М. В. Платонова, Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования высокого порядка, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2016, том 454, 220–237

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 454, 2016 г.

М. В. Платонова

ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ЭВОЛЮЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

§1. Введение

Хорошо известно, что решение задачи Коши для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}, \quad u(0,x) = \varphi(x) \tag{1}$$

можно представить как математическое ожидание функционала от винеровского процесса. Именно,

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi(x - w(t)), \tag{2}$$

где $w(t)$ – стандартный винеровский процесс.

Если в задаче Коши рассмотреть дифференциальный оператор порядка $m > 2$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_m}{m!}\frac{\partial^m u}{\partial^m x}, \tag{3}$$

то представление решения задачи Коши, аналогичное (2), но с заменой $w(t)$ на некоторый другой случайный процесс, невозможно, так как в этом случае фундаментальное решение уравнения (3) уже не является вероятностной мерой. Тем не менее, в работах $[1, 4, 5, 8, 10, 11]$ были построены некоторые аналоги представления (2).

Существует два основных подхода к построению аналога формулы (2). Первый подход, ведущий свое начало с работ Ю. Л. Далецкого (см. [1]), основан на использовании в (2) вместо винеровского процесса так называемого псевдопроцесса. Одномерные распределения псевдопроцесса задаются фундаментальным решением (3). Всякий псевдопроцесс, в отличие от обычного вероятностного процесса, порождает

Ключевые слова: эволюционное уравнение, задача Коши, пуассоновская случайная мера.

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No. 14-21-00035.

в пространстве траекторий только конечно-аддитивную меру на алгебре цилиндрических множеств, которая не может быть продолжена на соответствующую σ-алгебру. Отметим также работу [8], в которой был предложен вероятностный подход к псевдопроцессам.

Второй подход основан на использовании комплекснозначных стохастических процессов (см. [4, 10]).

Этот подход ведет начало с работы Фунаки [10], в которой было построено вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования четвёртого порядка ($m = 4$) при некоторых дополнительных условиях аналитичности на начальную функцию φ. Вместо винеровского процесса в [10] использовался комплексный стохастический процесс $X(t), t \geqslant 0$, определяемый как

$$X(t) := \begin{cases} B(w(t)), \ w(t) \geqslant 0, \\ iB(w(t)), \ w(t) < 0, \end{cases} \tag{4}$$

где $B(t)$ и $w(t)$ – независимые стандартные винеровские процессы. Этот же подход может быть распространен и на оператор дифференцирования порядка 2^n (см. [5]).

В работе [4] был предложен способ, позволяющий использовать метод Фунаки для построения вероятностного представления решения задачи Коши

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{a}{8}\frac{\partial^4 u}{\partial^4 x}, \quad u(0,x) = \varphi(x),$$

где a – комплексная константа, а от начальной функции φ также требуется аналитичность. Как и в [10], решение основано на построении комплекснозначного стохастического процесса, аналогичного $X(t)$.

Далее, в работах [7,9] был предложен вероятностный подход к определению понятия симметричного устойчивого распределения с показателем устойчивости $\alpha > 2$, $\alpha \notin \mathbf{N}$, основанный на использовании теории обобщенных функций. Симметричное устойчивое распределение определялось как обобщенная функция l (над некоторым классом основных функций), которая на основную функцию φ действует как

$$(l, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} \mathbf{E}\, \varphi * \omega_\varepsilon(\eta_\varepsilon), \tag{5}$$

где ω_ε – специальным образом подобранное семейство быстро осциллирующих функций, $\eta_\varepsilon = \int\limits_{|x|>\varepsilon} x\nu(dx)$, а ν – пуассоновская случайная мера на $\mathbf{R}$ с интенсивностью $\frac{C_\alpha dx}{|x|^{1+\alpha}}$.

С использованием методов [7,9] и некоторых методов комплексного анализа, в работе [6] были построены аналоги устойчивых процессов с независимыми приращениями. С помощью этих процессов было построено вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дробного дифференцирования порядка больше двух.

