Алгебра и анализ
Том 27 (2015), №2

ЛЕГКОЕ ЧТЕНИЕ ДЛЯ ПРОФЕССИОНАЛА

БЕЛЛМАН ПРОТИВ БЁРЛИНГА: ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ РАВНОМЕРНОЙ ВЫПУКЛОСТИ ПРОСТРАНСТВ L^p

© П. Б. ЗАТИЦКИЙ, П. ИВАНИСВИЛИ, Д. М. СТОЛЯРОВ

§1. Классические результаты

В работе [3] 1936 г. Кларксон ввел понятие равномерной выпуклости нормированного пространства.

Определение 1. Нормированное пространство $(X, \|\cdot\|)$ называется равномерно выпуклым, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $x, y \in X$, $\|x\| = \|y\| = 1$ и $\|x - y\| \geqslant \varepsilon$, то $\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \leqslant 1 - \delta$.

В той же работе было доказано, что классические пространства Лебега L^p равномерно выпуклы при $p \in (1, +\infty)$. Это утверждение является элементарным следствием следующих неравенств, доказанных Кларксоном. Здесь и далее все нормы — нормы пространства L^p, если не указано иное.

Теорема 1 (Неравенства Кларксона, 1936). *Пусть $\varphi, \psi \in L^p$. Если $p \in [2, +\infty)$, то*

$$2^{p-1}\big(\|\varphi\|^p + \|\psi\|^p\big) \geqslant \|\varphi + \psi\|^p + \|\varphi - \psi\|^p.$$

Если $p \in (1, 2]$, то

$$2\big(\|\varphi\|^p + \|\psi\|^p\big)^{q/p} \geqslant \|\varphi + \psi\|^q + \|\varphi - \psi\|^q,$$

где $q = p/(p-1)$ — сопряженный с p показатель.

Первый автор — работа поддержана Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ 11.G34.31.0026; ОАО „Газпром Нефть“; грантом Президента РФ для молодых исследователей МК-6133.2013.1; грантами РФФИ 13-01-12422 офи_m2, 14-01-00373_А; грантом СПбГУ (тематический проект 6.38.223.2014).

Второй автор — работа была выполнена во время посещения программы математического института Хаусдорфа „Гармонический анализ и уравнения в частных производных“, автор благодарен институту Хаусдорфа за гостеприимство.

Третий автор — работа поддержана Лабораторией им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ 11.G34.31.0026; ОАО „Газпром Нефть“; грантом РФФИ 11-01-00526.

Позже возник вопрос о точной зависимости наибольшего возможного значения δ от параметра ε в определении равномерной выпуклости. Функция $\delta(\varepsilon)$ называется модулем равномерной выпуклости пространства. Оказалось, что неравенство Кларксона дает ответ на этот вопрос только при $p \geqslant 2$, а при $p < 2$ — нет. Точную зависимость $\delta(\varepsilon)$ впервые нашел Бёрлинг, сделавший об этом устный доклад в Уппсале в 1945 г. Его доказательство было позже записано и опубликовано Ханнером (см. [5]).

Теорема 2 (Бёрлинг, 1945; Ханнер, 1956, Неравенства Ханнера). *Пусть* $\varphi, \psi \in L^p$. *Если* $p \in [2, +\infty)$, *то*

$$\big(\|\varphi\| + \|\psi\|\big)^p + \big|\|\varphi\| - \|\psi\|\big|^p \geqslant \|\varphi + \psi\|^p + \|\varphi - \psi\|^p.$$

Если $p \in [1, 2]$, *то*

$$\big(\|\varphi\| + \|\psi\|\big)^p + \big|\|\varphi\| - \|\psi\|\big|^p \leqslant \|\varphi + \psi\|^p + \|\varphi - \psi\|^p.$$

Воспользовавшись этими неравенствами, легко (см. [5]) получить оценку на $\delta(\varepsilon)$, которая является точной.

Теорема 3. 1) (Кларксон, 1936). *Если* $p \in [2, +\infty)$, *то наилучшая константа* $\delta(\varepsilon)$ *при* $\varepsilon \leqslant 2$ *задается равенством*

$$\delta(\varepsilon) = 1 - (1 - (\varepsilon/2)^p)^{1/p}.$$

2) (Бёрлинг, 1945; Ханнер, 1956). *Если* $p \in [1, 2]$, *то наилучшая константа* $\delta(\varepsilon)$ *при* $\varepsilon \leqslant 2$ *задается уравнением*

$$(1 - \delta + \varepsilon/2)^p + |1 - \delta - \varepsilon/2|^p = 2.$$

Доказательство Бёрлинга, записанное в работе [5], элементарно и отличается краткостью и изяществом. Сложность его, на наш взгляд, заключается в том, чтобы угадать подходящие неравенства. Цель настоящей работы — показать, как, используя метод функции Беллмана, получить ответ без ,,угадывания“, а следуя простым и естественным геометрическим соображениям.

Идея применения методов оптимального управления к задачам на стыке математического анализа и теории вероятностей принадлежит Буркхольдеру, который в работе [2] вычислил норму мартингального преобразования. Вольберг, Назаров и Трейль привнесли аналогичные методы (уже называемые функцией Беллмана) в гармонический анализ (историю развития см. [7]). Работа Васюнина [9] по вычислению точных констант в обратном неравенстве Гёльдера для классов Макенхаупта положила начало вычислению точных функций Беллмана применительно к задачам гармонического анализа. Начиная с работы [8] метод стал получать теоретические основания (пока что на примере неравенств на пространстве BMO), в работе [10] была разработана теория функций Беллмана, объединяющая довольно широкий класс задач (см. также [6]). Стало ясно, что вычисление функции Беллмана — задача не только аналитическая или алгебраическая, важную роль играет геометрия графика функции Беллмана (его выпуклость, кручение кривой граничных данных и проч.).

