значит,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{ \sum_{k \in \mathbb{Z}} (4\pi^2 k^2 + \omega^2)^{-1} \eta_k^2 \leq \varepsilon^2 \right\} &\sim \\ &\sim \frac{2 \operatorname{sh}(\omega/2)}{\pi} \int_0^{\varepsilon^2} x^{-1/2} (\varepsilon^2 - x)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{8} (\varepsilon^2 - x)^{-1}\right) dx = \\ &= \frac{4 \operatorname{sh}(\omega/2)}{\pi} \int_0^1 (1 - x^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2} (1 - x^2)^{-1}\right) dx. \end{aligned} \quad (3)$$

Применяя метод Лапласа (см., например, монографию [18]), получаем

$$\int_0^1 (1 - x^2)^{-1/2} \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2} (1 - x^2)^{-1}\right) dx \sim \sqrt{2\pi} \varepsilon \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right). \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), имеем

$$\mathbf{P}\left\{\sum_{k \in \mathbb{Z}} (4\pi^2 k^2 + \omega^2)^{-1} \eta_k^2 \leq \varepsilon^2\right\} \sim \frac{4\sqrt{2} \operatorname{sh}(\omega/2)}{\sqrt{\pi}} \varepsilon \exp\left(-\frac{1}{8\varepsilon^2}\right). \quad (5)$$

Теорема доказана.

В следующей теореме получена точная асимптотика вероятностей малых отклонений для процесса Боголюбова с экспоненциальным весом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $q \neq 0$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ верно соотношение

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\int_0^1 \xi^2(t) e^{2qt} dt \leq \varepsilon^2\right\} &\equiv \mu_B\left\{x: \int_0^1 x^2(t) e^{2qt} dt \leq \varepsilon^2\right\} \sim \\ &\sim \frac{4\sqrt{2} \operatorname{sh}(\omega/2)q}{\sqrt{\pi \operatorname{ch}(q/2)} (e^q - 1)} \varepsilon \exp\left(-\frac{(e^q - 1)^2}{8q^2} \varepsilon^{-2}\right). \end{aligned} \quad (6)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3.7) в статье [5] и леммы 2.1 в работе [14] следует, что собственные числа ковариации суть $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные числа краевой задачи

$$\begin{aligned} y'' - (\omega^2 - \mu e^{2qt})y &= 0, \quad t \in [0, 1], \\ y(0) - y(1) &= y'(0) - y'(1) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Положим $\vartheta = (e^q - 1)/q$. С учетом теоремы 1.2 из работы [16] нам достаточно показать, что

$$C_{\text{dist}}^2 \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\vartheta^2 \mu_k}{(\pi(k - 1/2))^2} = \frac{2 \operatorname{sh}^2(\omega/2)}{\operatorname{ch}(q/2)}.$$

Общим решением уравнения (7) является (см. справочник [19])

$$y(t) = c_1 J_{|\omega/q|}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{q} e^{qt}\right) + c_2 N_{|\omega/q|}\left(\frac{\sqrt{\mu}}{q} e^{qt}\right),$$

где J_ν и N_ν – функции Бесселя порядка ν первого и второго рода соответственно.

Используя граничные условия, получаем, что $\sqrt{\mu_k}$ – положительные корни функции

$$F(\zeta) = \det \begin{pmatrix} J_{|\omega/q|}(\zeta/q) - J_{|\omega/q|}(e^q \zeta/q) & N_{|\omega/q|}(\zeta/q) - N_{|\omega/q|}(e^q \zeta/q) \\ \zeta J'_{|\omega/q|}(\zeta/q) - e^q \zeta J'_{|\omega/q|}(e^q \zeta/q) & \zeta N'_{|\omega/q|}(\zeta/q) - e^q \zeta N'_{|\omega/q|}(e^q \zeta/q) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что $F(-\zeta) = F(\zeta)$. Поскольку при $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$ и $|\zeta| \rightarrow \infty$ справедливы соотношения (см., например, [20])

$$\begin{aligned} J_\nu(\zeta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \zeta}} \cos\left(\zeta - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4}\right) (1 + O(|\zeta|^{-1})), \\ N_\nu(\zeta) &= \sqrt{\frac{2}{\pi \zeta}} \sin\left(\zeta - \frac{\pi}{2} \nu - \frac{\pi}{4}\right) (1 + O(|\zeta|^{-1})), \end{aligned}$$

