

© 2012 г.

НИКИТИН Я. Ю., ПУСЕВ Р. С.*

ТОЧНАЯ АСИМПТОТИКА МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ
РЯДА БРОУНОВСКИХ ФУНКЦИОНАЛОВ¹⁾

Найдена точная асимптотика малых уклонений по отношению к весовой гильбертовой норме для ряда хорошо известных гауссовских процессов. Используемый подход не требует знания собственных функций ковариационного оператора взвешенного процесса. Это позволяет обобщить многие ранее известные в этой области результаты. Попутно получены новые результаты о точной асимптотике малых уклонений для броуновской экскурсии, броуновского меандра, бесселевских процессов и мостов.

Ключевые слова и фразы: бесселевский процесс, броуновская экскурсия, броуновский меандр, гауссовский процесс, локальное время, малые уклонения.

1. Введение. Теория малых уклонений для гауссовских процессов интенсивно развивалась в последние годы (см. обзоры [47], [49], [18] и полную библиографию в [50].) Это развитие стимулировалось связями теории малых уклонений с рядом важных математических проблем, таких как точность дискретной аппроксимации для случайных процессов и проблема квантизации, вычисление метрической энтропии функциональных множеств или закон повторного логарифма в форме Чжуна. Было также обнаружено, что малые уклонения тесно связаны с функциональным анализом данных [36] и непараметрическим байесовским оцениванием [1], [60].

Проблема малых уклонений (называемая также проблемой малых шаров) для случайного процесса X в норме $\|\cdot\|$ состоит в описании асимптотического поведения вероятности $\mathbf{P}\{\|X\| \leq \varepsilon\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Соотношение типа

$$\mathbf{P}\{\|X\| \leq \varepsilon\} \sim C\varepsilon^\beta \exp(-d\varepsilon^{-\alpha}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

*С.-Петербургский государственный университет, математико-механический факультет, Старый Петергоф, Библиотечная пл. 2, 198504 С.-Петербург, Россия; e-mail: yanikit47@gmail.com, ruslan.pusev@math.spbu.ru

¹⁾ Работа авторов была поддержана ФЦП «Научные и педагогические кадры инновационной России» (грант № 2010-1.1-111-128-033), грантом РФФИ № 10-01-00154 и программой поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4472.2010.1). Р. С. Пусев был также поддержан Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

с некоторыми вещественными константами C , β , d и α называется *точной асимптотикой*. Менее точное утверждение вида

$$\ln \mathbf{P}\{\|X\| \leq \varepsilon\} \sim -d\varepsilon^{-\alpha}, \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

называют *логарифмической асимптотикой*.

В известной монографии М. А. Лифшица [7, §18] говорится: «Поведение малых уклонений, в отличие от больших, нельзя описать единообразно для всего класса гауссовских мер даже на логарифмическом уровне. Формализм оценивания значений малых уклонений, сравнимый по простоте с применением функционала действия для больших уклонений, еще не найден. Известны лишь частные результаты для нескольких важных ситуаций. . .».

Случаи, когда в литературе о малых уклонениях удастся выписать явные константы в точной и даже в логарифмической асимптотике, редки и относятся к небольшому числу простейших случайных процессов ([47], [18]). В этой работе мы концентрируемся на задаче описания *точной асимптотики* малых уклонений в гильбертовой норме.

Пусть $X(t)$, $a \leq t \leq b$, — центрированный гауссовский процесс с ковариационной функцией $G(t, s)$, $a \leq t, s \leq b$. Для неотрицательной весовой функции $\psi(t)$, определенной на $[a, b]$, положим

$$\|X\|_\psi = \left(\int_a^b X^2(t)\psi(t) dt \right)^{1/2}.$$

Если интеграл $\int_a^b G(t, t)\psi(t) dt$ конечен, то процесс $X(t)\sqrt{\psi(t)}$ допускает разложение Кархунена–Лозева (см., например, [23]):

$$X(t)\sqrt{\psi(t)} = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \sqrt{\lambda_k} f_k(t),$$

где ξ_k , $k \in \mathbf{N}$, независимые стандартные нормальные величины, тогда как $\lambda_k > 0$ и $f_k(t)$, $k \in \mathbf{N}$ — это собственные числа и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма

$$\lambda f(t) = \int_a^b G(t, s)\sqrt{\psi(t)\psi(s)}f(s) ds, \quad t \in [a, b].$$

Из разложения Кархунена–Лозева следует, что

$$\|X\|_\psi^2 = \int_a^b X^2(t)\psi(t) dt \stackrel{\text{law}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2.$$

Поэтому исходная задача о малых уклонениях сводится к асимптотическому анализу вероятности $\mathbf{P}\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \leq \varepsilon^2\}$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Первое

решение этой задачи было найдено Сытой [16], см. также обзоры [47] и [49]. Однако неявный характер решения, полученного в [16], делает невозможным извлечение из него точной асимптотики. Начиная с работ [6] и [34], многие авторы стремились упростить асимптотическое выражение для вероятности малых уклонений при тех или иных условиях.

Золотарев [62] получил точную асимптотику вероятности малых уклонений в случае $\lambda_k = k^{-A}$, $A > 1$. Опираясь на результаты [48], Дункер, Лифшиц и Линде [35] нашли указанную асимптотику в случае $\lambda_k = f(k)$, где f положительная, логарифмически выпуклая и дважды дифференцируемая суммируемая функция. В статье [27] оценки из [35] были применены к проинтегрированным и центрированным (по времени) броуновскому движению и броуновскому мосту. Более общие результаты для многократно проинтегрированных процессов были позже получены в [39] и [53]. В [11] точная асимптотика в рассматриваемой задаче была найдена в специальном случае, когда собственные числа λ_k являются отношениями степеней двух полиномов.

Новый подход, позволяющий вычислить точную асимптотику малых уклонений в L_2 -норме с точностью до константы, был разработан в [53] и [54] и применен к широкому классу гауссовских процессов, ковариации которых совпадают с функциями Грина самосопряженных дифференциальных операторов общего вида. Мы предлагаем называть такие процессы «процессами Грина».

Малые уклонения для *взвешенных* процессов Грина изучались в [10], где для достаточно гладких и невырожденных весов была найдена асимптотика с точностью до так называемой *константы расхождения*. Эта константа появилась в работе Ли [46] и имеет вид некоторого бесконечного произведения. Ее вычисление требует знания собственных функций ковариации. Используя подход, предложенный в [9], см. также близкие результаты в [38], Назаров и Пусев [10] вычислили константу расхождения для ряда взвешенных процессов Грина с известными собственными функциями. Для удобства читателя мы формулируем в § 2 соответствующую теорему вместе с рядом вспомогательных результатов. Класс процессов, удовлетворяющих условиям теоремы 1 из § 2, широк и включает, например, броуновское движение, броуновский мост, процесс Орнштейна–Уленбека и их многократно проинтегрированные аналоги.

В § 3 мы показываем, как вычислить константу расхождения для ряда взвешенных гауссовских процессов, у которых *собственные функции ковариации неизвестны*, используя подход, тесно связанный с классическим методом ВКБ [37]. Это дает искомую точную асимптотику малых уклонений. Мы полагаем, что предложенный подход применим к значительно более широкому подклассу процессов Грина, чем процессы, рассмотренные в § 3.

В § 4 результаты § 3 используются для нахождения точной асимптотики малых уклонений во взвешенной L_2 -норме для бесселевских процессов и мостов. В § 5 получены аналогичные соотношения для броуновской экскурсии. Далее, в § 6 и § 7 мы исследуем такие же задачи для броуновского локального времени, для броуновского меандра и схожих процессов. В частности, рассматриваются интегральные функционалы от бесселевских процессов и броуновских локальных времен, попутно изучаются и супремумы рассматриваемых процессов. Результаты являются новыми даже в отсутствии веса, хотя их доказательства сравнительно просты и опираются на ряд известных тождеств по распределению между броуновскими функционалами.

Мы полагаем, что появление таблиц точных асимптотик для вероятностей малых уклонений — это лишь вопрос времени. Подобные таблицы будут похожими на таблицы интегралов, сумм и произведений и на таблицы распределений функционалов от броуновского движения.

2. Вспомогательные утверждения. Пусть L — самосопряженный линейный дифференциальный оператор порядка 2ℓ , определенный на пространстве $\mathcal{D}(L)$ функций, удовлетворяющих 2ℓ граничным условиям. Обозначим $W_p^m(0, 1)$ банахово пространство $(m - 1)$ раз непрерывно дифференцируемых функций y , у которых производная $y^{(m-1)}$ абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $y^{(m)} \in L_p(0, 1)$. Следующая лемма доказана в [10, Лемма 2.1].

Лемма 1. *Рассмотрим функцию $\psi \in W_\infty^\ell(0, 1)$ такую, что $\psi > 0$ на $(0, 1)$. Пусть $G(t, s)$ — функция Грина краевой задачи*

$$Lv = \mu v \quad \text{на } [0, 1], \quad v \in \mathcal{D}(L).$$

Тогда функция $\mathcal{G}(t, s) = \sqrt{\psi(t)\psi(s)}G(t, s)$ является функцией Грина краевой задачи

$$\mathcal{L}v \equiv \psi^{-1/2}L(\psi^{-1/2}v) = \mu v \quad \text{на } [0, 1], \quad v \in \mathcal{D}(\mathcal{L}), \quad (1)$$

где пространство $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ состоит из функций v , удовлетворяющих условию

$$\psi^{-1/2}v \in \mathcal{D}(L). \quad (2)$$

З а м е ч а н и е. Полагая $y = \psi^{-1/2}v$, можно переписать задачу (1)–(2) следующим образом:

$$Ly = \mu\psi y \quad \text{на } [0, 1], \quad y \in \mathcal{D}(L).$$

В той же работе [10] следующая теорема была доказана с помощью леммы 1 и теории, развитой в [53].