В данной работе, используя идеи и методы работы [6], мы построим вероятностные представления и вероятностные аппроксимации решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором дифференцирования порядка $m > 2$ вида

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{c_m}{m!}\frac{\partial^m u}{\partial^m x}, \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{6}$$

где

$$c_m = \begin{cases} \pm 1, & m = 2k+1, \\ (-1)^{k+1}, & m = 2k. \end{cases}$$

Отметим, что для различных значений m применяемые методы могут существенно отличаться. Мы выделяем четыре класса ($k \in \mathbf{N}$): $m = 4k-1$, $m = 4k$, $m = 4k+1$, $m = 4k+2$. Внутри одного класса применяемые методы совершенно аналогичны. Случай, наиболее близкий к уравнению теплопроводности, отвечает $m = 4k+2$. Именно с этого случая мы и начнем.

Основные результаты данной работы содержатся в теоремах 1, 2, 3, 4.

§2. Обозначения

Константы мы всегда обозначаем буквой C, причем одна и та же буква C может обозначать разные константы, даже в пределах одной выкладки.

Прямое преобразование Фурье определяется как

$$\widehat{\varphi}(p) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\, e^{ipx}\, dx, \tag{7}$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varphi}(p)\, e^{-ipx}\, dp.$$

Для любого $M > 0$ через P_M обозначим проектор в $L_2(\mathbf{R})$ на подпространство функций, таких что носитель функции $\widehat{\psi}$ содержится в отрезке $[-M, M]$. Именно, для $\psi \in L_2(\mathbf{R})$ имеем

$$P_M\psi(x) = \psi * D_M(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-M}^{M} \widehat{\psi}(p)\, e^{-ipx} dp, \tag{8}$$

где $\widehat{\psi}$ – прямое преобразование Фурье функции ψ, а D_M – ядро Дирихле

$$D_M(x) = \frac{1}{\pi}\frac{\sin Mx}{x}.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ будем обозначать соболевское пространство функций, определенных на $\mathbf{R}$ и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно. В пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ выберем норму (эквивалентную стандартной)

$$\|\psi\|^2_{W_2^k(\mathbf{R})} = \int\limits_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k})|\widehat{\psi}(p)|^2\, dp.$$

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbf{R}) \to W_2^l(\mathbf{R})$ через

$$\|A\|_{W_2^k \to W_2^l}$$

будем обозначать соответствующую операторную норму.

Через $C_b^\infty(\mathbf{R})$ будем обозначать множество бесконечно дифференцируемых функций с ограниченными производными любого порядка.

Далее, напомним определение классов Харди H_+^2 и H_-^2. Функция F, аналитическая в верхней (нижней) полуплоскости комплексной плоскости принадлежит классу H_+^2 (соответственно, H_-^2), если существует константа C, $C < \infty$, такая что

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |F\,(x + iy)\,|^2\, dx \leqslant C,$$

при всех $y > 0$ ($y < 0$). Хорошо известно, что если $F(t) \in L^2(\mathbf{R})$ – функция, являющаяся граничным значением функции из H_+^2 (или H_-^2), то $\widehat{F}(\lambda) = 0$ при почти всех $\lambda \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant 0$). Кроме того, верно и обратное утверждение. Если $\Phi \in L_2(\mathbf{R})$ и $\Phi(\lambda) = 0$ почти всюду при $\lambda \geqslant 0$ ($\lambda \leqslant 0$), то существует функция F из H_+^2 (или H_-^2), для которой $\widehat{F}(\lambda) = \Phi(\lambda)$.

§3. Случай $m = 4k + 2$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{m!} \frac{\partial^m u}{\partial^m x}. \tag{9}$$

Для уравнения (9) рассмотрим задачу Коши

$$u(0, x) = \varphi(x). \tag{10}$$

Пусть $\nu(dt, dx)$ – пуассоновская случайная мера на $[0, T] \times \mathbf{R}^+$ с интенсивностью

$$\mathbf{E}\, \nu(dt,\, dx) = dt\, \Lambda(dx) = \frac{dt\, dx}{x^{1+m}}. \tag{11}$$

Для $\varepsilon > 0$ через $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$ мы обозначим случайный процесс, заданный стохастическим интегралом по мере ν, вида

$$\xi_\varepsilon(t) = \iint\limits_{[0,t]\times[\varepsilon, e\varepsilon]} x\, \nu(ds, dx), \tag{12}$$

где e – основание натурального логарифма. Заметим, что такой выбор интервала интегрирования обеспечивает нам выполнение соотношения

$$\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} x^m \frac{dx}{x^{1+m}} = 1.$$