прямым вычислением получаем

$$|F(\zeta)| = \frac{4|q|}{\pi} \cdot \left| \operatorname{ch}\left(\frac{q}{2}\right) \cos(\vartheta\zeta) - 1 \right| + O(|\zeta|^{-1}).$$

Положим $\Psi(\zeta) = \cos(\vartheta\zeta)$. При $|\zeta| \rightarrow \infty$, $\arg \zeta \neq \pi j/2$, $j \in \mathbb{Z}$, получаем

$$\frac{|F(\zeta)|}{|\Psi(\zeta)|} \rightarrow \frac{4|q| \operatorname{ch}(q/2)}{\pi}.$$

По теореме Иенсена (см., например, монографию [21])

$$C_{\text{dist}}^2 = \frac{|F(0)|}{|\Psi(0)|} \exp\left(\lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{|\Psi(\rho e^{i\theta})|}{|F(\rho e^{i\theta})|} d\theta\right).$$

Подынтегральная функция, очевидно, имеет суммируемую мажоранту, и теорема Лебега дает

$$C_{\text{dist}}^2 = \frac{|F(0)|}{|\Psi(0)|} \frac{\pi}{4|q| \operatorname{ch}(q/2)} = \frac{2 \operatorname{sh}^2(\omega/2)}{\operatorname{ch}(q/2)}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Переходя в соотношении (6) к пределу при $q \rightarrow 0$, получаем утверждение теоремы 1.

Обратимся теперь к проинтегрированным процессам. В работах [2] и [5] проинтегрированный (однократно) процесс Боголюбова играет важную роль при установлении связей между мерами Боголюбова и Винера. Обозначим через $\xi_n^{[\alpha_1, \dots, \alpha_n]}(t)$, $t \in [0, 1]$, n -кратно проинтегрированный процесс:

$$\xi_n^{[\alpha_1, \dots, \alpha_n]}(t) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \int_{\alpha_n}^t \dots \int_{\alpha_1}^{t_1} \xi(s) ds dt_1 \dots$$

(каждый индекс α_j равен 0 либо 1). Эта общая форма многократно проинтегрированного процесса была впервые предложена в статье [22].

Проинтегрированные гауссовские процессы интенсивно изучаются в последние годы в связи с задачами проверки гипотез [23], непараметрического оценивания [24], изучением решений невязкого уравнения Бюргерса со случайными начальными данными [25], [26]; они также используются в метрологии как модели для погрешностей атомных часов с переменной точностью и синхронизацией [27].

В приведенной ниже теореме 3 вычислена точная асимптотика сразу для многократно проинтегрированного процесса Боголюбова. Следуя работе [15], введем при натуральном ℓ обозначения

$$z_\ell = \exp\left(\frac{i\pi}{\ell}\right), \quad \mathcal{D}_\ell = \frac{2\ell - 1}{2\ell \sin(\pi/2\ell)}, \quad \varepsilon_\ell = \left(\varepsilon \sqrt{2\ell \sin \frac{\pi}{2\ell}}\right)^{1/2\ell-1},$$

а при $j = 1, \dots, n$ — обозначения

$$k_j = \begin{cases} n - j, & \text{если } \alpha_j = 0, \\ n + 1 + j, & \text{если } \alpha_j = 1, \end{cases} \quad k'_j = 2n + 1 - k_j.$$

Через $V(\dots)$ обозначим определитель Вандермонда.

