М. В. Платонова, К. С. Рядовкин, Асимптотическое поведение среднего числа частиц ветвящегося случайного блуждания на решетке $\mathbf{Z}^d$ с периодическими источниками ветвления, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2017, том 466, 234–256

Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 466, 2017 г.

М. В. Платонова, К. С. Рядовкин

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СРЕДНЕГО ЧИСЛА ЧАСТИЦ ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА РЕШЕТКЕ $\mathbf{Z}^d$ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ

§1. Введение

В работах [1,6–8] был предложен метод для исследования ветвящихся случайных блужданий по многомерной решетке $\mathbf{Z}^d$ с непрерывным временем. Этот метод основан на использовании спектральной теории для построения асимптотики решений эволюционных уравнений. В работах [1,6–8] рассматривались модели с конечным числом источников ветвления, при этом интенсивность ветвления характеризовалась положительным числом β. Было показано, что поведение среднего числа частиц определяется структурой спектра некоторого оператора. Также были найдены условия экспоненциального роста среднего числа частиц в произвольной точке решетки. Именно, было показано, что существует критическое значение β_c, такое что при $\beta > \beta_c$ в спектре оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц, появляется положительное собственное значение. Также было показано, что при $d = 1$ или $d = 2$ критическое значение β_c равно нулю, а при $d \geqslant 3$ критическое значение β_c больше нуля.

В настоящей работе предложен метод, который позволяет рассмотреть модель ветвящегося случайного блуждания на решетке $\mathbf{Z}^d$ с непрерывным временем с периодическими источниками ветвления. Будем считать, что размножение или гибель частиц происходят только в узлах периодической решетки (источниках), а между источниками блуждание частицы описывается симметричным оператором A_0. Предположим также, что частицы эволюционируют независимо друг от друга, а интенсивность источников одинакова. Оператор, который

Ключевые слова: ветвящееся случайное блуждание, периодическое возмущение, эволюционное уравнение.

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00443а и “Фонда поддержки молодых ученых “Конкурс Мебиуса”. Работа второго автора выполнена при поддержке гранта РФФИ 16-01-00087.

описывает эволюцию среднего числа частиц, может быть представлен как сумма ограниченного самосопряженного оператора $A_0 : \ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \ell^2(\mathbf{Z}^d)$ и ограниченного оператора $\beta V : \ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \ell^2(\mathbf{Z}^d)$, описывающего ветвление. Оператор βV мы будем рассматривать как возмущение оператора A_β. В работах [6, 8] исследовалось конечномерное положительное возмущение оператора, которое приводит к возможному появлению конечного числа положительных собственных чисел у генератора. Периодическое положительное возмущение приводит к тому, что существенный спектр оператора сдвигается в положительную область. Мы покажем, что старший член асимптотики среднего числа частиц зависит от положения правого края спектра возмущенного оператора, который для любого положительного значения β есть положительное число. Для функции, описывающей среднее число частиц в произвольной точке решетки, получено представление в виде асимптотического ряда при $t \to \infty$.

При исследовании спектра генератора используется подход, в основе которого лежит разложение в прямой интеграл. Такое разложение без явного вида оператора в слое, например, рассмотрено в работах [10, 11], а с явным видом оператора в слое – в работах [13, 14].

Во второй части работы содержится постановка задачи и вывод уравнения (3) для среднего числа частиц на решетке. Третья часть работы посвящена исследованию этого уравнения. В части 3.1 изучается спектр оператора A_β, полученного при возмущении. В части 3.2 проведенный спектральный анализ позволяет получить асимптотику среднего числа частиц при $t \to \infty$. В четвертой части работы содержится ряд примеров.

§2. Постановка задачи

Рассмотрим случайное блуждание по многомерной решетке $\mathbf{Z}^d$ с непрерывным временем. Предположим, что при малых t справедливы следующие соотношения для переходной вероятности случайного блуждания $p(v, u; t)$:

$$
\begin{aligned}
p(v, u; t) &= a(v, u)\, t + o(t), \qquad u \neq v,\\
p(v, v; t) &= 1 + a(v, v)\, t + o(t).
\end{aligned}
$$

Предположим, что для коэффициентов $a(v, u)$ выполнено

$$
a(v, u) = a(u, v) = a_0(u - v),
$$

а для функции $a_0(u)$ справедливы

$$\sum_{u\in\mathbf{Z}^d} a_0(u)=0,\ \text{где}\ a_0(u)\geqslant 0,\, u\neq 0\ \text{и}\ a_0(0)<0,$$

$$\sum_{u\in\mathbf{Z}^d}\|u\|^2 a_0(u)<\infty, \tag{1}$$

где $\|u\|$ – евклидова норма вектора в $\mathbf{Z}^d$. Свойство (1) означает конечность дисперсии скачков случайного блуждания. Также мы предположим, что случайное блуждание является неприводимым, то есть любая точка $v\in\mathbf{Z}^d$ достижима (см. [3]).

