М. В. Платонова, Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана–Лиувилля, *Теория вероятн. и ее примен.*, 2016, том 61, выпуск 3, 417–438

DOI: https://doi.org/10.4213/tvp5067

РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Основан в январе 1956 г.	***Том 61***
Выходит 4 раза в год	***Выпуск 3, 2016 год***
Москва • Наука	***июль, август, сентябрь***

 ПЛАТОНОВА М. В.*

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ РИМАНА–ЛИУВИЛЛЯ[1)]

В работе изучаются возможности вероятностной аппроксимации решения задачи Коши для эволюционных уравнений с оператором дробного дифференцирования порядка больше двух. С этой целью строятся аналоги односторонних α-устойчивых распределений при нецелых $\alpha > 2$. Хотя плотности таких распределений являются уже знакопеременными функциями, тем не менее, пользуясь методами теории обобщенных функций, удается придать им точный вероятностный смысл.

Ключевые слова и фразы: оператор Римана–Лиувилля, эволюционное уравнение, устойчивое распределение.

1. Введение. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \mathscr{D}_+^\alpha u, \qquad \alpha \notin \mathbf{N}, \tag{1}$$

где $\mathscr{D}_+^\alpha$ — оператор дробного дифференцирования, действующий на функцию f как

$$(\mathscr{D}_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^\infty \frac{f(x-t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} (f^{(k)}(x)/k!)(-t)^k}{t^{1+\alpha}}\, dt \tag{2}$$

(подробнее об операторах дробного дифференцирования см. [6, с. 85]). Для уравнения (1) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x) = \varphi(x). \tag{3}$$

*Санкт-Петербургский государственный университет, лаборатория им. П. Л. Чебышева, Санкт-Петербург, Россия; e-mail: mariyaplat@rambler.ru

1) Работа выполнена при поддержке программы социальных инвестиций «Родные города» ОАО «Газпром нефть» и при поддержке гранта РФФИ № 16-01-00443а.

Уравнения с дробными производными при $\alpha > 2$ рассматривались в работах [9], [10]. Дробные кинетические уравнения были введены для описания гамильтоновой динамики некоторых хаотических систем [13], для изучения термодиффузии во фрактальных и пористых средах [8] и теории турбулентности [13].

Если $0 < \alpha < 1$ или $1 < \alpha < 2$, то решение (1), (3) представляется в виде

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi(x - \xi_\alpha(t)), \tag{4}$$

где $\xi_\alpha(t)$ — устойчивый процесс Леви со спектральной мерой Леви $\Lambda(dx) = (C_\alpha dx/x^{1+\alpha})\mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)$, сосредоточенной на положительной полуоси.

При $\alpha > 2$ такое представление невозможно, так как фундаментальное решение уравнения (1) уже не является вероятностной мерой. В литературе рассматривался вопрос обобщения представления (4) на случай $\alpha > 2$. В частности, в работе [9] строилось представление решения (в рамках теории псевдопроцессов) на основе так называемой «обобщенной» устойчивой случайной величины, введенной в [7]. Эта «обобщенная» случайная величина задается своим преобразованием Фурье, причем это преобразование Фурье не является характеристической функцией никакого вероятностного распределения. Соответственно, данный подход не может рассматриваться как вероятностный, так как в нем в принципе отсутствует понятие вероятностного пространства.

Далее, в работе [12] был предложен другой, уже вероятностный, подход к определению понятия симметричного устойчивого распределения с показателем устойчивости $\alpha > 2$. Данный подход основан на использовании теории обобщенных функций. Именно, симметричное устойчивое распределение определялось как обобщенная функция l (над некоторым классом основных функций), которая на основную функцию φ действует как

$$(l,\varphi) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}\,\varphi * \omega_\varepsilon(\eta_\varepsilon), \tag{5}$$

где ω_ε — специальным образом подобранное семейство быстро осциллирующих функций, $\eta_\varepsilon = \int_{|x|>\varepsilon} x\,\nu(dx)$, а ν — пуассоновская случайная мера на $\mathbf{R}$ с интенсивностью $C_\alpha dx/|x|^{1+\alpha}$. Если $\alpha \in (0,2)$, то в формуле (5) свертка не нужна (можно считать, что ω_ε — это δ-мера), и в этом случае обобщенная функция l есть регулярный функционал вида

$$(l,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) p_\alpha(x)\,dx,$$

где $p_\alpha(x)$ — плотность симметричного устойчивого распределения с показателем α. Для всех прочих α обобщенная функция l является регулярным функционалом со знакопеременной (и, соответственно, невероятностной) плотностью.

Отметим, что данный подход хорошо работает в том случае, если $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m, 4m+2)$; в этом случае преобразование Фурье $\widehat{g}_\alpha$ устойчивого распределения (определяемого формулой (5)) имеет такой же вид, как и в случае $\alpha \in (0;2)$, а именно $\widehat{g}_\alpha(p) = \exp(-c|p|^\alpha)$, где c — положительная постоянная. Для $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m-2; 4m)$ предложенный в [12] метод давал другой, менее естественный ответ, а именно, преобразование Фурье для таких α имело вид

$$\widehat{g}_\alpha(p) = \exp(c_0|p|^\alpha - c_1 p^{4m}),$$

где c_0, c_1 — положительные константы.

В данной работе мы также воспользуемся методом, предложенным в работе [12], но будем рассматривать не одномерные случайные величины, а аналоги устойчивых процессов с независимыми приращениями. В отличие от [12], где мера Леви предполагалась симметричной, нас будет интересовать случай, когда мера Леви сосредоточена на положительной полуоси. При этом, если в случае $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m; 4m+2)$ оказалось достаточно пользоваться только методами работы [12], то в случае $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m-2; 4m)$ мы предлагаем новый метод, основанный на использовании аппарата комплексного анализа, в частности, на теории пространств Харди. Фактически, вместо одного вещественного процесса мы рассматриваем два комплексных процесса. Отметим, что если этот подход использовать для построения одномерных симметричных распределений (как в [12]), то построенный объект будет иметь «правильный» (т.е., как в случае $\alpha \in (0;2)$) вид преобразования Фурье (см. [5])).

Итак, пусть сначала $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m; 4m+1) \cup (4m+1; 4m+2)$. Покажем, как в этом случае мы будем строить вероятностное представление решения задачи Коши (1), (3).

Пусть $\nu(dt, dx)$ — пуассоновская случайная мера на $[0;T] \times \mathbf{R}^+$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt, dx) = dt\,\Lambda(dx) = \frac{dt\,dx}{x^{1+\alpha}}.$$

Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0;T]$, мы обозначим случайный процесс, заданный стохастическим интегралом по мере ν, вида

$$\xi_\varepsilon(t) = \iint_{[0,t]\times[\varepsilon,\infty)} x\,\nu(ds, dx).$$

Для каждого $\varepsilon > 0$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ является сложным пуассоновским процессом, но при $\alpha > 2$ и $t > 0$ у семейства случайных величин $\xi_\varepsilon(t)$ не существует предела при $\varepsilon \to 0$. Тем не менее процесс $\xi_\varepsilon(t)$ может быть использован для представления решения задачи Коши (1), (3).