По теореме Кэмпбелла (см. [3]) характеристическая функция случайной величины $\xi_\varepsilon(t)$ для любого t равна

$$\mathbf{E} \exp\big(ip\xi_\varepsilon(t)\big) = \exp\Big(t \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} (e^{ipx} - 1) \frac{dx}{x^{1+m}}\Big).$$

Отметим, что для каждого $\varepsilon > 0$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ является сложным пуассоновским процессом, но при таком выборе m и $t > 0$ у семейства случайных величин $\xi_\varepsilon(t)$ не существует предела при $\varepsilon \to 0$. Тем не менее, процесс $\xi_\varepsilon(t)$ может быть использован для представления решения задачи Коши (9), (10).

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t, x)$

$$u_\varepsilon(t, x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon(t))\Big], \tag{13}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(ipy)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}\Big). \tag{14}$$

Заметим, что функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u(t,x)$ – решение задачи Коши* (9), (10), *а функция $u_\varepsilon(t,x)$ задается формулой* (13). *Тогда существует положительная константа $C = C(m)$, такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ct\varepsilon\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geqslant 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A, такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [2], гл. IX, §2, п. 1, с. 614)

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int\limits_0^t e^{\tau(A+B)}Be^{(t-\tau)A}d\tau. \tag{15}$$

Определим оператор A_ε, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon\psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\psi(x-y) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\psi^{(k)}(x)\cdot(-y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}.$$

Положим теперь в (15)

$$A = A_\varepsilon,\ B = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial^m x} - A_\varepsilon.$$

Тогда $A + B = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial^m x}$.

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{16}$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi$. Получим

$$\widehat{B\varphi}(p) = \frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi}(p) - \widehat{\varphi}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(ipy)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}$$

$$= -\widehat{\varphi}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^{m}\frac{(ipy)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}.$$

При $|p| \leqslant \frac{1}{e\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C\varepsilon|\widehat{\varphi}(p)||p|^{m+1}, \tag{17}$$

а при $|p| > \frac{1}{e\varepsilon}$ – неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^{m}. \tag{18}$$

С учетом (17) и (18) имеем

$$\begin{aligned}
\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} &= \int\limits_{-\infty}^{+\infty}(1+|p|^{2l})\big|\widehat{B\varphi}(p)\big|^2\,dp \\
&\leqslant \int\limits_{|p|\leqslant\frac{1}{e\varepsilon}} C\varepsilon^2(1+|p|^{2(l+m+1)})\big|\widehat{\varphi}(p)\big|^2 dp \\
&\quad + \int\limits_{|p|>\frac{1}{e\varepsilon}} C(1+|p|^{2(l+m)})\big|\widehat{\varphi}(p)\big|^2 dp \\
&\leqslant C\varepsilon^2\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}.
\end{aligned} \tag{19}$$

Оценим теперь преобразование Фурье функции $e^{tA}\varphi(x)$. Имеем

$$\widehat{e^{tA}\varphi}(p) = \widehat{\varphi}(p)\exp\Big(t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(ipy)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}\Big).$$

Легко показать, что для всех $z \in \mathbf{R}$ справедливо неравенство

$$\mathrm{Re}\Big(\exp(iz) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(iz)^k}{k!}\Big) = \cos z - 1 + \frac{z^2}{2!} - \dots - \frac{z^{4k}}{(4k)!} \leqslant 0.$$

Откуда вытекает
$$\|e^{tA}\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \tag{20}$$
Утверждение теоремы следует теперь из (16), (19) и (20). $\square$

Итак, мы показали, что если начальная функция φ принадлежит классу $W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$ при некотором $l \geqslant 0$, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ по норме пространства $W_2^l(\mathbf{R})$ приближает решение $u(t,x)$ задачи Коши (9), (10).

Таким образом, для решения задачи Коши (9), (10) при $m = 4k+2$ мы получили следующее вероятностное представление
$$u(t,x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{E}[(\varphi * \omega_\varepsilon^t)(x - \xi_\varepsilon(t))].$$

§4. Случай $m = 4k+1$

Рассмотрим уравнение
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \pm\frac{1}{m!}\frac{\partial^m u}{\partial^m x}. \tag{21}$$
Для уравнения (21) рассмотрим задачу Коши (10).