§2. Метод функции Беллмана

2.1. Постановка. Так как все бесконечномерные пространства L^p конечно-представимы друг в друге (см. [4, теорема 3.2]), модули равномерной выпуклости для них одинаковы; мы будем обсуждать равномерную выпуклость пространства $L^p([0,1])$ при $p \in (1,+\infty)$. Рассмотрим чуть более общую задачу, а именно будем искать максимум нормы $\|\varphi+\psi\|$ при фиксированных $\|\varphi\|, \|\psi\|, \|\varphi-\psi\|$, где $\varphi,\psi \in L^p$. Для фиксированной точки $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ рассмотрим множество

$$T(x)=\{(\varphi,\psi)\in L^p\times L^p\colon \|\varphi\|^p=x_1, \|\psi\|^p=x_2, \|\varphi-\psi\|^p=x_3\}.$$

Определим функцию Беллмана $\boldsymbol{B}_3$ формулой

$$\boldsymbol{B}_3(x)=\sup\{\|\varphi+\psi\|^p\colon (\varphi,\psi)\in T(x)\}.$$

Отметим, что множество $T(x)$ пар функций (φ,ψ), по которым берется супремум, непусто тогда и только тогда, когда $x_1,x_2,x_3\geqslant 0$ и тройка чисел $(x_1^{\frac1p},x_2^{\frac1p},x_3^{\frac1p})$ удовлетворяет неравенству треугольника. Таким образом, естественная область определения функции $\boldsymbol{B}_3$ — это замкнутый выпуклый конус

$$\Omega_3=\bigl\{(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3\colon x_1,x_2,x_3\geqslant 0, \bigl(x_1^{\frac1p},x_2^{\frac1p},x_3^{\frac1p}\bigr) \text{ удовлетворяет неравенству треугольника}\bigr\}.$$

Отметим, что искомый модуль равномерной выпуклости $\delta(\varepsilon)$ выражается через функцию $\boldsymbol{B}_3$ следующим образом:

$$2^p(1-\delta(\varepsilon))^p=\sup_{t\in[\varepsilon^p,2^p]}\boldsymbol{B}_3(1,1,t). \tag{1}$$

Из определения очевидна однородность первой степени функции $\boldsymbol{B}_3$: $\boldsymbol{B}_3(kx)=k\boldsymbol{B}_3(x)$ для любого $k\geqslant 0$ и $x\in\Omega_3$.

Отметим, что значения функции $\boldsymbol{B}_3$ на границе множества Ω_3 легко вычислить. Действительно, если $\varphi,\psi\in L^p$ и $x=(\|\varphi\|^p,\|\psi\|^p,\|\varphi-\psi\|^p)\in\partial\Omega_3$, то неравенство Минковского для функций $\varphi,\psi,\varphi-\psi$ обращается в равенство. Возможны три случая:

1) $x_1^{\frac1p}=x_2^{\frac1p}+x_3^{\frac1p}$, в этом случае $\boldsymbol{B}_3(x)=\bigl(x_1^{\frac1p}+x_2^{\frac1p}\bigr)^p$;
2) $x_2^{\frac1p}=x_1^{\frac1p}+x_3^{\frac1p}$, в этом случае $\boldsymbol{B}_3(x)=\bigl(x_1^{\frac1p}+x_2^{\frac1p}\bigr)^p$;

3) $x_3^{\frac{1}{p}} = x_1^{\frac{1}{p}} + x_2^{\frac{1}{p}}$, в этом случае $\boldsymbol{B}_3(x) = \bigl|x_1^{\frac{1}{p}} - x_2^{\frac{1}{p}}\bigr|^p$.

2.2. Свойства функции Беллмана. Одним из важнейших свойств функции Беллмана $\boldsymbol{B}_3$ является вогнутость.

Предложение 1. *Функция $\boldsymbol{B}_3$ вогнута на области Ω_3.*

Доказательство. Нужно доказать, что для любых двух точек $x^{(1)}, x^{(2)} \in \Omega_3$ и любого $\alpha \in (0,1)$ выполнено неравенство

$$\boldsymbol{B}_3(\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}) \geqslant \alpha \boldsymbol{B}_3(x^{(1)}) + (1-\alpha)\boldsymbol{B}_3(x^{(2)}).$$

Для любого $\theta > 0$ для $i = 1, 2$ найдем пару функций $(\varphi_i, \psi_i) \in T(x^{(i)})$ таких, что $\|\varphi_i + \psi_i\|^p \geqslant \boldsymbol{B}_3(x^{(i)}) - \theta$. Рассмотрим конкатенацию φ функций φ_1 и φ_2 с весами α и $1-\alpha$ соответственно, т.е. функцию

$$\varphi(t) = \begin{cases} \varphi_1(\frac{t}{\alpha}), & t \in [0, \alpha]; \\ \varphi_2(\frac{t-\alpha}{1-\alpha}), & t \in (\alpha, 1]. \end{cases}$$

Аналогично определим конкатенацию ψ функций ψ_1 и ψ_2 с весами α и $1-\alpha$ соответственно. Ясно, что $(\varphi, \psi) \in T(\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)})$. Следовательно,

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{B}_3(\alpha x^{(1)} + (1-\alpha)x^{(2)}) \geqslant \|\varphi + \psi\|^p \\ &\quad = \alpha\|\varphi_1 + \psi_1\|^p + (1-\alpha)\|\varphi_2 + \psi_2\|^p \geqslant \alpha \boldsymbol{B}_3(x^{(1)}) + (1-\alpha)\boldsymbol{B}_3(x^{(2)}) - \theta. \end{aligned}$$

В силу произвольности θ получаем требуемую вогнутость функции $\boldsymbol{B}_3$. $\square$

Оказывается, что функция $\boldsymbol{B}_3$ является минимальной в классе вогнутых функций на Ω_3 с данными граничными значениями.