А именно, для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных

$$u_\varepsilon(t, x) = \mathbf{E}\,\left[\left(\varphi * \omega_\varepsilon^t\right)(x - \xi_\varepsilon(t))\right],$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ задается своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^{\,t}(p) = \exp\biggl(-t\int_\varepsilon^\infty \biggl(\sum_{k=1}^{[\alpha]} \frac{i^k p^k x^k}{k!}\biggr)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\biggr). \qquad (6)$$

В настоящей работе показано, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (1), (3). Таким образом, для решения задачи Коши (1), (3) мы получаем представление

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}\left[\left(\varphi * \omega_\varepsilon^t\right)(x - \xi_\varepsilon(t))\right].$$

Рассмотрим теперь случай $\alpha \in \bigcup_{m=1}^\infty (4m-2;4m-1)\cup(4m-1;4m)$. В данном случае предложенный выше метод не работает, так как для таких значений α функция (6) сверхэкспоненциально возрастает на бесконечности и, соответственно, для нее не определено обратное преобразование Фурье. В данном случае для построения вероятностного представления решения задачи Коши мы привлечем некоторые идеи комплексного анализа. Нам понадобится ввести несколько обозначений. Через P_+ обозначим проектор Рисса, действующий из $L_2(\mathbf{R})$ на пространство Харди H_+^2, а через P_- — проектор Рисса, действующий из $L_2(\mathbf{R})$ на пространство Харди H_-^2. Хорошо известно (см. [4]), что носитель преобразования Фурье граничного значения функции из H_-^2 лежит на положительной полуоси, а носитель преобразования Фурье граничного значения функции из H_+^2 содержится на отрицательной полуоси. Далее, для $M > 0$ через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций ψ таких, что носитель преобразования Фурье $\widehat{\psi}$ содержится в отрезке $[-M;M]$, т.е. $\widehat{P_M\psi} = \widehat{\psi}\cdot\mathbf{1}_{[-M;M]}$.

Возьмем два комплексных числа $\sigma_+ = \exp(i\pi/\alpha)$ и $\sigma_- = \exp(-i\pi/\alpha)$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, σ_- лежит в нижней полуплоскости и, кроме того, $\sigma_+^\alpha = \sigma_-^\alpha = -1$. Вместо одного случайного процесса $\xi_\varepsilon(t)$ мы теперь рассмотрим два комплексных процесса $\sigma_+\xi_\varepsilon(t)$ и $\sigma_-\xi_\varepsilon(t)$. Далее, сначала мы по начальному данному φ построим новую функцию φ_M, полагая $\varphi_M = P_M\varphi$. Функция φ_M уже будет целой аналитической функцией экспоненциального типа. Число M мы будем выбирать в зависимости от ε, а именно $M = M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$, где $0 < \delta \leqslant \alpha/(1+[\alpha])$. Далее, используя проекторы Рисса, представим функцию φ_M в виде суммы двух функций; одна имеет ограниченное аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а вторая — в нижнюю. Соответственно, для одной из них будем пользоваться одним комплексным процессом, для другой — другим.

В настоящей работе показано, что если начальное данное φ принадлежит классу $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ для некоторого $l \geqslant 0$, то функция

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\left[(P_-\varphi_M * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon(t)) + (P_+\varphi_M * \omega_\varepsilon^t)\left(x - \sigma_-\xi_\varepsilon(t)\right)\right],$$

где

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\left(-t\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \left(\sum_{k=1}^{[\alpha]} \frac{i^k\sigma_+^k p^k x^k}{k!}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right), & p \geqslant 0,\\ \exp\left(-t\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \left(\sum_{k=1}^{[\alpha]} \frac{i^k\sigma_-^k p^k x^k}{k!}\right)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\right), & p < 0 \end{cases}$$

по норме $W_2^l(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (1), (3). Таким образом, для таких α для решения задачи Коши мы получаем представление

$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\mathbf{E}\left[(P_-\varphi_M * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon(t)) + (P_+\varphi_M * \omega_\varepsilon^t)\left(x - \sigma_-\xi_\varepsilon(t)\right)\right].$$

Далее, отметим, что в построенном выше представлении решения задачи Коши мы брали за основу известное представление Леви–Хинчина устойчивых случайных величин в виде стохастического интеграла по пуассоновской случайной мере. Но устойчивые распределения при $\alpha \in (0;2)$ могут быть получены и другим способом. А именно, они возникают как предельные распределения в схеме суммирования независимых случайных величин со степенной асимптотикой хвостового распределения. В настоящей работе также доказан естественный аналог такой предельной теоремы.

Рассмотрим $\{\xi_i\}_{i=1}^\infty$ — последовательность независимых, одинаково распределенных, неотрицательных случайных величин и $\eta(t)$ — пуассоновский процесс интенсивности единица, не зависящий от последовательности $\{\xi_i\}$. Процесс $\eta(t)$ играет вспомогательную роль, в данной задаче удобнее рассматривать суммы случайного числа случайных величин.

Далее, обозначим через $\mathscr{P}$ распределение случайной величины ξ_1. Предположим, что распределение случайной величины ξ_1 при $x > 1$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}(\xi_1 > x) = \frac{1}{\alpha x^\alpha}\,(1 + o(1)).$$

Обозначим $\mu_k = \mathbf{E}\,\xi_1^k$ момент порядка k случайной величины ξ_1 для $k < \alpha$. Для каждого натурального n определим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0;T]$, полагая

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{\eta(nt)} \xi_j.$$

Заметим, что процесс ζ_n не имеет слабого предела при $n\to\infty$. Нас интересует случай $\alpha>2$, когда распределение $\mathscr{P}$ принадлежит области притяжения нормального закона, что означает, что слабый предел будет существовать (после центрирования) в другой, более сильной нормировке.

В настоящей работе показано, что можно аппроксимировать решение задачи Коши с помощью процесса $\zeta_n(t)$, аналогично тому, как мы это делали с помощью процесса $\xi_\varepsilon(t)$.

Как и выше, через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций, у которых носитель преобразования Фурье лежит в $[-M;M]$. Положим $\varphi_M=P_M\varphi$, причем M мы будем выбирать зависящим от n.

В случае, если $\alpha\in\bigcup_{m=1}^{\infty}(4m;4m+1)\cup(4m+1;4m+2)$, а $\varphi\in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, мы выберем $M=M(n)=n^{1/\alpha}$ и покажем, что функция

$$u_n(t,x)=\mathbf{E}\left[\left(\varphi_M*\varkappa_n^t\right)(x-\zeta_n(t))\right],$$

где преобразование Фурье $\widehat{\varkappa}_n^t$ функции $\varkappa_n^t$ задается формулой

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p)=\exp\biggl(-nt\Bigl(\frac{\mu_1 ip}{n^{1/\alpha}}+\frac{\mu_2(ip)^2}{2n^{2/\alpha}}+\dots+\frac{\mu_{[\alpha]}(ip)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Bigr)\biggr),$$

по норме $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение задачи Коши (1), (3).

В случае $\alpha\in\cup_{m=1}^{\infty}(4m-2;4m-1)\cup(4m-1;4m)$ мы покажем, что функция

$$u_n(t,x)=\mathbf{E}\left[(P_-\varphi_M*\varkappa_n^t)(x-\sigma_+\zeta_n(t))+\left(P_+\varphi_M*\varkappa_n^t\right)(x-\sigma_-\zeta_n(t))\right],$$

где $M=M(n)=n^{(1-\delta)/\alpha}$, $0<\delta\leqslant\alpha/(1+[\alpha])$, и

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p)=\begin{cases}\exp\biggl(-nt\Bigl(\dfrac{\mu_1 ip\sigma_+}{n^{1/\alpha}}+\dfrac{\mu_2(ip\sigma_+)^2}{2n^{2/\alpha}}+\dots+\dfrac{\mu_{[\alpha]}(ip\sigma_+)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Bigr)\biggr), & p\geqslant 0,\\[2ex] \exp\biggl(-nt\Bigl(\dfrac{\mu_1 ip\sigma_-}{n^{1/\alpha}}+\dfrac{\mu_2(ip\sigma_-)^2}{2n^{2/\alpha}}+\dots+\dfrac{\mu_{[\alpha]}(ip\sigma_-)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\Bigr)\biggr), & p<0\end{cases}$$

приближает решение задачи Коши (1), (3) по норме $W_2^l(\mathbf{R})$, $l\geqslant 0$.