Как и раньше, через $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0,T]$ мы обозначаем случайный процесс, определяемый формулой (12).

Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon^\pm(t,x)$
$$u_\varepsilon^\pm(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi * \omega_\varepsilon^{\pm,t})(x \pm \xi_\varepsilon(t))\Big], \tag{22}$$
где функции $\omega_\varepsilon^{\pm,t}(x)$ определяются своими преобразованиями Фурье
$$\widehat{\omega}_\varepsilon^{\pm,t}(p) = \exp\Big(-t\int_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{(\mp ipy)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}\Big). \tag{23}$$
Заметим, что функции $\widehat{\omega}_\varepsilon^{\pm,t}(p)$ являются быстро убывающими.

Функция $u_\varepsilon^+(t,x)$ аппроксимирует решение $u^+(t,x)$ задачи Коши (21), (10) со знаком "плюс", а функция $u_\varepsilon^-(t,x)$ аппроксимирует решение $u^-(t,x)$ задачи Коши (21), (10) со знаком “минус”.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $u^\pm(t,x)$ – решения задачи Коши* (21), (10), *а функции $u_\varepsilon^\pm(t,x)$ определяются* (22). *Тогда существует положительная константа $C = C(m)$, такая что справедливо неравенство*
$$\|u_\varepsilon^\pm(t,\cdot) - u^\pm(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant Ct\varepsilon\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Будем рассматривать только уравнение (21) со знаком минус. При этом вместо $u_\varepsilon^-(t,x)$ и $u^-(t,x)$ будем писать просто $u_\varepsilon(t,x)$ и $u(t,x)$.

Определим оператор A_ε, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon \psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon} \Big(\psi(x-y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\psi^{(k)}(x)\cdot(-y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}.$$

Снова воспользуемся формулой (15). Положим в (15)

$$A = A_\varepsilon,\ B = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial^m x} - A_\varepsilon.$$

Тогда $A + B = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial^m x}$.

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A+B)}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \tag{24}$$

Вычислим преобразование Фурье функции $B\varphi$. Получим

$$\widehat{B\varphi}(p) = -\frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi}(p) - \widehat{\varphi}(p)\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(ipy)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}$$
$$= -\widehat{\varphi}(p)\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\exp(ipy) - \sum_{k=0}^{m}\frac{(ipy)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{1+m}}.$$

При $|p| \leqslant \frac{1}{e\varepsilon}$ справедливо неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C\varepsilon|\widehat{\varphi}(p)||p|^{m+1}, \tag{25}$$

а при $|p| > \frac{1}{e\varepsilon}$ – неравенство

$$|\widehat{B\varphi}(p)| \leqslant C|\widehat{\varphi}(p)||p|^m. \tag{26}$$

С учетом (25) и (26) имеем

$$\|\widehat{B\varphi}\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (1+|p|^{2l})|\widehat{B\varphi}(p)|^2 dp$$
$$\leqslant \int\limits_{|p|\leqslant \frac{1}{e\varepsilon}} C\varepsilon^2 (1+|p|^{2(l+m+1)})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp$$
$$+ \int\limits_{|p|> \frac{1}{e\varepsilon}} C (1+|p|^{2(l+m)})|\widehat{\varphi}(p)|^2 dp$$
$$\leqslant C\varepsilon^2 \|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \quad (27)$$

Так же как это было сделано при доказательстве теоремы 1, можно показать, что справедливо неравенство

$$\|e^{tA}\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1. \quad (28)$$

Утверждение теоремы следует из (24), (27) и (28). □

§5. Случай $m = 4k$

Рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m u}{\partial^m x}. \quad (29)$$

Для уравнения (29) рассмотрим задачу Коши (10).

Отметим, что в данном случае предложенный выше метод не работает, так как для таких значений m функция (14) сверхэкспоненциально возрастает на бесконечности и, соответственно, для нее не определено обратное преобразование Фурье. Следуя [6], для построения вероятностного представления решения задачи Коши мы привлечем некоторые идеи комплексного анализа.

Пусть $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0, T]$, – случайный процесс, определенный формулой (12), а σ – комплексная константа. По теореме Кэмпбелла (см. [3]) имеем

$$\mathbf{E}\exp(ip\sigma\xi_\varepsilon(t)) = \exp\Big(t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}(e^{i\sigma p x}-1)\frac{dx}{x^{m+1}}\Big).$$

Заметим, что интеграл сходится, если $p \geqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \geqslant 0$ или $p \leqslant 0$ и $\operatorname{Im}\sigma \leqslant 0$.