Обозначим через $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ гильбертово пространство суммируемых с квадратом комплексных функций $f:\mathbf{Z}^d\to\mathbf{C}$ с нормой

$$\|f\|^2_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)}=\sum_{v\in\mathbf{Z}^d}|f(v)|^2<\infty.$$

Через $\xi_v(t)$ обозначим случайное блуждание в момент времени t, выходящее из точки $v\in\mathbf{Z}^d$ в момент времени $t=0$. Для $f\in\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ положим

$$P^t f(v)=\mathbf{E}\, f(\xi_v(t)).$$

Так как $\xi_v(t)$ – марковский процесс, то P^t является полугруппой, следовательно достаточно сосчитать генератор полугруппы. Имеем при $t\to 0$

$$P^t f(v)=f(v)(1+a(0,0)\,t)+t\sum_{u\neq v}a(v,u)\,f(u)+o(t),$$

следовательно генератор $A_0:\ell^2(\mathbf{Z}^d)\to\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ полугруппы P^t имеет вид

$$A_0 f(v)=\sum_{u\in\mathbf{Z}^d}a(v,u)\,f(u)=\sum_{u\in\mathbf{Z}^d}a_0(v-u)\,f(u)=f*a_0(v).$$

Далее, рассмотрим ветвящееся случайное блуждание на решетке $\mathbf{Z}^d$ с непрерывным временем с источниками ветвления, расположенными периодически на $\mathbf{Z}^d$. Определим множество Γ, в вершинах которого располагаются источники ветвления. Пусть $g_1,\dots,g_d$ – набор линейно независимых (не обязательно ортогональных) векторов с целочисленными координатами. Будем называть решеткой множество

$$\Gamma=\Big\{g\in\mathbf{Z}^d: g=\sum_{j=1}^{d}n_j g_j,\ n_j\in\mathbf{Z},\ j=1,\dots,d\Big\},$$

а множество $\{g_j\}_{j=1}^d$ будем называть базисом решетки Γ. Отметим, что различные базисы могут порождать одну и ту же решетку.

Ветвление в источниках задается производящей функцией

$$b(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k s^k, \quad \text{где } b_k \geqslant 0 \text{ при } k \neq 1, \quad b_1 < 0, \quad \sum_{k=0}^{+\infty} b_k = 0.$$

Последнее означает, что вероятность превращения $p_k(t)$ частицы в k частиц при $t \to 0$ удовлетворяет следующим соотношениям

$$\begin{aligned} p_k(t) &= b_k t + o(t), \qquad k \neq 1, \\ p_1(t) &= 1 + b_1 t + o(t). \end{aligned}$$

Предположим, что $\beta = b'(1) < \infty$, то есть число потомков имеет конечный первый момент. Пусть $N_v(t)$ – общее число частиц в момент времени t, при условии, что в начальный момент времени $t = 0$ была одна частица в точке v. Через $\xi_v^{(k)}(t)$ обозначим k-тый процесс. Положим

$$Q^t f(v) = \mathbf{E}\Big(\sum_{k=1}^{N_v(t)} f(\xi_v^{(k)}(t))\Big).$$

Конечность величины $\mathbf{E}\, N_v(t)$ можно показать способом, предложенным в работе [4].

Вычислим генератор полугруппы Q^t. Если $v \notin \Gamma$, то при $t \to 0$ имеем

$$Q^t f(v) = f(v)(1 + a(0,0)\, t) + t \sum_{u \neq v} a(v,u)\, f(u) + o(t),$$

если $v \in \Gamma$, то при $t \to 0$ имеем

$$Q^t f(v) = f(v)(1 + a(0,0)\, t + b_1 t) + t \sum_{u \neq v} a(v,u)\, f(u) + t \sum_{k \neq 1} k\, b_k\, f(v) + o(t),$$

следовательно генератор $A_\beta : \ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \ell^2(\mathbf{Z}^d)$ полугруппы Q^t имеет вид

$$A_\beta f(v) = \sum_{u \in \mathbf{Z}^d} a(v,u)\, f(u) + \beta \sum_{g \in \Gamma} \delta_g(v)\, f(v),$$

где через $\delta_u(\,\cdot\,)$ обозначен стандартный базисный элемент пространства $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$, то есть

$$\delta_u(v) = \begin{cases} 1, & v = u, \\ 0, & v \neq u. \end{cases}$$

Оператор $V : \ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \ell^2(\mathbf{Z}^d)$, действующий как

$$Vf(v) = \sum_{g\in\Gamma} \delta_g(v)\, f(v), \tag{2}$$

будем называть потенциалом. Оператор βV будем рассматривать как возмущение оператора $A_0 : \ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \ell^2(\mathbf{Z}^d)$.

Нас интересует случай, когда функция $f(\,\cdot\,) = \delta_w(\,\cdot\,)$. В этом случае, функция $Q^t\delta_w(v)$ описывает среднее число частиц в момент времени t в точке w, если в начальный момент времени $t = 0$ у нас была одна частица, которая находилась в точке v. Тогда функция $M(v, w, t) = Q^t\delta_w(v)$ решает следующую задачу Коши

$$\begin{aligned} \frac{\partial M(v,w,t)}{\partial t} &= \sum_{u\in\mathbf{Z}^d} a(v,u)\, M(u,w,t) + \beta \sum_{g\in\Gamma} \delta_g(v)\, M(v,w,t), \\ M(v,w,0) &= \delta_w(v). \end{aligned} \tag{3}$$

Поведение решения уравнения (3) при $t \to \infty$ может быть сведено к изучению спектра генератора A_β.

