

© 2010 г.

ПУСЕВ Р. С.*

**АСИМПТОТИКА МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ В ВЕСОВОЙ
КВАДРАТИЧНОЙ НОРМЕ ДЛЯ ПОЛЕЙ И ПРОЦЕССОВ
МАТЕРНА¹⁾**

В работе доказаны результаты о точной асимптотике малых уклонений в L_2 -норме для процессов Матерна с произвольным натуральным индексом и о логарифмической асимптотике для процессов и полей Матерна с произвольным индексом.

Ключевые слова и фразы: процесс Матерна, поле Матерна, малые уклонения.

1. Введение. Задаче о малых уклонениях для норм гауссовских случайных функций за последние годы было уделено много внимания (см., например, обзоры [1], [2]). Как правило, речь шла о нижних и верхних оценках для вероятностей малых уклонений, а точную и даже логарифмическую асимптотику с явно выписываемыми константами удалось найти лишь для небольшого числа простейших гауссовских процессов (см. [1]–[5]). В настоящей работе мы вычислим асимптотику вероятностей малых уклонений в L_2 -норме для процессов и полей Матерна.

Для $\nu > 1/2$ определим процесс Матерна $X^{(\nu)}(t)$, $t \in [0, 1]$, как гауссовский процесс с нулевым средним и ковариационной функцией

$$G_{X^{(\nu)}}(s, t) = \frac{2^{3/2-\nu}}{\Gamma(\nu - 1/2)} |s - t|^{\nu-1/2} K_{\nu-1/2}(|s - t|), \quad s, t \in [0, 1],$$

где K_α — модифицированная функция Бесселя с индексом α . Эти процессы были, по-видимому, впервые рассмотрены в задачах геостатистики [6]. Они также появляются во многих прикладных вероятностных моделях статистической гидромеханики, теории электрических шумов (см., например, [7]). Поля Матерна — тензорные произведения процессов Матерна — изучались в заметке [8]. Они имеют важные применения в проектировании и анализе компьютерных экспериментов (см. [9], [10]).

Пусть Ω — ограниченная область в \mathbf{R}^d . Для случайной функции $X(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbf{R}^d$, с нулевым средним и ковариационной функцией

*

¹⁾ Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-01-00159) и программы «Ведущие научные школы» (грант НШ-638.2008.1).

$G_X(x, y) = \mathbf{E} X(x)X(y)$, $x, y \in \Omega$, и суммируемой неотрицательной весовой функции $\rho(x)$, $x \in \Omega$, положим

$$\|X\|_\rho = \left(\int_\Omega X^2(x) \rho(x) dx \right)^{1/2}$$

(индекс ρ будет опускаться при $\rho \equiv 1$). Нас интересует асимптотика при $\varepsilon \rightarrow 0$ вероятности $\mathbf{P}\{\|X\|_\rho \leq \varepsilon\}$.

В силу классического разложения Карунена–Лозва имеет место равенство по распределению

$$\|X\|_\rho^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2,$$

где ξ_k , $k \in \mathbf{N}$, — независимые стандартные гауссовские случайные величины, а $\lambda_k > 0$, $k \in \mathbf{N}$, $\sum_k \lambda_k < \infty$, являются собственными значениями интегрального уравнения

$$\lambda f(x) = \int_\Omega G_X(x, y) \sqrt{\rho(x)\rho(y)} f(y) dy, \quad x \in \Omega. \quad (1.1)$$

Таким образом, исходная задача сводится к описанию поведения при $\varepsilon \rightarrow 0$ вероятности $\mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \xi_k^2 \leq \varepsilon^2\right\}$. Если известна достаточно точная асимптотика λ_k , то асимптотика вероятности малых отклонений с точностью до константы может быть получена с помощью теорем сравнения, установленных в [11]. Если же известен только главный член асимптотики собственных чисел, то, как правило, можно получить лишь логарифмическую асимптотику малых отклонений.

Введем обозначение

$$J_h = \int_\Omega \rho(x)^{1/h} dx.$$

2. Логарифмическая асимптотика. Результаты этого пункта были опубликованы в [12] без доказательства.

Рассмотрим задачу о нахождении логарифмической асимптотики малых отклонений для процессов Матерна.