Через $P_\pm$ обозначим проекторы Рисса, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2_\pm$. Для любой функции $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо представление

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi^+(x) + \varphi^-(x),$$

где

$$\varphi^+(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{0} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)\,dp,$$

$$\varphi^-(x) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-ipx}\widehat{\varphi}(p)\,dp.$$

Заметим, что $P_+\varphi$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, а $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней.

Возьмем два комплексных числа $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{m})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{m})$. Заметим, что σ_+ лежит в верхней полуплоскости, σ_- лежит в нижней полуплоскости и, кроме того, $\sigma_+^m = \sigma_-^m = -1$. Вместо одного случайного процесса $\xi_\varepsilon(t)$ мы теперь рассмотрим два комплексных процесса $\sigma_+\xi_\varepsilon(t)$ и $\sigma_-\xi_\varepsilon(t)$.

Далее, сначала мы по начальному данному φ построим новую функцию φ_M, полагая $\varphi_M = P_M\varphi$. Функция φ_M уже будет целой аналитической функцией экспоненциального типа. Число M мы будем выбирать в зависимости от ε, а именно: $M = M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$.

Имеем

$$\varphi_M = \varphi_M^+ + \varphi_M^-.$$

Функция φ_M^+ имеет ограниченное аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость, а функция φ_M^- – в нижнюю. Соответственно, в функцию φ_M^- мы будем подставлять процесс $\sigma_+\xi_\varepsilon(t)$, а в функцию φ_M^+ – процесс $\sigma_-\xi_\varepsilon(t)$.

Итак, для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon(t,x)$

$$u_\varepsilon(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_+\xi_\varepsilon(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x - \sigma_-\xi_\varepsilon(t))\Big], \tag{30}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{(ip)^k\sigma_+^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{m+1}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{(ip)^k\sigma_-^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{m+1}}\Big), & p < 0. \end{cases} \tag{31}$$

Так как $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+\varphi$ аналитична в верхней полуплоскости, то функция $u_\varepsilon(t,x)$ корректно определена. Заметим также, что при таком выборе $\sigma_\pm$ и m функция $\widehat{\omega}^t_\varepsilon(p)$ является быстро убывающей.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть* $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$, $u(t,x)$ *– решение задачи Коши* (29), (10), *а функция* $u_\varepsilon(t,x)$ *определяется формулой* (30). *Тогда существует положительная константа* $C = C(m)$, *такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon(t,\cdot) - u(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C(t+\varepsilon^m)\varepsilon\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Определим операторы $A_\varepsilon^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon^\pm\psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\psi^\pm(x-\sigma_\mp y) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(\psi^\pm)^{(k)}(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^\pm = A_\varepsilon^\pm,\ B^\pm = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial^m x}P_\pm - A_\varepsilon^\pm.$$

Тогда $A^\pm + B^\pm = -\frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial^m x}P_\pm$.

Заметим, что из условия $m = 4k$ следует справедливость неравенства

$$\|e^{t(A^\pm+B^\pm)}P_\pm\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1.$$

Далее, представим

$$e^{tA^\pm}P_M\varphi^\pm(x) - e^{t(A^\pm+B^\pm)}\varphi^\pm(x) = (e^{tA^\pm} - e^{t(A^\pm+B^\pm)})P_M\varphi^\pm(x) \\ - e^{t(A^\pm+B^\pm)}(I-P_M)\varphi^\pm(x) = V_1^\pm + V_2^\pm.$$

Для оценки нормы слагаемого V_1^- воспользуемся формулой (15) с $A = A^-$ и $B = B^-$, а для оценки нормы слагаемого V_1^+ воспользуемся формулой (15) с $A = A^+$ и $B = B^+$. Оценим только норму слагаемого V_1^-, норма слагаемого V_1^+ оценивается аналогично.