Отметим еще, что в правой части (1) вместо оператора $\mathscr{D}_+^\alpha$ можно поставить оператор $\mathscr{D}_-^\alpha$ (см. [6, с. 85]). Аналогичные результаты можно получить теми же методами и для оператора $\mathscr{D}_-^\alpha$.

2. Обозначения. Константы мы всегда обозначаем буквой C, причем одна и та же буква C может обозначать разные константы, даже в пределах одной выкладки.

Прямое преобразование Фурье определяется как

$$\widehat{\varphi}(p)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{ipx}\,dx,$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(p) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\widehat{\varphi}(x)e^{-ipx}\,dx.$$

Для любого $M > 0$ через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций таких, что носитель функции $\widehat{\psi}$ содержится в отрезке $[-M; M]$. Для $\psi \in L_2(\mathbf{R})$ имеем

$$P_M\psi(x) = \psi * D_M(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-M}^{M}\widehat{\psi}(p)e^{-ipx}\,dp, \tag{7}$$

где $\widehat{\psi}$ — прямое преобразование Фурье функции ψ, а D_M — ядро Дирихле

$$D_M(x) = \frac{1}{\pi}\,\frac{\sin Mx}{x}.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ обозначим соболевское пространство функций, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно. В пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ выберем норму (эквивалентную стандартной)

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbf{R})} = \int_{\mathbf{R}}(1+|p|^{2k})|\widehat{\psi}(p)|^2\,dp.$$

Для ограниченного оператора $A\colon W_2^k(\mathbf{R}) \to W_2^l(\mathbf{R})$ через $\|A\|_{W_2^k\to W_2^l}$ обозначим соответствующую операторную норму.

Для $\alpha > 0$ обозначим $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ соответственно целую и дробную часть числа α.

Пусть $C_b^\infty(\mathbf{R})$ обозначает множество бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными производными любого порядка.

Оператор дробной производной определяется формулой (см. [6, теорема 5.8, с. 99])

$$(\mathscr{D}_+^\alpha f)(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^\infty \frac{f(x-t) - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-t)^k}{t^{1+\alpha}}\,dt,$$

где $\alpha \neq 0, 1, 2, \ldots$.

Оператор дробного дифференцирования является псевдодифференциальным оператором. Легко показать, что для преобразования Фурье $\mathscr{F}$ дробной производной справедливо

$$\mathscr{F}(\mathscr{D}_+^\alpha\varphi) = (-ip)^\alpha\widehat{\varphi}(p), \tag{8}$$

где $(-ip)^\alpha = |p|^\alpha\exp(-(\alpha\pi i/2)\ \mathrm{sign}\ (p))$, т.е. оператор $\widehat{\mathscr{D}_+^\alpha}$ действует как оператор умножения на $(-ip)^\alpha$.

Далее напомним определение классов Харди H^2_+ и H^2_-. Функция F, аналитическая в верхней (нижней) полуплоскости комплексной плоскости, принадлежит классу H^2_+ (соответственно H^2_-), если существует константа C, $C < \infty$ такая, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x+iy)|^2 dx \leqslant C,$$

при всех $y > 0$ ($y < 0$). Хорошо известно, что если $F(t) \in L^2(\mathbf{R})$ — функция, являющаяся граничным значением функции из H^2_+ (или H^2_-), то $\widehat{F}(\lambda) = 0$ при почти всех $\lambda \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant 0$). Кроме того, верно и обратное утверждение. А именно, если $\Phi \in L_2(\mathbf{R})$ и $\Phi(\lambda) = 0$ почти всюду при $\lambda \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant 0$), то существует функция F из H^2_+ (или H^2_-), для которой $\widehat{F}(\lambda) = \Phi(\lambda)$.

3. Вероятностные представления решения при $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m; 4m+1) \cup (4m+1; 4m+2)$**.** Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Gamma(-\alpha)\mathscr{D}^{\alpha}_{+}u, \tag{9}$$

где оператор $\mathscr{D}^{\alpha}_{+}$ — оператор дробного дифференцирования (2). Для уравнения (9) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{10}$$

где функция φ принадлежит пространству $L_2(\mathbf{R})$. В этом разделе мы рассмотрим только случай, когда

$$\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m; 4m+1) \cup (4m+1; 4m+2). \tag{11}$$

Отметим здесь, что случай

$$\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m-2; 4m-1) \cup (4m-1; 4m) \tag{12}$$

является технически более сложным и будет рассмотрен в следующем разделе 4.

Решение задачи (9), (10) для α, удовлетворяющих (11), задается формулой

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\, \widehat{\varphi}(p) e^{-ipx} e^{-t|p|^{\alpha} c_2(p)},$$

где $c_2(p) = -\Gamma(-\alpha)\exp(-(\alpha\pi i/2)\operatorname{sign}(p))$, что непосредственно следует из (8). Заметим, что $\operatorname{Re} c_2(p)$ не зависит от p и при рассматриваемых значениях α справедливо неравенство $b = \operatorname{Re} c_2(p) > 0$.

Пусть $\nu(dt, dx)$ — пуассоновская случайная мера на $\mathbf{R}^+ \times [0; T]$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\,\nu(dt, dx) = dt\,\Lambda(dx) = \frac{dt\,dx}{x^{1+\alpha}}, \qquad \alpha > 2, \quad \alpha \notin \mathbf{N}. \tag{13}$$

Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0; T]$, обозначим случайный процесс

$$\xi_\varepsilon(t) = \iint_{[0;t]\times[\varepsilon;+\infty)} x\,\nu(ds, dx). \tag{14}$$

По теореме Кэмпбелла (см. [3]) характеристическая функция $f_{\xi_\varepsilon(t)}$ случайной величины $\xi_\varepsilon(t)$ для любого t равна

$$f_{\xi_\varepsilon(t)}(p) = \exp\biggl(t\int_\varepsilon^\infty (e^{ipx} - 1)\,d\Lambda(x)\biggr).$$

Далее, определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t, x)$

$$u_\varepsilon(t, x) = \mathbf{E}\left[\left(\varphi * \omega_\varepsilon^t\right)(x - \xi_\varepsilon(t))\right],$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ задается своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\biggl(-t\int_\varepsilon^\infty \biggl(\sum_{k=1}^{[\alpha]} \frac{i^k p^k x^k}{k!}\biggr)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\biggr). \tag{15}$$

Отметим, что при таких α это быстро убывающая функция. Действительно, при $\alpha \in \bigcup_{m=1}^\infty (4m; 4m{+}1)$ коэффициент при старшей степени p в показателе экспоненты отрицателен. При $\alpha \in \bigcup_{m=1}^\infty (4m+1; 4m+2)$ коэффициент при старшей степени p чисто мнимый, но зато предыдущий коэффициент (при p^{4m}) — отрицательный.

Теорема 1. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u(t, x)$ — *решение задачи Коши* (9), (10), *а число* α *удовлетворяет условию* (11). *Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$ *такая, что*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_\varepsilon(t, \cdot) - u(t, \cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant CT\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}\varepsilon^{1-\{\alpha\}},$$

где $\{\alpha\} = \alpha - [\alpha]$.

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. А именно, пусть A — ограниченный оператор в некотором гильбертовом пространстве. Через $U_A(t)$, $t \geqslant 0$, обозначим полугруппу (ограниченных) операторов

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B — возмущение оператора A такое, что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [2, гл. IX, § 2, п. 1, с. 614]):

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A}\, d\tau. \tag{16}$$

Положим $A = A_\varepsilon$, $B = \Gamma(-\alpha)\mathscr{D}_+^\alpha - A_\varepsilon$, где оператор A_ε действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$ как

$$A_\varepsilon\psi(x) = \int_\varepsilon^\infty \left(\psi(x-y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\psi^{(k)}(x)(-y)^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

В этих обозначениях $A + B = \Gamma(-\alpha)\mathscr{D}_+^\alpha$. Заметим, что для любого положительного k и $t > 0$ справедливы неравенства для операторных норм

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1, \tag{17}$$

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{18}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$.

Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{B\varphi}(p) &= \int_{\mathbf{R}} dx\, \exp(ipx)\left[\int_0^\varepsilon \left(\varphi(x-y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\varphi^{(k)}(x)(-y)^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right]\\ &= \widehat{\varphi}(p)\int_0^\varepsilon \left(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{i^k p^k y^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\\ &= \widehat{\varphi}(p)|p|^\alpha \int_0^{\varepsilon|p|} \left(\exp(i\cdot\operatorname{sign}(p)y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(i\cdot\operatorname{sign}(p)y)^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.\end{aligned}$$

Если $|p| < 1/\varepsilon$, то, оценивая в последней формуле остаточный член в разложении Тейлора, получаем

$$|p|^\alpha\left|\int_0^{\varepsilon|p|} \left(\exp(i\cdot\operatorname{sign}(p)y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(i\cdot\operatorname{sign}(p)y)^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right| \leqslant C|p|^{[\alpha]+1}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Если $|p| > 1/\varepsilon$, то, оценивая подынтегральное выражение по модулю и заменяя верхний предел на бесконечность, получаем оценку

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^\alpha.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} &= \int_{\mathbf{R}} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2\\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int_{|p|<1/\varepsilon} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2([\alpha]+1)}\\ &\quad + C\int_{|p|>1/\varepsilon} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2\alpha}.\end{aligned}$$

Таким образом, справедлива оценка

$$\begin{aligned}
\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W^l_2} &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int_{\mathbf{R}} dp\,\left(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)}\right)|\widehat{\varphi}(p)|^2 \\
&\quad + C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int_{|p|>1/\varepsilon} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2\alpha+2(1-\{\alpha\})} \\
&\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \qquad (19)
\end{aligned}$$

Заметим теперь, что утверждение теоремы следует из (17), (18) и (19).

Теорема 1 доказана.

Далее, в вероятностном представлении решения задачи Коши заменим невероятностный аналог устойчивой случайной величины ее аппроксимацией случайным блужданием.

Пусть $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность независимых, одинаково распределенных, неотрицательных случайных величин. Обозначим через $\mathscr{P}$ распределение случайной величины ξ_1. Предположим, что распределение случайной величины ξ_1 при $x > 1$ удовлетворяет условию

$$\mathbf{P}(\xi_1 > x) = \frac{1}{\alpha x^{\alpha}}\,(1 + h(x)), \qquad (20)$$

причем функция $|h(x)| \leqslant C/x^{\beta}$, где

$$\beta > 1 - \{\alpha\}. \qquad (21)$$

Пусть $\eta(t)$, $t \in [0;\infty)$ — независимый от последовательности $\{\xi_i\}$ пуассоновский процесс с интенсивностью единица.

Рассмотрим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0;T]$, где

$$\zeta_n(t) = \frac{1}{n^{1/\alpha}}\sum_{j=1}^{\eta(nt)}\xi_j. \qquad (22)$$

Напомним, что для любого $M > 0$ через P_M мы обозначаем проектор в $L_2(\mathbf{R})$, действующий по формуле (7). Далее число M будем выбирать в зависимости от n, т.е. $M = M(n)$. Как и раньше, обозначим $\varphi_M = P_M\varphi$.

Для натуральных n определим функцию двух переменных

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}\left[(\varphi_M * \varkappa_n^t)(x - \zeta_n(t))\right],$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \exp\left(-nt\left(\frac{\mu_1 ip}{n^{1/\alpha}} + \frac{\mu_2(ip)^2}{2n^{2/\alpha}} + \dots + \frac{\mu_{[\alpha]}(ip)^{[\alpha]}}{[\alpha]!\,n^{[\alpha]/\alpha}}\right)\right).$$

Так же, как и в (15), функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p)$ — это быстро убывающая функция.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(n) = n^{1/\alpha}$, $u(t,x)$ — *решение задачи Коши* (9), (10), *а число* α *удовлетворяет условию* (11). *Тогда существует* $C = C(\alpha) > 0$ *такое, что*

$$\sup_{t\in[0;T]} \|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\Big(T + \frac{1}{n}\Big)\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Доказательство. Введем обозначения для некоторых операторов. Обозначим $A = A_n$, $B = \Gamma(-\alpha)\mathscr{D}_+^\alpha - A_n$, где оператор A_n действует на $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$ следующим образом:

$$A_n\psi(x) = n\int_0^\infty \left(\psi\Big(x - \frac{y}{n^{1/\alpha}}\Big) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\psi^{(k)}(x)(-y)^k}{n^{k/\alpha}k!}\right) d\mathscr{P}(y).$$

Тогда $A + B = \Gamma(-\alpha)\mathscr{D}_+^\alpha$.

Представим

$$\begin{aligned} e^{tA}\varphi_M(x) - e^{t(A+B)}\varphi(x) &= (e^{tA} - e^{t(A+B)})\varphi_M(x) \\ &\quad - e^{t(A+B)}(I - P_M)\varphi(x) = V_1 + V_2. \end{aligned}$$

Оценим норму слагаемого V_2. Имеем

$$\begin{aligned} \|V_2\|_{W_2^l}^2 &\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\left(Ce^{-2bM^\alpha t}\int_{|p|>M}(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2\,dp\right) \\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\int_{|p|>M}\left(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)}\right)|\widehat{\varphi}(p)|^2\,dp \\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\,\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}}^2 = \frac{C}{n^{2([\alpha]+1)\alpha}}\,\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}}^2. \end{aligned} \tag{23}$$

Для оценки нормы слагаемого V_1 воспользуемся формулой (16).

Прежде всего заметим, что для любого положительного k и $t > 0$ справедливы неравенства

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1, \tag{24}$$

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{25}$$

Осталось оценить $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$. Обозначим

$$S(y) = e^{iy} - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{i^k y^k}{k!}.$$

Имеем

$$\widehat{B\varphi_M}(p) = \int_{-M}^M dx\exp(ipx)\Big[\int_0^\infty\left(\varphi(x-y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{\varphi^{(k)}(x)(-y)^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

$$- n \int_0^\infty \left(\varphi\left(x - \frac{y}{n^{1/\alpha}} \right) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{\varphi^{(k)}(x)(-y)^k}{n^{k/\alpha} k!} \right) d\mathscr{P}(y) \Bigg]$$

$$= -\widehat{\varphi_M}(p) \left[c_2(p)|p|^\alpha + n \int_0^\infty S\left(\frac{py}{n^{1\alpha}} \right) d\mathscr{P}(y) \right]. \qquad (26)$$

Заметим, что интегрирование ведется по множеству $|p| \leqslant M$, значит, в области интегрирования справедливо неравенство

$$\frac{|p|}{n^{1/\alpha}} \leqslant \frac{M}{n^{1/\alpha}} \leqslant 1. \qquad (27)$$

Представим выражение, стоящее в квадратных скобках в формуле (26) в виде

$$n \int_0^1 S\left(\frac{py}{n^{1\alpha}} \right) d\mathscr{P}(y) + n \int_1^{+\infty} S\left(\frac{py}{n^{1\alpha}} \right) d\mathscr{P}(y) + c_2(p)|p|^\alpha.$$

В силу (27) и условия $|y| \leqslant 1$ справедливо неравенство

$$\left| S\left(\frac{py}{n^{1/\alpha}} \right) \right| \leqslant C \frac{|p|^{[\alpha]+1} y^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}. \qquad (28)$$