ТЕОРЕМА 3. При $\varepsilon \rightarrow 0$ верно соотношение

$$\mathbf{P}\{\|\xi_n^{[\alpha_1, \dots, \alpha_n]}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{2^{n+2}(n+1)^{n+1} \operatorname{sh}(\omega/2)}{M^{1/2}} \frac{\varepsilon_{n+1}}{\sqrt{\pi \mathcal{D}_{n+1}}} \exp\left(-\frac{\mathcal{D}_{n+1}}{2\varepsilon_{n+1}^2}\right), \quad (8)$$

где

$$M = |V(z^{k_1}, \dots, z^{k_n})|^2 \left(\prod_{j=1}^n |1 + z^{k_j}|^2 + \prod_{j=1}^n |1 + z^{k'_j}|^2 \right), \quad z = z_{n+1}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из формулы (3.7) статьи [5] и теоремы 2.1 работы [13] следует, что собственные числа ковариации суть $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k – собственные числа краевой задачи

$$\begin{aligned} (-1)^{n+1} (u^{(2n+2)} - \omega^2 u^{(2n)}) &= \mu u \quad \text{на} \quad [0, 1], \\ u^{(n-j)}(\alpha_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, n, \\ u^{(n)}(0) &= u^{(n)}(1), \quad u^{(n+1)}(0) = u^{(n+1)}(1), \\ (u^{(n+j+1)} - \omega^2 u^{(n+j-1)})(1 - \alpha_j) &= 0, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned} \quad (9)$$

С учетом теоремы 1.2 из работы [16] нам достаточно показать, что

$$C_{\text{dist}}^2 \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \frac{\mu_k}{(\pi(k-1/2))^{2n+2}} = \frac{2^{n+2}(n+1)^{2n+1} \operatorname{sh}^2(\omega/2)}{M}.$$

Обозначим через $\pm\zeta_j$, $j = 0, \dots, n$, корни уравнения

$$\zeta^{2n+2} + \omega^2 \zeta^{2n} = \mu. \quad (10)$$

Будем считать, что ζ_0 – тот корень уравнения, который положителен при положительных μ . Тогда мы можем рассматривать ζ_j , $j = 1, \dots, n$, как функции от $\zeta = \zeta_0$. Когда все корни уравнения (10) различны, функции $e^{\pm i\zeta_j x}$ образуют фундаментальную систему. Подставляя их в граничные условия, получаем, что если μ – собственное значение задачи (9), то корни уравнения (10) являются нулями функции

$$F(\zeta) = \det(A_0^+(\zeta), \dots, A_n^+(\zeta), A_0^-(\zeta), \dots, A_n^-(\zeta)),$$

где

$$A_j^{\pm}(\zeta) = \begin{pmatrix} (\pm i\zeta_j)^{n-1} e^{\pm i\alpha_1 \zeta_j} \\ (\pm i\zeta_j)^{n-2} e^{\pm i\alpha_2 \zeta_j} \\ \vdots \\ e^{\pm i\alpha_n \zeta_j} \\ (\pm i\zeta_j)^n (1 - e^{\pm i\zeta_j}) \\ (\pm i\zeta_j)^{n+1} (1 - e^{\pm i\zeta_j}) \\ (\pm i\zeta_j)^n ((i\zeta_j)^2 - \omega^2) e^{\pm i(1-\alpha_1)\zeta_j} \\ (\pm i\zeta_j)^{n+1} ((i\zeta_j)^2 - \omega^2) e^{\pm i(1-\alpha_2)\zeta_j} \\ \vdots \\ (\pm i\zeta_j)^{2n-1} ((i\zeta_j)^2 - \omega^2) e^{\pm i(1-\alpha_n)\zeta_j} \end{pmatrix}.$$

Если же два корня уравнения (10) совпадают, то функция $F(\zeta)$ также обращается в нуль. Чтобы отбросить эти “лишние” нули, рассмотрим функцию

$$\tilde{F}(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{V(\zeta_0, \dots, \zeta_n, -\zeta_0, \dots, -\zeta_n)}.$$

Теперь μ является собственным значением краевой задачи (9) тогда и только тогда, когда корни уравнения (10) являются нулями функции $\tilde{F}(\zeta)$.