Теорема 2.1. Пусть ρ — суммируемая неотрицательная функция на $[0, 1]$. Тогда

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/(2\nu-1)} \ln \mathbf{P}\{\|X^{(\nu)}\|_\rho \leq \varepsilon\} \\ = - \left(\frac{2\Gamma(\nu)}{\pi^{2\nu-1/2}\Gamma(\nu-1/2)} \right)^{1/(2\nu-1)} \frac{2\nu-1}{2} \left(\frac{\pi J_{2\nu}}{2\nu \sin(\pi/(2\nu))} \right)^{2\nu/(2\nu-1)}. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Спектральная плотность процесса Матерна равна [13, формула (4.15)]

$$g(\omega) = \frac{2\pi^{1/2}\Gamma(\nu)}{\Gamma(\nu - 1/2)(1 + \omega^2)^\nu}.$$

Из [14] следует, что для собственных чисел λ_k при $k \rightarrow \infty$ верно соотношение

$$\lambda_k \sim \frac{2\Gamma(\nu)}{\pi^{2\nu-1/2}\Gamma(\nu - 1/2)} \left(\frac{J_{2\nu}}{k} \right)^{2\nu}.$$

Применение предложения 4.3 [15] дает утверждение теоремы.

Обозначим $\mathbb{X}_{(\nu_1, \dots, \nu_d)}(x) = \bigotimes_{j=1}^d X_j^{(\nu_j)}(x_j)$, $x = (x_1, \dots, x_d) \in [0, 1]^d$, где $X_j^{(\nu_j)}$ — независимые процессы Матерна с индексом ν_j .

В следующей теореме изучается случай тензорного произведения процессов Матерна с одинаковыми индексами.

Теорема 2.2. Пусть $\nu > 1/2$. Предположим, что ρ — суммируемая неотрицательная функция на $[0, 1]^d$, имеющая вид

$$\rho(x) = \prod_{j=1}^d \rho_j(x_j).$$

Тогда для поля $\mathbb{X}_\nu = \mathbb{X}_{(\nu, \dots, \nu)}$ верно соотношение

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/(2\nu-1)} \ln^{-2\nu(d-1)/(2\nu-1)} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \ln \mathbf{P}\{\|\mathbb{X}_\nu\|_\rho \leq \varepsilon\} \\ &= - \left(\frac{2\Gamma(\nu)}{\pi^{2\nu-1/2}\Gamma(\nu - 1/2)} \right)^{d/(2\nu-1)} \left(\frac{2\nu - 1}{2} \right)^{1-2\nu(d-1)/(2\nu-1)} \\ & \quad \times \left(\frac{\pi J_{2\nu}}{(d-1)! 2\nu \sin(\pi/(2\nu))} \right)^{2\nu/(2\nu-1)}. \end{aligned}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Как в доказательстве предыдущей теоремы, получаем, что для собственных чисел $\lambda_k^{(j)}$ маргинальных ковариаций при $k \rightarrow \infty$ верно соотношение

$$\lambda_k^{(j)} \sim \frac{2\Gamma(\nu)}{\pi^{2\nu-1/2}\Gamma(\nu - 1/2)} \left(\frac{J_{2\nu}^{(j)}}{k} \right)^{2\nu}.$$

Пользуясь примерами 3 и 2 [15], получаем

$$\lambda_k \sim \left(\frac{2\Gamma(\nu)}{\pi^{2\nu-1/2}\Gamma(\nu - 1/2)} \right)^d \left(\frac{J_{2\nu}}{(d-1)!} \right)^{2\nu} \frac{\ln^{2\nu(d-1)}(k+1)}{k^{2\nu}}.$$

Применение предложения 4.3 [15] завершает доказательство теоремы.

В следующей теореме изучается случай тензорного произведения процессов Матерна с различными индексами.

Теорема 2.3. Пусть $\nu_m = \min_j \nu_j$ и $\nu_j \neq \nu_m$ при $j \neq m$. Тогда

$$\begin{aligned} & \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^{2/(2\nu_m-1)} \ln \mathbf{P}\{\|\mathbb{X}_{(\nu_1, \dots, \nu_d)}\| \leq \varepsilon\} \\ &= - \prod_{j \neq m} \left(\sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_k^{(j)})^{1/(2\nu_m)} \right)^{2\nu_m/(2\nu_m-1)} \left(\frac{2\Gamma(\nu_m)}{\pi^{2\nu_m-1/2}\Gamma(\nu_m-1/2)} \right)^{1/(2\nu_m-1)} \\ & \quad \times \frac{2\nu_m-1}{2} \left(\frac{\pi}{2\nu_m \sin(\pi/(2\nu_m))} \right)^{2\nu_m/(2\nu_m-1)}, \end{aligned}$$

где $\lambda_k^{(j)}$, $k \in \mathbf{N}$, — собственные числа ковариационной функции процесса $X^{(\nu_j)}$.