Тогда

$$\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}} \int_0^1 y^{[\alpha]+1} \, d\mathscr{P}(y) \leqslant C \frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Из условия (21) следует, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\left| \int_1^\infty S\left(\frac{py}{n^{1/\alpha}} \right) \left(d\mathscr{P}(y) - \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \right) \right|$$
$$\leqslant C \int_1^\infty \max \left(\frac{|p|^{[\alpha]} y^{[\alpha]-1}}{n^{[\alpha]/\alpha}}, \frac{|p|^{[\alpha]+1} y^{[\alpha]}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}} \right) \frac{dy}{y^{\alpha+\beta}} \leqslant \frac{C|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}. \qquad (29)$$

Воспользовавшись простым неравенством

$$|p|^{[\alpha]+1} + |p|^\alpha \leqslant 2(1 + |p|^{[\alpha]+1}),$$

получим

$$\begin{aligned} \|\widehat{B\varphi_M}\|^2_{W_2^l} &= \int_{|p|<M} dp (1 + |p|^{2l}) |\widehat{B\varphi}(p)|^2 \\ &\leqslant \frac{C}{n^{2(1-\{\alpha\})/\alpha}} \int_{\mathbf{R}} dp (1 + |p|^{2(l+[\alpha]+1)}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \\ &\leqslant \frac{C}{n^{2(1-\{\alpha\})/\alpha}} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \end{aligned} \qquad (30)$$

Заметим, что утверждение теоремы следует из соотношений (23), (24), (25) и (30).

Теорема 2 доказана.

4. Вероятностные представления решения при $\alpha \in \bigcup_{m-1}^{\infty}(4m-2;4m-1)\cup(4m-1;4m)$. Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\Gamma(-\alpha)\mathscr{D}_{+}^{\alpha} u, \tag{31}$$

где $\mathscr{D}_{+}^{\alpha}$ — оператор дробного дифференцирования (2). Для уравнения (31) рассмотрим задачу Коши

$$u(0,x) = \varphi(x), \tag{32}$$

здесь функция φ принадлежит пространству $L_2(\mathbf{R})$.

Решение этой задачи в случае $\alpha \in \bigcup_{m=1}^{\infty}(4m-2;4m-1)\cup(4m-1;4m)$ имеет вид

$$u(t,x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dp\,\widehat{\varphi}(p)e^{-ipx}e^{-t|p|^{\alpha}c_0(p)}, \tag{33}$$

где $c_0(p) = \Gamma(-\alpha)\exp(-(\alpha\pi i/2)\,\mathrm{sign}\,(p))$, что непосредственно следует из (8). Заметим, что $\mathrm{Re}\, c_0(p)$ не зависит от p и при таких α справедливо $b = \mathrm{Re}\, c_0(p) > 0$.

Пусть $\nu(dt,dx)$ — пуассоновская случайная мера на $[0;T]\times\mathbf{R}^{+}$ с интенсивностью $\mathbf{E}\,\nu(dt,dx) = dt\,\Lambda(dx) = dt\,dx/x^{1+\alpha}$, $\alpha > 2$ и $\alpha \notin \mathbf{N}$.

Напомним, что для $\varepsilon > 0$ случайная величина $\xi_{\varepsilon}(t)$ определяется формулой (14). В отличие от предыдущего случая, будем рассматривать $\sigma\xi_{\varepsilon}(t)$, где σ — уже комплексная константа. По теореме Кэмпбелла (см. [3])

$$\mathbf{E}\,\exp(ip\sigma\xi_{\varepsilon}(t)) = \exp\left(t\int_{\varepsilon}^{\infty}(e^{i\sigma px}-1)d\Lambda(x)\right).$$

Заметим, что интеграл сходится, если $p \geqslant 0$ и $\mathrm{Im}\,\sigma \geqslant 0$ или $p \leqslant 0$ и $\mathrm{Im}\,\sigma \leqslant 0$.

Рассмотрим проекторы Рисса $P_{\pm}$, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2_{\pm}$.

Любую функцию $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ можно представить как

$$\varphi(x) = P_{+}\varphi(x) + P_{-}\varphi(x) = \varphi_{+}(x) + \varphi_{-}(x),$$

где носитель преобразования Фурье функции φ_{+} сосредоточен на отрицательной полуоси, а носитель преобразования Фурье φ_{-} — на положительной полуоси. Заметим, что $P_{+}\varphi$ — аналитическая ограниченная функция в верхней полуплоскости, а $P_{-}\varphi$ — аналитическая ограниченная функция в нижней.

Напомним, что для любого $M > 0$ через P_M обозначен проектор в $L_2(\mathbf{R})$, действующий по формуле (7). Далее мы будем выбирать число M в зависимости от ε, т.е. $M = M(\varepsilon)$, поэтому в обозначениях не будем указывать зависимость от M. Как и раньше, обозначим $\varphi_M = P_M\varphi$.

Положим $\sigma_+ = \exp(i\pi/\alpha)$ и $\sigma_- = \exp(-i\pi/\alpha)$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- — в нижней.

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t,x)$

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big((\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon(t)) \\ + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon(t))\Big), \tag{34}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \Big(\sum_{k=1}^{[\alpha]} \frac{i^k\sigma_+^k p^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\displaystyle\int_\varepsilon^\infty \Big(\sum_{k=1}^{[\alpha]} \frac{i^k\sigma_-^k p^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{1+\alpha}}\Big), & p < 0. \end{cases} \tag{35}$$

Так как $P_-\varphi$ — аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+\varphi$ аналитична в верхней полуплоскости, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ корректно определена. Заметим также, что при таких α и таком выборе $\sigma_\pm$ функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, *число* α *удовлетворяет условию* (12), $M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$, $0 < \delta \leqslant \alpha/([\alpha]+1)$. *Пусть* $u(t,x)$ — *решение задачи Коши* (31), (32), *а функция* $u_\varepsilon(t,x)$ *определяется* (34). *Тогда существует положительная константа* $C = C(\alpha)$ *такая, что справедливо неравенство*

$$\sup_{t\in[0,T]} \|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C(T + \varepsilon^{\alpha-\delta(1+[\alpha])})\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}.$$

Доказательство. Определим операторы $A_\varepsilon^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon^\pm\psi(x) = \int_\varepsilon^\infty \Big(\psi^\pm(x - \sigma_\mp y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(\psi^\pm)^{(k)}(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть $A^\pm = A_\varepsilon^\pm$, $B^\pm = -\Gamma(-\alpha)\mathscr{D}_+^\alpha P_\pm - A_\varepsilon^\pm$. Тогда $A^\pm + B^\pm = -\Gamma(-\alpha)\mathscr{D}_+^\alpha P_\pm$.

Заметим, что справедливо неравенство

$$\Big\|e^{t(A^\pm+B^\pm)}P_\pm\Big\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{36}$$

Далее, проведем преобразование

$$e^{tA^\pm}P_M\varphi^\pm(x) - e^{t(A^\pm+B^\pm)}\varphi^\pm(x) = \Big(e^{tA^\pm} - e^{t(A^\pm+B^\pm)}\Big)P_M\varphi^\pm(x) \\ - e^{t(A^\pm+B^\pm)}(I - P_M)\varphi^\pm(x) = V_1^\pm + V_2^\pm.$$

Для оценки норм слагаемых $V_1^{\pm}$ воспользуемся формулой Дюамеля (16) для операторов $A^{\pm}$ и $B^{\pm}$.