Заметим, что $\zeta_j = z^j \zeta + O(|\zeta|^{-1})$, $j = 1, \dots, n$, при $|\zeta| \rightarrow \infty$. Тогда при $|\zeta| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |V(\zeta_0, \dots, \zeta_n, -\zeta_0, \dots, -\zeta_n)| &\sim \\ &\sim |\zeta|^{(n+1)(2n+1)} |V(1, z, \dots, z^{2n+1})| = (2n+2)^{n+1} |\zeta|^{(n+1)(2n+1)}. \end{aligned}$$

Действуя по аналогии с рассуждениями из теоремы 2 в § 4 книги [28], при $|\zeta| \rightarrow \infty$ и $|\arg \zeta| \leq \pi/(2n+2)$ получаем

$$F(\zeta) = \zeta^{(n+1)(2n+1)} e^{-iz\zeta - iz^2\zeta - \dots - iz^n\zeta} (\Phi(\zeta) + O(|\zeta|^{-1})),$$

где $\Phi(\zeta) = \det(\Phi_1(\zeta), \Phi_2(\zeta))$,

$$\begin{aligned} \Phi_1(\zeta) &= \begin{pmatrix} i^{n-1} e^{i\alpha_1 \zeta} & (iz)^{n-1} (1 - \alpha_1) & \dots & (iz^n)^{n-1} (1 - \alpha_1) \\ i^{n-2} e^{i\alpha_2 \zeta} & (iz)^{n-2} (1 - \alpha_2) & \dots & (iz^n)^{n-2} (1 - \alpha_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{i\alpha_n \zeta} & 1 - \alpha_n & \dots & 1 - \alpha_n \\ i^n (1 - e^{i\zeta}) & (iz)^n & \dots & (iz^n)^n \\ i^{n+1} (1 - e^{i\zeta}) & (iz)^{n+1} & \dots & (iz^n)^{n+1} \\ i^{n+2} e^{i(1-\alpha_1)\zeta} & (iz)^{n+2} \alpha_1 & \dots & (iz^n)^{n+2} \alpha_1 \\ i^{n+3} e^{i(1-\alpha_2)\zeta} & (iz)^{n+3} \alpha_2 & \dots & (iz^n)^{n+3} \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i^{2n+1} e^{i(1-\alpha_n)\zeta} & (iz)^{2n+1} \alpha_n & \dots & (iz^n)^{2n+1} \alpha_n \end{pmatrix}, \\ \Phi_2(\zeta) &= \begin{pmatrix} (-i)^{n-1} e^{-i\alpha_1 \zeta} & (-iz)^{n-1} \alpha_1 & \dots & (-iz^n)^{n-1} \alpha_1 \\ (-i)^{n-2} e^{-i\alpha_2 \zeta} & (-iz)^{n-2} \alpha_2 & \dots & (-iz^n)^{n-2} \alpha_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{-i\alpha_n \zeta} & \alpha_n & \dots & \alpha_n \\ (-i)^n (1 - e^{-i\zeta}) & -(-iz)^n & \dots & -(-iz^n)^n \\ (-i)^{n+1} (1 - e^{-i\zeta}) & -(-iz)^{n+1} & \dots & -(-iz^n)^{n+1} \\ (-i)^{n+2} e^{-i(1-\alpha_1)\zeta} & (-iz)^{n+2} (1 - \alpha_1) & \dots & (-iz^n)^{n+2} (1 - \alpha_1) \\ (-i)^{n+3} e^{-i(1-\alpha_2)\zeta} & (-iz)^{n+3} (1 - \alpha_2) & \dots & (-iz^n)^{n+3} (1 - \alpha_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-i)^{2n+1} e^{-i(1-\alpha_n)\zeta} & (-iz)^{2n+1} (1 - \alpha_n) & \dots & (-iz^n)^{2n+1} (1 - \alpha_n) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Учитывая обозначения и переставляя, если это необходимо, строки, получаем, что $\Phi(\zeta) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \det(\Phi_3(\zeta), \Phi_4(\zeta))$, где