Доказательство. Как в доказательстве теоремы 2.1, получаем, что для собственных чисел $\lambda_k^{(j)}$ маргинальных ковариаций при $k \rightarrow \infty$ верно соотношение

$$\lambda_k^{(j)} \sim \frac{2\Gamma(\nu_j)}{\pi^{2\nu_j-1/2}\Gamma(\nu_j-1/2)} k^{-2\nu_j}.$$

Поскольку $\nu_m < \nu_j$ при $j \neq m$, процесс $X_m^{(\nu_m)}$ является медленным сомножителем в тензорном произведении $\mathbb{X}_{(\nu_1, \dots, \nu_d)}$ (см. [15, § 6]), и, значит, порядок вероятности малых уклонений зависит лишь от этого сомножителя, а для нахождения константы логарифмических малых уклонений необходима довольно точная информация о всех собственных числах остальных сомножителей.

По теореме 2.1, при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} & \ln \mathbf{P}\{\|X^{(\nu_m)}\| \leq \varepsilon\} \\ & \sim - \left(\frac{2\Gamma(\nu_m)}{\pi^{2\nu_m-1/2}\Gamma(\nu_m-1/2)} \right)^{1/(2\nu_m-1)} \frac{2\nu_m-1}{2} \\ & \quad \times \left(\frac{\pi}{2\nu_m \sin(\pi/(2\nu_m))} \right)^{2\nu_m/(2\nu_m-1)} \varepsilon^{-2/(2\nu_m-1)}. \end{aligned}$$

Пользуясь [15, следствие 6.2], получаем утверждение теоремы.

3. Точная асимптотика для процесса Матерна. Процесс Матерна с индексом 1 — это хорошо известный процесс Орнштейна–Уленбека, для которого точная асимптотика вероятностей малых уклонений была найдена в [4]. Было доказано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\mathbf{P}\{\|X^{(1)}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{4e^{1/2}}{\pi^{1/2}} \varepsilon^2 \exp\left(-\frac{1}{4}\varepsilon^{-2}\right). \quad (3.1)$$

В [12] точная асимптотика была выписана для процесса Матерна с индексом 2:

$$\mathbf{P}\{\|X^{(2)}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{2^{29/6}e}{3^{1/2}\pi^{1/2}} \varepsilon^{5/3} \exp\left(-\frac{3}{2^{7/3}}\varepsilon^{-2/3}\right). \quad (3.2)$$

В настоящем пункте мы вычислим точную асимптотику для процесса Матерна с любым натуральным индексом n .

Введем следующие обозначения:

$$z = \exp\left(\frac{i\pi}{n}\right), \quad c_n = \frac{2\sqrt{\pi}\Gamma(n)}{\Gamma(n-1/2)},$$

$$\varepsilon_n = \left(\varepsilon \sqrt{\frac{2n}{c_n} \sin \frac{\pi}{2n}}\right)^{1/(2n-1)}, \quad \mathcal{D}_n = \frac{2n-1}{2n \sin(\pi/(2n))}.$$

Обозначим $V(\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ матрицу Вандермонда:

$$V(\alpha_1, \dots, \alpha_m) = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \alpha_1 & \dots & \alpha_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_1^{m-1} & \dots & \alpha_m^{m-1} \end{bmatrix}.$$

Теорема 3.1. Пусть $n \in \mathbf{N}$. При $\varepsilon \rightarrow 0$ имеет место соотношение

$$\mathbf{P}\{\|X^{(n)}\| \leq \varepsilon\} \sim \frac{2^{(n^2+n+1)/2} n^{(n+1)/2} e^{n/2}}{|\det V(1, z, \dots, z^{n-1})|} \frac{\varepsilon_n^{n^2+1}}{\sqrt{\pi} \mathcal{D}_n} \exp\left(-\frac{\mathcal{D}_n}{2\varepsilon_n^2}\right). \quad (3.3)$$

Доказательство. Ковариационную функцию процесса $X^{(n)}$ можно записать следующим образом (см., например, [13, § 4.2]):

$$G_{X^{(n)}}(s, t) = \exp(-|s-t|) \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(2n-1)} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n+k-1)!}{(n-k-1)!} (2|s-t|)^{n-k-1}.$$

Пусть D обозначает оператор дифференцирования, а I — тождественный оператор. Дифференцируя $2n$ раз уравнение (1.1), после упрощения получаем, что числа λ_k в разложении Карунена–Лозева для процесса $X^{(n)}$ равны $\lambda_k = \mu_k^{-1}$, где μ_k — собственные числа краевой задачи

$$\begin{cases} (-1)^n (D^2 - I)^n u = c_n \mu u & \text{на } [0, 1], \\ D^m (D + I)^n u(1) = 0, & m = 0, 1, \dots, n-1, \\ D^m (D - I)^n u(0) = 0, & m = 0, 1, \dots, n-1. \end{cases} \quad (3.4)$$