Рассмотрим

$$e^{tA^{\pm}}\widehat{P_M}\varphi^{\pm}(p) = \widehat{\varphi^{\pm}_M}(p)I^{\pm}(p), \tag{37}$$

где

$$I^{+}(p) = \exp\left(- t|p|^{\alpha} \int_{|p|\varepsilon\sigma_-}^{+\sigma_+\infty} \left(e^{-iy} - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(-iy)^k}{k!}\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right),$$

$$I^{-}(p) = \exp\left(- t|p|^{\alpha} \int_{|p|\varepsilon\sigma_+}^{\infty+\sigma_+} \left(e^{iy} - \sum_{k=0}^{[\alpha]} \frac{(iy)^k}{k!}\right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right).$$

Обозначим, как и раньше, $S(y) = e^{iy} - \sum_{k=0}^{[\alpha]}(i^k y^k/k!)$. Рассмотрим замкнутые контуры (рис. 1)

$$\begin{aligned} \Gamma_{\pm} = & \Big\{z \in \mathbf{C}\colon |z| \in [\,|p|\,\varepsilon, R],\ \arg z = \pm\,\pi/\alpha\Big\} \\ & \cup \{z \in \mathbf{C}\colon |z| = R,\ \arg z \in [\pm\,\pi/\alpha; 0]\} \\ & \cup \{z \in \mathbf{C}\colon |z| \in [R, |p|\,\varepsilon],\ \arg z = 0\} \\ & \cup \{z \in \mathbf{C}\colon |z| = |p|\,\varepsilon,\ \arg z \in (0; \pm\,\pi/\alpha)\} \end{aligned}$$

и интегралы по замкнутым контурам

$$J^{\pm} = \int_{\Gamma_{\pm}} S(\pm y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}.$$

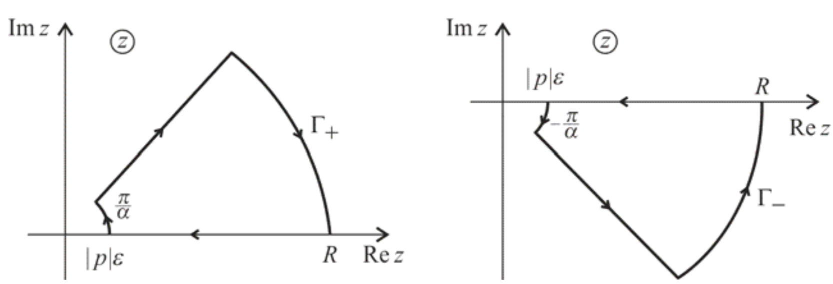

Рис. 1.

Заметим, что интеграл по большой дуге при $R \to \infty$ стремится к нулю, а внутри контура особых точек нет, так что интеграл по контуру $\Gamma_{\pm}$ равен нулю. Далее будем рассматривать интеграл только по Γ_+ (для интеграла по контуру Γ_- аналогично). Таким образом,

$$\begin{aligned} e^{t\widehat{A^-}}\varphi^-_M(p) = \widehat{\varphi^-_M}(p) \exp\left(- t|p|^{\alpha} \int_{p\varepsilon}^{\infty} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right) \\ \times \exp\left(t|p|^{\alpha} \int_{\gamma_+} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right), \end{aligned}$$

где контур $\gamma_+ = \{z \in \mathbf{C}\colon |z| = p\varepsilon,\ \arg z \in (0;\pi/\alpha)\}$.

В интеграле по контуру γ_+ сделаем замену переменной $y = p\varepsilon e^{i\varphi}$, где $\varphi \in (0;\pi/\alpha)$. Заметим, что функция $S(z)$ является целой функцией и в окрестности нуля допускает оценку $|S(z)| \leqslant C|z|^{1+[\alpha]}$. Используя неравенство $0 < p < M(\varepsilon) = \varepsilon^{\delta-1}$, получаем

$$\begin{aligned}\left|\exp\left(t|p|^\alpha \int_{\gamma_+} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right)\right| &\leqslant \exp\Bigl(Ctp^{[\alpha]+1}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}\Bigr)\\ &= \exp\Bigl(Ct(p\varepsilon)^{[\alpha]+1-\alpha}p^\alpha\Bigr). \qquad (38)\end{aligned}$$

Выбирая ε достаточно малым, получаем

$$\begin{aligned}\|e^{tA^-}\widehat{\varphi_M^-}(p)\|^2_{W_2^k} &\leqslant \int_0^M |\varphi(p)|^2|p|^{2k}\exp\Bigl(2Ctp^\alpha\varepsilon^{\delta(1-\{\alpha\})}\Bigr)\\ &\qquad\times\exp\biggl(-2tp^\alpha\int_1^\infty S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\biggr)\,dp\\ &\leqslant \int_0^M |\varphi(p)|^2|p|^{2k}\,dp \leqslant \|P_M\varphi^-\|^2_{W_2^k}.\end{aligned}$$

Аналогичная оценка получается для оператора $e^{tA^+}P_MP_+$. Таким образом, имеем

$$\|e^{tA^\pm}P_MP_\pm\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \qquad (39)$$

Осталось оценить $\|B^\pm P_MP_\pm\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$.

Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{B^\pm\varphi_M^\pm}(p) &= \int_{\mathbf{R}} dx\,\exp(ipx)\\ &\quad\times\biggl[\int_\varepsilon^\infty\biggl(\varphi_M^\pm(x-\sigma_\mp y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(\varphi_M^\pm)^{(k)}(x)(-\sigma_\mp y)^k}{k!}\biggr)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\\ &\quad+\int_0^\infty\biggl(\varphi_M^\pm(x-y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(\varphi_M^\pm)^{(k)}(x)(-y)^k}{k!}\biggr)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\biggr]\\ &= \widehat{\varphi_M^\pm}(p)\biggl(-|p|^\alpha\int_{\varepsilon|p|\sigma_\mp}^{+\sigma_\mp\infty} S(\mathrm{sign}\,(p)\cdot y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + |p|^\alpha c_0(p)\biggr).\end{aligned}$$

Повторяя рассуждения о повороте контура, получаем

$$\widehat{B^-\varphi_M^-}(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p)|p|^\alpha\biggl(\int_{\gamma_+} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}} + \int_0^{|p|\varepsilon} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\biggr).$$

Используя неравенство

$$\biggl|\int_0^{\varepsilon|p|} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\biggr| \leqslant C(|p|\varepsilon)^{1-\{\alpha\}},$$

аналогично (38), получаем, что $|\widehat{B^{\pm}\varphi_{\pm}}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)||p|^{[\alpha]+1}\varepsilon^{1-\{\alpha\}}$.

Тогда

$$\begin{aligned}\|B^{\pm}\widehat{P_M}\varphi^{\pm}\|^2_{W_2^l} &= \int_{|p|<M} dp(1+|p|^{2l})|\widehat{B^{\pm}\varphi}^{\pm}(p)|^2 \\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\int_{|p|<M} dp\,(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi}(p)|^2|p|^{2([\alpha]+1)} \\ &\leqslant C\varepsilon^{2(1-\{\alpha\})}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \end{aligned} \tag{40}$$

Напомним, что b обозначает вещественную часть $c_0(p)$, которая, как уже было отмечено, положительна и не зависит от p. Тогда для норм

$$\begin{aligned}\|V_2^{\pm}\|^2_{W_2^l} &\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\left(e^{-2bM^{\alpha}t}\int_{|p|>M}(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|^2\,dp\right) \\ &\leqslant \frac{1}{M^{2([\alpha]+1)}}\int_{|p|>M}(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)})|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|^2\,dp \\ &\leqslant \frac{1}{M^{2([\alpha]+1)}}\,\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}} \leqslant \varepsilon^{2(1+[\alpha])(1-\delta)}\,\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \end{aligned} \tag{41}$$

Заметим, что из (36), (39), (40) и (41) следует утверждение теоремы. Теорема 3 доказана.