§3. Спектральный анализ оператора A_β

Оператор A_0 является линейным самосопряженным ограниченным оператором из пространства $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ в пространство $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$. Рассмотрим

$$\big(A_0 f\big)(v) - a(v,v)\, f(v) = \sum_{u\neq v} a(v,u)\, f(u).$$

Из леммы Шура (см., например, [9], теорема 5.2) следует, что

$$\|A_0 - a_0(0)I\|_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)} \leqslant |a_0(0)|, \tag{4}$$

так как

$$\sum_{u\neq v} a(v,u) = |a_0(0)|.$$

Используя (4) и самосопряженность оператора A_0, немедленно получаем, что спектр оператора A_0 содержится в отрезке

$$\sigma(A_0) \subset [\,2\,a_0(0),\, 0\,],$$

где через $\sigma(A_0)$ обозначен спектр оператора A_0.

Для исследования спектра оператора A_β мы разложим его в прямой интеграл операторов в слоях. Сначала введем необходимые обозначения.

Назовем элементарной ячейкой $\mathcal{C}$ решетки Γ следующее множество

$$\mathcal{C} = \Big\{ x \in \mathbf{R}^d : x = \sum_{j=1}^{d} x_j g_j,\ 0 \leqslant x_j < 1,\, j = 1, \dots, d \Big\}.$$

Множество точек $\mathbf{Z}^d$, лежащих внутри фундаментальной ячейки, мы будем называть фундаментальным и обозначать через Ω

$$\Omega = \mathcal{C} \cap \mathbf{Z}^d.$$

Обозначим через $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ стандартное скалярное произведение векторов в $\mathbf{R}^d$. Будем говорить, что базис $\{\widetilde{g}_j\}_{j=1}^d$ двойственный к $\{g_j\}_{j=1}^d$, если

$$\langle \widetilde{g}_i, g_j \rangle = 2\,\pi\,\delta_{ij}.$$

Двойственный базис $\{\widetilde{g}_j\}_{j=1}^d$ порождает двойственную к Γ решетку $\tilde{\Gamma}$

$$\widetilde{\Gamma} = \Big\{ \widetilde{g} \in \mathbf{R}^d : \widetilde{g} = \sum_{j=1}^{d} n_j \widetilde{g}_j,\ n_j \in \mathbf{Z},\, j = 1, \dots, d \Big\}.$$

Элементарную ячейку двойственной решетки будем обозначать через $\widetilde{\mathcal{C}}$

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \Big\{ \theta \in \mathbf{R}^d : \theta = \sum_{j=1}^{d} \theta_j \widetilde{g}_j,\ 0 \leqslant \theta_j < 1,\, j = 1, \dots, d \Big\}.$$

Прямой интеграл $\mathcal{H}$ гильбертовых пространств $\ell^2(\Omega)$ – это пространство эквивалентных классов измеримых и интегрируемых векторных полей, наделенное скалярным произведением

$$(u, v)_{\mathcal{H}} = \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \langle u(\theta), v(\theta) \rangle_{\ell^2(\Omega)}\, d\theta.$$

Можно показать, что пространство $\mathcal{H}$ полное, а значит, $\mathcal{H}$ – гильбертово пространство. Заметим, что $\mathcal{H} = L^2\big(\ell^2(\Omega), d\theta\big)$.

Далее, говорят, что оператор A на $\mathcal{H} = L^2\big(\ell^2(\Omega), d\theta\big)$ разложен в прямой интеграл операторов, если существует функция $A(\theta)$, $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$, принимающая значения в пространстве линейных операторов из $\ell^2(\Omega)$ в $\ell^2(\Omega)$, такая что для всех $\psi \in \mathcal{H}$ выполнено

$$(A\psi)(\theta) = A(\theta)\,\psi(\theta), \quad \theta \in \widetilde{\mathcal{C}}.$$

В этом случае пишут

$$A = \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \oplus A(\theta)\, d\theta,$$

при этом операторы $A(\theta)$ называют слоями оператора A (см. [15], гл. XIII.16).

Обычно в литературе разложение в прямой интеграл строится для операторов вида A_β, у которых лишь конечное число коэффициентов $a_0(u)$ не обращается в нуль. В связи с этим мы приводим разложение оператора A_β в прямой интеграл с доказательством.