$$\Phi_3(\zeta) = \begin{pmatrix} i^{k_1} & (iz)^{k_1} & \dots & (iz^n)^{k_1} \\ i^{k_2} & (iz)^{k_2} & \dots & (iz^n)^{k_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i^{k_n} & (iz)^{k_n} & \dots & (iz^n)^{k_n} \\ i^n(1 - e^{i\zeta}) & (iz)^n & \dots & (iz^n)^n \\ i^{n+1}(1 - e^{i\zeta}) & (iz)^{n+1} & \dots & (iz^n)^{n+1} \\ i^{k'_1}e^{i\zeta} & 0 & \dots & 0 \\ i^{k'_2}e^{i\zeta} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i^{k'_n}e^{i\zeta} & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_4(\zeta) = \begin{pmatrix} (-i)^{k_1} & 0 & \dots & 0 \\ (-i)^{k_2} & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-i)^{k_n} & 0 & \dots & 0 \\ (-i)^n(1 - e^{-i\zeta}) & -(-iz)^n & \dots & -(-iz^n)^n \\ (-i)^{n+1}(1 - e^{-i\zeta}) & -(-iz)^{n+1} & \dots & -(-iz^n)^{n+1} \\ (-i)^{k'_1}e^{-i\zeta} & (-iz)^{k'_1} & \dots & (-iz^n)^{k'_1} \\ (-i)^{k'_2}e^{-i\zeta} & (-iz)^{k'_2} & \dots & (-iz^n)^{k'_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-i)^{k'_n}e^{-i\zeta} & (-iz)^{k'_n} & \dots & (-iz^n)^{k'_n} \end{pmatrix}.$$

В результате непосредственных вычислений имеем $|\Phi(\zeta)| = M|e^{i\zeta} + e^{-i\zeta} + R|$, где

$$M = |V(z^{k_1}, \dots, z^{k_n}, z^n)V(z^{n+1}, z^{k'_1}, \dots, z^{k'_n}) + \\ + V(z^{k_1}, \dots, z^{k_n}, z^{n+1})V(z^n, z^{k'_1}, \dots, z^{k'_n})|,$$

а R – константа, значение которой для дальнейших вычислений несущественно. Заметим, что выражение для M можно переписать так:

$$M = |V(z^{k_1}, \dots, z^{k_n})|^2 \left(\prod_{j=1}^n |1 + z^{k_j}|^2 + \prod_{j=1}^n |1 + z^{k'_j}|^2 \right).$$

Рассмотрим функцию [15]

$$\Psi_\delta(\zeta) = \psi_\delta(\zeta)\psi_\delta(z\zeta)\dots\psi_\delta(z^n\zeta),$$

где

$$\psi_\delta(\zeta) = \frac{\Gamma^2(1 + \delta)}{\Gamma(1 + \delta + \zeta/\pi)\Gamma(1 + \delta - \zeta/\pi)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta^2}{(\pi(k + \delta))^2} \right).$$

Как было показано в работе [15], при $\zeta \rightarrow \infty$, $|\arg \zeta| \leq \phi_0 < \pi$,

$$\psi_\delta(\zeta) \sim \Gamma^2(1+\delta)\pi^{2\delta}\zeta^{-2\delta-1} \cos\left(\zeta - \pi\left(\delta + \frac{1}{2}\right)\right),$$

причем сходимость равномерная. Полагая $\delta = -1/2$, получаем, что

$$\frac{|\tilde{F}(\zeta)|}{|\Psi_\delta(\zeta)|} \rightarrow \frac{2^{n+1}M}{(2n+2)^{2n+1}},$$

если $\zeta \rightarrow \infty$, $\arg \zeta \neq \pi j/(2n+2)$, $j \in \mathbb{Z}$.

Применяя теорему Иенсена к функциям $\tilde{F}(\zeta)$ и $\Psi_\delta(\zeta)$, с учетом теоремы Лебега о мажорируемой сходимости получаем

$$C_{\text{dist}}^2 = \frac{(2n+2)^{2n+1}|\tilde{F}(0)|}{2^{n+1}M}.$$

Перенумеровав ζ_j , $j = 1, \dots, n$, мы можем считать, что при $\zeta \rightarrow 0$

$$\zeta_j = z_n^j \zeta (1 + O(|\zeta|)), \quad j = 1, \dots, n-1; \quad \zeta_n \rightarrow \omega i.$$