По теореме сравнения Ли [11]

$$\mathbf{P}\{\|X^{(n)}\| \leq \varepsilon\} \sim C_{\text{dist}} \mathbf{P}\left\{\sum_{k=1}^n \xi_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\pi \left(k - \frac{n+1}{2}\right)\right)^{-2n} \xi_k^2 \leq \frac{\varepsilon^2}{c_n}\right\}, \quad (3.5)$$

где

$$C_{\text{dist}}^2 \equiv \prod_{k=1}^n c_n \mu_k \prod_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_n \mu_k}{(\pi(k - (n+1)/2))^{2n}}.$$

Поскольку в силу [3, теорема 7.1] $c_n \mu_k = (\pi(k - (n+1)/2) + O(k^{-1}))^{2n}$, бесконечное произведение сходится.

Поступая аналогично [3, предложение 6.4], с учетом [3, теорема 6.2], получаем

$$\begin{aligned} & \mathbf{P} \left\{ \sum_{k=1}^n \xi_k^2 + \sum_{k=n+1}^{\infty} \left(\pi \left(k - \frac{n+1}{2} \right) \right)^{-2n} \xi_k^2 \leq \varepsilon^2 \right\} \\ & \sim \frac{2^{(3n^2+3n-1)/(4n-2)} \pi^{(-n^2+n-1)/2} n^{(n^2+4n-1)/(4n-2)} (\sin(\pi/(2n)))^{(n^2+2n)/(4n-2)}}{\sqrt{2n-1} \Gamma^n(1 + (n-1)/2)} \\ & \times \varepsilon^{(n^2+1)/(2n-1)} \exp \left(- \frac{2n-1}{2} \left(\frac{1}{2n \sin(\pi/(2n))} \right)^{2n/(2n-1)} \varepsilon^{-2/(2n-1)} \right). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Остается вычислить константу расхождения C_{dist} .

Обозначим $\pm \zeta_j$, $j = 1, \dots, n$, корни уравнения

$$(\zeta^2 + 1)^n = c_n \mu. \quad (3.7)$$

Заметим, что по теореме Виета

$$\prod_{j=1}^n |\zeta_j|^2 = c_n \mu - 1. \quad (3.8)$$

Будем считать, что ζ_1 — тот корень уравнения (3.7), который положителен при $\mu > 1$. Тогда мы можем рассматривать ζ_j , $j = 2, \dots, n$, как функции от $\zeta = \zeta_1$.

Когда все корни уравнения (3.7) различны, функции $\exp(\pm i \zeta_j x)$ образуют фундаментальную систему решений дифференциального уравнения из (3.4). Подставляя их в граничные условия, получаем, что если μ является собственным значением задачи (3.4), то корни уравнения (3.7) являются нулями функции $F(\zeta) = \det[A_1(\zeta), \dots, A_n(\zeta)]$, где $A_j(\zeta)$ — матрица размера $2n \times 2$ следующего вида:

$$A_j(\zeta) = \begin{bmatrix} (1 + i \zeta_j)^n e^{i \zeta_j} & (1 - i \zeta_j)^n e^{-i \zeta_j} \\ i \zeta_j (1 + i \zeta_j)^n e^{i \zeta_j} & -i \zeta_j (1 - i \zeta_j)^n e^{-i \zeta_j} \\ \dots & \dots \\ (i \zeta_j)^{n-1} (1 + i \zeta_j)^n e^{i \zeta_j} & (-i \zeta_j)^{n-1} (1 - i \zeta_j)^n e^{-i \zeta_j} \\ (1 - i \zeta_j)^n & (1 + i \zeta_j)^n \\ i \zeta_j (1 - i \zeta_j)^n & -i \zeta_j (1 + i \zeta_j)^n \\ \dots & \dots \\ (i \zeta_j)^{n-1} (1 - i \zeta_j)^n & (-i \zeta_j)^{n-1} (1 + i \zeta_j)^n \end{bmatrix}.$$

Когда два корня уравнения (3.7) совпадают, функция $F(\zeta)$ также обращается в нуль. Чтобы отбросить эти «лишние» нули, рассмотрим функцию

$$\tilde{F}(\zeta) = \frac{F(\zeta)}{\det V(\zeta_1, -\zeta_1, \dots, \zeta_n, -\zeta_n)}.$$

Теперь μ является собственным значением краевой задачи (3.4) тогда и только тогда, когда корни (3.7) являются нулями функции $\tilde{F}(\zeta)$.