Предложение 2. *Если $G\colon \Omega_3 \to \mathbb{R}$ — вогнутая функция и $G(x) \geqslant \boldsymbol{B}_3(x)$ для всех $x \in \partial\Omega_3$, то $G(x) \geqslant \boldsymbol{B}_3(x)$ для всех $x \in \Omega_3$.*

Доказательство. Фиксируем любую точку $x \in \Omega_3$ и произвольную пару функций $(\varphi, \psi) \in T(x)$. Тогда по неравенству Йенсена

$$\begin{aligned} G(x) &= G\left(\int_0^1 |\varphi(t)|^p dt, \int_0^1 |\psi(t)|^p dt, \int_0^1 |\varphi(t) - \psi(t)|^p dt\right) \\ &\geqslant \int_0^1 G\left(|\varphi(t)|^p, |\psi(t)|^p, |\varphi(t) - \psi(t)|^p\right) dt \\ &\geqslant \int_0^1 \boldsymbol{B}_3\left(|\varphi(t)|^p, |\psi(t)|^p, |\varphi(t) - \psi(t)|^p\right) dt \\ &= \int_0^1 |\varphi(t) + \psi(t)|^p dt. \end{aligned}$$

Переходя к супремуму по всем парам $(\varphi, \psi) \in T(x)$, получаем неравенство $G(x) \geqslant \boldsymbol{B}_3(x)$. $\square$

Таким образом, $\boldsymbol{B}_3$ — минимальная среди вогнутых на Ω_3 функций с фиксированными граничными значениями.

2.3. Понижение размерности. Однородность функции $\boldsymbol{B}_3$ позволяет понизить размерность задачи.

Замечание 1. Пусть C — выпуклый конус в $\mathbb{R}^3$ с вершиной в нуле. Пусть L — плоскость в $\mathbb{R}^3$ такая, что для любого ненулевого $x \in C$ существует $k > 0$ такое, что $kx \in L \cap C$. Пусть $G\colon C \to \mathbb{R}$ — функция первой степени однородности. В таком случае вогнутость функции G на C равносильна вогнутости G на $C \cap L$.

Доказательство. Ясно, что если G вогнута на C, то она вогнута и на $C \cap L$. Докажем обратное утверждение.

Пусть $x_1, x_2 \in C$, $\alpha \in (0,1)$ и $x = \alpha x_1 + (1-\alpha)x_2$. Найдем числа $k, k_1, k_2 > 0$ такие, что $kx, k_1x_1, k_2x_2 \in L$. Отметим, что $kx = \alpha\frac{k}{k_1}k_1x_1 + (1-\alpha)\frac{k}{k_2}k_2x_2$. Воспользуемся вогнутостью G на $L \cap C$:

$$G(xk) \geqslant \alpha\frac{k}{k_1}G(k_1x_1) + (1-\alpha)\frac{k}{k_2}G(k_2x_2).$$

Однородность первой степени функции G влечет требуемое неравенство

$$G(x) \geqslant \alpha G(x_1) + (1-\alpha)G(x_2).$$

$\square$

В качестве конуса C в нашем случае возьмем Ω_3, в качестве плоскости L выберем плоскость $\{x \in \mathbb{R}^3\colon x_1 + x_2 + x_3 = 1\}$. В соответствии с замечанием 1 сужение функции $\boldsymbol{B}_3$ на $\Omega_3 \cap L$ является вогнутой функцией и, более того, минимальной среди вогнутых с тем же граничным значением на $\partial(\Omega_3 \cap L)$.

Таким образом, исходная трехмерная задача на поиск минимальной вогнутой функции сводится к следующей двумерной задаче. Рассмотрим выпуклое множество

$$\Omega = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2\colon (x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2) \in \Omega_3\} \tag{2}$$

— проекцию множества $\Omega_3 \cap L$ и функцию

$$\boldsymbol{B}(x_1, x_2) = \boldsymbol{B}_3(x_1, x_2, 1 - x_1 - x_2) \tag{3}$$

на нем. Функция $\boldsymbol{B}$ вогнута на Ω и минимальна в классе вогнутых с фиксированными граничными значениями, т.е. если $G\colon \Omega \to \mathbb{R}$ вогнута и $G(x) \geqslant \boldsymbol{B}(x)$ на $\partial\Omega$, то $G(x) \geqslant \boldsymbol{B}(x)$ на всем Ω.

Выпишем явно значения функции $\boldsymbol{B}$ на $\partial\Omega$. Граница $\partial\Omega$ состоит из трех частей, соответствующих трем случаям вырождения неравенства треугольника, а именно $\partial\Omega = \gamma^{[1]} \cup \gamma^{[2]} \cup \gamma^{[3]}$, где

$$\gamma^{[1]}(s) = \left(\frac{1}{s^p + (1-s)^p + 1}, \frac{s^p}{s^p + (1-s)^p + 1}\right), \quad s \in [0,1]; \tag{4}$$

$$\gamma^{[2]}(s) = \left(\frac{(1-s)^p}{s^p + (1-s)^p + 1}, \frac{1}{s^p + (1-s)^p + 1}\right), \quad s \in [0,1]; \tag{5}$$

$$\gamma^{[3]}(s) = \left(\frac{s^p}{s^p + (1-s)^p + 1}, \frac{(1-s)^p}{s^p + (1-s)^p + 1}\right), \quad s \in [0,1]. \tag{6}$$