Теорема 1. Пусть ковариационная функция $G_X(t, s)$ центрального гауссовского процесса $X(t)$, $0 \leq t \leq 1$, является функцией Грина самосопряженного дифференциального оператора L порядка 2ℓ

$$Lv \equiv (-1)^\ell v^{(2\ell)} + (p_{\ell-1} v^{(\ell-1)})^{(\ell-1)} + \dots + p_0 v, \\ p_m \in L_1(0, 1), \quad m = 0, \dots, \ell - 2, \quad p_{\ell-1} \in L_\infty(0, 1),$$

с краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} U_j^0(v) &\equiv v^{(k_j)}(0) + \sum_{k < k_j} \alpha_{jk}^0 v^{(k)}(0) = 0, \\ U_j^1(v) &\equiv v^{(k'_j)}(1) + \sum_{k < k'_j} \alpha_{jk}^1 v^{(k)}(1) = 0, \end{aligned} \right\} \quad j = 1, \dots, \ell,$$

где α_{jk}^i — некоторые постоянные,

$$0 \leq k_1 < \dots < k_\ell \leq 2\ell - 1, \quad 0 \leq k'_1 < \dots < k'_\ell \leq 2\ell - 1.$$

Предположим, что $\varkappa \equiv \sum_{j=1}^\ell (k_j + k'_j) < 2\ell^2$. Пусть $\psi \in W_\infty^\ell(0, 1)$ и $\psi(x) > 0$, $x \in [0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}(\|X\|_\psi \leq \varepsilon) \sim \mathcal{C} \varepsilon^\gamma \exp\left(-\frac{2\ell-1}{2} \left(\frac{\vartheta_\ell}{2\ell \sin(\pi/(2\ell))}\right)^{2\ell/(2\ell-1)} \varepsilon^{-2/(2\ell-1)}\right),$$

где

$$\gamma = -\ell + \frac{\varkappa + 1}{2\ell - 1}, \quad \vartheta_\ell = \int_0^1 \psi^{1/(2\ell)}(x) dx, \\ \mathcal{C} = C_{\text{dist}} \frac{(2\pi)^{\ell/2} (\pi/\vartheta_\ell)^{\ell\gamma} (\sin(\pi/(2\ell)))^{(1+\gamma)/2}}{(2\ell-1)^{1/2} (\pi/(2\ell))^{1+\gamma/2} \Gamma^\ell(\ell - \varkappa/(2\ell))}. \quad (3)$$

В (3) «константа расхождения» C_{dist} задается формулой

$$C_{\text{dist}} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\mu_n^{1/2}}{(\pi/\vartheta_\ell \cdot [n + \ell - 1 - \varkappa/(2\ell)])^\ell},$$

где μ_n собственные числа краевой задачи

$$Ly = \mu \psi y, \quad U_j^0(y) = 0, \quad U_j^1(y) = 0, \quad j = 1, \dots, \ell.$$

Далее нам понадобится лемма М. А. Лифшица (см. также [27], [12]), которая доказывается прямыми, хотя и трудоемкими вычислениями.

Лемма 2. Пусть $V_1, V_2 > 0$ — две независимых случайных величины (с.в.) с известными асимптотиками малых уклонений. А именно, допустим, что при $r \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{V_1 \leq r\} \sim K_1 r^{a_1} \exp(-D_1^{d+1} r^{-d}), \\ \mathbf{P}\{V_2 \leq r\} \sim K_2 r^{a_2} \exp(-D_2^{d+1} r^{-d}),$$

где a_1, a_2 — произвольные вещественные числа, а K_1, K_2, D_1, D_2, d — произвольные положительные числа. Тогда

$$\mathbf{P}\{V_1 + V_2 \leq r\} \sim Kr^a \exp(-D^{d+1}r^{-d}),$$

где

$$D = D_1 + D_2, \quad a = a_1 + a_2 - \frac{d}{2}, \quad K = K_1 K_2 \sqrt{\frac{2\pi d}{d+1}} \cdot \frac{D_1^{a_1+1/2} D_2^{a_2+1/2}}{D^{a+1/2}}.$$

С помощью индукции по n лемма 2 легко обобщается на случай произвольного числа независимых одинаково распределенных (н.о.р.) с.в. Справедлив следующий результат.

Лемма 3. Пусть V_1, \dots, V_n — н.о.р. положительные с.в. такие, что

$$\mathbf{P}\{V_i \leq r\} \sim Kr^a \exp(-D^2r^{-1}), \quad r \rightarrow 0,$$

где a — вещественное число, а K и D — положительные постоянные. Тогда

$$\mathbf{P}\{V_1 + \dots + V_n \leq r\} \sim \widetilde{K}r^{\widetilde{a}} \exp(-\widetilde{D}^2r^{-1}), \quad r \rightarrow 0,$$

где

$$\widetilde{D} = nD, \quad \widetilde{a} = na - \frac{n-1}{2}, \quad \widetilde{K} = \frac{K^n D^{n-1} \pi^{(n-1)/2}}{n^{\widetilde{a}+1/2}}.$$

3. Малые отклонения во взвешенной квадратичной норме.

Обозначим

$$\vartheta = \int_0^1 \sqrt{\psi(t)} dt.$$

Следующая теорема дает точную асимптотику малых отклонений для броуновского моста B во взвешенной L_2 -норме для широкого класса весов.

Теорема 2. Пусть функция ψ определена на $[0, 1]$, положительна и дважды непрерывно дифференцируема. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|B\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{2}\psi^{1/8}(0)\psi^{1/8}(1)}{\sqrt{\pi\vartheta}} \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8}\varepsilon^{-2}\right). \quad (4)$$

Доказательство. В соответствии с леммой 1, коэффициенты λ_k в разложении Кархунена-Лозва имеют вид $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} -y'' = \mu\psi y & \text{на } [0, 1], \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Пусть $\varphi_1(t, \zeta)$ и $\varphi_2(t, \zeta)$ решения уравнения $-y'' = \zeta^2 \psi y$ удовлетворяющие начальным условиям

$$\varphi_1(0, \zeta) = 1, \quad \varphi_1'(0, \zeta) = 0, \quad (5)$$

$$\varphi_2(0, \zeta) = 0, \quad \varphi_2'(0, \zeta) = 1. \quad (6)$$

Такой выбор фундаментальной системы решений удобен. Он позволяет нам исследовать поведение решений по ζ как в окрестности нуля, так и на бесконечности.

Подставляя общее решение $y(t) = c_1 \varphi_1(t, \zeta) + c_2 \varphi_2(t, \zeta)$ в краевые условия, мы видим, что $\mu_k = x_k^2$, где $x_1 < x_2 < \dots$ — положительные корни функции

$$F(\zeta) = \det \begin{bmatrix} \varphi_1(0, \zeta) & \varphi_2(0, \zeta) \\ \varphi_1(1, \zeta) & \varphi_2(1, \zeta) \end{bmatrix} = \varphi_2(1, \zeta).$$

В силу теоремы 1, достаточно доказать, что

$$C_{\text{dist}}^2 \equiv \prod_{k=1}^{\infty} \frac{x_k^2}{(\pi k / \vartheta)^2} = \frac{\psi^{1/4}(0) \psi^{1/4}(1)}{\vartheta}.$$

Мы вычислим это бесконечное произведение с помощью теоремы Йенсена. Пусть $f(\zeta)$ функция комплексного аргумента, которая аналитична при $|\zeta| < R$. Допустим, что $f(0) \neq 0$, и пусть r_1, r_2, \dots — модули нулей функции $f(\zeta)$ в круге $|\zeta| < R$, расположенные в неубывающем порядке. По теореме Йенсена (см., например, [17, § 3.6.1]) для $r_k < r < r_{k+1}$ имеем

$$\ln \left(\frac{r^k |f(0)|}{r_1 r_2 \dots r_k} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln |f(re^{i\theta})| d\theta.$$

Поэтому для двух функций f и g с модулями нулей r_1, r_2, \dots и s_1, s_2, \dots соответственно, для всех $\max\{r_k, s_k\} < r < \min\{r_{k+1}, s_{k+1}\}$ получаем

$$\ln \left(\frac{|f(0)| s_1 s_2 \dots s_k}{|g(0)| r_1 r_2 \dots r_k} \right) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{|f(re^{i\theta})|}{|g(re^{i\theta})|} d\theta.$$

Следовательно,

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{r_k}{s_k} = \left| \frac{f(0)}{g(0)} \right| \lim_{r \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln \frac{|g(re^{i\theta})|}{|f(re^{i\theta})|} d\theta \right\}.$$

Для того, чтобы изучить асимптотику функции $F(\zeta)$ при $|\zeta| \rightarrow \infty$, мы используем так называемую ВКБ-аппроксимацию, которая давно используется в квантовой механике для анализа уравнения Шрёдингера, см. [37].

В соответствии с [22, гл. 2, § 3], уравнение $-y'' = \zeta^2 \psi y$ имеет решения вида

$$\tilde{\varphi}_{1,2}(t, \zeta) = \psi^{-1/4}(t) \exp \left(\pm i\zeta \int_0^t \sqrt{\psi(u)} du \right) \left(1 + \frac{\delta_{1,2}(t, \zeta)}{\zeta} \right), \quad (7)$$

где функции $\delta_{1,2}(t, \zeta)$ удовлетворяют условию $|\delta_{1,2}(t, \zeta)| \leq C$ равномерно по $t \in [0, 1]$ и $\zeta \in D_r^- = \{|\zeta| \geq r > 0, \operatorname{Im}(\zeta) \leq 0\}$. Дифференцируя асимптотические выражения для функций $\tilde{\varphi}_{1,2}(t, \zeta)$, получаем

$$\tilde{\varphi}_{1,2}'(t, \zeta) = \pm i\zeta \psi^{1/4}(t) \exp \left(\pm i\zeta \int_0^t \sqrt{\psi(u)} du \right) \left(1 + \frac{\tilde{\delta}_{1,2}(t, \zeta)}{\zeta} \right), \quad (8)$$

где функции $\tilde{\delta}_{1,2}(t, \zeta)$ также равномерно ограничены.