Заметим, что при $|\zeta| \rightarrow \infty$

$$\zeta_j = z^{j-1}\zeta + O(|\zeta|^{-1}), \quad j = 2, \dots, n.$$

Тогда при $|\zeta| \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} |\det V(\zeta_1, -\zeta_1, \dots, \zeta_n, -\zeta_n)| &\sim |\zeta|^{2n^2-n} |\det V(1, z, \dots, z^{2n-1})| \\ &= (2n)^n |\zeta|^{2n^2-n}. \end{aligned}$$

Последнее равенство верно в силу того, что

$$\begin{aligned} |\det V(1, z, \dots, z^{2n-1})| &= \prod_{0 \leq j < k \leq 2n-1} |z^k - z^j| = \prod_{0 \leq j \neq k \leq 2n-1} |z^k - z^j|^{1/2} \\ &= \prod_{j=1}^{2n-1} |1 - z^j|^n = \lim_{y \rightarrow 1} \left| \frac{y^{2n} - 1}{y - 1} \right|^n = (2n)^n, \end{aligned}$$

см. также [4, формула A.4].

Действуя как в [16, § 4, теорема 2], при $|\zeta| \rightarrow \infty$ и $|\arg(\zeta)| \leq \pi/(2n)$ получаем

$$F(\zeta) = i^{n^2-n} \zeta^{3n^2-n} \exp(-iz\zeta - iz^2\zeta - \dots - iz^{n-1}\zeta)(\Phi(\zeta) + O(|\zeta|^{-1})), \quad (3.9)$$

где

$$\Phi(\zeta) = \det \begin{bmatrix} e^{i\zeta} & (-1)^n e^{-i\zeta} & 0 & (-z)^n & \dots & 0 & (-z^{n-1})^n \\ e^{i\zeta} & (-1)^{n+1} e^{-i\zeta} & 0 & (-z)^{n+1} & \dots & 0 & (-z^{n-1})^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i\zeta} & (-1)^{2n-1} e^{-i\zeta} & 0 & (-z)^{2n-1} & \dots & 0 & (-z^{n-1})^{2n-1} \\ 1 & (-1)^n & z^n & 0 & \dots & (z^{n-1})^n & 0 \\ 1 & (-1)^{n+1} & z^{n+1} & 0 & \dots & (z^{n-1})^{n+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & (-1)^{2n-1} & z^{2n-1} & 0 & \dots & (z^{n-1})^{2n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Легко видеть, что $\Phi(\zeta) = \Phi^+(\zeta) + \Phi^-(\zeta)$, где

$$\Phi^+(\zeta) = \det \begin{bmatrix} e^{i\zeta} & 0 & 0 & (-z)^n & \dots & 0 & (-z^{n-1})^n \\ e^{i\zeta} & 0 & 0 & (-z)^{n+1} & \dots & 0 & (-z^{n-1})^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ e^{i\zeta} & 0 & 0 & (-z)^{2n-1} & \dots & 0 & (-z^{n-1})^{2n-1} \\ 0 & (-1)^n & z^n & 0 & \dots & (z^{n-1})^n & 0 \\ 0 & (-1)^{n+1} & z^{n+1} & 0 & \dots & (z^{n-1})^{n+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (-1)^{2n-1} & z^{2n-1} & 0 & \dots & (z^{n-1})^{2n-1} & 0 \end{bmatrix},$$

$$\Phi^-(\zeta) = \det \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n e^{-i\zeta} & 0 & (-z)^n & \dots & 0 & (-z^{n-1})^n \\ 0 & (-1)^{n+1} e^{-i\zeta} & 0 & (-z)^{n+1} & \dots & 0 & (-z^{n-1})^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (-1)^{2n-1} e^{-i\zeta} & 0 & (-z)^{2n-1} & \dots & 0 & (-z^{n-1})^{2n-1} \\ 1 & 0 & z^n & 0 & \dots & (z^{n-1})^n & 0 \\ 1 & 0 & z^{n+1} & 0 & \dots & (z^{n-1})^{n+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & z^{2n-1} & 0 & \dots & (z^{n-1})^{2n-1} & 0 \end{bmatrix}.$$

