Эволюционные уравнения и ассоциированные с ними стохастические процессы

Когда уравнения математической физики не могут быть решены явно, полезными оказываются интегральные представления решений, дающие возможность получить качественные свойства решения, а также оценить погрешность решений, полученных с помощью приближенных методов. В частности, в квантовой механике таким интегральным представлением является формула Фейнмана–Каца. Эта формула для широкого класса операторов $H = -\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2} + V$ (гамильтонианов) дает интегральное представление решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -Hu,\ u(0,x) = \varphi(x) \tag{1}$$

в виде математического ожидания некоторого функционала от траекторий винеровского процесса.

Аналогичный подход может быть использован не только для уравнения теплопроводности, но и для эволюционных уравнений, содержащих операторы дробного дифференцирования порядка $\alpha \in (0,1) \cup (1,2)$. Решение задачи Коши для таких уравнений может быть представлено в виде математического ожидания функционала от траектории однородного устойчивого процесса Леви (устойчивого процесса с независимыми однородными приращениями). Такие представления решения называются еще представлениями в виде функционального интеграла.

Известно, что построение аналогичных представлений решений задачи для эволюционных уравнений, содержащих дифференциальный оператор порядка $\alpha > 2$ невозможно. Тем не менее, в работах автора были построены вероятностные аппроксимации решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дробного дифференцирования порядка $\alpha > 2$ (см. [1], [2]), а также для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования порядка $m > 2$ (см. [3]). Были построены два типа аппроксимации решения задачи Коши. В первом случае решение аппроксимировалось средними значениями функционалов от пуассоновского точечного поля, а во втором случае — средними значениями функционалов от нормированных сумм независимых случайных величин с некоторыми условиями на распределение.

Позже, данный подход был обобщен для построения вероятностных аппроксимаций решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера высокого порядка

$$i\,\frac{\partial u}{\partial t} = Hu,\ u(0,x) = \varphi(x), \tag{2}$$

где оператор H есть оператор дифференцирования четного порядка

$$H = \frac{(-1)^m}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} \geqslant 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

или симметричный оператор дифференцирования дробного порядка

$$H = c_\alpha D_\alpha \geqslant 0, \quad c_\alpha = \frac{1}{\alpha \cos\frac{\pi\alpha}{2}}, \quad \alpha \notin \mathbf{N}.$$

В работах [5], [7], [9] был предложен вероятностный метод построения аппроксимации решения задачи Коши (2) средними значениями функционалов от стохастических процессов. Как и в предыдущем случае, были построены два типа аппроксимации: с использованием интегралов по пуассоновской случайной мере и нормированных сумм независимых случайных величин.

Приведем формулировки результатов работы [9].

Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $[0,\infty)\times[0,\infty)$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt,dx) = dt\,\mu(dx),$$

где мера μ имеет вид

$$d\mu(x) = \frac{dx}{x^{1+2m}}.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим сложный пуассоновский процесс $\xi_\varepsilon(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon,e\varepsilon]} x\nu(ds,dx),$$

где e – основание натурального логарифма.

Положим

$$\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)}.$$

Так выбранное комплексное число σ принадлежит верхней полуплоскости $\mathbf{C}_+$ и $\operatorname{Re}\sigma > 0$.

Представим начальную функцию φ в виде

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где P_+, P_- – проекторы Рисса, определяемые на $L_2(\mathbf{R})\cap L_1(\mathbf{R})$ как

$$P_+\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp, \quad P_-\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{\infty} e^{-ipx}\,\widehat{\varphi}(p)\,dp. \tag{3}$$

Отметим, что функция φ_+ аналитически продолжается в верхнюю полуплоскость, а функция φ_- аналитически продолжается в нижнюю полуплоскость.

При фиксированном $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_ε^t, которая действует на $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ как

$$P_\varepsilon^t\varphi(x) = \mathbf{E}\left[(\varphi_- * h_\varepsilon)\big(x-\sigma\xi_\varepsilon(t)\big) + (\varphi_+ * h_\varepsilon)\big(x+\sigma\xi_\varepsilon(t)\big)\right], \tag{4}$$

где функция $h_\varepsilon(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{h}_\varepsilon(p) = \exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(i|p|\sigma x + \frac{(i|p|\sigma x)^2}{2} + \ldots + \frac{(i|p|\sigma x)^{2m-1}}{(2m-1)!}\Big)\,d\mu(x)\Big)$$
$$\cdot\exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\frac{(i|p|\sigma x)^{2m+1}}{(2m+1)!}\,d\mu(x)\Big).$$

Через P^t обозначим полугруппу

$$P^t = \exp\Big(\frac{it(-1)^{m+1}}{(2m)!}\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}\Big).$$

По определению полугруппа P^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши (2).

