

Цикл работ М.В. Долгополика «Конструктивный негладкий анализ и его приложения к задачам вариационного исчисления и теории управления»

Негладкий анализ посвящён изучению негладких, т. е. недифференцируемых функций. Он сформировался под влиянием идей выпуклого анализа и теории минимаксных задач, в первую очередь под влиянием понятия субдифференциала выпуклой функции, представляющего из себя совокупность опорных линейных функционалов к надграфику выпуклой функции в заданной точке.

Один из основных подходов негладкого анализа основан на использовании некоторого обобщения понятия субдифференциала выпуклой функции. Он позволяет при минимальных предположениях распространить многочисленные результаты математического анализа (такие как теоремы об обратной и неявной функциях, теорема Сарда и т. д.) на случай недифференцируемых функций. Однако, построение численных методов решения задач негладкой оптимизации в рамках данного подхода часто оказывается невозможным. Альтернативный подход к исследованию негладких задач, называемый конструктивным негладким анализом, в течение многих лет разрабатывался научной школой В.Ф. Демьянова в Санкт-Петербургском Государственном Университете. Под конструктивностью здесь понимается возможность построения достаточно простого исчисления исследуемых аппроксимаций негладких функций, получения легко проверяемых условий экстремума и построения на их основе численных методов оптимизации, допускающих простую алгоритмическую реализацию.

Цикл работ М.В. Долгополика, выдвигаемый на премию СПбМО «Молодому математику», посвящён развитию ключевых идей конструктивного негладкого анализа, а также исследованию их приложений к различным задачам оптимизации, включая задачи с матричными ограничениями, а также к задачам вариационного исчисления и теории управления.

В работе [1] был предложен новый общий подход к построению и исследованию различных локальных аппроксимаций приращению негладких функций. Данный подход позволяет не только единым образом получить многочисленные существующие результаты конструктивного негладкого анализа, но и вводить новые аппроксимации негладких функций и элементарным образом получать исчисление подобных аппроксимаций, обобщающее дифференциальное исчисление на случаи различных классов недифференцируемых функций. В статье [1] также были получены новые условия экстремума в различных задачах оптимизации в терминах локальных аппроксимаций негладких функций. На их основе могут быть построены новые численные методы решения подобных задач.

Применение неоднородной аппроксимации негладкой функции, называемой кодифференциалом, к исследованию задач вариационного исчисления с недифференцируемым интегрантом исследовалось в работе [2]. Была установлена кодифференцируемость основного функционала вариационного исчисления и получены новые условия экстремума в многомерной классической задаче вариационного исчисления и в негладкой задаче Больца, представляющие из себя обобщение уравнения Эйлера-Лагранжа на негладкий случай. На примерах было показано, что использование неоднородной аппроксимации позволяет получать условия оптимальности более сильные, чем условия оптимальности в терминах различных субдифференциалов, выведенные Ф. Кларком, Т. Рокафелларом и А.Д. Иоффе.

Одним из основных методов решения задач оптимизации с ограничениями является метод, основанный на сведении исходной задачи с ограничениями к задаче оптимизации

ции без ограничений с помощью штрафных/барьерных функций или модифицированных функций Лагранжа. Как правило, данный подход требует многократного решения задачи минимизации построенной вспомогательной функции для нахождения достаточно хорошего приближения к оптимальному решению исходной задачи. Однако, если используемая штрафная функция или модифицированная функция Лагранжа является точной, то её достаточно минимизировать только однажды. М.В. Долгополикком был разработан общий подход к построению и исследованию точных штрафных функций и точных модифицированных функций Лагранжа, основанный на так называемом принципе локализации. В частности, в статье [3] была построена общая теория модифицированных функций Лагранжа для задач оптимизации с коническим ограничением, включающим в качестве частных случаев задачи нелинейного программирования с конечным и бесконечным числом ограничений, задачи с ограничениями в виде конуса второго порядка (конуса Лоренца), а также задачи оптимизации с матричными ограничениями. В [3] был получен принцип локализации для существования глобальных седловых точек модифицированных функций Лагранжа, обобщающий и усиливающий многочисленные результаты по данной тематике, опубликованные в десятках статей. Также в данной работе впервые был предложен общий подход к построению точных модифицированных функций Лагранжа для задач с коническим ограничением. В частности, М.В. Долгополикком были впервые построены глобально точные модифицированные функции Лагранжа для задач нелинейного программирования с ограничениями-равенствами, а также для задач оптимизации с ограничениями в виде конуса второго порядка и задач с матричными ограничениями. Данные точные модифицированные функции Лагранжа могут быть использованы для построения новых, сверхлинейно и даже квадратично сходящихся численных методов решения подобных задач.