Теорема 1. *Оператор A_β на $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов, то есть существует унитарный оператор $U : \ell^2(\mathbf{Z}^d) \to \mathcal{H}$, такой что выполнено*

$$UA_\beta U^{-1} = \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \oplus A_\beta(\theta)\, d\theta.$$

Оператор $A_\beta(\theta)$ в слое имеет вид

$$(A_\beta(\theta)\, f)(v) = \sum_{u\in\Omega} \widetilde{a}(v,u,\theta)\, f(u) + \beta\, \widetilde{V} f(v), \qquad v \in \Omega,\ \theta \in \widetilde{\mathcal{C}},$$

где коэффициенты $\widetilde{a}(v,u,\theta)$ и потенциал $\widetilde{V}$ определяются равенствами

$$\widetilde{a}(v,u,\theta) = \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle}\, a(v+g,u), \tag{5}$$

$$\widetilde{V} f(v) = \begin{cases} f(0), & v = 0,\\ 0, & v \in \Omega \setminus \{0\}. \end{cases} \tag{6}$$

Доказательство. Обозначим через $\mathcal{H}$ прямой интеграл пространств $\ell^2(\Omega)$

$$\mathcal{H} = \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \oplus \ell^2(\Omega)\, d\theta.$$

Пусть $\ell^2_0(\mathbf{Z}^d)$ – множество функций из $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$, имеющих конечный носитель. Рассмотрим оператор $U : \ell^2_0(\mathbf{Z}^d) \to \mathcal{H}$, определенный равенством

$$(Uf)(v,\theta) = |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1/2} \sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} f(v+g), \quad v \in \Omega, \tag{7}$$

где, как и раньше, $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ – стандартное скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$. Для нормы функции Uf имеем

$$\begin{aligned}
\|Uf\|^2_{\mathcal{H}} &= \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} \|(Uf)(\,\cdot\,,\theta)\|^2_{\ell^2(\Omega)}\,d\theta \\
&= |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1} \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} \Big(\sum_{v\in\Omega}\sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} f(v+g) \sum_{g'\in\Gamma} e^{i\langle g',\theta\rangle}\,\overline{f}(v+g')\Big)\,d\theta \\
&= |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1} \sum_{v\in\Omega}\sum_{g\in\Gamma}\sum_{g'\in\Gamma} \Big(f(v+g)\,\overline{f}(v+g') \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} e^{-i\langle g-g',\theta\rangle}\,d\theta\Big) \\
&= \sum_{v\in\mathbf{Z}^d} |f(v)|^2 = \|f\|^2_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, оператор U сохраняет норму функции из множества $\ell^2_0(\mathbf{Z}^d)$, плотного в $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$. Тогда он может быть по непрерывности продолжен до изометрического оператора из $\ell^2(\mathbf{Z}^d)$ в $\mathcal{H}$. Покажем сюръективность отображения U, для этого рассмотрим оператор U^*. Пусть $h=\{h_v\}_{v\in\Omega}\in\mathcal{H}$, где $h_v:\widetilde{\mathcal{C}}\to\mathbf{C}$. Определим

$$(U^*h)(v+g) = |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1/2} \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} e^{i\langle g,\theta\rangle}\,h_v(\theta)\,d\theta, \quad v\in\Omega,\ g\in\Gamma. \tag{8}$$

Явное вычисление показывает, что U^* является сопряженным оператором к оператору U. Более того, из формулы

$$\begin{aligned}
\|U^*h\|^2_{\ell^2(\mathbf{Z^d})} &= \sum_{v\in\mathbf{Z}^d} |(U^*h)(v)|^2 = \sum_{v\in\Omega}\sum_{g\in\Gamma} |(U^*h)(v+g)|^2 \\
&= |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1} \sum_{v\in\Omega}\sum_{g\in\Gamma} \Big| \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} e^{i\langle g,\theta\rangle}\,h_v(\theta)\,d\theta\,\Big|^2 \\
&= \sum_{v\in\Omega} \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} |h_v(\theta)|^2\,d\theta = \|h\|^2_{\mathcal{H}}
\end{aligned}$$

следует, что оператор U^* является изометрическим. Здесь мы использовали равенство Парсеваля для функции $h_v(\theta)$. Тогда оператор U –

унитарный. Для оператора A_0 и функции $f \in \ell_0^2(\mathbf{Z}^d)$

$$
\begin{aligned}
(UA_0 f)(v,\theta) &= |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1/2}\sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle}(A_0 f)(v+g)\\
&= |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1/2}\sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle}\sum_{u\in\mathbf{Z}^d} a(v+g,u)\, f(u)\\
&= |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1/2}\sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle}\sum_{u\in\Omega}\sum_{g'\in\Gamma} a(v+g,u+g')\, f(u+g')\\
&= |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1/2}\sum_{u\in\Omega}\sum_{g'\in\Gamma}\sum_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g',\theta\rangle}\, e^{-i\langle g-g',\theta\rangle}\, a(v+g-g',u)\, f(u+g')\\
&= |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1/2}\sum_{u\in\Omega}\sum_{g'\in\Gamma} e^{-i\langle g',\theta\rangle} f(u+g')\sum_{g''\in\Gamma} e^{-i\langle g'',\theta\rangle}\, a(v+g'',u)\\
&= \sum_{u\in\Omega}(Uf)(u,\theta)\,\widetilde{a}(v,u,\theta) = A_0(\theta)(Uf)(v,\theta),
\end{aligned}
\tag{9}
$$