Тогда при $\zeta \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} |V(\zeta_0, \dots, \zeta_n, -\zeta_0, \dots, -\zeta_n)| &\sim \\ &\sim 2\omega^{4n+1}|\zeta|^{n(2n-1)}|V(1, z_n, \dots, z_n^{2n-1})| = 2(2n)^n\omega^{4n+1}|\zeta|^{n(2n-1)} \end{aligned}$$

и $F(\zeta) \sim \pm \zeta^{n(2n-1)} \det(\Phi_5(\zeta), \Phi_6(\zeta))$, где

$$\begin{aligned} \Phi_5(\zeta) &= \begin{pmatrix} i^{n-1} & \dots & (iz_n^{n-1})^{n-1} & (-\omega\zeta^{-1})^{n-1}e^{-\alpha_1\omega} \\ i^{n-2} & \dots & (iz_n^{n-1})^{n-2} & (-\omega\zeta^{-1})^{n-2}e^{-\alpha_2\omega} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & e^{-\alpha_n\omega} \\ (i\zeta)^n & \dots & (iz_n^{n-1}\zeta)^n & (-\omega)^n(1-e^{-\omega}) \\ (i\zeta)^{n+1} & \dots & (iz_n^{n-1}\zeta)^{n+1} & (-\omega)^{n+1}(1-e^{-\omega}) \\ -\omega^2 i^n & \dots & -\omega^2 (iz_n^{n-1})^n & 0 \\ -\omega^2 i^{n+1} & \dots & -\omega^2 (iz_n^{n-1})^{n+1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\omega^2 i^{2n-1} & \dots & -\omega^2 (iz_n^{n-1})^{2n-1} & 0 \end{pmatrix}, \\ \Phi_6(\zeta) &= \begin{pmatrix} (-i)^{n-1} & \dots & (-iz_n^{n-1})^{n-1} & (\omega\zeta^{-1})^{n-1}e^{\alpha_1\omega} \\ (-i)^{n-2} & \dots & (-iz_n^{n-1})^{n-2} & (\omega\zeta^{-1})^{n-2}e^{\alpha_2\omega} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & e^{\alpha_n\omega} \\ (-i\zeta)^n & \dots & (-iz_n^{n-1}\zeta)^n & \omega^n(1-e^\omega) \\ (-i\zeta)^{n+1} & \dots & (-iz_n^{n-1}\zeta)^{n+1} & \omega^{n+1}(1-e^\omega) \\ -\omega^2 (-i)^n & \dots & -\omega^2 (-iz_n^{n-1})^n & 0 \\ -\omega^2 (-i)^{n+1} & \dots & -\omega^2 (-iz_n^{n-1})^{n+1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -\omega^2 (-i)^{2n-1} & \dots & -\omega^2 (-iz_n^{n-1})^{2n-1} & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Разлагая по $(n+1)$ -му и $(2n+2)$ -му столбцам, получаем

$$\begin{aligned} |F(\zeta)| &\sim |\zeta|^{n(2n-1)} |V(i, iz_n, \dots, iz_n^{2n-1})| \omega^{2n} \times \\ &\times \left| \det \begin{pmatrix} (-\omega)^n (1 - e^{-\omega}) & \omega^n (1 - e^\omega) \\ (-\omega)^{n+1} (1 - e^{-\omega}) & \omega^{n+1} (1 - e^\omega) \end{pmatrix} \right| = \\ &= 8(2n)^n \omega^{4n+1} \operatorname{sh}^2\left(\frac{\omega}{2}\right) |\zeta|^{n(2n-1)}. \end{aligned}$$

Следовательно, $|\tilde{F}(0)| = 4 \operatorname{sh}^2(\omega/2)$ и

$$C_{\text{dist}}^2 = \frac{2^{n+2} (n+1)^{2n+1} \operatorname{sh}^2(\omega/2)}{M}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Полагая в соотношении (8) $n = 0$, получаем утверждение теоремы 1.

Благодарности. Автор признателен А. И. Назарову и Я. Ю. Никитину за внимание к работе и рецензенту за замечания, способствовавшие улучшению статьи. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (грант № 10-01-00154) и Программы поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4472.2010.1).

