

УДК 519.2

# МАЛЫЕ УКЛОНЕНИЯ ПОЛЕЙ И ПРОЦЕССОВ МАТЕРНА В ГИЛЬБЕРТОВОЙ НОРМЕ

© 2008 г. Р. С. Пусев

Представлено академиком И.А. Ибрагимовым 28.04.2008 г.

Поступило 30.05.2008 г.

Задаче о малых отклонениях для норм гауссовских случайных функций за последние годы было уделено много внимания (см., например, обзоры [1, 2]). Как правило, речь шла о нижних и верхних оценках для вероятностей малых отклонений, а точную и даже логарифмическую асимптотику с явно выписываемыми константами удалось найти лишь для небольшого числа простейших гауссовских процессов, см. [1–3]. В настоящей работе мы вычислим асимптотику вероятностей малых отклонений в  $L_2$ -норме для процессов и полей Матерна.

Для  $\nu > \frac{1}{2}$  определим процесс Матерна  $X^{(\nu)}(t)$ ,  $t \in [0, 1]$ , как гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$G_{X^{(\nu)}}(s, t) = \frac{2^{3/2-\nu}}{\Gamma(\nu-1/2)} |s-t|^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2}(|s-t|),$$

$$s, t \in [0, 1],$$

где  $K_\alpha$  – модифицированная функция Бесселя с индексом  $\alpha$ . Эти процессы были, по-видимому, впервые рассмотрены в задачах геостатистики [4]. Они также появляются во многих прикладных вероятностных моделях статистической гидромеханики, теории электрических шумов, см., например, [5]. Поля Матерна – тензорные произведения процессов Матерна – были предложены в заметке [6]. Они имеют важные применения в проектировании и анализе компьютерных экспериментов, см. [7, 8].

Пусть  $\Omega$  – ограниченная область в  $\mathbb{R}^d$ . Для случайной функции  $X(x)$ ,  $x \in \Omega$ , с нулевым средним и ковариационной функцией  $G_X(x, y) = EX(x)X(y)$ ,

$x, y \in \Omega$ , и суммируемой неотрицательной функции  $\rho(x)$ ,  $x \in \Omega$ , положим

$$\|X\|_\rho = \left( \int_\Omega X^2(x) \rho(x) dx \right)^{1/2}$$

(индекс  $\rho$  будет опускаться при  $\rho \equiv 1$ ). Нас интересует асимптотика при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вероятности  $P\{\|X\|_\rho \leq \varepsilon\}$ .

В силу классического разложения Карунена–Лозва имеет место равенство по распределению

$$\|X\|_\rho^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2,$$

где  $\xi_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , – независимые стандартные гауссовские случайные величины, а  $\lambda_n > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\sum_n \lambda_n < \infty$ ,

являются собственными значениями интегрального уравнения

$$\lambda f(x) = \int_\Omega G_X(x, y) \sqrt{\rho(y)} f(y) dy, \quad x \in \Omega.$$

Таким образом, исходная задача сводится к описанию поведения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  вероятности

$$P\left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \xi_n^2 \leq \varepsilon^2 \right\}.$$

Если известна достаточно точная асимптотика  $\lambda_n$ , то асимптотика вероятности малых отклонений с точностью до константы может быть получена с помощью теорем сравнения, установленных в [9], и результатов о малых отклонениях бесконечных квадратичных форм от независимых случайных величин из [10]. Если же известен только главный член асимптотики собственных чисел, то можно получить логарифмическую асимптотику малых отклонений.

Введем обозначение

$$J_h = \int_\Omega \rho(x)^{1/h} dx.$$

## ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ АСИМПТОТИКА

Рассмотрим сначала задачу о нахождении логарифмической асимптотики. Опираясь на результаты [11, 3], получаем, что справедлива следующая

**Теорема 1.** Пусть  $\rho$  – суммируемая неотрицательная функция на  $[0, 1]$ . Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/(2\nu-1)} \cdot \ln P\{\|X^{(\nu)}\|_{\rho} \leq \varepsilon\} = - \left( \frac{2\Gamma(\nu)}{\pi^{2\nu-1/2} \Gamma(\nu-1/2)} \right)^{1/(2\nu-1)} \frac{2\nu-1}{2} \left( \frac{\pi J_{2\nu}}{2\nu \sin \frac{\pi}{2\nu}} \right)^{2\nu/(2\nu-1)}.$$

Обозначим  $\mathbb{X}_{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)}(x) = \bigotimes_{j=1}^d X_j^{(\nu_j)}(x_j)$ ,  $x = (x_1,$

$x_2, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$ , где  $X_j^{(\nu_j)}$  – независимые процессы Матерна с индексом  $\nu_j$ . Доказательство двух следующих теорем о логарифмических малых уклонениях полей Матерна  $\mathbb{X}_{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)}$  основано на [12].