Заметим, что вронскиан решений $\tilde{\varphi}_{1,2}(t, \zeta)$ не обращается в нуль, когда $|\zeta|$ растет. Поэтому для достаточно больших $|\zeta|$ функции $\tilde{\varphi}_{1,2}(t, \zeta)$ линейно независимы, так что для больших $|\zeta|$ функции $\varphi_{1,2}(t, \zeta)$ могут быть представлены в виде линейных комбинаций функций $\tilde{\varphi}_{1,2}(t, \zeta)$:

$$\begin{aligned} \varphi_1(t, \zeta) &= c_{11}(\zeta) \tilde{\varphi}_1(t, \zeta) + c_{12}(\zeta) \tilde{\varphi}_2(t, \zeta), \\ \varphi_2(t, \zeta) &= c_{21}(\zeta) \tilde{\varphi}_1(t, \zeta) + c_{22}(\zeta) \tilde{\varphi}_2(t, \zeta). \end{aligned}$$

Благодаря условиям (5)–(6) мы имеем

$$\begin{aligned} c_{11}(\zeta) &= \frac{\psi^{1/4}(0)}{2} + O(\zeta^{-1}), & c_{12}(\zeta) &= \frac{\psi^{1/4}(0)}{2} + O(\zeta^{-1}), \\ c_{21}(\zeta) &= \frac{1}{2i\zeta\psi^{1/4}(0)} + O(\zeta^{-2}), & c_{22}(\zeta) &= -\frac{1}{2i\zeta\psi^{1/4}(0)} + O(\zeta^{-2}). \end{aligned}$$

Значит, следующие соотношения справедливы при $|\zeta| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im}(\zeta) \leq 0$:

$$\varphi_1(1, \zeta) = \frac{\psi^{1/4}(0) \cos(\vartheta\zeta)}{\psi^{1/4}(1)} (1 + O(\zeta^{-1})), \quad (9)$$

$$\varphi_1'(1, \zeta) = -\psi^{1/4}(0)\psi^{1/4}(1)\zeta \sin(\vartheta\zeta) (1 + O(\zeta^{-1})), \quad (10)$$

$$\varphi_2(1, \zeta) = \frac{\sin(\vartheta\zeta)}{\psi^{1/4}(0)\psi^{1/4}(1)\zeta} (1 + O(\zeta^{-1})), \quad (11)$$

$$\varphi_2'(1, \zeta) = \frac{\psi^{1/4}(1) \cos(\vartheta\zeta)}{\psi^{1/4}(0)} (1 + O(\zeta^{-1})). \quad (12)$$

Аналогично доказывается, что сходные соотношения справедливы при $|\zeta| \rightarrow \infty$, $\operatorname{Im}(\zeta) \geq 0$. Итак, мы получаем при $|\zeta| \rightarrow \infty$:

$$F(\zeta) = \varphi_2(1, \zeta) = \frac{\sin(\vartheta\zeta)}{\psi^{1/4}(0)\psi^{1/4}(1)\zeta} (1 + O(\zeta^{-1})).$$

Положим $\Psi(\zeta) = \sin(\vartheta\zeta)/(\vartheta\zeta)$. Для больших k в круге $|\zeta| < \pi/\vartheta(k + 1/2)$ лежит ровно $2k$ нулей $\pm\pi/\vartheta, \pm 2\pi/\vartheta, \dots, \pm k\pi/\vartheta$ функции $\Psi(\zeta)$, и ровно $2k$ нулей $\pm x_j, j = 1, \dots, k$, функции $F(\zeta)$. Применяя теорему Йенсена к функциям $F(\zeta)$ и $\Psi(\zeta)$, получаем

$$C_{\text{dist}}^2 = \frac{\psi^{1/4}(0)\psi^{1/4}(1)|F(0)|}{\vartheta}.$$

Из непрерывной зависимости решения дифференциального уравнения от параметра (см., например, [32, гл. 1, § 7]) следует, что $F(0) = \lim_{\zeta \rightarrow 0} \varphi_2(1, \zeta) = \lim_{t \rightarrow 1} \varphi_2(t, 0)$. Ясно, что $\varphi_2(t, 0) = t$. Поэтому $F(0) = 1$. Лемма 1 доказана.

З а м е ч а н и е. Выбор $\psi \equiv 1$ и $\psi(t) = \exp(qt)$ в соотношении (4), приводит к известному результату о малых уклонениях броуновского моста и к формуле (3.16) из [9].

Далее вес ψ , удовлетворяющий условиям теоремы 2, будем называть *правильным*.

В следующей теореме мы находим асимптотику малых уклонений для «удлиненного» броуновского моста $W_{(u)}(t) \equiv W(t) - utW(1)$. Это центрированный гауссовский процесс с ковариацией $G_{W_{(u)}}(t, s) = s \wedge t - (2u - u^2)st$, так что при $u \in (0, 1]$ процесс $W_{(u)}$ совпадает по распределению с броуновским мостом из нуля в нуль длины $(2u - u^2)^{-1}$ на интервале $[0, 1]$. При $u = 1$ этот процесс совпадает со стандартным броуновским мостом. При $u = 0$ это стандартное броуновское движение. Ковариация $G_{W_{(u)}}$ является функцией Грина краевой задачи:

$$\begin{cases} -y'' = \mu\psi y & \text{на } [0, 1], \\ y(0) = (y' + \tau y)(1) = 0, \end{cases}$$

где $\tau = (1 - u)^{-2} - 1$. С помощью тех же рассуждений, что и выше, мы можем найти точную асимптотику малых уклонений для процесса $W_{(u)}(t)$ в весовой норме.

Теорема 3. *Рассмотрим процесс $W_{(u)}(t)$ при $u < 1$, и предположим, что ψ — правильный вес на $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\mathbf{P}\{\|W_{(u)}\|_{\psi} \leq \varepsilon\} \sim \frac{4\psi^{1/8}(0)}{(1-u)\sqrt{\pi}\vartheta\psi^{1/8}(1)} \varepsilon \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8} \varepsilon^{-2}\right). \quad (13)$$

З а м е ч а н и е. Для $u = 0$ и $\psi \equiv 1$ соотношение (13) является классическим. Для $\psi(t) = \exp(qt)$ из формулы (13) вытекает формула (3.15) из [9]. Из теорем 2 и 3 следуют теоремы 3.1–3.4 и теорема 4.1 в [10].

Две следующие теоремы описывают точную асимптотику малых уклонений для обычного стационарного процесса Орнштейна–Уленбека (для краткости ОУ), а также процесса ОУ, выходящего из нуля. Обозначим $U_{(\alpha)}(t)$ стационарный процесс ОУ, т.е. центрированный гауссовский процесс с ковариацией $G_{U_{(\alpha)}}(t, s) = e^{-\alpha|t-s|}/(2\alpha)$.

Теорема 4. Рассмотрим процесс $U_{(\alpha)}(t)$, $\alpha > 0$, и пусть ψ — правый вес на $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|U_{(\alpha)}\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim \frac{8\alpha^{1/2}e^{\alpha/2}}{\pi^{1/2}\vartheta^{3/2}\psi^{1/8}(0)\psi^{1/8}(1)} \varepsilon^2 \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8}\varepsilon^{-2}\right). \quad (14)$$

Доказательство. По лемме 1 имеем $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k — собственные числа задачи

$$\begin{cases} y'' + (\mu\psi - \alpha^2)y = 0 & \text{на } [0, 1], \\ (y' - \alpha y)(0) = (y' + \alpha y)(1) = 0. \end{cases}$$

Обозначим $\varphi_{1,2}(t, \zeta)$ решения уравнения $y'' + (\zeta^2\psi - \alpha^2)y = 0$, удовлетворяющие условиям (5)–(6). Подставляя общее решение $y(t) = c_1\varphi_1(t, \zeta) + c_2\varphi_2(t, \zeta)$ в краевые условия, находим $\mu_k = x_k^2$, где $x_1 < x_2 < \dots$ — положительные нули функции

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \det \begin{bmatrix} \varphi'_1(0, \zeta) - \alpha\varphi_1(0, \zeta) & \varphi'_2(0, \zeta) - \alpha\varphi_2(0, \zeta) \\ \varphi'_1(1, \zeta) + \alpha\varphi_1(1, \zeta) & \varphi'_2(1, \zeta) + \alpha\varphi_2(1, \zeta) \end{bmatrix} \\ &= -\alpha\varphi'_2(1, \zeta) - \alpha^2\varphi_2(1, \zeta) - \varphi'_1(1, \zeta) - \alpha\varphi_1(1, \zeta). \end{aligned}$$

Действуя, как при доказательстве теоремы 4.3 в [10], получаем

$$\mathbf{P}\{\|U_{(\alpha)}\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim C_{\text{dist}} \frac{4\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}\vartheta^2} \varepsilon^2 \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8}\varepsilon^{-2}\right),$$

где

$$C_{\text{dist}}^2 = \vartheta^2 x_1^2 \prod_{k=2}^{\infty} \frac{x_k^2}{(\pi(k-1)/\vartheta)^2}.$$

Остается показать, что

$$C_{\text{dist}}^2 = \frac{2\alpha\vartheta e^\alpha}{\psi^{1/4}(0)\psi^{1/4}(1)}.$$

В соответствии с [22, гл. 2, § 3], уравнение $y'' + (\zeta^2\psi - \alpha^2)y = 0$ имеет решения $\tilde{\varphi}_{1,2}(t, \zeta)$, удовлетворяющие соотношениям (7)–(8). Как и в доказательстве теоремы 2, можно показать, что соотношения (9)–(12) верны для $\varphi_{1,2}(1, \zeta)$ и $\varphi'_{1,2}(1, \zeta)$. Поэтому при $|\zeta| \rightarrow \infty$

$$F(\zeta) = \psi^{1/4}(0)\psi^{1/4}(1)\zeta \sin(\vartheta\zeta)(1 + O(\zeta^{-1})).$$

Обозначим $\Psi(\zeta) = ((\vartheta\zeta)^2 - 1)(\sin(\vartheta\zeta)/\zeta)$. Применяя теорему Йенсена к функциям $F(\zeta)$ and $\Psi(\zeta)$, получаем

$$C_{\text{dist}}^2 = \frac{\vartheta|F(0)|}{\psi^{1/4}(0)\psi^{1/4}(1)}.$$

По непрерывной зависимости решения от параметра, имеем

$$F(0) = \lim_{t \rightarrow 1} (-\alpha \varphi_2'(t, 0) - \alpha^2 \varphi_2(t, 0) - \varphi_1'(t, 0) - \alpha \varphi_1(t, 0)).$$

Прямыми вычислениями получаем $\varphi_1(t, 0) = \text{ch}(\alpha t)$, $\varphi_2(t, 0) = (1/\alpha) \text{sh}(\alpha t)$. Следовательно $|F(0)| = 2\alpha e^\alpha$. Теорема 4 доказана.