Значения функции $\boldsymbol{B}$ на $\partial\Omega$ задаются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B}\bigl(\gamma^{[1]}(s)\bigr) &= \frac{(1+s)^p}{s^p + (1-s)^p + 1}; \\ \boldsymbol{B}\bigl(\gamma^{[2]}(s)\bigr) &= \frac{(2-s)^p}{s^p + (1-s)^p + 1}; \\ \boldsymbol{B}\bigl(\gamma^{[3]}(s)\bigr) &= \frac{|1-2s|^p}{s^p + (1-s)^p + 1}. \end{aligned} \tag{7}$$

§3. Минимальные вогнутые функции на выпуклых компактах

В этом параграфе мы обсудим свойства минимальных вогнутых функций на выпуклых компактах. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^d$ — строго выпуклый компакт с непустой внутренностью (строгая выпуклость означает, что граница не содержит отрезков). Пусть $f\colon \partial\omega \to \mathbb{R}$ — фиксированная непрерывная функция. Символом $\Lambda_{\omega,f}$ обозначим множество всевозможных вогнутых функций G на ω таких, что $G(x) \geqslant f(x)$ для всех $x \in \partial\omega$. Определим для $x \in \omega$ поточечный инфимум формулой

$$\mathfrak{B}_{\omega,f}(x) = \inf\{G(x)\colon G \in \Lambda_{\omega,f}\}.$$

Очевидно, что $\mathfrak{B}_{\omega,f} \in \Lambda_{\omega,f}$, поэтому $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ является минимальной вогнутой функцией на ω, мажорирующей f на $\partial\omega$. Отметим, что $\mathfrak{B}_{\omega,f} = f$ на $\partial\omega$, так как в противном случае мы могли бы уменьшить значения $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ на $\partial\omega$, сохранив вогнутость, что противоречило бы минимальности.

Вогнутость функции равносильна выпуклости ее подграфика, а поточечная минимальность равносильна минимальности подграфика по включению. Это простое соображение позволяет сделать следующий вывод.

Предложение 3. *Пусть*

$$\begin{gathered} \mathrm{Sg}(f) = \{(x,y) \in \partial\omega \times \mathbb{R}\colon y \leqslant f(x)\}, \\ \mathrm{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f}) = \{(x,y) \in \omega \times \mathbb{R}\colon y \leqslant \mathfrak{B}_{\omega,f}(x)\} \end{gathered}$$

— подграфики функций f и $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ соответственно. Тогда $\mathrm{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f}) = \mathrm{conv}(\mathrm{Sg}(f))$, *где* conv *— выпуклая оболочка.*

Доказательство. Отметим, что подграфик $\mathrm{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f})$ вогнутой функции $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ есть выпуклое множество, $\mathfrak{B}_{\omega,f} \geqslant f$ на $\partial\omega$, поэтому $\mathrm{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f}) \supset \mathrm{conv}(\mathrm{Sg}(f))$.

Функция f непрерывна, ω — компакт, поэтому множество $\mathrm{conv}(\mathrm{Sg}(f))$ замкнуто. Определим функцию G на ω так, что ее подграфик $\mathrm{Sg}(G)$ совпадает с $\mathrm{conv}(\mathrm{Sg}(f))$. Очевидно, $G \in \Lambda_{\omega,f}$, поэтому $G \geqslant \mathfrak{B}_{\omega,f}$ на ω. Но тогда $\mathrm{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f}) \subset \mathrm{Sg}(G) = \mathrm{conv}(\mathrm{Sg}(f))$. $\square$

Следствие 1. *Для любой точки $x_0 \in \omega$ найдется $k \leqslant d+1$ и точки $x_1,\dots,x_k \in \partial\omega$ такие, что $x_0 \in \mathrm{conv}(x_1,\dots,x_k)$, а функция $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ линейна на $\mathrm{conv}(x_1,\dots,x_k)$.*

Доказательство. Отметим, что случай $x_0 \in \partial\omega$ тривиален. В противном случае $x_0 \in \mathrm{int}(\omega)$. Пусть $P_0 = (x_0, \mathfrak{B}_{\omega,f}(x_0))$. По предложению 3 $P_0 \in \mathrm{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f}) = \mathrm{conv}(\mathrm{Sg}(f))$, поэтому по теореме Каратеодори о выпуклой оболочке точка P_0 лежит в выпуклой оболочке не более чем $d+2$ точек множества $\mathrm{Sg}(f)$. Отметим, что $P_0 \in \partial\mathrm{Sg}(\mathfrak{B}_{\omega,f})$, поэтому P_0 не может лежать во внутренности выпуклой оболочки $d+2$ точек множества $\mathrm{Sg}(f)$, следовательно, найдется $k \leqslant d+1$ и точки $P_i = (x_i, y_i) \in \mathrm{Sg}(f), i = 1,\dots,k$, такие, что $P_0 \in \mathrm{conv}(P_1,\dots,P_k)$. Мы можем считать, что число k наименьшее среди возможных, т.е. для любого $k' < k$ точка P_0 не лежит в выпуклой оболочке никаких k' точек множества $\mathrm{Sg}(f)$. Тогда найдутся числа $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in (0,1)$ такие, что $\sum \alpha_i = 1$ и $P_0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i P_i$. Отметим, что функция $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ вогнута на $\mathrm{conv}(x_1,\dots,x_k)$, $\mathfrak{B}_{\omega,f}(x_i) \geqslant f(x_i) \geqslant y_i$, но $\mathfrak{B}_{\omega,f}\bigl(\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\bigr) = \sum_{i=1}^k \alpha_i y_i$. В силу положительности чисел α_i отсюда следует, что $\mathfrak{B}_{\omega,f}(x_i) = f(x_i) = y_i$ для всех $i = 1,\dots,k$, и функция $\mathfrak{B}_{\omega,f}$ линейна на $\mathrm{conv}(x_1,\dots,x_k)$. $\square$

§4. Кручение и фолиация

Вернемся теперь к области Ω в $\mathbb{R}^2$, определенной равенством (2). Пусть $F\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ есть сужение функции $\boldsymbol{B}$, заданной формулой (3), на $\partial\Omega$. Формула (7) вместе с формулами (4), (5), (6) задает функцию F явно. Прежде всего, отметим, что функция F непрерывна на $\partial\Omega$. В обозначениях предыдущего параграфа $\boldsymbol{B} = \mathfrak{B}_{\Omega,F}$.