где $v\in\Omega$, $\theta\in\widetilde{\mathcal{C}}$, а через $A_0(\theta)$ мы обозначили оператор $\ell^2(\Omega)\to\ell^2(\Omega)$ вида

$$
(A_0(\theta)\, f)(v) = \sum_{u\in\Omega}\widetilde{a}(v,u,\theta)\, f(u)
$$

с $\widetilde{a}(v,u,\theta)$, определенными равенством (5). Для потенциала V, определенного формулой (2), имеем

$$
(UVf)(v,\theta) = \widetilde{V}(Uf)(v,\theta)=\begin{cases} |\widetilde{\mathcal{C}}|^{-1/2}\sum\limits_{g\in\Gamma} e^{-i\langle g,\theta\rangle} f(g), & v=0,\\ 0, & v\in\Omega\setminus\{0\}. \end{cases}
\tag{10}
$$

Из (9) и (10) получаем для операторов A_β и $A_\beta(\theta)$

$$
UA_\beta U^{-1} = \int_{\widetilde{\mathcal{C}}} \oplus A_\beta(\theta)\, d\theta. \qquad \square
$$

Оператор $A_\beta(\theta)$ при каждом $\theta\in\widetilde{\mathcal{C}}$ является конечномерным самосопряженным оператором. Это значит, что его спектр состоит из конечного набора вещественных собственных значений

$$
\lambda_1(\theta)\geqslant\cdots\geqslant\lambda_p(\theta), \qquad p=\#\Omega,
$$

где $\#\Omega$ – число точек фундаментального множества Ω. Коэффициенты оператора $A_\beta(\theta)$ являются непрерывными функциями $\theta\in\widetilde{\mathcal{C}}$. Тогда собственные значения $\lambda_j(\theta)$ – непрерывные функции $\theta\in\widetilde{\mathcal{C}}$ при всех

$j = 1, \dots, p$. Отсюда и из теоремы XIII.85 в книге [15] следует, что каждое собственное значение $\lambda_j(\theta)$ оператора в слое является либо точкой непрерывного спектра, либо собственным значением бесконечной кратности для оператора A_β. При этом спектр оператора A_β состоит из p спектральных зон (возможно перекрывающихся)

$$\sigma(A_\beta) = \bigcup_{j=1}^{p} \sigma_j(A_\beta) = \bigcup_{j=1}^{p} [\, \lambda_j^-, \lambda_j^+ \,],$$

где через $\lambda_j^\pm$ обозначены максимум и минимум функции $\lambda_j(\theta)$ при $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$

$$\lambda_j^+ = \max_{\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}} \lambda_j(\theta), \qquad \lambda_j^- = \min_{\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}} \lambda_j(\theta).$$

Оператор $A_0(\theta)$, как и оператор A_0, неположительный. При каждом $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$ возмущение оператора $A_0(\theta)$ потенциалом является одномерным. Отсюда следует, что не больше чем одно собственное значение может стать положительным.

Чтобы исследовать асимптотику числа частиц при больших временах, мы должны понять, как ведет себя правый край спектра оператора A_β. Ниже мы покажем, что супремум спектра оператора A_β совпадает со старшим собственным значением $\lambda_1(0)$ оператора в слое $A_\beta(0)$, то есть

$$\sup \sigma(A_\beta) = \lambda_1(0),$$

а соответствующая спектральная зона не вырождается. В случае, когда лишь конечное число коэффициентов $a_0(u)$ не обращается в нуль, аналогичное утверждение доказано в работе [16]. Отметим, что вместо разложения в прямой интеграл в [16] используется абстрактная теория представлений.

3.1. Анализ спектра оператора $A_\beta(\theta)$. Обозначим через $v_1, \dots, v_p$ точки множества Ω, при этом мы считаем, что $v_1 = 0$. Через $\widetilde{a}_{jk}(\theta)$ обозначим коэффициенты $\widetilde{a}(v_j, v_k, \theta)$. Пусть $\widetilde{\delta}_1, \dots, \widetilde{\delta}_p$ – стандартный базис в пространстве $\ell^2(\Omega)$

$$\widetilde{\delta}_j(v) = \begin{cases} 1, & v = v_j, \\ 0, & v \neq v_j. \end{cases}$$

Тогда изображающая матрица оператора $A_\beta(\theta)$ в этом базисе имеет вид

$$A_\beta(\theta) = \begin{pmatrix} \widetilde{a}_{11}(\theta)+\beta & \widetilde{a}_{12}(\theta) & \cdots & \widetilde{a}_{1p}(\theta) \\ \widetilde{a}_{21}(\theta) & \widetilde{a}_{22}(\theta) & \cdots & \widetilde{a}_{2p}(\theta) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widetilde{a}_{p1}(\theta) & \widetilde{a}_{p2}(\theta) & \cdots & \widetilde{a}_{pp}(\theta) \end{pmatrix}.$$

Матрица $A_\beta(0)$ является наиболее простой для исследования, так как в этом случае коэффициенты $\widetilde{a}_{jk}(0)$ легко пересчитываются через коэффициенты $a(v,u)$. Именно

$$\widetilde{a}_{jk}(0) = \sum_{g\in\Gamma} a(v_j+g, v_k).$$

Ниже (лемма 1) мы покажем, что коэффициенты матрицы $A_0(0)$ имеют свойства, аналогичные свойствам коэффициентов исходного оператора A_0.