З а м е ч а н и е. Выбор $\psi(t) = \exp(qt)$ в (14) дает утверждение теоремы 4.3 из [10]; кроме того, теорема 4 обобщает известные результаты из [9, предл. 2.1], [38, следствие 3], и [21, с.140], полученные для единичного веса.

Процесс ОУ, выходящий из нуля, $\dot{U}_{(\alpha)}(t)$ — это центрированный гауссовский процесс с ковариацией $G_{\dot{U}_{(\alpha)}}(t, s) = (e^{-\alpha|t-s|} - e^{-\alpha(t+s)})/(2\alpha)$. Соответствующая граничная задача имеет вид:

$$\begin{cases} y'' + (\mu\psi - \alpha^2)y = 0 & \text{на } [0, 1], \\ y(0) = (y' + \alpha y)(1) = 0. \end{cases}$$

Используя те же аргументы, что и в доказательстве предыдущей теоремы, получаем точную асимптотику малых уклонений для процесса $\dot{U}_{(\alpha)}(t)$.

Теорема 5. Пусть ψ — правильный вес на $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|\dot{U}_{(\alpha)}\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim \frac{4e^{\alpha/2}\psi^{1/8}(0)}{\sqrt{\pi}\vartheta\psi^{1/8}(1)} \varepsilon \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8} \varepsilon^{-2}\right). \quad (15)$$

З а м е ч а н и е. Теорема 5 обобщает следствие 3 из [38], полученное для единичного веса. Она обобщает также теорему 4.2 из [10], отвечающую выбору $\psi(t) = \exp(qt)$ в (15).

В следующей теореме вычисляется точная асимптотика малых уклонений для процесса Боголюбова $Y(t)$, $t \in [0, 1]$. Это центрированный гауссовский процесс с ковариацией

$$\mathbf{E} Y(t)Y(s) = \frac{1}{2\omega \text{sh}(\omega/2)} \text{ch}\left(\omega|t-s| - \frac{\omega}{2}\right), \quad t, s \in [0, 1], \quad \omega > 0. \quad (16)$$

Из теории гауссовских процессов известно, что траектории процесса Боголюбова непрерывны почти наверное (п.н.) Из (16) мы получаем $\mathbf{E}(Y(1) - Y(0))^2 = 0$, так что $Y(0) = Y(1)$ п.н. Таким образом, почти все траектории процесса Боголюбова лежат в пространстве $C^0[0, 1]$ непрерывных функций $x(t)$ на $[0, 1]$, удовлетворяющих условию $x(0) = x(1)$. Различные свойства этого процесса рассматривались, например, в [13], [14] и [20].

Ковариация процесса Боголюбова является функцией Грина краевой задачи

$$\begin{cases} y'' + (\mu\psi - \omega^2)y = 0 & \text{на } [0, 1], \\ y(0) - y(1) = y'(0) - y'(1) = 0. \end{cases}$$

Здесь краевые условия не разделены, однако с помощью [54] можно доказать результат, аналогичный теореме 1, и в случае неразделенных краевых условий.

Пусев [12] нашел точную асимптотику малых уклонений для этого процесса при единичном и экспоненциальном весе, а также исследовал многократно проинтегрированный процесс. Мы сформулируем сейчас взвешенный вариант его результата, доказательство которого вполне аналогично предыдущим теоремам.

Теорема 6. *Рассмотрим процесс Боголюбова $Y(t)$, $t \in [0, 1]$, и пусть ψ — правильный вес на $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\mathbf{P}\{\|Y\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim \frac{8 \operatorname{sh}(\omega/2) \psi^{1/8}(0) \psi^{1/8}(1)}{\vartheta \pi^{1/2} (\psi^{1/2}(0) + \psi^{1/2}(1))^{1/2}} \varepsilon \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8} \varepsilon^{-2}\right). \quad (17)$$

З а м е ч а н и е. Подстановка $\psi \equiv 1$ и $\psi(t) = \exp(qt)$ в соотношение (17) приводит к утверждениям теоремы 1 и теоремы 2 из [12].

4. Малые уклонения бesselевских процессов. Переходим к изучению малых уклонений функционалов от некоторых негауссовских процессов, связанных с броуновским движением. Для негауссовских процессов использование случайных рядов типа Кархунена–Лозва проблематично. Задача упрощается, если процесс выражается через простые гауссовские процессы.

Начнем с бesselевского процесса $\operatorname{Bes}^\delta$ размерности $\delta > 0$, что соответствует индексу $\nu = \delta/2 - 1 \in (-1, \infty)$. Определение бesselевских процессов и основные факты из их теории содержатся, например, в [4] и [58]. Для целых размерностей n процесс Bes^n можно считать радиальной частью n -мерного броуновского движения с независимыми компонентами, в случае бesselевского моста Bes_0^n компонентами являются независимые броуновские мосты.

Асимптотика малых уклонений для многих функционалов от бesselевских процессов и мостов выводится из их точных распределений, собранных в [4]. Из формулы (4.1.9.4 (1)) в [4] следует, что для любой размерности $\delta \geq 2$ или любого индекса $\nu \geq 0$ при $r \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|\operatorname{Bes}^\delta\| \leq r\} \sim \frac{2^{\nu+3/2}}{(\nu+1)\sqrt{\pi}} r \exp\left(-\frac{(\nu+1)^2}{2r^2}\right) = \frac{2^{(\delta+3)/2}}{\delta\sqrt{\pi}} r \exp\left(-\frac{\delta^2}{8r^2}\right). \quad (18)$$

Малые уклонения бesselевских процессов и мостов в нормах L_p изучались в [19]. Формула (18) следует из результатов работы [19] при $p = 2$.

Точные распределения квадратичных норм для бesselевских мостов были найдены Кифером [44] в связи с задачами непараметрической ста-

тики. По формуле Кифера для любого натурального k и любого $a > 0$

$$\mathbf{P}\{\|\text{Bes}_0^k\|^2 \leq a\} = \frac{2^{(k+1)/2}}{\sqrt{\pi}a^{k/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j+k/2)}{j!\Gamma(k/2)} \exp\left(-\frac{(j+k/4)^2}{a}\right) \times D_{(k-2)/2}\left(\frac{2j+k/2}{\sqrt{a}}\right), \quad (19)$$

где D_p — функции параболического цилиндра.

Ясно, что при фиксированном индексе p главную роль в асимптотике при $a \rightarrow 0$ играет первый член. При этом в силу [2, § 8.4] мы знаем, что при $z \rightarrow \infty$

$$D_p(z) \sim z^p \exp(-z^2/4), \quad z \rightarrow \infty.$$

Поэтому при любом натуральном k и при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|\text{Bes}_0^k\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} k^{(k-2)/2} \varepsilon^{-(k-1)} \exp\left(-\frac{k^2}{8\varepsilon^2}\right). \quad (20)$$

В случае произвольной размерности $\delta > 1$, формулы (19) и (20) остаются верными. Достаточно скомбинировать формулы (4.1.0.6) и (4.1.9.8) из справочника [4].

Теперь мы затронем вопрос о малых уклонениях *супремума* бesselевских процессов и мостов. Обозначим $\mu(Z)$ супремум случайного процесса Z на $[0, 1]$. Распределение супремума бesselевского моста целой размерности было найдено независимо Гихманом [5] и Кифером [44]; позже Питмен и Йор [57] доказали его справедливость для любой положительной размерности $\delta > 0$ или индекса $\nu = (\delta - 2)/2$.

Пусть $0 < j_{\nu,1} < j_{\nu,2} < \dots$ — последовательность положительных нулей функции Бесселя J_ν . Из формулы Гихмана–Кифера–Питмена–Йора следует, что при $\nu > -1$ (то есть при $\delta > 0$) и при любом $r \geq 0$ верна формула

$$\mathbf{P}\{\mu(\text{Bes}_0^\delta) \leq r\} = (2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)r^\nu)^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,n}^{2\nu}}{J_{\nu+1}^2(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{2r^2}\right).$$

Очевидно, что главный вклад при $r \rightarrow 0$ вносит первый член. Поэтому точная асимптотика малых уклонений для супремума бesselевского моста при $\nu > -1$ принимает вид:

$$\mathbf{P}\{\mu(\text{Bes}_0^\delta) \leq r\} \sim (2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1)r^{2\nu+2})^{-1} \frac{j_{\nu,1}^{2\nu}}{J_{\nu+1}^2(j_{\nu,1})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,1}^2}{2r^2}\right). \quad (21)$$

Аналогичная формула для бesselевского процесса выглядит несколько иначе. Из справочника [4, формула 4.1.1.4] (см. также [57])

вытекает что при $\nu > -1$

$$\mathbf{P}\{\mu(\text{Bes}^\delta) \leq r\} = (2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1))^{-1} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,n}^{\nu-1}}{J_{\nu+1}(j_{\nu,n})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,n}^2}{2r^2}\right).$$

Эта формула для целых размерностей была впервые получена в знаменитой работе [31]. Снова основной вклад при $r \rightarrow 0$ принадлежит первому члену. Отсюда следует формула: при $r \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\mu(\text{Bes}^\delta) \leq r\} \sim (2^{\nu-1}\Gamma(\nu+1))^{-1} \frac{j_{\nu,1}^{\nu-1}}{J_{\nu+1}(j_{\nu,1})} \exp\left(-\frac{j_{\nu,1}^2}{2r^2}\right). \quad (22)$$

Частные случаи формул (21) и (22) для малых натуральных размерностей обсуждаются в обзоре Фаталова [18].