Прямые вычисления показывают, что при $p \in (1,+\infty)$ кусочная параметризация (4), (5), (6) границы $\partial\Omega$ оказывается C^1-гладкой. Кроме того, функция F, заданная на $\partial\Omega$, также C^1-гладкая в этой параметризации.

Если $p = 2$, то функция F есть просто сужение линейной функции на $\partial\Omega$, поэтому функция $\boldsymbol{B}$ есть линейная функция. В случае $p \neq 2$ ситуация более сложная. По следствию 1 все множество Ω покрывается треугольниками и отрезками (далее мы будем называть такие отрезки хордами), концы которых лежат на $\partial\Omega$, на каждом из которых функция $\boldsymbol{B}$ линейна. Наша задача — понять, как устроено это покрытие отрезками и треугольниками. В этом нам поможет следующая ключевая лемма (необходимые сведения из дифференциальной геометрии см., например, в [11]).

Лемма 1. *Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^2$ — строго выпуклое замкнутое множество. Пусть $a_1, a_2 \in \partial\omega$ и касательные к ω в точках a_1 и a_2 пересекаются в точке b. Пусть $\mathrm{I} \subset \mathbb{R}$ — некоторый открытый интервал, а $\gamma\colon \mathrm{I} \to \partial\omega$ — параметризация части $\partial\omega$, содержащей дугу между a_1 и a_2, лежащую в треугольнике a_1ba_2. Пусть $t_1, t_2 \in \mathrm{I}$ таковы, что $\gamma(t_i) = a_i$, $i = 1, 2$. Предположим, что кривая γ обходит $\partial\omega$ в положительном направлении и $t_2 > t_1$.*

Пусть G — вогнутая функция на ω, линейная на отрезке, соединяющем a_1 и a_2. Пусть кривая $(\gamma, G(\gamma))$ принадлежит классу C^1 на I. Тогда не выполнено ни одно из следующих условий:

1) *кривая $(\gamma, G(\gamma))$ принадлежит классу C^3 на I, ее кручение положительно на (t_1, t_2);*
2) *кривая $(\gamma, G(\gamma))$ принадлежит классу C^3 на I, ее кручение отрицательно на (t_1, t_2);*
3) *найдется $t_0 \in (t_1, t_2)$ такое, что кривая $(\gamma, G(\gamma))$ принадлежит классу C^3 на $\mathrm{I} \setminus \{t_0\}$, ее кручение на (t_1, t_0) отрицательно, а на (t_0, t_2) положительно.*

Доказательство. Повернем первые две координаты и сделаем перепараметризацию, если понадобится, так, чтобы выполнялось условие $\gamma_1'(t) > 0$ при $t \in [t_1, t_2]$, где $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2)$. При этих преобразованиях условия леммы не меняются.

Воспользуемся вогнутостью фукнкции G на выпуклом множестве ω. Мы можем найти линейную функцию $L\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ такую, что $G \leqslant L$ на ω и $G = L$ на отрезке $[a_1, a_2]$. Не умаляя общности, мы можем считать, что $L \equiv 0$ (если это не так, мы можем рассмотреть функцию $G - L$ вместо G, сохранив условия леммы).

Введем обозначение $f(t) = G(\gamma(t)), v(t) = \frac{\gamma_2'(t)}{\gamma_1'(t)}, u(t) = \frac{f'(t)}{\gamma_1'(t)}$. Отметим, что функция v монотонно возрастает в силу выпуклости ω. Прямые вычисления показывают, что знак кручения кривой $(\gamma(t), f(t))$ определяет выпуклость (или вогнутость) кривой $(v(t), u(t))$:

$$u''v' - v''u' = \frac{1}{(\gamma_1')^3}\begin{vmatrix} \gamma_1' & \gamma_2' & f' \\ \gamma_1'' & \gamma_2'' & f'' \\ \gamma_1''' & \gamma_2''' & f''' \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Функция f, заданная на I, удовлетворяет неравенству $f \leqslant 0$ и равенствам $f(t_1) = f(t_2) = 0$, поэтому точки t_1 и t_2 являются точками локального максимума функции f. Следовательно, $f'(t_1) = f'(t_2) = 0$ и $f''(t_1) \leqslant 0$, $f''(t_2) \leqslant 0$. Отсюда следует, что

$$u(t_1) = u(t_2) = 0, \quad u'(t_1) \leqslant 0, \quad u'(t_2) \leqslant 0. \tag{9}$$

Перейдем непосредственно к разбору трех случаев. В первом случае кривая (γ, f) принадлежит классу C^3 на I и ее кручение положительно на (t_1, t_2). Тогда согласно формуле (8) кривая $(v(t), u(t))$ строго выпукла при $t \in (t_1, t_2)$. Но это несовместимо с условиями (9). Аналогично во втором случае кривая должна быть строго вогнутой, что также противоречит условию (9).