Далее, напомним, что ориентированный граф называется сильносвязным, если на нем существует ориентированный путь из любой вершины в любую другую.

Лемма 1. *Матрица $A_0(0)$ является вещественной и симметричной. Коэффициенты $\widetilde{a}_{jk}(0)$ матрицы $A_0(0)$ имеют следующие свойства:*
1) *диагональные коэффициенты совпадают и неположительны*

$$\widetilde{a}_{jj}(0) = -D \leqslant 0, \qquad j=1,\dots,p; \tag{11}$$

2) *коэффициенты $\widetilde{a}_{jk}(0)$ при $j\neq k$ неотрицательны*

$$\widetilde{a}_{jk}(0) \geqslant 0, \qquad j\neq k, \quad j,k=1,\dots,p; \tag{12}$$

3) *сумма элементов одной строки равна нулю*

$$\sum_{k=1}^{p} \widetilde{a}_{jk}(0) = 0, \qquad j=1,\dots,p; \tag{13}$$

4) *граф $\widetilde{G} = (\Omega, \widetilde{\mathcal{E}})$ с множеством вершин Ω и множеством ориентированных ребер*

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \{(v_j, v_k) : \widetilde{a}_{jk} > 0\} \tag{14}$$

является сильно-связным;
5) *При всех $j, k = 1, \ldots, p$ для коэффициентов $\widetilde{a}_{jk}(0)$ выполнены неравенства*

$$\widetilde{a}_{jk}(0) \geqslant \operatorname{Re} \widetilde{a}_{jk}(\theta).$$

Одновременно при всех $j, k = 1, \ldots, p$ равенства достигаются только при $\theta = 0$.

Доказательство. Из свойств коэффициентов оператора A_0 следует вещественность и симметричность матрицы $A_0(0)$ и свойства (11)–(13) для коэффициентов $\widetilde{a}_{jk}(0)$.

Перейдем к доказательству свойства 4. Обозначим через $G = (\mathbf{Z}^d, \mathcal{E})$ – граф с множеством вершин в $\mathbf{Z}^d$ и множеством ориентированных ребер, определяемых по оператору A_0 следующим образом

$$\mathcal{E} = \{(v, u) : a(v, u) > 0\}. \tag{15}$$

Из условий достижимости любой вершины и симметричности коэффициентов $a(v, u)$ следует, что граф G сильно-связный. Предположим, что граф $\widetilde{G}$ – не сильно-связный. В силу симметричности матрицы $A_0(0)$ у каждого ребра есть противоположное. Тогда граф $\widetilde{G}$ – несвязный. Обозначим одну из его компонент связности через $\widetilde{G}_1 = (\Omega_1, \widetilde{\mathcal{E}}_1)$. Тогда для любых двух вершин $v_j \in \Omega_1$, $v_k \in \Omega \setminus \Omega_1$ выполнено

$$\widetilde{a}_{jk}(0) = \sum_{g \in \Gamma} a(v_j + g, v_k) = 0.$$

Так как коэффициенты $a(v, u)$ при $v \neq u$ неотрицательны, значит при всех $g \in \Gamma$ коэффициенты $a(v + g, u)$ равны нулю. Тогда на графе $G = (\mathbf{Z}^d, \mathcal{E})$ с множеством ребер, определенным (15), нет ни одного ребра, соединяющего вершину из множества $\Omega_1 + \Gamma$ с вершиной из множества $\Omega \setminus \Omega_1 + \Gamma$. Следовательно, граф $G = (\mathbf{Z}^d, \mathcal{E})$ – несвязный, что противоречит свойству для оператора A_0 о достижимости любой точки $v \in \mathbf{Z}^d$.

Покажем последнее свойство. Из явного вида (5) коэффициентов $\widetilde{a}_{jk}(\theta)$ следует, что при всех $j, k = 1, \ldots, p$ для коэффициентов $\widetilde{a}_{jk}(0)$ выполнены неравенства

$$\widetilde{a}_{jk}(0) \geqslant |\widetilde{a}_{jk}(\theta)| \geqslant \operatorname{Re} \widetilde{a}_{jk}(\theta), \qquad j \neq k,$$
$$\widetilde{a}_{jj}(0) \geqslant |\widetilde{a}_{jj}(\theta) - a(0,0)| + a(0,0) \geqslant \operatorname{Re} \widetilde{a}_{jj}(\theta).$$

Если равенства достигаются одновременно при всех $j, k = 1, \ldots, p$, то

$$e^{-i\langle \theta, g \rangle}\, a(v_j + g, v_k) = a(v_j + g, v_k), \qquad g \in \Gamma, \quad j, k = 1, \ldots, p.$$

Рассмотрим множество

$$S = \{ g \in \Gamma : a(v_j + g, v_k) \neq 0, \text{ для некоторых } j, k = 1, \ldots, p \}.$$

Для всех векторов $g' \in S$ выполнено

$$e^{-i\langle \theta, g' \rangle} = 1.$$

Так как любая вершина $v \in \mathbf{Z}^d$ достижима, то множество S содержит базис, порождающий решетку Γ. Тогда

$$e^{-i\langle \theta, g \rangle} = 1$$

для всех $g \in \Gamma$. При $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$ последнее равенство возможно, только если $\theta = 0$. □

Заметим, что из леммы 1 вытекает, что спектр оператора $A_0(0)$ содержится в интервале $[-2D, 0]$.