Хорошо известно, что степени бесселевских процессов принадлежат к тому же семейству процессов с точностью до подходящей замены времени [58, гл. XI]. Это приводит к ряду тождеств по распределению между интегралами от различных степеней бесселевских процессов, см. [58, гл. XI], [29], [30]. Возьмем в качестве примера типичное тождество [58, следствие 1.12, гл. XI], верное при целых размерностях $d > 1$:

$$4\left(\int_0^1 (\text{Bes}^d(s))^{-1} ds\right)^{-2} \stackrel{\text{law}}{=} \int_0^1 (\text{Bes}^{2d-2}(s))^2 ds = \|\text{Bes}^{2d-2}\|^2.$$

По этому тождеству, точная асимптотика малых уклонений (18), которая справедлива для правой части, справедлива и для левой части. Другой пример дает тождество из [30, табл. 2]:

$$\|\text{Bes}_0^4\|^2 = \int_0^1 (\text{Bes}_0^4(s))^2 ds \stackrel{\text{law}}{=} \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 (\text{Bes}_0^3(s))^{-1} ds\right)^2. \quad (23)$$

Пользуясь (20), мы получаем новое асимптотическое соотношение: при $r \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 (\text{Bes}_0^3(s))^{-1} ds \leq r\right\} \sim \frac{8\pi^2\sqrt{2\pi}}{r^3} \exp\left(-\frac{2\pi^2}{r^2}\right). \quad (24)$$

Применяя лемму 3 к квадратам взвешенных норм броуновских движений и используя теорему 3, мы получаем точную асимптотику малых уклонений для взвешенной нормы бесселевского процесса целой размерности.

Предложение 1. Пусть ψ — правильный вес на $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|\text{Bes}^k\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim \frac{2^{(k+3)/2}\psi^{k/8}(0)}{\sqrt{\pi}k\vartheta\psi^{k/8}(1)} \varepsilon \exp\left(-\frac{k^2\vartheta^2}{8}\varepsilon^{-2}\right).$$

Аналогично устанавливается формула для бесселевского моста целой размерности.

Предложение 2. Пусть ψ — правильный вес на $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|\text{Bes}_0^k\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} (k\vartheta)^{(k-2)/2} \psi^{k/8}(0) \psi^{k/8}(1) \varepsilon^{-(k-1)} \exp\left(-\frac{k^2 \vartheta^2}{8} \varepsilon^{-2}\right).$$

Для дальнейшего использования опишем асимптотику малых уклонений для суммы норм $\|\text{Bes}^k\|^2 + \|\text{Bes}_0^m\|^2$ в случае целых $k, m \geq 1$.

Лемма 4. Пусть Bes^k — бесселевский процесс целой размерности $k \geq 1$, а Bes_0^m — независимый от него бесселевский мост целой размерности $m \geq 1$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|\text{Bes}^k\|^2 + \|\text{Bes}_0^m\|^2 \leq \varepsilon^2\} \sim \frac{2^{(k+3)/2} m^{m-1}}{\sqrt{\pi} (k+m)^{m/2}} \varepsilon^{m-1} \exp\left(-\frac{(m+k)^2}{8\varepsilon^2}\right).$$

Доказательство. Доказательство заключается в «склеивании» двух асимптотик (18) и (20) с помощью леммы 2.

Другой пример использования леммы 3 таков. Рассмотрим несуммируемый вес $\omega(t) = [t(1-t)]^{-1}$, $0 \leq t \leq 1$, называемый весом Андерсона–Дарлингга [26]. Квадрат нормы броуновского моста с весом Андерсона–Дарлингга в обозначениях [51]

$$A^{1,1} := \int_0^1 B^2(t) \omega(t) dt$$

играет важную роль в теории непараметрических критериев согласия. В работе [9] было доказано, что при $r \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{A^{1,1} \leq r\} \sim \frac{2}{\sqrt{r}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{8r}\right). \quad (25)$$

Рассмотрим, следуя статье [51], для натуральных n функционал

$$A^{n,1} := \int_0^1 \frac{(\text{Bes}_0^n(t))^2}{t(1-t)} dt.$$

Ясно, что $A^{n,1}$ — сумма n независимых копий величины $A^{1,1}$. Поэтому по лемме 3 и (25) мы получаем при $r \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{A^{n,1} \leq r\} \sim 2^{(3-n)/2} (n\pi\sqrt{\pi})^{n-1} r^{-n+1/2} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2}{8r}\right). \quad (26)$$

Обозначим теперь $T_1(3)$ и $T_1(4)$ моменты первого достижения уровня 1 бесселевскими процессами Bes^3 и Bes^4 . Следующие два тождества по распределению доказаны в [51, с. 174]:

$$A^{2,1} \stackrel{\text{law}}{=} \int_0^{T_1(3)} \frac{ds}{\text{Bes}^3(s)(1-\text{Bes}^3(s))} \stackrel{\text{law}}{=} 4 \int_0^{T_1(4)} \frac{du}{1-(\text{Bes}^4(u))^2}.$$

Использование соотношения (26) при $n = 2$ дает нам две новых точных асимптотики малых уклонений для бесселевских процессов при $r \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\int_0^{T_1(3)} \left(\text{Bes}^3(s)(1 - \text{Bes}^3(s))\right)^{-1} ds \leq r\right\} &\sim 2\pi\sqrt{2\pi}r^{-3/2}e^{-\pi^2/2r}, \\ \mathbf{P}\left\{\int_0^{T_1(4)} \left(1 - (\text{Bes}^4(u))^2\right)^{-1} du \leq r\right\} &\sim \frac{1}{4}\pi\sqrt{2\pi}r^{-3/2}e^{-\pi^2/8r}. \end{aligned}$$

В заключение рассмотрим замечательный результат Алили [24], [30, формула 4.33], устанавливающий следующее тождество по распределению при любом $\sigma \neq 0$:

$$\frac{\sigma^2}{\pi^2} \left[\left(\int_0^1 \text{cth}(\sigma \text{Bes}_0^3(u)) du \right)^2 - 1 \right] \stackrel{\text{law}}{=} \|\text{Bes}_0^4\|^2. \quad (27)$$

В силу (23) это может быть записано в форме

$$\sigma^2 \left[\left(\int_0^1 \text{cth}(\sigma \text{Bes}_0^3(u)) du \right)^2 - 1 \right] \stackrel{\text{law}}{=} \left(\int_0^1 (\text{Bes}_0^3(s))^{-1} ds \right)^2.$$

Используя (20), мы можем получить точную асимптотику малых уклонений для функционала в левой части (27) при любом σ . Как показано в [25] (см. также [30, формула 4.34]) при $\sigma \rightarrow \infty$ справедливо следующее тождество по распределению:

$$\int_0^\infty \left(\exp(\text{Bes}^3(t)) - 1 \right)^{-1} dt \stackrel{\text{law}}{=} \frac{\pi^2}{4} \|\text{Bes}_0^2\|^2.$$

Этот результат влечет за собой еще одну точную асимптотику малых уклонений, на этот раз для экспоненциального функционала от бесселевского процесса.

Предложение 3. При $r \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^\infty \left(\exp(\text{Bes}^3(t)) - 1 \right)^{-1} dt \leq r\right\} \sim \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \exp\left(-\frac{\pi^2}{8r}\right).$$

5. Малые уклонения для броуновской экскурсии. Обозначим $\epsilon(t)$, $0 \leq t \leq 1$, броуновскую экскурсию. Строгое определение этого процесса можно найти в [4], [59] или [58]. На неформальном уровне можно представлять себе его как броуновский мост из нуля в нуль, принимающий положительные значения внутри $[0, 1]$, или как броуновское движение, выходящее из нуля, положительное внутри $[0, 1]$ и впервые обращающееся в нуль в момент времени 1.

Для наших целей ключевую роль играет связь между броуновской экскурсией и бесселевскими мостами. Эта связь известна давно и была

описана сначала Леви [45], затем Ито и Маккином [41, § 2.9] и Уильямсом [61]. Позже броуновская экскурсия и связанные с нею процессы изучались в множестве работ, см., например, [58] и [52]. Однако, насколько нам известно, точная асимптотика малых уклонений этих процессов в L_2 -норме была неизвестна.

Теорема 7. Пусть ψ — правильный вес на $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|\mathbf{e}\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{6}\vartheta\psi^{3/8}(0)\psi^{3/8}(1)}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{-2} \exp\left(-\frac{9\vartheta^2}{8}\varepsilon^{-2}\right).$$

Доказательство. Хорошо известно (см. [61], [59] следующее тождество по распределению, иногда называемое тождеством Леви–Уильямса [30, с. 454]:

$$\{\mathbf{e}^2(t), 0 \leq t \leq 1\} \stackrel{\text{law}}{=} \{B_1^2(t) + B_2^2(t) + B_3^2(t), 0 \leq t \leq 1\}, \quad (28)$$

где $B_1(t)$, $B_2(t)$, $B_3(t)$, $0 \leq t \leq 1$, — три независимых броуновских моста. Умножая обе части (28) на вес ψ и интегрируя, получаем

$$\|\mathbf{e}\|_\psi^2 \stackrel{\text{law}}{=} \|B_1\|_\psi^2 + \|B_2\|_\psi^2 + \|B_3\|_\psi^2 \stackrel{\text{law}}{=} \|\text{Bes}_0^3\|_\psi^2.$$

Применение предложения 2 при $k = 3$ завершает доказательство.

При выборе в теореме 7 единичного веса получаем точную асимптотику малых уклонений для собственно броуновской экскурсии:

$$\mathbf{P}\{\|\mathbf{e}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{-2} \exp\left(-\frac{9}{8}\varepsilon^{-2}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (29)$$

В качестве еще одного примера рассмотрим гладкий вес $\chi(t) = (1+t)^{-4}$. Применяя теорему 2, легко получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|B\|_\chi \leq \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{1}{32}\varepsilon^{-2}\right)$$

(этот результат также вытекает из теоремы 4 работы [10] при $a = 1$).

Между прочим, это соотношение исправляет ошибочную формулу (13) статьи [40]. Рассматривая броуновскую экскурсию с весом $\chi(t)$, получаем из теоремы 7, что

$$\mathbf{P}\{\|\mathbf{e}\|_\chi \leq \varepsilon\} \sim \sqrt{\frac{3}{2\pi}} \varepsilon^{-2} \exp\left(-\frac{9}{32}\varepsilon^{-2}\right).$$

Как и при доказательстве теоремы 7, используя теоремы 3.1 и 3.3 из [9], а также пример с) из [11], мы можем установить точные асимптотики малых уклонений для броуновской экскурсии с различными «вырождающимися» весами.