Как и выше, рассмотрим случайный процесс $\zeta_n(t)$, $t \in [0;T]$, определенный (22). Предположим, что распределение случайной величины ξ_1 при $x > 1$ удовлетворяет условию (20).

Из теоремы Кэмпбелла (см. [3]) имеем

$$\mathbf{E}\,e^{ip\sigma\varsigma_n(t)} = \exp\left(nt\int_0^{\infty}(e^{i\sigma p y n^{-1/\alpha}}-1)\,d\mathscr{P}(y)\right). \tag{42}$$

Заметим, что интеграл сходится, если p и $\operatorname{Im}\sigma$ имеют одинаковые знаки.

Положим $\sigma_+ = \exp(i\pi/\alpha)$ и $\sigma_- = \exp(-i\pi/\alpha)$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, а σ_- — в нижней.

Для натуральных n определим функцию $u_n(t,x)$

$$u_n(t,x) = \mathbf{E}\left[(\varphi_M^- * \varkappa_n^t)(x-\sigma_+\zeta_n(t)) + (\varphi_M^+ * \varkappa_n^t)(x-\sigma_-\zeta_n(t))\right],$$

где функция $\varkappa_n^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\varkappa}_n^t(p) = \begin{cases} \exp\left(-nt\left(\dfrac{\mu_1 ip\sigma_+}{n^{1/\alpha}} + \dfrac{\mu_2(ip\sigma_+)^2}{2n^{2/\alpha}} + \dots + \dfrac{\mu_{[\alpha]}(ip\sigma_+)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\right)\right), & p \geqslant 0, \\ \exp\left(-nt\left(\dfrac{\mu_1 ip\sigma_-}{n^{1/\alpha}} + \dfrac{\mu_2(ip\sigma_-)^2}{2n^{2/\alpha}} + \dots + \dfrac{\mu_{[\alpha]}(ip\sigma_-)^{[\alpha]}}{[\alpha]!n^{[\alpha]/\alpha}}\right)\right), & p < 0. \end{cases}$$

Так как $P_-\varphi$ — ограниченная аналитическая функция в нижней полуплоскости, а $P_+\varphi$ — в верхней полуплоскости, то функция $u_n(t,x)$ корректно определена. Как и в (35), при таких α и таком выборе $\sigma_\pm$ функция $\widehat{\varkappa}_n^t(p)$ является убывающей функцией.

Теорема 4. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, *число* α *удовлетворяет условию* (12), $M(n) = n^{\frac{1-\delta}{\alpha}}$, $0 < \delta \leqslant \frac{\alpha}{[\alpha]+1}$. *Пусть* $u(t,x)$ — *решение задачи Коши* (31), (32). *Тогда существует* $C = C(\alpha) > 0$ *такое, что*

$$\sup_{t\in[0;T]} \|u_n(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C\biggl(T + \frac{1}{n^{\delta([\alpha]+1)/\alpha}}\biggr)\frac{\|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}}{n^{(1-\{\alpha\})/\alpha}}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Определим операторы $A_n^{\pm}$, полагая для $\psi \in C_b^{\infty}(\mathbf{R})$

$$A_n^{\pm}\psi^{\pm}(x) = n\int_0^{\infty}\biggl(\psi^{\pm}\Bigl(x - \delta_{\mp}\frac{y}{n^{1/\alpha}}\Bigr) - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(\psi^{\pm})^{(k)}(x)\cdot(-\sigma_{\mp}y)^k}{k|\, n^{k/\alpha}}\biggr)\, d\mathscr{P}(y).$$

Введем обозначения для операторов. Обозначим

$$A^{\pm} = A_n^{\pm}, \quad B^{\pm} = -\Gamma(-\alpha)\mathscr{D}_+^{\alpha}P_{\pm} - A_n^{\pm}.$$

Тогда $A^{\pm} + B^{\pm} = -\Gamma(-\alpha)\mathscr{D}_+^{\alpha}P_{\pm}$. Заметим, что справедливо неравенство

$$\Bigl\|e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}P_{\pm}\Bigr\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{43}$$

Далее, представим

$$\begin{aligned} e^{tA^{\pm}}P_M\varphi^{\pm}(x) - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}\varphi^{\pm}(x) &= (e^{tA^{\pm}} - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})})P_M\varphi^{\pm}(x) \\ &- e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}(I - P_M)\varphi^{\pm}(x) = V_1^{\pm} + V_2^{\pm}. \end{aligned}$$

Оценим нормы $V_2^{\pm}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|V_2^{\pm}\|^2_{W_2^l} &\leqslant \sup_{t\in[0,T]}\biggl(Ce^{-2bM^{\alpha}t}\int_{|p|>M}(1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|^2\, dp\biggr) \\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\int_{|p|>M}\Bigl(1+|p|^{2(l+[\alpha]+1)}\Bigr)|\widehat{\varphi_{\pm}}(p)|^2\, dp \\ &\leqslant \frac{C}{M^{2([\alpha]+1)}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}} \\ &\leqslant \frac{C}{n^{2(1-\delta)([\alpha]+1)/\alpha}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \end{aligned} \tag{44}$$

Для оценки норм слагаемых $V_1^{\pm}$ воспользуемся формулой (16) для операторов $A^{\pm}$ и $B^{\pm}$.

Как и раньше, обозначим $S(y) = e^{iy} - \sum_{k=0}^{[\alpha]} i^k y^k/k!$. Рассмотрим

$$\widehat{e^{tA^{\pm}}P_M\varphi^{\pm}}(p) = \widehat{\varphi_M^{\pm}}(p)I^{\pm}(p),$$

где

$$I^{+}(p) = \exp\biggl(nt\int_0^{\infty}S\Bigl(\frac{py\sigma_-}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\, d\mathscr{P}(y)\biggr), \tag{45}$$

$$I^{-}(p) = \exp\biggl(nt\int_0^{\infty}S\Bigl(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\, d\mathscr{P}(y)\biggr). \tag{46}$$

Преобразуем выражение (46). Имеем

$$
\begin{aligned}
I^-(p) &= \exp\biggl(nt\int_0^1 S\Bigl(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\,d\mathscr{P}(y) + nt\int_1^\infty S\Bigl(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\,d\mathscr{P}(y)\biggr)\\
&= \exp\biggl(nt\int_0^1 S\Bigl(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\,d\mathscr{P}(y) - t\int_{p\sigma_+/n^{1/\alpha}}^{+\sigma_+\infty} S(y)\,\frac{dy}{y^{\alpha+1}}\\
&\qquad + nt\int_1^\infty S\Bigl(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\,d\Bigl(\frac{h(y)}{\alpha y^\alpha}\Bigr)\biggr).
\end{aligned} \tag{47}
$$

Заметим, что $|p| \leqslant M = n^{(1-\delta)/\alpha}$, и, значит,

$$
\Bigl|S\Bigl(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\Bigr| \leqslant C\,\frac{|p|^{[\alpha]+1}y^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}. \tag{48}
$$

Тогда первый интеграл в (47) можно оценить следующим образом:

$$
\Bigl|\int_0^1 S\Bigl(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Bigr)\,d\mathscr{P}(y)\Bigr| \leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}\int_0^1 y^{[\alpha]+1}\,d\mathscr{P}(y) \leqslant C\frac{|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}.
$$

Для оценки второго интеграла в (47) введем замкнутый контур

$$
\begin{aligned}
\Gamma_+ = \Bigl\{z\in\mathbf{C}\colon |z|\in[|p|n^{-1/\alpha}, R],\ \arg z = \pi/\alpha\Bigr\}&\\
\cup\{z\in\mathbf{C}\colon |z| = R,\ \arg z\in[\pi/\alpha; 0]\}&\\
\cup\{z\in\mathbf{C}\colon |z|\in[R, |p|n^{-1/\alpha}],\ \arg z = 0\}&\\
\cup\{z\in\mathbf{C}\colon |z| = |p|n^{-1/\alpha},\ \arg z\in(0;\pi/\alpha)\}&
\end{aligned}
$$

(этот контур представлен на рис. 2) и рассмотрим интеграл

$$
J_+ = \int_{\Gamma_+} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}. \tag{49}
$$

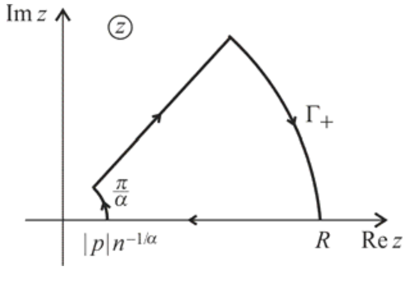

Рис. 2.