Список литературы

- [1] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **119:2** (1999), 345–352.
- [2] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **126:1** (2001), 149–163.
- [3] Н. Н. Боголюбов, *Докл. АН СССР*, **99:2** (1954), 225–226.
- [4] Д. П. Санкович, *ТМФ*, **127:1** (2001), 125–142.
- [5] В. Р. Фаталов, *ТМФ*, **157:2** (2008), 286–308.
- [6] W. V. Li, Q.-M. Shao, “Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications”, *Stochastic Processes: Theory and Methods*, Handbook Statist., **19**, eds. D. N. Shanbhag, C. R. Rao, North-Holland, Amsterdam, 2001, 533–597.
- [7] M. A. Lifshits, *Bibliography of small deviation probabilities*.
<http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.pdf>.
- [8] F. Ferraty, P. Vieu, *Nonparametric Functional Data Analysis*, Springer Ser. Statist., Springer, New York, 2006.
- [9] A. W. van der Vaart, J. H. van Zanten, *Ann. Statist.*, **36:3** (2008), 1435–1463.
- [10] F. Aurzada, И. А. Ибрагимов, М. А. Лифшиц, Н. J. van Zanden, *ТВП*, **53:4** (2008), 788–798.
- [11] L. Beghin, Ya. Yu. Nikitin, E. Orsingher, “Exact small ball constants for some Gaussian processes under L^2 -norm”, *Вероятность и статистика*. 6, Зап. научн. сем. ПОМИ, **298**, ПОМИ, СПб., 2003, 5–21.
- [12] Я. Ю. Никитин, П. А. Харинский, “Точная асимптотика малых уклонений в L_2 -норме для одного класса Гауссовских процессов”, *Вероятность и статистика*. 7, Зап. научн. сем. ПОМИ, **311**, ПОМИ, СПб., 2004, 214–221.
- [13] A. I. Nazarov, Ya. Yu. Nikitin, *Probab. Theory Related Fields*, **129:4** (2004), 469–494.
- [14] А. И. Назаров, Р. С. Пусев, “Точная асимптотика малых уклонений в L_2 -норме с весом для некоторых гауссовских процессов”, *Вероятность и статистика*. 14–2, Зап. научн. сем. ПОМИ, **364**, ПОМИ, СПб., 2009, 166–199.

- [15] А. И. Назаров, *Проблемы матем. анализа*, **26** (2003), 179–213.
- [16] A. I. Nazarov, *J. Theoret. Probab.*, **22**:3 (2009), 640–665.
- [17] R. J. Adler, *An Introduction to Continuity, Extrema and Related Topics for General Gaussian Processes*, IMS Lecture Notes – Monograph Ser., **12**, Institute of Mathematical Statistics, Hayward, California, 1990.
- [18] В. А. Зорич, *Математический анализ*, Часть 2, МЦНМО, М., 1998.
- [19] Э. Камке, *Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям*, Лань, СПб., 2003.
- [20] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматлит, М., 1971.
- [21] Е. Титчмарш, *Теория функций*, Наука, М., 1980.
- [22] F. Gao, J. Hannig, F. Torcaso, *Ann. Probab.*, **31**:3 (2003), 1320–1337.
- [23] A. Lachal, *Math. Meth. Statist.*, **10** (2001), 73–104.
- [24] P. Groeneboom, G. Jongbloed, J. A. Wellner, *Ann. Statist.*, **29**:6 (2001), 1620–1652.
- [25] Я. Г. Синай, *ТМФ*, **90**:3 (1992), 323–353.
- [26] G. Molchan, A. Khokhlov, *J. Stat. Phys.*, **114**:3–4 (2004), 923–946.
- [27] L. Galleani, L. Sacerdote, P. Tavella, C. Zucca, *Metrologia*, **40**:3 (2003), S257–S264.
- [28] М. А. Наймарк, *Линейные дифференциальные операторы*, Наука, М., 1969.

Поступила в редакцию 24.03.2010,
после доработки 26.04.2010