Предложение 4. Следующие соотношения справедливы при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\int_0^1 \frac{\mathfrak{e}^2(t)}{t(1-t)} dt \leq \varepsilon^2\right\} &\sim \frac{9\pi^3}{\varepsilon^5} \exp\left(-\frac{9\pi^2}{8\varepsilon^2}\right), \\ \mathbf{P}\left\{\int_0^1 \frac{\mathfrak{e}^2(t)}{t(2-t)} dt \leq \varepsilon^2\right\} &\sim \frac{3^{7/8}\pi^{3/2}}{2^{5/4}} \varepsilon^{-11/4} \exp\left(-\frac{9\pi^2}{32\varepsilon^2}\right). \end{aligned}$$

Пусть $\rho > -2$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\int_0^1 t^\rho \mathfrak{e}^2(t) dt \leq \varepsilon^2\right\} &\sim \frac{4\pi^{1/4}}{3^{(\rho-4)/(4(\rho+2))} \Gamma^{3/2}((\rho+3)/(\rho+2))} \\ &\times ((\rho+2)\varepsilon)^{-(\rho+8)/(2(\rho+2))} \exp\left(-\frac{9}{2}((\rho+2)\varepsilon)^{-2}\right). \end{aligned}$$

Известно следующее тождество по распределению для функционала типа Ватсона от броуновской экскурсии (см. [30, формула (4.20)]):

$$\text{Wat}(\mathfrak{e}) := \int_0^1 \left(\mathfrak{e}(t) - \int_0^1 \mathfrak{e}(x) dx\right)^2 dt \stackrel{\text{law}}{=} \frac{1}{4} \|\text{Bes}_0^2\|^2.$$

Применяя формулу (20) при $k = 2$, получаем новую точную асимптотику при $r \rightarrow 0$:

$$\mathbf{P}\{\text{Wat}(\mathfrak{e}) \leq r\} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \exp\left(-\frac{1}{8r}\right).$$

6. О малых отклонениях броуновского локального времени.

Пусть $L_t^x(B)$ непрерывное по совокупности переменных локальное время броуновского моста B в точке $x \in \mathbf{R}$ до времени $t \in [0, 1]$. В силу следствия 2.2 работы [33], для натуральных m справедливо тождество по распределению

$$\int_{-\infty}^{\infty} (L_1^x(B))^m dx \stackrel{\text{law}}{=} 2^{m-1} \int_0^1 (\mathfrak{e}(t))^{m-1} dt. \quad (30)$$

Сначала рассмотрим случай $m = 3$. Точная асимптотика малых отклонений функционала $\|\mathfrak{e}\|^2$ в правой части (30) известна из теоремы 7. Отсюда следует подобная асимптотика для интегрального функционала $\int_{-\infty}^{\infty} (L_1^x(B))^3 dx$.

Предложение 5. При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо соотношение:

$$\mathbf{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (L_1^x(B))^3 dx \leq \varepsilon\right\} \sim \frac{8\sqrt{6}}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{-1} \exp\left(-\frac{9}{2}\varepsilon^{-1}\right).$$

Это предложение уточняет результат из [33], где была найдена лишь логарифмическая асимптотика.

Переходим к случаю $m = 2$. Справедливо тождество по распределению

$$\int_{-\infty}^{\infty} (L_1^x(B))^2 dx \stackrel{\text{law}}{=} 2 \int_0^1 \mathfrak{e}(t) dt.$$

Интеграл в правой части интерпретируется как площадь под броуновской экскурсией. Он интенсивно изучался (см. [42]). Его распределение можно описать так.

Пусть $Ai(x)$ — стандартная функция Эйри [15, гл. 10]. Все нули функции Эйри отрицательны. Обозначим их $-a_j$, $j \geq 1$, и пусть a_1 — абсолютная величина первого нуля, $a_1 \approx 2.3381$. При $r \rightarrow 0+$ справедливо асимптотическое разложение [42, § 15]:

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 \mathfrak{e}(t) dt \leq r\right\} \sim \exp\left(-\frac{2a_1^3}{27r^2}\right) \left(\frac{2}{3} a_1^{3/2} r^{-2} + \frac{1}{4} a_1^{-3/2} - \frac{105}{64} a_1^{-9/2} r^2 + \dots\right),$$

причем главный вклад вносит первый член. Отсюда следует точная асимптотика малых уклонений для функционала $\int_{-\infty}^{\infty} (L_1^x(B))^2 dx$.

Предложение 6. При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\left\{\int_{-\infty}^{\infty} (L_1^x(B))^2 dx \leq \varepsilon\right\} \sim \frac{8}{3} a_1^{3/2} \varepsilon^{-2} \exp\left(-\frac{8a_1^3}{27\varepsilon^2}\right).$$

Менее точный вариант этого результата на логарифмическом уровне был получен в [33, теорема 3.1]. Точная асимптотика, по видимому, выписана нами впервые.

Результаты о малых уклонениях броуновского локального времени вообще редки. Мы пополним их следствием из первой теоремы Рэя–Найта (см. [58, гл. XI], [52, гл. 3]). Пусть $T_1 = \inf\{t: W(t) = 1\}$ — первый момент достижения броуновским движением уровня 1. Для $x \in [0, 1]$ рассмотрим процесс локального времени по x вплоть до момента T_1 :

$$Z(x) = L_{T_1}^x(W), \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Первая теорема Рэя–Найта утверждает, что на интервале $[0, 1]$ этот процесс совпадает по распределению с квадратом процесса Bes^2 . Поэтому мы получаем при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 L_{T_1}^x(W) dx \leq \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \varepsilon \exp\left(-\frac{1}{2\varepsilon^2}\right).$$

Обобщение этого результата с помощью предложения 1 для взвешенной квадратичной нормы выглядит так.

Предложение 7. Пусть ψ — правильный вес на $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 L_{T_1}^x(W) \psi(x) dx \leq \varepsilon^2\right\} \sim \frac{2\sqrt{2}\psi^{1/4}(0)}{\sqrt{\pi}\vartheta\psi^{1/4}(1)} \varepsilon \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{2}\varepsilon^{-2}\right).$$

Используя связь между процессом $L_{T_1}^x(W)$ и Bes^2 , можно найти точную асимптотику малых уклонений для L_p -нормы процесса $L_{T_1}^x(W)$. Для любого $p > 0$ имеем

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 (L_{T_1}^x(W))^p dx \leq \varepsilon^p\right\} = \mathbf{P}\left\{\int_0^1 (\text{Bes}^2(t))^{2p} dt \leq \varepsilon^p\right\},$$

где асимптотика правой части, пусть в неявной форме, может быть получена из [19].

Со случайным процессом $X(t)$, выходящим из нуля, можно связать так называемый супремум-процесс $S(t) = \sup_{0 \leq s \leq t} X(s)$. Для броуновского движения W классический результат Леви [45] утверждает, что процесс $S(t) - W(t)$, $t \geq 0$, совпадает по распределению с одномерным бesselевским процессом. Применяя теорему 3, получаем следующее предложение.

Предложение 8. Пусть ψ — правильный вес на $[0, 1]$. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|S - W\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim \frac{4\psi^{1/8}(0)}{\sqrt{\pi}\vartheta\psi^{1/8}(1)} \varepsilon \exp\left(-\frac{\vartheta^2}{8} \varepsilon^{-2}\right).$$

Другой замечательный результат принадлежит Питмену ([55], [58, гл. 6]), который доказал совпадение по распределению процесса $2S - W$ и процесса Bes^3 . Тожество Питмена влечет за собой равенство

$$\mathbf{P}\{\|2S - W\|_\psi \leq \varepsilon\} = \mathbf{P}\{\|\text{Bes}^3\|_\psi \leq \varepsilon\}.$$

Отсюда с помощью леммы 3 можно получить точную асимптотику малых уклонений для процесса Питмена $2S - W$ во взвешенной норме.

Еще один интересный факт из [58, гл. 6, следствие 3.8] состоит в равенстве по распределению процессов $\{|W|(t) + L_t^0(W), t \geq 0\}$ и $\{\text{Bes}^3(t), t \geq 0\}$. Отсюда вытекает точная асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ для вероятности $\mathbf{P}\{\| |W|(t) + L_t^0(W)\|_\psi \leq \varepsilon\}$.

Распределение супремума по x броуновского локального времени $L_t^x(W)$ хорошо изучено, его можно найти в [4, формула 1.11.4]. Поэтому при $\varepsilon \rightarrow 0$ мы получаем

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{x \in \mathbf{R}} L_t^x(W) \leq \varepsilon\right\} \sim \frac{4}{\sin^2(j_{0,1})} e^{-2j_{0,1}^2 t / \varepsilon^2}.$$

Интересно также посмотреть на распределение супремума броуновского локального времени вплоть до момента достижения уровня. Пусть $\tau_b = \inf\{s: W(s) = b\}$ — первый момент достижения уровня $b \in \mathbf{R}$. Тогда из [3, гл. I, формула (4.13)], см. также [4, формула (2.11.2)], вытекает следующая точная асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$:

$$\mathbf{P}\left\{\sup_{-\infty < x < b} L_{\tau_b}^x(W) \leq \varepsilon\right\} \sim \frac{8}{j_{0,1}^3 J_1(j_{0,1})} e^{-bj_{0,1}^2 / \varepsilon^2}.$$

7. О малых уклонениях броуновского меандра. В этом разделе мы рассмотрим броуновский меандр (или извилину) \mathfrak{m} . Строгое определение броуновского меандра длины 1 имеется в [58, гл. XII] и [4, с. 83]. Этот процесс можно на неформальном уровне представлять себе как броуновское движение, подчиненное условию положительности вплоть до момента 1, однако не требуется, чтобы броуновский меандр обращался в нуль в точке 1. Обозначим $\mathfrak{m}^z(t)$ броуновский меандр, принимающий значение $z \geq 0$ в момент времени 1.