Заметим, что интеграл по большой дуге при $R\to\infty$ стремится к нулю, а внутри контура особых точек нет, так что интеграл по контуру Γ_+ равен нулю.

Воспользуемся неравенством $0 < p < M(n) = n^{(1-\delta)/\alpha}$ и в интеграле по дуге малой окружности сделаем замену переменных $y = pn^{-1/\alpha}e^{i\vartheta}$, где $\vartheta \in (0; \pi/\alpha)$. Имеем

$$\left|\exp\left(tp^\alpha \int_{\gamma_+} S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right)\right| \leqslant \exp\left(C\,\frac{tp^{[\alpha]+1}}{n^{(1-\{\alpha\}/\alpha}}\right), \tag{50}$$

где γ_+ обозначает контур $\gamma_+ = \{z \in \mathbf{C}\colon |z| = pn^{-1/\alpha},\ \arg z \in (0; \pi/\alpha)\}$.

Из условия (21) следует, что существует константа $C > 0$ такая, что

$$\begin{aligned}&\left|\exp\left(\int_1^\infty S\Big(\frac{py\sigma_+}{n^{1/\alpha}}\Big)\,d\Big(\frac{h(y)}{\alpha y^\alpha}\Big)\right)\right| \\ &\qquad \leqslant C\int_1^\infty \max\left(\frac{|p|^{[\alpha]}y^{[\alpha]-1}}{n^{[\alpha]/\alpha}}, \frac{|p|^{[\alpha]+1}y^{[\alpha]}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}\right)\frac{dy}{y^{\alpha+\beta}} \leqslant \frac{C|p|^{[\alpha]+1}}{n^{([\alpha]+1)/\alpha}}.\end{aligned} \tag{51}$$

Выбирая n достаточно большим, получаем

$$\begin{aligned}\|e^{t\widehat{A^-}\varphi^-_M}\|^2_{W_2^k} &\leqslant \int_0^M |\varphi(p)|^2|p|^{2k}\exp\Big(2Ctp^\alpha n^{\delta(1-\{\alpha\})/\alpha}\Big) \\ &\qquad\times \exp\left(-2tp^\alpha\int_1^\infty S(y)\,\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right)dp \\ &\leqslant \int_0^M |\varphi(p)|^2|p|^{2k}\,dp \leqslant \|P_M\varphi^-\|^2_{W_2^k}.\end{aligned}$$

Аналогичная оценка получается для оператора $e^{tA^+}P_MP_+$. Таким образом,

$$\|e^{tA^\pm}P_MP^\pm\|_{W_2^l\to W_2^l} \leqslant 1. \tag{52}$$

Нам осталось оценить $\|B^\pm P_MP^\pm\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}\to W_2^l}$.

Имеем

$$\begin{aligned}B^\pm\widehat{P_M}\varphi^\pm(p) &= \int_{\mathbf{R}} dx\,\exp(ipx)\left[n\int_0^\infty\left(\varphi^\pm_M\Big(x - \sigma_\mp\,\frac{y}{n^{1/\alpha}}\Big)\right.\right. \\ &\qquad\left. - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(\varphi^\pm_M)^{(k)}(x)(-\sigma_\mp y)^k}{n^{k/\alpha}\,k!}\right)d\mathscr{P}(y) \\ &\qquad\left. + \int_0^\infty\left(\varphi^\pm_M(x-y) - \sum_{k=0}^{[\alpha]}\frac{(\varphi^\pm_M)^{(k)}(x)(-y)^k}{k!}\right)\frac{dy}{y^{1+\alpha}}\right] \\ &= \widehat{\varphi^\pm_M}(p)\left(nt\int_0^\infty S\Big(\frac{\sigma_\mp py}{n^{1/\alpha}}\Big)\,d\mathscr{P}(y) + |p|^\alpha c_0(p)\right).\end{aligned}$$

Повторяя рассуждения о повороте контура и пользуясь оценками, аналогичными (48), (51), получаем

$$|B^\pm\widehat{P_M}\varphi^\pm(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi^\pm_M}(p)|\Big(|p|^\alpha + |p|^{1+[\alpha]}\Big).$$

Наконец, воспользовавшись простым неравенством

$$|p|^{[\alpha]+1} + |p|^{\alpha} \leqslant 2\Big(1 + |p|^{[\alpha]+1}\Big),$$

получаем

$$\begin{aligned} \|\widehat{B^{\pm}\varphi}^{\pm}_{M}\|^2_{W_2^l} &= \int_{|p|<M} dp(1+|p|^{2l})|\widehat{B^{\pm}\varphi}^{\pm}(p)|^2 \\ &\leqslant \frac{C}{n^{2(1-\{\alpha\})/\alpha}} \|\varphi\|^2_{W_2^{l+[\alpha]+1}}. \end{aligned} \tag{53}$$

Заметим, что утверждение теоремы следует из (43), (44), (52) и (53). Теорема 4 доказана.

Автор выражает благодарность Н. В. Смородиной за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ибрагимов И. А.*, *Смородина Н. В.*, *Фаддеев М. М.* Комплексный аналог центральной предельной теоремы и вероятностная аппроксимация интеграла Фейнмана. — Докл. РАН, 2014, т. 459, №4, с. 400–402.
2. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. М.: Мир, 1972, 740 с.
3. *Кингман Дж.* Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007, 136 с.
4. *Кусис П.* Введение в теорию пространств H_p. М.: Мир, 1984, 368 с.
5. *Платонова М. В.* Симметричные α-устойчивые распределения с нецелым $\alpha > 2$ и связанные с ними стохастические процессы. — Зап. научн. сем. ПОМИ, 2015, т. 442, с. 101–117.
6. *Самко С. Г.*, *Килбас А. А.*, *Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. М.: Наука и техника, 1987, 688 с.
7. *Lachal A.* From pseudo-random walk to pseudo-Brownian motion: first exit time from a one-sided or a two-sided interval. — Int. J. Stoch. Anal., 2014, v. 2014, Article ID 520136, 49 p.
8. *Nigmatullin R. R.* The realization of the generalized transfer equation in a medium with fractal geometry. — Phys. Status. Sol., 1986, v. 133, №1, p. 425–430.
9. *Orsingher E.*, *Toaldo B.* Pseudoprocesses related to space-fractional higher-order heat-type equations. — Stoch. Anal. Appl., 2014, v. 32, №4, p. 619–641.
10. *Saichev A. I.*, *Zaslavsky G. M.* Fractional kinetic equations: solutions and applications. — AIP, Chaos, 1997, v. 7, №4, p. 753–764.
11. *Schwartz L.* Theorie des distributions. Paris: Hermann, 1998, 418 p.
12. *Smorodina N. V.*, *Faddeev M. M.* The Lévy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications. — Acta Appl. Math., 2010, v. 110, №3, p. 1289–1308.
13. *Zaslavsky G. M.* Chaos, fractional kinetics, and anomalous transport. — Phys. Repts., 2002, v. 371, №6, p. 461–580.

Поступила в редакцию
07.III.2016