Лемма 2. *Старшее собственное значение $\lambda_1(0)$ оператора $A_\beta(0)$ является простым. Соответствующая ему собственная функция может быть выбрана положительной.*

Доказательство. Рассмотрим граф $\widetilde{G}$, определенный (14). По лемме 1 он является сильно-связным. Тогда из теорем 6.2.14 и 6.2.24 в [12] следует, что матрица $A_\beta(0)$ неразложима. Пусть число D определяется равенством (11). При $\beta > 0$ все элементы матрицы $A_\beta(0) + DI$ неотрицательны. Тогда оба утверждения леммы следуют из теоремы Перрона–Фробениуса (см. [12], теорема 8.4.4). □

Нас интересует правый край спектра оператора A_β. Следующая лемма показывает, что им является число $\lambda_1(0)$.

Лемма 3. *Для старшего собственного значения $\lambda_1(\theta)$ оператора $A_\beta(\theta)$ выполнено неравенство*

$$\lambda_1(\theta) \leqslant \lambda_1(0),$$

причем равенство достигается только при $\theta = 0$.

Доказательство. Пусть ψ_1 – собственная функция, соответствующая старшему собственному значению $\lambda_1(0)$ оператора $A_\beta(0)$. Для функции ψ_1 имеем

$$\big[A_\beta(0)\,\psi_1\big](v_j) = \sum_{k=1}^{p} \widetilde{a}_{jk}(0)\,\psi_1(v_k) + \beta\,\widetilde{V}\psi_1(v_j) = \lambda_1(0)\,\psi_1(v_j).$$

Откуда

$$\beta\,\widetilde{V}\psi_1(v_j) = \lambda_1(0)\,\psi_1(v_j) - \sum_{k=1}^{p}\widetilde{a}_{jk}(0)\,\psi_1(v_k).$$

Пусть $f \in \ell^2(\Omega)$, обозначим через $\psi_1 f$ поточечное произведение функций ψ_1 и f. Рассмотрим скалярное произведение $\langle A_\beta(\theta)\,\psi_1 f, \psi_1 f\rangle_{\ell^2(\Omega)}$

$$\begin{aligned}
&\langle A_\beta(\theta)\,\psi_1 f, \psi_1 f\rangle_{\ell^2(\Omega)}\\
&\quad= \sum_{j=1}^{p}\Big(\sum_{k=1}^{p}\widetilde{a}_{jk}(\theta)\,\psi_1(v_k)\,f(v_k) + \beta\,\widetilde{V}\psi_1(v_j)\,f(v_j)\Big)\,\overline{\psi_1}(v_j)\,\overline{f}(v_j)\\
&\quad= \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\Big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)\,f(v_k) - \widetilde{a}_{jk}(0)\,f(v_j)\Big)\,\psi_1(v_k)\,\overline{\psi_1}(v_j)\,\overline{f}(v_j)\\
&\qquad+ \sum_{j=1}^{p}\lambda_1(0)\,\psi_1(v_j)\,f(v_j)\,\overline{\psi_1}(v_j)\,\overline{f}(v_j)\\
&\quad= \sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}\Big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)\,f(v_k) - \widetilde{a}_{jk}(0)\,f(v_j)\Big)\,\psi_1(v_k)\,\overline{\psi_1}(v_j)\,\overline{f}(v_j)\\
&\qquad+ \lambda_1(0)\,\langle\psi_1 f, \psi_1 f\rangle_{\ell^2(\Omega)}.
\end{aligned}$$

По лемме 2 можно считать, что $\psi_1(v_j) > 0$ при всех $j = 1, \ldots, p$. Тогда для любой функции $h \in \ell^2(\Omega)$ существует представление в виде $h = \psi_1 f$. Для старшего собственного значения $\lambda_1(\theta)$ оператора $A_\beta(\theta)$ имеем

$$\begin{aligned}
\lambda_1(\theta) &= \sup_{\substack{h\in\ell^2(\Omega)\\ h\neq 0}}\frac{\langle A_\beta(\theta)h, h\rangle_{\ell^2(\Omega)}}{\langle h, h\rangle_{\ell^2(\Omega)}} = \sup_{\substack{f\in\ell^2(\Omega)\\ f\neq 0}}\frac{\langle A_\beta(\theta)\,\psi_1 f, \psi_1 f\rangle_{\ell^2(\Omega)}}{\langle\psi_1 f, \psi_1 f\rangle_{\ell^2(\Omega)}} = \lambda_1(0)\\
&\quad+ \sup_{\substack{f\in\ell^2(\Omega)\\ f\neq 0}}\frac{\sum\limits_{j=1}^{p}\Big(\sum\limits_{k=1}^{p}\big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)\,f(v_k) - \widetilde{a}_{jk}(0)\,f(v_j)\big)\,\psi_1(v_k)\Big)\,\overline{\psi_1}(v_j)\,\overline{f}(v_j)}{\langle\psi_1 f, \psi_1 f\rangle_{\ell^2(\Omega)}}.
\end{aligned}$$