Следующий факт доказан в [28]:

$$(\mathfrak{m}^z(t))^2 \stackrel{\text{law}}{=} B_1^2(t) + B_2^2(t) + (B_3(t) + zt)^2, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

где B_1 , B_2 и B_3 — это три независимых броуновских моста. При $z = 0$ мы получаем в качестве частного случая тождество Леви–Уильямса, рассмотренное выше.

Сначала мы найдем точную асимптотику малых уклонений процесса $(B(t) + zt)^2$. Для этого можно использовать работу [8], в которой доказано, что при $r \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 (B(t) + zt)^2 dt \leq r\right\} \sim \sqrt{\frac{8}{\pi(1+z^2)}} \exp\left(-\frac{(z^2+1)^2}{8r} + \frac{z^2}{2}\right). \quad (31)$$

По формуле (20) мы имеем при $r \rightarrow 0$:

$$\mathbf{P}\{\|B_1\|^2 + \|B_2\|^2 \leq r\} \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi r}} \exp\left(-\frac{1}{2r}\right).$$

Комбинируя этот результат с (31), с помощью леммы 2 получаем, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}\left\{\int_0^1 (B_1^2(t) + B_2^2(t) + (B_3(t) + zt)^2) dt \leq \varepsilon^2\right\} \\ & \sim \frac{2\sqrt{2(z^2+3)}}{\sqrt{\pi}} e^{z^2/2} \varepsilon^{-2} \exp\left(-\frac{(z^2+3)^2}{8} \varepsilon^{-2}\right). \end{aligned}$$

Итак, мы получили следующую точную асимптотику малых уклонений для броуновского меандра с предписанным концом z .

Предложение 9. Для любого $z \geq 0$, при $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо соотношение

$$\mathbf{P}\{\|\mathfrak{m}^z\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{2(z^2+3)}}{\sqrt{\pi}} \varepsilon^{-2} \exp\left(-\frac{(z^2+3)^2}{8} \varepsilon^{-2} + \frac{z^2}{2}\right).$$

При $z = 0$ этот результат находится в прекрасном соответствии с формулой (29) для броуновской экскурсии.

Переходим к малым уклонениям обычного броуновского меандра \mathbf{m} . Для этого используем тождество по распределению из [52, следствие 3.9.1] или [56, § 5]:

$$\{\mathbf{m}^2(t), 0 \leq t \leq 1\} \stackrel{\text{law}}{=} \{B^2(t) + W_1^2(t) + W_2^2(t), 0 \leq t \leq 1\}, \quad (32)$$

где броуновский мост B и два броуновских движения W_1 и W_2 независимы. Процесс в правой части (32) — это «интерполяция» между квадратами бесселевского процесса и бесселевского моста [56, § 5]. С помощью (32) легко выводится точная асимптотика малых уклонений для меандра. Используя лемму 4 в частном случае $k = 2$ и $m = 1$, получаем следующий результат.

Предложение 10. *При $\varepsilon \rightarrow 0$ справедливо соотношение*

$$\mathbf{P}\{\|\mathbf{m}\| \leq \varepsilon\} \sim 4\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \exp\left(-\frac{9}{8}\varepsilon^{-2}\right).$$

Аналогичным образом можно получить точную асимптотику малых уклонений для броуновского меандра с различными весами.

Теорема 8. *Пусть $\rho > -2$ — фиксированное число. При $\varepsilon \rightarrow 0$*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}\left\{\int_0^1 t^\rho \mathbf{m}^2(t) dt \leq \varepsilon^2\right\} &\sim \frac{2^{2+\rho/(2(\rho+2))} \pi^{1/2}}{3^{1/2+3\rho/(4(\rho+2))} \Gamma(1/(\rho+2)) \Gamma^{1/2}((\rho+3)/(\rho+2))} \\ &\times ((\rho+2)\varepsilon)^{3\rho/(2(\rho+2))} \exp\left(-\frac{9}{4}((\rho+2)\varepsilon)^{-2}\right). \end{aligned}$$

Для правильного веса ψ на $[0, 1]$

$$\mathbf{P}\{\|\mathbf{m}\|_\psi \leq \varepsilon\} \sim 4\sqrt{\frac{2}{3\pi}} \frac{\psi^{3/8}(0)}{\vartheta^{1/2}\psi^{1/8}(1)} \exp\left(-\frac{9\vartheta^2}{8}\varepsilon^{-2}\right),$$

где $\vartheta = \int_0^1 \sqrt{\psi(t)} dt$.

Имеется интересное тождество по распределению, связывающее броуновский меандр $\mathbf{m}(s)$ с броуновским мостом $B(s)$ и его локальным временем в нуле $L_s^0(B)$. Оно выглядит так [52, § 8.3]:

$$\{\mathbf{m}(s), s \leq 1\} \stackrel{\text{law}}{=} \{|B(s)| + L_s^0(B), s \leq 1\}.$$

Комбинируя теорему 8 с этим тождеством, нетрудно получить точную асимптотику малых уклонений для нормы $\| |B(s)| + L_s^0(B) \|_\psi$.

Обратимся к точной асимптотике малых уклонений для супремума броуновской экскурсии $\mu(\epsilon) = \sup_{0 \leq u \leq 1} \epsilon(u)$. Обозначим \mathcal{T}_4 квадрат нормы четырехмерного бесселевского моста, т.е.

$$\mathcal{T}_4 = \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^4 B_i^2(t) \right) dt,$$

где B_i , $i = 1, \dots, 4$, — независимые броуновские мосты. По лемме 3

$$\mathbf{P}\{\mathcal{T}_4 \leq r\} \sim \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}r^3} \exp\left(-\frac{2}{r}\right).$$

Известно, кроме того [52, § 11.3], что $\mu^2(\epsilon) \stackrel{\text{law}}{=} (\pi^2/4)\mathcal{T}_4$. Комбинируя эти соотношения, получаем простое, но новое соотношение.

Предложение 11. При $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\mu(\epsilon) \leq \varepsilon\} \sim \frac{\pi^2\sqrt{2\pi}}{\varepsilon^3} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2\varepsilon^2}\right).$$

Другим путем эта асимптотика может быть получена с помощью леммы 2 из знаменитого тождества Чжуна, см. [52, § 11.3]:

$$\mu^2(\epsilon) \stackrel{\text{law}}{=} \mu^2(|B_1|) + \mu^2(|B_2|),$$

где независимые с.в. $\mu(|B_1|)$ и $\mu(|B_2|)$ имеют распределение Колмогорова. Это значит, что при всех $r > 0$

$$\mathbf{P}\{\mu(|B|) \leq r\} = \frac{\sqrt{2\pi}}{r} \sum_{k=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2k-1)^2\pi^2}{8r^2}\right).$$

Поэтому, при $r \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\mu(|B|) \leq r\} \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{r} \exp\left(-\frac{\pi^2}{8r^2}\right), \quad (33)$$

и нам остается применить лемму 2.

Предложение 11 влечет за собой интересное соотношение, связанное с интегральным функционалом $h(\epsilon) = \int_0^1 ds/\epsilon(s)$.

Предложение 12.

$$\mathbf{P}\{h(\epsilon) \leq \varepsilon\} \sim \frac{8\pi^2\sqrt{2\pi}}{\varepsilon^3} \exp\left(-\frac{2\pi^2}{\varepsilon^2}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Доказательство следует из тождества по распределению [52, § 11.5]:

$$h(\epsilon) \stackrel{\text{law}}{=} 2\mu(\epsilon). \quad (34)$$

Еще одна асимптотика может быть выведена из (33). Пользуясь тождеством по распределению [56, с. 250]:

$$\int_0^1 (\text{Bes}_0^2(s))^{-1} ds \stackrel{\text{law}}{=} 2\mu(|B|), \quad (35)$$

мы получаем формулу, напоминающую (24): при $r \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\left\{\int_0^1 (\text{Bes}_0^2(s))^{-1} ds \leq r\right\} \sim \frac{2\sqrt{2\pi}}{r} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2r^2}\right).$$

Интересно сравнить асимптотику малых уклонений для супремумов броуновской экскурсии и броуновского меандра. Известно тождество (см. [43], [30, с. 449])

$$\mu(\mathbf{m}) \stackrel{\text{law}}{=} 2\mu(|B|),$$

где правая часть совпадает с правой частью (35). Тогда, применив (33), получаем следующее соотношение

Предложение 13.

$$\mathbf{P}\{\mu(\mathbf{m}) \leq \varepsilon\} \sim \frac{2\sqrt{2\pi}}{\varepsilon} \exp\left(-\frac{\pi^2}{2\varepsilon^2}\right), \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Сравнение предложений 11 и 13 показывает совпадение экспонент и различие в степенных членах и константах, как и можно было ожидать.

Интересно, что для броуновского меандра тождество (34) принимает похожий, но иной вид [29]: $h(\mathbf{m}) \stackrel{\text{law}}{=} \mu(\mathbf{m})$. Это позволяет, опираясь на предложение 13, вывести точную асимптотику малых уклонений для функционала $h(\mathbf{m}) = \int_0^1 ds/\mathbf{m}(s)$.

Авторы признательны профессорам А. Н. Бородину, М. А. Лифшицу и А. И. Назарову за ценные советы и предложения по улучшению работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Аурзада Ф., Ибрагимов И. А., Лифшиц М. А., ван Зантен Х. Малые уклонения гладких стационарных гауссовских процессов. — Теория вероятн. и ее примен., 2008, т. 53, в. 4, с. 788–798.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции, т. 2. М.: Наука, 1974, 296 с.
3. Бородин А. Н. Броуновское локальное время. — Успехи матем. наук, 1989, т. 44, в. 2, с. 7–48.
4. Бородин А. Н., Салминен П. Справочник по броуновскому движению. Факты и формулы. СПб: Лань, 2000, 640 с.
5. Гизман И. И. О непараметрическом критерии однородности k выборок. — Теория вероятн. и ее примен., 1957, т. 2, в. 2, с. 380–384.
6. Ибрагимов И. А. О вероятности попадания гауссова вектора со значениями в гильбертовом пространстве в сферу малого радиуса. — Зап. научн. сем. ЛОМИ, 1979, т. 85, с. 75–93.
7. Лифшиц М. А. Гауссовские случайные функции. Киев: ТВiМС, 1995, 246 с.
8. Михайлова Е. М. Асимптотические распределения для броуновского движения со сносом. — Успехи матем. наук, 1994, т. 49, в. 4, с. 173–174.
9. Назаров А. И. О точной константе в асимптотике малых уклонений в L_2 -норме некоторых гауссовских процессов. — Нелинейные уравнения и математический анализ. Новосибирск: Т. Рожковская, 2003, с. 179–214. (Проблемы матем. анализа, в. 26).