Теорема 1. *Существует число $C > 0$ такое, что для любой функции $\varphi \in W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ и всех $t \geqslant 0$ справедливо неравенство*

$$||P^t\varphi - P_\varepsilon^t\varphi||_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant Ct\varepsilon^2||\varphi||_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

Пусть $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных неотрицательных случайных величин. Обозначим через $\mathcal{P}$ распределение случайной величины ξ_1. Предположим, что случайная величина ξ_1 имеет конечный момент порядка $2m+2$ и

$$\mathbf{E}\,\xi_1^{2m} = 1.$$

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0,\infty)$ независимый от последовательности $\{\xi_j\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица. Обозначим

$$\varkappa_1 = \mathbf{E}\,\xi_1^1, \quad \varkappa_2 = \mathbf{E}\,\xi_1^2, \quad \ldots, \quad \varkappa_{2m+2} = \mathbf{E}\,\xi_1^{2m+2}.$$

Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0,T]$, где

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/2m}} \sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j.$$

Для каждого натурального n определим полугруппу операторов P_n^t, полагая для $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$

$$P_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}\left[(\varphi_- * R_n^t)\big(x - \sigma\zeta_n(t)\big) + (\varphi_+ * R_n^t)\big(x + \sigma\zeta_n(t)\big)\right], \tag{5}$$

где, как и выше, функции $\varphi_\pm$ определены формулой (3), а $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1-\frac{1}{2m}\right)}$. Функция $R_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{R}_n^t(p) = \exp\Big(-ti|p|\sigma n^{1-\frac{1}{2m}}\varkappa_1 - \frac{t(i|p|\sigma)^2 n^{1-\frac{2}{2m}}\varkappa_2}{2!} - \ldots - \frac{t(i|p|\sigma)^{2m-1} n^{1-\frac{2m-1}{2m}}\varkappa_{2m-1}}{(2m-1)!}\Big) \cdot \exp\Big(-\frac{t(i|p|\sigma)^{2m+1} n^{1-\frac{2m+1}{2m}}\varkappa_{2m+1}}{(2m+1)!}\Big).$$

Теорема 2. *Существует число $C>0$ такое, что для любой функции $\varphi \in W_2^{2m+2}(\mathbf{R})$ и всех $t>0$ справедливо неравенство*

$$||P^t\varphi - P_n^t\varphi||_{L_2(\mathbf{R})} \leqslant \frac{Ct}{n^{1/m}}||\varphi||_{W_2^{2m+2}(\mathbf{R})}.$$

При исследовании случайных процессов часто бывает полезно исследовать связанные с ними эволюционные уравнения. Одним из самых известных уравнений является обратное уравнение Колмогорова. Для ветвящихся случайных блужданий (ВСБ) соответствующее обратное уравнение содержит сумму двух операторов в правой части: первый оператор описывает само блуждание и является дискретным оператором Лапласа, а второй отвечает за ветвление частиц в источниках и является оператором умножения. Свойства ВСБ с конечным числом источников изучались в работах В.А. Ватутина, Е.Б. Яровой, В.А. Топчия, Е.Вл. Булинской и других авторов. Задачи о моментных свойствах локальной численности частиц ВСБ с бесконечным числом источников исследованы мало. В работах [4], [6] исследовано асимптотическое поведение локального среднего числа частиц пространственно-однородного ВСБ с периодически расположенными источниками одного типа. В работе [8] данный подход обобщен для исследования асимптотического поведения локального среднего числа частиц ВСБ на периодическом графе с периодически расположенными источниками ветвления разного типа.

Через $M(v,u,t)$ обозначим среднее число частиц, находящихся в точке $u \in \mathbf{Z}^d$ в момент времени t, если в начальный момент $t=0$ в системе находилась одна частица в точке $v \in \mathbf{Z}^d$.

Теорема 3. *Предположим, что дисперсия скачков симметричного случайного блуждания конечна. Тогда при $t \to +\infty$ для функции $M(v,u,t)$ старший член асимптотики имеет вид*
$$M(v,u,t) = e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} c_0(v,u)\Big(1 + O(t^{-1})\Big),$$
где $\lambda_1(0)$ и коэффициент $c_0(v,u)$ могут быть вычислены явно.

В предположении конечности всех моментов скачков симметричного случайного блуждания получается более сильное утверждение.

Теорема 4. *Для функции $M(v,u,t)$ справедливо асимптотическое разложение*
$$M(v,u,t) \overset{as}{=} e^{\lambda_1(0)t} t^{-d/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(v,u)\, t^{-k},$$
где $\lambda_1(0)$ и все коэффициенты $c_k(v,u)$ могут быть вычислены явно.

Список литературы

[1] М. В. Платонова, *Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы.* Зап. научн. сем. ПОМИ, 442, 2015, 101–117.

[2] М.В. Платонова, *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана-Лиувилля.* Теория вероятн. и ее примен., 61:3, 2016, с. 417–438.

[3] М.В. Платонова, *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка.* Зап. научн. сем. ПОМИ, 454, 2016, 220–237.

[4] М.В. Платонова, К.С. Рядовкин. *Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке $\mathbf{Z}^d$ с периодическими источниками ветвления.* Зап. научн. сем. ПОМИ, 466, 2017, 234–256.

[5] М.В. Платонова, С.В. Цыкин. *Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шредингера с оператором дробного дифференцирования.* Зап. научн. сем. ПОМИ, 466, 2017, 257–272.

[6] М.В. Платонова, К.С. Рядовкин. *О среднем числе частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке с периодическими источниками ветвления.* Доклады Академии Наук, 479:3, 2018, 250–253.

[7] М. В. Платонова, С. В. Цыкин, *Вероятностный подход к решению задачи Коши для уравнения Шрёдингера с оператором дробного дифференцирования порядка $\alpha \in \cup_{m=3}^{\infty}(m-1,m)$.* Зап. научн. сем. ПОМИ, 474, 2018, 199–212.

[8] М.В. Платонова, К.С. Рядовкин. *Ветвящиеся случайные блуждания на $\mathbf{Z}^d$ с периодически расположенными источниками ветвления.* Теория вероятн. и ее примен, 64:2, 2019, 283–307.

[9] М.В. Платонова, С.В. Цыкин. *Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера высокого порядка.* Принята в Теория вероятн. и ее примен.