В третьем случае кривая $(v(t), u(t))$ строго вогнута при $t \in (t_1, t_0)$, $u(t_1) = 0 \geqslant u'(t_1)$, поэтому $u(t_0) < 0$. С другой стороны, строгая выпуклость $(v(t), u(t))$ при $t \in (t_0, t_2)$ и условия $u(t_2) = 0 \geqslant u'(t_2)$ влекут неравенство $u(t_0) > 0$, противоречие. Лемма доказана. $\square$

Мы хотим применить лемму 1 к вогнутой функции $\boldsymbol{B}$ на строго выпуклом множестве Ω для того, чтобы понять, как могут быть расположены хорды. Нам необходимо вычислить кручения $\tau_i(s)$ кривых $(\gamma^{[i]}(s), \boldsymbol{B}(\gamma^{[i]}(s)))$:

$$\tau^{[1]}(s) = -\frac{2(p-2)(p-1)^2 p^3 ((1-s)s(1+s))^{p-3}}{(s^p + (1-s)^p + 1)^4}, \quad s \in (0,1);$$

$$\tau^{[2]}(s) = \frac{2(p-2)(p-1)^2 p^3 ((1-s)s(2-s))^{p-3}}{(s^p + (1-s)^p + 1)^4}, \quad s \in (0,1);$$

$$\tau^{[3]}(s) = -\operatorname{sign}(1-2s)\frac{2(p-2)(p-1)^2 p^3 ((1-s)s|1-2s|)^{p-3}}{(s^p + (1-s)^p + 1)^4},$$

$$s \in \Bigl(0, \frac{1}{2}\Bigr) \cup \Bigl(\frac{1}{2}, 1\Bigr).$$

Эти формулы позволяют нам с легкостью понять, где кручение графика функции F на $\partial\Omega$ положительно, а где отрицательно. При $p > 2$ выполнены неравенства $\tau^{[1]}(s) < 0$, $\tau^{[2]}(s) > 0$ при $s \in (0,1)$, $\tau^{[3]}(s) < 0$ при $s \in (0, \frac{1}{2})$ и $\tau^{[3]}(s) > 0$ при $s \in (\frac{1}{2}, 1)$. При $p < 2$ все знаки в этих неравенствах меняются на противоположные. На рис. 1 изображена область Ω, знаки кручения соответствующих кривых и точки их смены.

Простым, но важным дополнением к лемме 1 служит следующее замечание.

Замечание 2. Пусть I — отрезок с концами на $\partial\Omega$, на котором функция $\boldsymbol{B}$ линейна. Тогда для любого $\rho > 0$ для каждой из двух замкнутых дуг $\partial\Omega$,

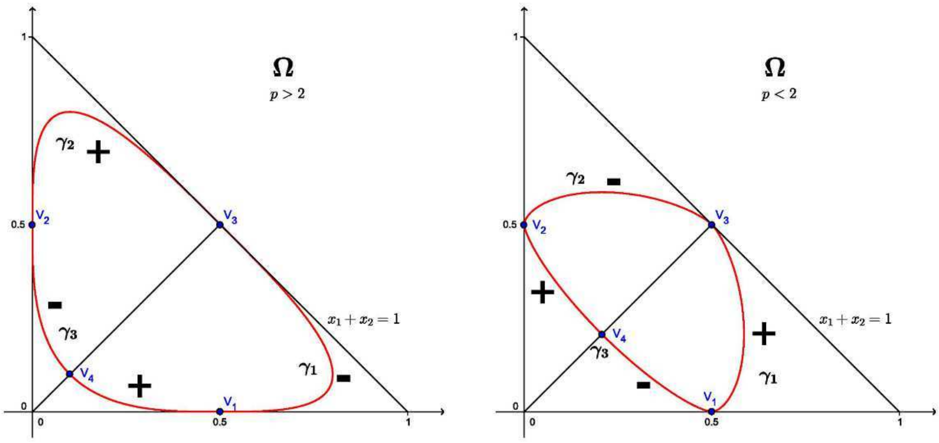

Рис. 1. Область Ω и знаки кручения.

стягиваемых хордой I, найдется отрезок I_1 с концами на ней такой, что $0<|\mathrm{I}_1|<\rho$, и функция $\boldsymbol{B}$ линейна на I_1.

Доказательство. Пусть это неверно для одной из двух замкнутых дуг, стягиваемых хордой I. Выберем хорду I_1 с концами на этой дуге так, что функция $\boldsymbol{B}$ линейна на ней, и хорда I_1 стягивает кратчайшую дугу при этом условии (таковая имеется в силу компактности области Ω и непрерывности функции $\boldsymbol{B}$). Выберем любую точку $x_0\in\mathrm{int}(\Omega)$, отделенную хордой I_1 от I. По следствию 1 мы можем найти отрезок или треугольник с концами на $\partial\Omega$, содержащий точку x_0, на котором функция $\boldsymbol{B}$ линейна. В силу минимальности стягиваемой хордой I_1 дуги этот отрезок или треугольник должен пересекать хорду I_1 по внутренним точкам. Таким образом, мы нашли хорду I_2, на которой функция $\boldsymbol{B}$ линейна, такую, что $\mathrm{I}_1\cap\mathrm{I}_2\cap\mathrm{int}(\Omega)\neq\varnothing$. Но тогда вогнутая функция $\boldsymbol{B}$ должна быть линейна на $\mathrm{conv}(\mathrm{I}_1\cup\mathrm{I}_2)$, что опять же позволяет найти хорду, на которой $\boldsymbol{B}$ линейна, стягивающую более короткую дугу, нежели I_1. Противоречие. □

Вместе с леммой 1 это замечание сразу влечет следствие.