Вычислим преобразование Фурье функции $B^-\varphi_M(x)$. Имеем

$$\begin{aligned}\widehat{B^-\varphi_M}(p) &= -\frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi_M^-}(p)\\ &\quad -\widehat{\varphi_M^-}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ip\sigma_+y)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\\ &= -\widehat{\varphi_M^-}(p)\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ip\sigma_+y)-\sum_{k=0}^{m}\frac{(ip\sigma_+y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}.\end{aligned}$$

Из последней формулы следует справедливость оценки

$$|\widehat{B^-\varphi_M}(p)|\leqslant C\varepsilon|\widehat{\varphi_M^-}(p)||p|^{m+1}. \tag{32}$$

Далее, имеем

$$\|\widehat{B^-P_M}\varphi^-\|^2_{W_2^l}=\int\limits_{|p|<M}dp\big(1+|p|^{2l}\big)\big|\widehat{B^-\varphi^-}(p)\big|^2\leqslant C\varepsilon^2\|\varphi^-\|^2_{W_2^{l+m+1}}.$$

Осталось оценить

$$\begin{aligned}\widehat{e^{tA^-}P_M}\varphi^-(p) &= \widehat{\varphi_M^-}(p)\\ &\quad\times\exp\Big(t\int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon}\Big(\exp(ip\sigma_+y)-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(ip\sigma_+y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}\Big).\end{aligned} \tag{33}$$

Воспользуемся следующей элементарной леммой.

Лемма 1. *Пусть $m=4k-1$ или $m=4k$. Тогда для любого $z\geqslant 0$ справедливы неравенства*

1. $\mathrm{Re}\Big(\exp(iz\sigma_+)-\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{(iz\sigma_+)^k}{k!}\Big)\leqslant 0,$
2. $\mathrm{Re}\Big(\exp(-iz\sigma_-)-\sum\limits_{k=0}^{m-1}\frac{(-iz\sigma_-)^k}{k!}\Big)\leqslant 0.$

Из (33) и леммы 1 следует неравенство

$$\|e^{tA^-}P_M\|_{W_2^k\to W_2^k}\leqslant 1.$$

Таким образом, мы показали, что существует константа C, такая что

$$\|V_1^-\|^2_{W_2^l}\leqslant Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^-\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{34}$$

Аналогичным образом может быть получено неравенство

$$\|V_1^+\|^2_{W_2^l} \leqslant Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^+\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \tag{35}$$

Завершает доказательство неравенство

$$\begin{aligned}\|V_2^\pm\|^2_{W_2^l} &\leqslant \int\limits_{|p|>M} (1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi_\pm}(p)|^2dp. \\ &\leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}}\int\limits_{|p|>M}(1+|p|^{2(l+m+1)})|\widehat{\varphi_\pm}(p)|^2dp \\ &\leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}} \leqslant C\varepsilon^{2(m+1)}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \end{aligned} \tag{36}$$

Утверждение теоремы следует теперь из формул (34)–(36). $\square$

§6. Случай $m = 4k-1$

Мы рассматриваем задачу Коши (21), (10).

Как и раньше, через $\xi_\varepsilon(t)$, $t \in [0,T]$, мы обозначаем случайный процесс, определенный формулой (12).

Снова возьмем два комплексных числа $\sigma_+ = \exp(\frac{i\pi}{m})$ и $\sigma_- = \exp(-\frac{i\pi}{m})$ из верхней и нижней полуплоскости соответственно. Ясно, что $\sigma_+^m = \sigma_-^m = -1$.

Опишем сначала приближающую функцию для решения задачи Коши (21), (10) с оператором со знаком "плюс". Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon^+(t,x)$, полагая

$$u_\varepsilon^+(t,x) = \mathbf{E}\Big[\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x-\sigma_+\xi_\varepsilon(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x-\sigma_-\xi_\varepsilon(t))\Big], \tag{37}$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{(ip)^k\sigma_+^kx^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{m+1}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{(ip)^k\sigma_-^kx^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{m+1}}\Big), & p < 0. \end{cases} \tag{38}$$

Так как $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней полуплоскости, а функция $P_+\varphi$ аналитична в верхней полуплоскости, то функция $u_\varepsilon^+(t,x)$ корректно определена. Заметим также, что при таком выборе $\sigma_\pm$ и m функция $\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p)$ является быстро убывающей.