Перепишем выражение для $\Phi^+(\zeta)$. Вынося множители z^{n+j-1} из j -й и $(n+j)$ -й строк, $j = 1, \dots, n$, получаем

$$\begin{aligned} \Phi^+(\zeta) &= z^{n(3n-1)} \\ &\times \det \begin{bmatrix} (-z^{n-1})^n e^{i\zeta} & 0 & 0 & (-1)^n & \dots & 0 & (-z^{n-2})^n \\ (-z^{n-1})^{n+1} e^{i\zeta} & 0 & 0 & (-1)^{n+1} & \dots & 0 & (-z^{n-2})^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (-z^{n-1})^{2n-1} e^{i\zeta} & 0 & 0 & (-1)^{2n-1} & \dots & 0 & (-z^{n-2})^{2n-1} \\ 0 & (z^{n-1})^n & 1 & 0 & \dots & (z^{n-2})^n & 0 \\ 0 & (z^{n-1})^{n+1} & 1 & 0 & \dots & (z^{n-2})^{n+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (z^{n-1})^{2n-1} & 1 & 0 & \dots & (z^{n-2})^{2n-1} & 0 \end{bmatrix} \\ &= -e^{i\pi(n-1)} e^{i\zeta} \det \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n & 0 & (-z)^n & \dots & 0 & (-z^{n-1})^n \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 & (-z)^{n+1} & \dots & 0 & (-z^{n-1})^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (-1)^{2n-1} & 0 & (-z)^{2n-1} & \dots & 0 & (-z^{n-1})^{2n-1} \\ 1 & 0 & z^n & 0 & \dots & (z^{n-1})^n & 0 \\ 1 & 0 & z^{n+1} & 0 & \dots & (z^{n-1})^{n+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & z^{2n-1} & 0 & \dots & (z^{n-1})^{2n-1} & 0 \end{bmatrix} \\ &=: -e^{i\pi(n-1)} e^{i\zeta} \det \mathfrak{N}. \end{aligned}$$

Вынося из второго столбца определителя, задающего $\Phi^-(\zeta)$, множитель $e^{-i\zeta}$, получаем такой же определитель, как в правой части последнего равенства. Значит,

$$\begin{aligned} \Phi(\zeta) &= (e^{-i\zeta} - e^{i\zeta+i\pi(n-1)}) \\ &\times \det \begin{bmatrix} 0 & (-1)^n & 0 & (-z)^n & \dots & 0 & (-z^{n-1})^n \\ 0 & (-1)^{n+1} & 0 & (-z)^{n+1} & \dots & 0 & (-z^{n-1})^{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & (-1)^{2n-1} & 0 & (-z)^{2n-1} & \dots & 0 & (-z^{n-1})^{2n-1} \\ 1 & 0 & z^n & 0 & \dots & (z^{n-1})^n & 0 \\ 1 & 0 & z^{n+1} & 0 & \dots & (z^{n-1})^{n+1} & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 0 & z^{2n-1} & 0 & \dots & (z^{n-1})^{2n-1} & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Этот определитель, очевидно, распадается в произведение двух определителей, каждый из которых по модулю равен $|\det V(z^n, \dots, z^{2n-1})|$. Отсюда получаем

$$\begin{aligned} |\Phi(\zeta)| &= |\det V(z^n, \dots, z^{2n-1})|^2 |e^{-i\zeta} - e^{i\zeta + i\pi(n-1)}| \\ &= |\det V(z^n, \dots, z^{2n-1})|^2 |e^{-i\zeta - i\pi(n-1)/2} - e^{i\zeta + i\pi(n-1)/2}| \\ &= 2|\det V(z^n, \dots, z^{2n-1})|^2 \left| \sin \left(\zeta + \frac{\pi(n-1)}{2} \right) \right|. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Положим $\delta = (n-1)/2$ и рассмотрим функцию (см. [4])

$$\Psi(\zeta) = (\zeta^{2n} - 1)^n \psi_\delta(\zeta) \psi_\delta(z\zeta) \cdots \psi_\delta(z^{n-1}\zeta), \quad (3.11)$$

где

$$\psi_\delta(\zeta) = \frac{\Gamma^2(1+\delta)}{\Gamma(1+\delta+\zeta/\pi)\Gamma(1+\delta-\zeta/\pi)} = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\zeta^2}{(\pi(k+\delta))^2} \right).$$

Как было показано в [4, лемма 1.3], при $\zeta \rightarrow \infty$, $|\arg \zeta| \leq \phi_0 < \pi$, выполнено соотношение

$$\psi_\delta(\zeta) \sim \Gamma^2(1+\delta) \pi^{2\delta} \zeta^{-2\delta-1} \cos(\zeta - \pi(\delta + 1/2)), \quad (3.12)$$

причем сходимость равномерная.