В теореме 2 изучается случай тензорного произведения процессов Матерна с одинаковыми индексами.

**Теорема 2.** Пусть  $\nu > \frac{1}{2}$ . Предположим, что  $\rho$  – суммируемая неотрицательная функция на  $[0, 1]^d$ , имеющая вид

$$\rho(x) = \prod_{j=1}^d \rho_j(x_j).$$

Тогда для поля  $\mathbb{X}_{\nu} = \mathbb{X}_{(\nu, \dots, \nu)}$  верно соотношение

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/(2\nu-1)} \ln^{-2\nu(d-1)/(2\nu-1)} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \ln P\{\|\mathbb{X}_{\nu}\|_{\rho} \leq \varepsilon\} = - \left( \frac{2\Gamma(\nu)}{\pi^{2\nu-1/2} \Gamma(\nu-1/2)} \right)^{d/(2\nu-1)} \left( \frac{2\nu-1}{2} \right)^{1-2\nu(d-1)/(2\nu-1)} \times \left( \frac{\pi J_{2\nu}}{(d-1)! \cdot 2\nu \sin \frac{\pi}{2\nu}} \right)^{2\nu/(2\nu-1)}.$$

В теореме 3 изучается случай тензорного произведения процессов Матерна с различными индексами. Оказывается, что порядок вероятности малых уклонений зависит только от сомножителя с наименьшим индексом, а для нахождения константы логарифмических малых уклонений необходима довольно подробная информация о всех собственных числах остальных сомножителей.

**Теорема 3.** Пусть  $\nu_m = \min_j \nu_j$  и  $\nu_j \neq \nu_m$  при  $j \neq m$ . Тогда

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/(2\nu_m-1)} \cdot \ln P\{\|\mathbb{X}_{(\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d)}\| \leq \varepsilon\} = - \prod_{j \neq m} \left( \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n^{(j)})^{1/(2\nu_m)} \right)^{2\nu_m/(2\nu_m-1)} \times \left( \frac{2\Gamma(\nu_m)}{\pi^{2\nu_m-1/2} \Gamma(\nu_m-1/2)} \right)^{1/(2\nu_m-1)} \times \frac{2\nu_m-1}{2} \left( \frac{\pi}{2\nu_m \sin \frac{\pi}{2\nu_m}} \right)^{2\nu_m/(2\nu_m-1)},$$

где  $\lambda_n^{(j)}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , – собственные числа ковариационной функции процесса  $X^{(\nu_j)}$ .

## АСИМПТОТИКА С ТОЧНОСТЬЮ ДО КОНСТАНТЫ ДЛЯ ПРОЦЕССА МАТЕРНА

Процесс Матерна с индексом 1 – это хорошо известный процесс Орнштейна–Уленбека, для которого точная асимптотика вероятностей малых уклонений найдена в [13]. В настоящем разделе вычисляется точная асимптотика для процесса Матерна с индексом 2. Ковариационная функция процесса  $X^{(2)}$

$$G_{X^{(2)}}(s, t) = (1 + |s - t|) \exp(-|s - t|),$$

$$s, t \in [0, 1],$$

является функцией Грина краевой задачи для самосопряженного дифференциального оператора

$$\begin{aligned} u^{IV} - 2u'' &= \mu u \text{ на } [0, 1], \\ u'''(0) - 3u'(0) + 2u(0) &= 0, \\ u''(0) - 2u'(0) + u(0) &= 0, \\ u'''(1) - 3u'(1) - 2u(1) &= 0, \\ u''(1) + 2u'(1) + u(1) &= 0. \end{aligned}$$

Используя [3], удастся получить двучленную асимптотику собственных чисел.