Следствие 2. *Если* I — *отрезок с концами на* $\partial\Omega$, *на котором функция* $\boldsymbol{B}$ *линейна, то с каждой из сторон относительно* I *найдется точка смены знака кручения графика функции* F *с* $+$ *на* $-$, *считая в положительном направлении.*

Так как в случае $p\neq2$, есть всего две точки смены знака кручения с $+$ на $-$, не существует треугольника с вершинами на $\partial\Omega$, на котором функция $\boldsymbol{B}$ была бы линейной. Следовательно, через любую точку множества Ω проходит хорда с концами на $\partial\Omega$, на которой $\boldsymbol{B}$ линейна. Кроме того, эти хорды не могут пересекаться по внутренним точкам, так как в противном случае функция $\boldsymbol{B}$ была бы линейной сразу на выпуклой оболочке этих хорд. Замощение множества Ω этими непересекающимися по внутренним точкам хордами мы называем фолиацией.

Воспользуемся теперь симметрией задачи. Множество Ω и граничная функция F сохраняются при перестановке первых двух координат, стало быть, функция $\boldsymbol{B}$ и фолиация тоже. Выберем любую точку $x \in \Omega$ такую, что $x_1 = x_2$, и найдем хорду, ее содержащую. В силу симметрии она пересекается с симметричной хордой, стало быть, она симметрична сама себе. То есть эта хорда либо лежит на оси симметрии, либо перпендикулярна ей. Так как с каждой из сторон от хорды должна быть точка смены знака кручения с $+$ на $-$, мы понимаем, что при $p > 2$ она лежит на оси симметрии, а при $p < 2$ она перпендикулярна оси симметрии.

Таким образом, мы установили, что фолиация выглядит, как показано на рис. 2.

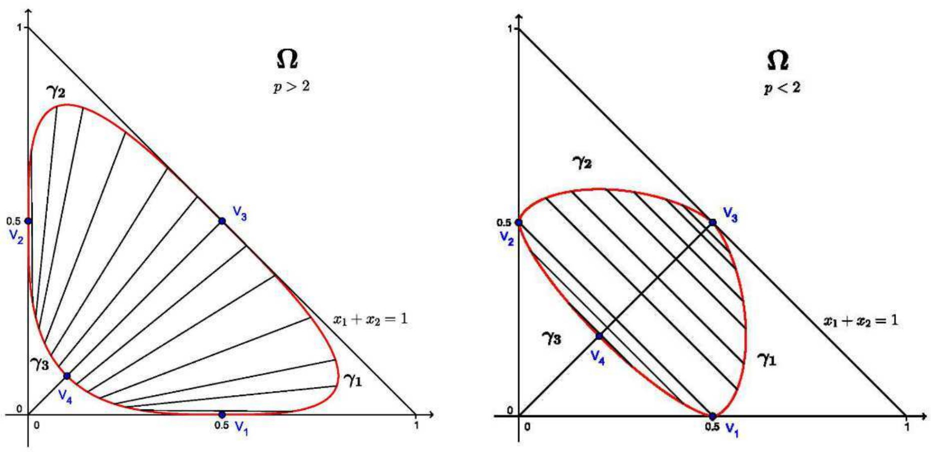

Рис. 2. Фолиация.

§5. Вычисления и ответ

Теперь мы можем вычислить значения функции $\boldsymbol{B}$ на прямой $x_1 = x_2$. В случае $p > 2$ она линейна на этой прямой, поэтому, воспользовавшись граничным значениями (7), находим $\boldsymbol{B}(x_1, x_1) = (2+2^p)x_1 - 1$. Вернувшись к однородной функции $\boldsymbol{B}_3$, находим

$$\boldsymbol{B}_3(1,1,t) = (t+2)\boldsymbol{B}_3\Big(\frac{1}{t+2}, \frac{1}{t+2}, \frac{t}{t+2}\Big) = (t+2)\boldsymbol{B}\Big(\frac{1}{t+2}, \frac{1}{t+2}\Big) = 2^p - t,$$

что при помощи равенства (1) и дает формулу из первого пункта теоремы 3.

В случае $p < 2$ не удается явно выписать значения функции $\boldsymbol{B}$ на отрезке прямой $x_1 = x_2$. Так как функция $\boldsymbol{B}$ линейна на хорде, проходящей через точку (τ,τ), и симметрична на ней, то она постоянна на ней и совпадает с граничным значением. Если $2\tau \in [\frac{1}{2}, 1]$, то концы этой хорды лежат на кривых $\gamma^{[1]}$ и $\gamma^{[2]}$, поэтому существует единственное решение $s \in [0,1]$ уравнения $\gamma_1^{[1]}(s) + \gamma_2^{[1]}(s) = 2\tau$, и

$$\boldsymbol{B}(\tau,\tau) = F\big(\gamma^{[1]}(s)\big) = F\big(\gamma^{[2]}(1-s)\big) = \frac{(1+s)^p}{1+s^p+(1-s)^p}. \tag{10}$$

Если же $2\tau \in \big[\frac{1}{2^{p-1}+1}, \frac{1}{2}\big]$, то концы этой хорды лежат на кривой $\gamma^{[3]}$, поэтому существует единственное решение $s \in [\frac{1}{2}, 1]$ уравнения $\gamma_1^{[3]}(s) + \gamma_2^{[3]}(s) = 2\tau$, и

$$\boldsymbol{B}(\tau,\tau) = F\big(\gamma^{[3]}(s)\big) = F\big(\gamma^{[3]}(1-s)\big) = \frac{(2s-1)^p}{1+s^p+(1-s)^p}. \tag{11}$$