Приближающая функция для решения задачи Коши с оператором со знаком “минус” строится следующим образом. Для $\varepsilon > 0$ определим функцию двух переменных $u_\varepsilon^-(t,x)$

$$u_\varepsilon^-(t,x) = \mathbf{E}\Big[(\varphi_M^- * \omega_\varepsilon^t)(x+\sigma_-\xi_\varepsilon(t)) + (\varphi_M^+ * \omega_\varepsilon^t)(x+\sigma_+\xi_\varepsilon(t))\Big], \quad (39)$$

где функция $\omega_\varepsilon^t(x)$ определяется своим преобразованием Фурье

$$\widehat{\omega}_\varepsilon^t(p) = \begin{cases} \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{(-ip)^k\sigma_-^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{m+1}}\Big), & p \geqslant 0, \\ \exp\Big(-t\int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{(-ip)^k\sigma_+^k x^k}{k!}\Big)\frac{dx}{x^{m+1}}\Big), & p < 0. \end{cases} \quad (40)$$

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть $\varphi \in W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})$, $l \geqslant 0$, $M(\varepsilon) = (e\varepsilon)^{-1}$, $u^\pm(t,x)$ – решения задач Коши* (21), (10) *со знаком “плюс” и “минус” соответственно, функция $u_\varepsilon^+(t,x)$ определяется формулой* (37), *а $u_\varepsilon^-(t,x)$ – формулой* (39). *Тогда существует положительная константа $C = C(m)$, такая что справедливо неравенство*

$$\|u_\varepsilon^\pm(t,\cdot) - u^\pm(t,\cdot)\|_{W_2^l(\mathbf{R})} \leqslant C(t+\varepsilon^m)\varepsilon\|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Мы докажем утверждение только для уравнения (21) со знаком ”плюс”, для уравнения со знаком ”минус” оно доказывается аналогично. Вместо $u_\varepsilon^+(t,x)$ и $u^+(t,x)$ будем писать просто $u_\varepsilon(t,x)$ и $u(t,x)$.

Определим операторы $A_\varepsilon^\pm$, полагая для $\psi \in C_b^\infty(\mathbf{R})$

$$A_\varepsilon^\pm\psi(x) = \int\limits_\varepsilon^{e\varepsilon}\Big(\psi^\pm(x-\sigma_\mp y) - \sum_{k=0}^{m-1}\frac{(\psi^\pm)^{(k)}(x)\cdot(-\sigma_\mp y)^k}{k!}\Big)\frac{dy}{y^{m+1}}.$$

Введем обозначения для некоторых операторов. Пусть

$$A^\pm = A_\varepsilon^\pm,\ B^\pm = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial^m x}P_\pm - A_\varepsilon^\pm.$$

Тогда $A^\pm + B^\pm = \frac{1}{m!}\frac{\partial^m}{\partial^m x}P_\pm$.

Заметим, что справедливо неравенство

$$\|e^{t(A^\pm+B^\pm)}P_\pm\|_{W_2^k\to W_2^k} \leqslant 1. \quad (41)$$

Далее, представим

$$
\begin{aligned}
e^{tA^{\pm}} P_M \varphi^{\pm}(x) - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}\varphi^{\pm}(x) = (e^{tA^{\pm}} - e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}) P_M \varphi^{\pm}(x) \\
- e^{t(A^{\pm}+B^{\pm})}(I - P_M)\varphi^{\pm}(x) = V_1^{\pm} + V_2^{\pm}.
\end{aligned}
$$

Для оценки нормы слагаемого V_1^- воспользуемся формулой (15) с $A = A^-$ и $B = B^-$, а для оценки нормы слагаемого V_1^+ – формулой (15) с $A = A^+$ и $B = B^+$. Оценим только норму слагаемого V_1^-, норма слагаемого V_1^+ оценивается аналогично.

Вычислим преобразование Фурье функции $B^-\varphi_M(x)$. Имеем

$$
\begin{aligned}
\widehat{B^-\varphi_M}(p) = \frac{(-ip)^m}{m!}\widehat{\varphi_M^-}(p) \\
- \widehat{\varphi_M^-}(p) \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(\exp(ip\sigma_+ y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ip\sigma_+ y)^k}{k!} \Big) \frac{dy}{y^{m+1}}. \\
= -\widehat{\varphi_M^-}(p) \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(\exp(ip\sigma_+ y) - \sum_{k=0}^{m} \frac{(ip\sigma_+ y)^k}{k!} \Big) \frac{dy}{y^{m+1}}.
\end{aligned}
$$