Из (3.9)–(3.12) следует, что при $|\zeta| = \pi(k + \delta + 1/2)$

$$\frac{|\tilde{F}(\zeta)|}{|\Psi(\zeta)|} \rightarrow \frac{|\det V(z^n, \dots, z^{2n-1})|^2}{\Gamma^{2n}(1+\delta) \pi^{n(n-1)} n^n}. \quad (3.13)$$

При больших K в круге $|\zeta| < \pi(K + \delta + 1/2)$ существует ровно $2n(K+n)$ корней функции $\Psi(\zeta)$ и ровно $2n(K+n)$ корней функции $\tilde{F}(\zeta)$. Используя теорему Иенсена [17, § 3.6] подобно [4, теорема 1.4], с учетом формул (3.8) и (3.13) получаем

$$\prod_{k=1}^n (c_n \mu_k - 1) \prod_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_n \mu_k - 1}{\left(\pi(k - (n+1)/2) \right)^{2n}} = \frac{\Gamma^{2n}(1+\delta) \pi^{n(n-1)} n^n}{|V(z^n, \dots, z^{2n-1})|^2} |\tilde{F}(0)|.$$

По теореме Адамара о разложении на множители [17, § 8.24]

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{c_n \mu_k}{c_n \mu_k - 1} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{c_n \mu_k - (i^2 + 1)^n}{c_n \mu_k - 1} = \frac{\tilde{F}(i)}{\tilde{F}(0)}.$$

Значит,

$$C_{\text{dist}}^2 \equiv \prod_{k=1}^n c_n \mu_k \prod_{k=n+1}^{\infty} \frac{c_n \mu_k}{(\pi(k - (n+1)/2))^{2n}} = \frac{\Gamma^{2n}(1+\delta) \pi^{n(n-1)} n^n}{|\det V(z^n, \dots, z^{2n-1})|^2} |\tilde{F}(i)|.$$

Положим $x = \zeta^2 + 1$. Тогда $\zeta_j = i\sqrt{1 - xz^{2(j-1)}}$, $j = 1, \dots, n$. Вынося из столбцов множители $(1 - i\zeta_j)^n$, а из четных столбцов также множители $e^{-i\zeta_j}$ и полагая $f(\zeta_j) = ((1 + i\zeta_j)/(1 - i\zeta_j))^n$, получаем

$$\tilde{F}(i) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2^{2n^2} e^n \Phi_1(x)}{\det V(\zeta_1, -\zeta_1, \dots, \zeta_n, -\zeta_n)},$$

где

$$\Phi_1(x) = \det \begin{bmatrix} f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & 1 & \dots & f(\zeta_n)e^{i\zeta_n} & 1 \\ i\zeta_1 f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & -i\zeta_1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (i\zeta_1)^{n-1} f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & (-i\zeta_1)^{n-1} & \dots & \dots & \dots \\ 1 & f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & \dots & 1 & f(\zeta_n)e^{i\zeta_n} \\ i\zeta_1 & -i\zeta_1 f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (i\zeta_1)^{n-1} & (-i\zeta_1)^{n-1} f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix},$$

$$f(\zeta) = \left(\frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta} \right)^n.$$

Перестановкой столбцов определитель $\Phi_1(x)$ приводится к виду

$$\Phi_2(x) = \det \begin{bmatrix} V(-i\zeta_1, \dots, -i\zeta_n) & B_1(x) \\ B_2(x) & V(i\zeta_1, \dots, i\zeta_n) \end{bmatrix},$$

где

$$B_1(x) = \begin{bmatrix} f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & \dots & f(\zeta_n)e^{i\zeta_n} \\ i\zeta_1 f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & \dots & i\zeta_n f(\zeta_n)e^{i\zeta_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ (i\zeta_1)^{n-1} f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & \dots & (i\zeta_n)^{n-1} f(\zeta_n)e^{i\zeta_n} \end{bmatrix},$$

$$B_2(x) = \begin{bmatrix} f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & \dots & f(\zeta_n)e^{i\zeta_n} \\ (-i\zeta_1)f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & \dots & (-i\zeta_n)f(\zeta_n)e^{i\zeta_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ (-i\zeta_1)^{n-1} f(\zeta_1)e^{i\zeta_1} & \dots & (-i\zeta_n)^{n-1} f(\zeta_n)e^{i\zeta_n} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $f(\zeta_j) \sim (x/4)^n$. Легко видеть, что при $x \rightarrow 0$ вклад внедиагональных блоков есть величина порядка $O(x^{n^2})$, а определитель матрицы $V(\zeta_1, -\zeta_1, \dots, \zeta_n, -\zeta_n)$ пропорционален $x^{n(n-1)}$, и потому