10. Назаров А. И., Пусев Р. С. Точная асимптотика малых уклонений в L_2 -норме с весом для некоторых гауссовских процессов. — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2009, т. 364, с. 166–199.
11. Никитин Я. Ю., Харинский П. А. Точная асимптотика малых уклонений в L_2 -норме для одного класса гауссовских процессов. — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2004, т. 311, с. 214–221.
12. Пусев Р. С. Асимптотика малых уклонений процессов Боголюбова в квадратичной норме. — Теор. и мат. физика, 2010, т. 165, № 1, с. 134–144.
13. Санкович Д. П. Гауссовы функциональные интегралы и гиббсовские равновесные средние. — Теор. и мат. физика, 1999, т. 119, № 2, с. 345–352.
14. Санкович Д. П. Функциональный интеграл Боголюбова. — Нелинейная динамика, сб. статей, Тр. МИАН, т. 251. М.: Наука, 2005, с. 223–256.
15. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. М. Абрамовица и И. Стиган. М.: Наука, 1979.
16. Сытая Г. Н. О некоторых асимптотических представлениях гауссовской меры в гильбертовом пространстве. — Теория случайных процессов, 1974, т. 2, с. 93–104.
17. Титчмарш Е. Теория функций. М.: Наука, 1980, 463 с.
18. Фаталов В. Р. Константы в асимптотиках вероятностей малых уклонений для гауссовских процессов и полей. — Успехи матем. наук, 2003, т. 58, № 4, с. 89–134.
19. Фаталов В. Р. Времена пребывания и точные асимптотики малых уклонений бесселевских процессов для L^p -норм, $p > 0$. — Изв. РАН. Сер. матем., 2007, т. 71, № 4, с. 69–102.
20. Фаталов В. Р. Некоторые асимптотические формулы для гауссовской меры Боголюбова. — Теор. и мат. физика, 2008, т. 157, № 2, с. 286–308.
21. Фаталов В. Р. Точные асимптотики малых уклонений для стационарного процесса Орнштейна-Уленбека и некоторых гауссовских диффузий в L^p -норме, $2 \leq p \leq \infty$. — Пробл. передачи информ., 2008, т. 44, в. 2, с. 75–95.
22. Федорюк М. В. Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1983, 352 с.
23. Adler R. J. An introduction to continuity, extrema and related topics for general Gaussian processes. — Inst. of Math. Stat. Lect. Notes, Monograph Ser., 12. Inst. of Math. Stat., Hayward, CA, 1990, 160 p.
24. Alili L. On some hyperbolic principal values of Brownian local times. — Exponential Functionals and Principal Values Related to Brownian Motion (M. Yor, ed.) Biblioteca de la Revista Matematica Ibero-Americana, Madrid, 1997, p. 131–154.
25. Alili L., Donati-Martin C., Yor M. Une identité en loi remarquable pour l'excursion brownienne normalisée. — Exponential Functionals and Principal Values Related to Brownian Motion (M. Yor, ed.). Biblioteca de la Revista Matematica Ibero-Americana, Madrid, 1997, p. 155–180.
26. Anderson T. W., Darling D. A. Asymptotic theory of certain «goodness-of-fit» criteria based on stochastic processes. — Ann. Mathem. Statist., 1952, v. 23, p. 193–212.
27. Beghin L., Nikitin Ya., Orsingher E. Exact small ball constants for some Gaussian processes under L_2 -norm. — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2003, т. 298, с. 5–21.
28. Bertoin J., Pitman J., Ruiz de Chavez J. Constructions of a Brownian path with a given minimum. — Electr. Commun. in Probab., 1999, v. 4, p. 31–37.
29. Biane Ph., Yor M. Valeurs principales associées aux temps locaux browniens. — Bull. Sci. Math., 2e série, 1987, v. 111, p. 23–101.
30. Biane Ph., Pitman J., Yor M. Probability laws related to the Jacobi theta and Riemann zeta functions, and Brownian excursions. — Bull. Amer. Math. Soc., 2001, v. 38, № 4, p. 435–465.
31. Ciesielski Z., Taylor S. J. First passage times and sojourn times for Brownian motion in space and the exact Hausdorff measure of the sample path. — Trans. Amer. Math. Soc., 1962, v. 103, p. 434–450.
32. Coddington E. A., Levinson N. Theory of Ordinary Differential Equations. New York: McGraw-Hill, 1955, 429 p.
33. Csörgő M., Shi Z., Yor M. Some asymptotic properties of the local time of the uniform empirical process. — Bernoulli, 1999, v. 5, p. 1035–1058.
34. Dudley R. M., Hoffmann-Jørgensen J., Shepp L. A. On the lower tail of Gaussian

- seminorms. — *Ann. Probab.*, 1979, v. 7, p. 319–342.
35. *Dunker T., Lifshits M. A., Linde W.* Small deviations of sums of independent variables. In: *High Dimensional Probability. Progress in Probability*, vol. 43, Birkhaeuser, Basel, 1998, pp. 5974.
 36. *Ferraty F., Vieu Ph.* Nonparametric Functional Data Analysis. Berlin: Springer, 2006, 258 p.
 37. *Fröman N., Fröman P. O.* JWKB Approximation. Amsterdam: North-Holland, 1965.
 38. *Gao F., Hannig J., Lee T.-Y., Torcaso F.* Laplace transforms via Hadamard factorization. — *Electron. J. Probab.*, 2003, v. 8, № 13, p. 1–20.
 39. *Gao F., Hannig J., Lee T.-Y., Torcaso F.* Exact L_2 -small balls of Gaussian processes. — *J. Theoret. Probab.*, 2004, v. 17, № 2, p. 503–520.
 40. *Gutierrez Jaimez R., Valderrama Bonnet M. J.* On the Karhunen–Loève expansion for transformed processes. — *Trab. Estad.*, 1987, v. 2, p. 81–90.
 41. *Ito K., McKean H. P.* Diffusion Processes And Their Sample Paths. Berlin: Springer, 1965, 321 p.
 42. *Janson S.* Brownian excursion area, Wright’s constants in graph enumeration, and other Brownian areas. — *Probability Surveys*, 2007, v. 4, p. 80–145.
 43. *Kennedy D. P.* The distribution of the maximum Brownian excursion. — *J. Appl. Probab.*, 1976, v. 13, p. 371–376.
 44. *Kiefer J.* k -sample analogues of the Kolmogorov–Smirnov and Cramér–von Mises tests. — *Ann. Math. Stat.*, 1959, v. 30, p. 420–447.
 45. *Lévy P.* Processus stochastiques et mouvement brownien. Paris: Gauthier-Villars, 1965.
 46. *Li W. V.* Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms. — *J. Theoret. Probab.*, 1992, v. 5, № 1, p. 1–31.
 47. *Li W. V., Shao Q. M.* Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications. — *Stochastic Processes: Theory and Methods*. Amsterdam: North-Holland, 2001, p. 533–597. (*Handbook Statist.*, v. 19.)
 48. *Lifshits M. A.* On the lower tail probabilities of some random series. — *Ann. Probab.*, 1997, v. 25, № 1, p. 424–442.
 49. *Lifshits M. A.* Asymptotic behavior of small ball probabilities. — *Proceedings of the Seventh International Vilnius conference on Probability Theory and Mathematical Statistics*. Utrecht/Vilnius: VSP/TEV, 1999, p. 453–468.
 50. *Lifshits M. A.* Bibliography on small deviation probabilities. <http://www.proba.jussieu.fr/pageperso/smalldev/biblio.pdf>.
 51. *Mansuy R.* An interpretation and some generalizations of the AndersonDarling statistics in terms of squared Bessel bridges. — *Statistics and Probab. Lett.*, 2005, v. 72, p. 171–177.
 52. *Mansuy R., Yor M.* Aspects of Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 2008, 195 p.
 53. *Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu.* Exact L_2 -small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems. — *Probab. Theory Related Fields*, 2004, v. 129, № 4, p. 469–494.
 54. *Nazarov A. I.* Exact L_2 -small ball asymptotics of Gaussian processes and the spectrum of boundary-value problems. — *J. Theoret. Probab.*, 2009, v. 22, p. 640–665.
 55. *Pitman J.* One-dimensional Brownian motion and the three-dimensional Bessel process. — *Adv. Appl. Prob.*, 1975, v. 7, p. 511–526.
 56. *Pitman J., Yor M.* Quelques identités en loi pour les processus de Bessel. — *Astérisque*, 1976, v. 236, p. 249–276.
 57. *Pitman J., Yor M.* The law of the maximum of a Bessel bridge. — *Electron. J. Probab.*, 1999, v. 4, p. 1–35.
 58. *Revuz D., Yor M.* Continuous Martingales and Brownian Motion. 2nd ed. Berlin: Springer, 2001, 602 p.
 59. *Rogers L. C. G., Williams D.* Diffusions, Markov Processes and Martingales, v. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 2000, 494 p.
 60. *van der Vaart A. W., van Zanten H.* Rates of contraction of posterior distributions based on Gaussian process priors. — *Ann. Statist.*, 2008, v. 36, № 3, p. 1435–1463.
 61. *Williams D.* Decomposing the Brownian path. — *Bull. Amer. Math. Soc.*, 1970, v. 76, p. 871–873.

-
62. *Zolotarev V. M.* Gaussian measure asymptotics in l_2 on a set of centered spheres with radii tending to zero. — 12th Europ. Meeting of Statisticians, Varna, 1979, p. 254.

Поступила в редакцию
18.XII.2011