Тогда справедлива оценка

$$
|\widehat{B^-\varphi_M}(p)| \leqslant C\varepsilon |\widehat{\varphi_M^-}(p)||p|^{m+1}, \tag{42}
$$

из которой следует

$$
\|B^-\widehat{P_M}\varphi^-\|^2_{W_2^l} = \int\limits_{|p|<M} dp(1+|p|^{2l})|\widehat{B^-\varphi^-}(p)|^2 \leqslant C\varepsilon^2 \|\varphi^-\|^2_{W_2^{l+m+1}}.
$$

Осталось оценить

$$
\begin{aligned}
e^{t\widehat{A^- P_M}}\varphi^-(p) = \widehat{\varphi_M^-}(p) \\
\times \exp\Big(t \int\limits_{\varepsilon}^{e\varepsilon} \Big(\exp(ip\sigma_+ y) - \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(ip\sigma_+ y)^k}{k!} \Big) \frac{dy}{y^{m+1}} \Big).
\end{aligned} \tag{43}
$$

Из леммы 1 следует справедливость неравенства

$$
\|e^{tA^-} P_M\|_{W_2^k \to W_2^k} \leqslant 1.
$$

Таким образом, мы показали, что существует константа C, такая что
$$\|V_1^-\|^2_{W_2^l} \leqslant Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^-\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \qquad (44)$$
Аналогичным образом может быть получено неравенство
$$\|V_1^+\|^2_{W_2^l} \leqslant Ct^2\varepsilon^2\|\varphi^+\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \qquad (45)$$

Завершает доказательство неравенство
$$\begin{aligned}
\|V_2^{\pm}\|^2_{W_2^l} &\leqslant \int\limits_{|p|>M} (1+|p|^{2l})|\widehat{\varphi_\pm}(p)|^2 dp. \\
&\leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}} \int\limits_{|p|>M} (1+|p|^{2(l+m+1)})|\widehat{\varphi_\pm}(p)|^2 dp \\
&\leqslant \frac{1}{M^{2(m+1)}}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}} \leqslant C\varepsilon^{2(m+1)}\|\varphi\|^2_{W_2^{l+m+1}}. \qquad (46)
\end{aligned}$$
Утверждение теоремы следует теперь из формул (44)–(46). □

Литература

1. Ю. Л. Далецкий, С. В. Фомин, *Меры и дифференциальные уравнения в функциональных пространствах.* Наука, М., 1983.
2. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов.* Мир, М., 1972.
3. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы.* МЦНМО, М., 2007.
4. S. Mazzucchi, *Probabilistic representations for the solution of higher order differential equations.* — Intern. J. Part. Differ. Eq., **2013** (2013).
5. E. Orsingher, X. Zhao, *Iterated processes and their applications to higher order differential equations.* — Acta. Sin. (Engl. Ser.) **15**, No. 2 (1999), 173–180.
6. М. В. Платонова, *Вероятностное представление решения задачи Коши для эволюционного уравнения с оператором Римана–Лиувилля.* — Теория вероятн. и ее примен. **61**, No. 3 (2016), 417–438.
7. Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Представление Леви–Хинчина одного класса знакопеременных устойчивых мер.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **361** (2008), 145–166.
8. Н. В Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностное представление решений некоторого класса эволюционных уравнений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **384** (2010), 238–266.
9. N. V. Smorodina, M. M. Faddeev, *The Levy–Khinchin representation of the one class of signed stable measures and some its applications* — Acta Appl. Math. **110** (2010), 1289–1308.
10. T. Funaki, *Probabilistic construction of the solution of some higher order parabolic differential equation.* — Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **55**, No. 5 (1979), 176–179.

11. K. Hochberg, *A signed measure on path space related to Wiener measure.* — Ann. Probab. **6**, No. 3 (1978), 433–458.

Platonova M. V. A probabilistic representation of the Cauchy problem solution for an evolution equation with the differential operator of the order greater than 2.

Let m be a positive integer. We construct a probabilistic representation of the Cauchy problem solution for the high-order heat-type equation $\frac{\partial u}{\partial t} = c_m \frac{\partial^m u}{\partial^m x}$.

Санкт-Петербург, Россия,
199178, 14 линия В.О., дом 29Б СПбГУ,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева
E-mail: mariyaplat@rambler.ru

Поступило 24 октября 2016 г.