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\Phi_2(x)|}{|\det V(\zeta_1, -\zeta_1, \dots, \zeta_n, -\zeta_n)|} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|\det V(\zeta_1, \dots, \zeta_n)| \cdot |\det V(-\zeta_1, \dots, -\zeta_n)|}{|\det V(\zeta_1, -\zeta_1, \dots, \zeta_n, -\zeta_n)|} = 2^{-n^2}. \end{aligned}$$

Учитывая также, что $|\det V(z^n, z^{n+1}, \dots, z^{2n-1})| = |\det V(1, z, \dots, z^{n-1})|$, получаем

$$C_{\text{dist}}^2 = \frac{\Gamma^{2n}(1 + \delta) \cdot 2^{n^2} \pi^{n(n-1)} n^n e^n}{|\det V(1, z, \dots, z^{n-1})|^2}.$$

Подставляя найденное выражение для C_{dist} в формулу (3.5) и учитывая формулу (3.6), получаем (3.3).

З а м е ч а н и е. В общем случае $|\det V(1, z, \dots, z^{n-1})|$ явно не вычисляется, однако можно выписать его значение для конкретных небольших n , например, при $n = 2, 3, 4$ получаем $|\det V(1, z, \dots, z^{n-1})| = \sqrt{2}, \sqrt{3}, 4(\sqrt{2} - 1)$ соответственно.

Несложный подсчет показывает, что формулы (3.1) и (3.2) вытекают из теоремы 3.1 при $n = 1$ и $n = 2$ соответственно.

Автор признателен А. И. Назарову и Я. Ю. Никитину за многочисленные полезные советы и ценные консультации и М. А. Лифшицу за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Li W. V., Shao Q. M.* Gaussian processes: inequalities, small ball probabilities and applications. — Stochastic Processes: Theory and Methods. Amsterdam: North-Holland, 2001, p. 533–597. (Handbook Statist., v. 19.)
2. *Lifshits M. A.* Asymptotic behavior of small ball probabilities. — Proceedings of the Seventh International Vilnius conference on Probability Theory and Mathematical Statistics. Utrecht/Vilnius: VSP/TEV, 1999, p. 453–468.
3. *Nazarov A. I., Nikitin Ya. Yu.* Exact L_2 -small ball behavior of integrated Gaussian processes and spectral asymptotics of boundary value problems. — Probab. Theory Related Fields, 2004, v. 129, № 4, p. 469–494.
4. *Назаров А. И.* О точной константе в асимптотике малых отклонений в L_2 -норме некоторых гауссовских процессов. — Нелинейные уравнения и математический анализ. Новосибирск: Т. Рожковская, 2003, с. 179–214. (Проблемы матем. анализа, в. 26.)
5. *Назаров А. И., Пусев Р. С.* Точная асимптотика малых отклонений в L_2 -норме с весом для некоторых гауссовских процессов. — Зап. науч. сем. ПОМИ, 2009, т. 364, с. 166–199.
6. *Matérn B.* Spatial Variation. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 151 с.
7. *Яглом А. М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии. Л.: Гидрометеоиздат, 1981, 280 с.
8. *Stein M.* [Design and Analysis of Computer Experiments]: — Comment. Statist. Sci., 1989, v. 4, p. 432–433.
9. *Williams B. J., Santner T. J., Notz W. I.* Sequential design of computer experiments to minimize integrated response functions. — Statist. Sinica, 2000, v. 10, p. 1133–1152.
10. *Loh W.-L.* Fixed-domain asymptotics for a subclass of Matérn-type Gaussian random fields. — Ann. Statist., 2005, v. 33, № 5, p. 2344–2394.
11. *Li W. V.* Comparison results for the lower tail of Gaussian seminorms. — J. Theoret. Probab., 1992, v. 5, № 1, p. 1–31.
12. *Пусев Р. С.* Малые отклонения полей и процессов Матерна в гильбертовой норме. — Докл. РАН, 2008, т. 422, № 6, с. 741–743.
13. *Rasmussen C. E., Williams C. K. I.* Gaussian Processes for Machine Learning. Cambridge: MIT Press, 2006, 248 p.

14. *Widom H.* Asymptotic behavior of the eigenvalues of certain integral equations. — Trans. Amer. Math. Soc., 1963, v. 109, p. 278–295.
15. *Karol' A., Nazarov A., Nikitin Y.* Small ball probabilities for Gaussian random fields and tensor products of compact operators. — Trans. Amer. Math. Soc., 2008, v. 360, № 3, p. 1443–1474.
16. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М.: Наука, 1969, 526 с.
17. *Титчмарш Е.* Теория функций. М.: Наука, 1980.

Поступила в редакцию
09.IX.2009