Как и раньше, эти равенства позволяют найти модуль равномерной выпуклости $\delta(\varepsilon)$ из равенства (1):

$$\begin{aligned} 2^p(1-\delta(\varepsilon))^p &= \sup_{t\in[\varepsilon^p,2^p]} \boldsymbol{B}_3(1,1,t) \\ &= \sup_{t\in[\varepsilon^p,2^p]} (t+2)\boldsymbol{B}\Big(\frac{1}{t+2}, \frac{1}{t+2}\Big) = (\varepsilon^p+2)\boldsymbol{B}\Big(\frac{1}{\varepsilon^p+2}, \frac{1}{\varepsilon^p+2}\Big). \end{aligned} \tag{12}$$

Последнее равенство в (12) выполнено в силу возрастания функции $\boldsymbol{B}(\tau,\tau)/\tau$, проверить которое помогает следующее простое соображение. Функция $b\colon \tau \mapsto \boldsymbol{B}(\tau,\tau)$ задана на отрезке $\big[\frac{1}{2^p+2}, \frac{1}{2}\big]$, неотрицательна и вогнута на нем, обращается в нуль на левом конце. Поэтому функция $b(\tau)/\tau$ сначала возрастает (до момента, когда касательная в точке $(\tau, b(\tau))$ пройдет через 0), а потом убывает. Проверим, что она возрастает вплоть до точки $\tau = \frac{1}{2}$. Это следует из неравенства $b(\tau)/\tau \leqslant b(\frac{1}{2})/\frac{1}{2}$, что, в свою очередь, равносильно неравенству $b(\tau) \leqslant 2^p\tau$. Это неравенство легко доказывается с помощью минимальности функции $\boldsymbol{B}$ — воспользовавшись формулами (7) и (4), (5), (6), легко проверить, что линейная функция $G(x_1,x_2) = 2^{p-1}(x_1+x_2)$ мажорирует $\boldsymbol{B}$ на $\partial\Omega$, стало быть, и на всей Ω.

Таким образом, доказана формула (12), которая вместе с формулами (10) и (11) влечет вторую часть теоремы 3.

§6. Более общие результаты

Для решения исходной задачи нам достаточно было вычислить значения функции $\boldsymbol{B}$ на оси симметрии. В случае $p < 2$ все хорды перпендикулярны оси симметрии, что позволяет вычислить значение функции $\boldsymbol{B}$ в любой точке — для этого достаточно найти концы хорды, проходящей через эту точку. В случае $p > 2$ ситуация более сложная, и для вычисления значений функции $\boldsymbol{B}$ вне оси симметрии нужно привлекать дополнительные соображения. Соответствующая техника частично развита в [10], позже доработана и будет полностью изложена в одной из последующих работ.

Применение аналогичных рассуждений позволяет вычислить, насколько большой может быть величина $\|\theta\varphi+(1-\theta)\psi\|$ при фиксированных $\|\varphi\|$, $\|\psi\|$ и $\|\varphi-\psi\|$ (тут θ — фиксированное число) или любая другая „приличная“ функция от φ и ψ (под вычислением мы понимаем, что ответ может быть представлен в виде, пусть и неявной, функции, выражающей δ через ε, например, как в теореме 3).

Благодарности. Авторы благодарны Н. К. Никольскому, который в своей лекции в Лаборатории им. П. Л. Чебышева обратил их внимание на данную проблематику, в частности на работу [1]; эта работа послужила отправным пунктом наших исследований. Мы также благодарны Ф. В. Петрову и Д. С. Челкаку за полезные комментарии и замечания.

Мы выражаем благодарность своему учителю В. И. Васюнину.

Список литературы

[1] Ball K., Carlen E., Lieb E., *Sharp uniform convexity and smoothness inequlities for trace norms*, Invent. Math. **115** (1994), no. 3, 463–482.
[2] Burkholder D. L., *Boundary value problems and sharp inequalities for martingale transforms*, Ann. Probab. **12** (1984), no. 3, 647–702.
[3] Clarkson J. A., *Uniformly convex spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **40** (1936), no. 3, 396–414.
[4] Diestel J., Jarschow H., Tonge A., *Absolutely summing operators*, Cambridge Stud. Adv. Math., vol. 43, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995.
[5] Hanner O., *On the uniform convexity of L^p and l^p*, Ark. Mat. **3** (1956), 239–244.

[6] Ivanishvili P., Osipov N. N., Stolyarov D. M., Vasyunin V. I., Zatitskiy P. B., *On Bellman function for extremal problems in* BMO, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **350** (2012), no. 11-12, 561–564.

[7] Nazarov F., Treil S., Volberg A., *A Bellman function in stochastic control and harmonic analysis*, Oper. Theory Adv. Appl., vol. 129, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 393–423.

[8] Slavin L., Vasyunin V., *Sharp L^p estimates on* BMO, Indiana Univ. Math. J. **61** (2012), no. 3, 1051–1110.

[9] Васюнин В. И., *Точные константы в обратном неравенстве Гёльдера для весов Макенхаупта*, Алгебра и анализ **15** (2003), №1, 73–117.

[10] Иванишвили П., Осипов Н. Н., Столяров Д. М., Васюнин В. И., Затицкий П. Б., *Функция Беллмана для экстремальных задач в пространстве* BMO, Препринт ПОМИ, 19, 2011.
http://arxiv.org/abs/1205.7018 (to appear in Trans. Amer. Math. Soc.)

[11] Погорелов А. И., *Дифференциальная геометрия*, 6-е изд., Наука, М., 1974.

Поступило 21 сентября 2014 г.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ
Россия
E-mail: paxa239@yandex.ru

Michigan State University
USA
E-mail: ivanishvili.paata@gmail.com

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
191023, Санкт-Петербург
наб. р. Фонтанки, 27
Лаборатория им. П. Л. Чебышева СПбГУ
Россия
E-mail: dms@pdmi.ras.ru