**Л е м м а.** Пусть  $\lambda_n$  – собственные числа ковариации процесса Матерна  $X^{(2)}$  с весом  $\rho$ . Если функция  $\rho \in W_{\infty}^2(0, 1)$  и  $\rho(t) > 0$ ,  $t \in [0, 1]$ , то при  $n \rightarrow \infty$

$$\lambda_n = 4J_4^4 \cdot \left( \pi \left( n - \frac{3}{2} \right) + O(n^{-1}) \right)^{-4}.$$

Используя результаты [9, 10, 3], получаем асимптотику с точностью до константы для взвешенного процесса Матерна.

**Теорема 4.** Пусть функция  $\rho \in W_{\infty}^2(0, 1)$  и  $\rho(t) > 0, t \in [0, 1]$ .

Тогда при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место соотношение

$$P\{\|X^{(2)}\|_{\rho} \leq \varepsilon\} \sim C_{\text{dist}} \frac{2^{7/3}}{\sqrt{3\pi}} \left(\frac{\varepsilon}{J_4^2}\right)^{5/3} \times \\ \times \exp\left(-\frac{3}{2^{7/3}} \left(\frac{\varepsilon}{J_4^2}\right)^{-2/3}\right),$$

где

$$C_{\text{dist}} = \frac{2J_4^2}{\lambda_1^{1/2}} \prod_{n=2}^{\infty} \frac{2J_4^2 \left(\pi \left(n - \frac{3}{2}\right)\right)^{-2}}{\lambda_n^{1/2}}.$$

Мы написали явное выражение для константы  $C_{\text{dist}}$ , однако в общем случае ее вычисление представляет собой непростую задачу и требует наличия довольно точной информации о собственных функциях ковариации. В случае единичного веса собственные функции ковариации оказываются выраженными через тригонометрические функции, что позволяет применить метод, развитый в [13]. В теореме 5 содержится окончательный ответ к задаче о нахождении точной асимптотики вероятностей малых отклонений для процесса Матерна  $X^{(2)}$  с указанием всех констант в асимптотике.

**Теорема 5.** При  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеет место соотношение

$$P\{\|X^{(2)}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{2^{29/6} e}{3^{1/2} \pi^{1/2}} \varepsilon^{5/3} \exp\left(-\frac{3}{2^{7/3}} \varepsilon^{-2/3}\right).$$

Автор признателен М.А. Лифшицу и Я.Ю. Никитину за внимание к работе и ценные консультации.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта РФФИ № 07-01-00159 и гранта НШ-638.2008.1.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Li W.V., Shao Q.M. Handbook of Statistics. Amsterdam: North-Holland/Elsevier, 2001. V. 19. P. 533–597.
2. Lifshits M.A. Prob. Theor. Math. Stat. VII Intern. Vilnius Conf. Vilnius: VSP/TEV, 1999. P. 453–468.
3. Nazarov A.I., Nikitin Ya.Yu. // Prob. Theor. Rel. Fields. 2004. V. 129. № 4. P. 469–494.
4. Matérn B. Spatial Variation. B.: Springer, 1986.
5. Яглом А.М. Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 280 с.
6. Stein M. // Statist. Sci. 1989. V. 4. № 4. P. 432–433.
7. Williams B.J., Santner T.J., Notz W.I. // Statist. Sinica. 2000. V. 10. P. 1133–1152.
8. Loh W.-L. // Ann. Statist. 2005. V. 33. P. 2344–2394.
9. Li W.V. // J. Theor. Probab. 1992. V. 5. № 1. P. 1–31.
10. Dunker T., Lifshits M.A., Linde W. In: High Dimension. Probability. Progress in Probability. B.: Birkhäuser, 1998. V. 43. P. 59–74.
11. Widom H. // Trans. Amer. Math. Soc. 1963. V. 109. P. 278–295.
12. Karol' A., Nazarov A., Nikitin Y. // Trans. Amer. Math. Soc. 2008. V. 360. № 3. P. 1443–1474.
13. Назаров А.И. В сб.: Проблемы математического анализа. Новосибирск: Т. Рожковская, 2003. Т. 26. С. 179–214.