В работе [4] был предложен новый подход к построению прямых численных методов решения некоторых многомерных задач вариационного исчисления. Под прямым численным методом подразумевается метод, не основанный на решении уравнения Эйлера-Лагранжа. М.В. Долгополикком было введено новое пространство типа Соболева и предложен общий способ преобразования многомерной задачи вариационного исчисления к задаче, в которой направление наискорейшего спуска исследуемого функционала может быть вычислено аналитически. Данное преобразование позволяет применять стандартные градиентные методы оптимизации для решения задач вариационного исчисления.

Применение негладкого анализа к задачам теории управления рассматривалось в совместных работах с А.Л. Фрадковым [5, 6]. В [5] было изучено обобщение известного алгоритма скоростного градиента, предложенного А.Л. Фрадковым, на негладкий случай и изучены некоторые свойства негладких и разрывных СГ-алгоритмов. В частности, были получены условия достижимости цели управления за конечное время. В качестве приложений негладких алгоритмов скоростного градиента рассматривалась задача раскачивания маятника с подвижной точкой опоры, а также задача управления энергией одной нелинейной колебательной системы, неаффинно зависящей от управления.

В работе [6] исследовалась задача стабилизации интегратора Броккетта. Интегратор Броккетта или неголономный интегратор является классическим примером системы, положение равновесия которой невозможно стабилизировать с помощью непрерывной обратной связи. Задача стабилизации интегратора Броккетта рассматривалась в работах Ф. Кларка, А.С. Морса и многих других (см. обзор литературы в [6]). Для решения поставленной задачи в [6] был предложен негладкий алгоритм скоростного градиента, стабилизирующий нулевое положение равновесия интегратора Броккетта с помощью сколь угодно малого управляющего воздействия. Основное отличие предложенного закона управления от всех существующих заключается в том, что он является непрерывным вдоль траекторий замкнутой системы для почти всех начальных данных.

Список литературы

- [1] Dolgopolik M.V. Abstract Convex Approximations of Nonsmooth Functions // Optimization, 2015, vol. 64, no. 7, pp. 1439-1469.
- [2] Dolgopolik M.V. Nonsmooth Problems of Calculus of Variations via Codifferentiation // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations, 2014, vol. 20, no. 4, pp. 1153-1180.
- [3] Dolgopolik M.V. Augmented Lagrangian functions for cone constrained optimization: the existence of global saddle points and exact penalty property // Journal of Global Optimization, 2018, vol. 71, no. 2, pp. 237–296.
- [4] Dolgopolik M.V. New direct numerical methods for some multidimensional problems of the calculus of variations // Numerical Functional Analysis and Optimization, 2018, vol. 39, no. 4, pp. 467-490.
- [5] Dolgopolik M.V., Fradkov A.L. Nonsmooth and discontinuous speed-gradient algorithms // Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 2017, vol. 25, pp. 99-113.
- [6] Dolgopolik M.V., Fradkov A.L. Speed-gradient control of the Brockett integrator // SIAM Journal on Control and Optimization, 2016, vol. 54, no. 4, pp. 2116-2131.