Покажем, что второе слагаемое не положительно и обращается в нуль только при $\theta = 0$. Для этого рассмотрим два слагаемых суммы в числителе с парами индексов j, k и k, j. С учетом того, что ψ_1 –

вещественный вектор, имеем

$$
\begin{aligned}
&\Big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)\, f(v_k) - \widetilde{a}_{jk}(0)\, f(v_j)\Big)\, \psi_1(v_k)\, \overline{\psi_1}(v_j)\, \overline{f}(v_j) \\
&\qquad + \Big(\widetilde{a}_{kj}(\theta)\, f(v_j) - \widetilde{a}_{kj}(0)\, f(v_k)\Big)\, \psi_1(v_j)\, \overline{\psi_1}(v_k)\, \overline{f}(v_k) \\
&\quad = \psi_1(v_j)\, \psi_1(v_k) \Big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)\, f(v_k)\, \overline{f}(v_j) - \widetilde{a}_{jk}(0)\, |f(v_j)|^2\Big) \\
&\qquad + \psi_1(v_j)\, \psi_1(v_k) \Big(\widetilde{a}_{kj}(\theta)\, f(v_j)\, \overline{f}(v_k) - \widetilde{a}_{kj}(0)\, |f(v_k)|^2\Big) \\
&\quad = \psi_1(v_j)\, \psi_1(v_k) \Big(2\, \mathrm{Re}\, \big(\widetilde{a}_{jk}(\theta)\, f(v_k)\, \overline{f}(v_j)\big) \\
&\qquad - \widetilde{a}_{jk}(0)\, |f(v_j)|^2 - \widetilde{a}_{kj}(0)\, |f(v_k)|^2\Big).
\end{aligned} \tag{16}
$$

Из п. 5 леммы 1 и неравенства

$$|c_1|^2 + |c_2|^2 \geqslant 2\, \mathrm{Re}\, (c_1 \overline{c}_2),$$

справедливого для любых комплексных чисел, следует, что последнее выражение в (16) неположительно, причем равенство нулю при всех j, k одновременно достигается только при $\theta = 0$. □

Теорема 2. *Пусть $\beta > 0$. Тогда старшее собственное значение $\lambda_1(0)$ оператора $A_\beta(0)$ удовлетворяет неравенству*

$$\lambda_1(0) \geqslant \beta/p,$$

где $p = \#\Omega$ – число точек фундаментального множества Ω.

Доказательство. Пусть $\varphi(v_j) = 1$, $j = 1, \ldots, p$, – постоянная функция на фундаментальном множестве Ω. Для старшего собственного значения $\lambda_1(0)$ оператора $A_\beta(0)$ имеем

$$\lambda_1(0) = \sup_{\substack{h \in \ell^2(\Omega) \\ h \neq 0}} \frac{\langle A_\beta(0)\, h, h \rangle_{\ell^2(\Omega)}}{\langle h, h \rangle_{\ell^2(\Omega)}} \geqslant \frac{\langle A_\beta(0)\, \varphi, \varphi \rangle_{\ell^2(\Omega)}}{\langle \varphi, \varphi \rangle_{\ell^2(\Omega)}} = \beta/p. \qquad \square$$

Мы показали, что у нашего оператора A_β для любого положительного числа β существует положительный спектр.

3.2. Поведение числа частиц. Напомним, что $M(v, w, t) = Q^t \delta_w(v)$ описывает среднее число частиц в момент времени t в точке w, если в начальный момент времени $t = 0$ мы стартовали из точки v.

В силу лемм (2) и (3) расстояние от $\lambda_1(0)$ до второй спектральной зоны оператора A_β больше нуля, то есть

$$\varepsilon_1 = \lambda_1(0) - \sup_{\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}} \lambda_2(\theta) > 0. \tag{17}$$

Отметим также, что из условия (1) следует, что собственное значение $\lambda_1(\theta)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в нуле.

Теорема 3. *Существуют $N = N(v,w) < \infty$ и неограниченная последовательность рациональных чисел $r_k = r_k(v,w)$, $\frac{d}{2} \leqslant r_0 < r_1 < \dots < r_k < \cdots$, такие что при $t \to \infty$ справедлива следующая асимптотика*

$$M(v,w,t) = e^{\lambda_1(0)\, t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{N} c_{kl}(v,w)\, t^{-r_k}\, (\ln t)^l \left(1 + O(e^{-\varepsilon t})\right) \tag{18}$$

для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Доказательство. Из уравнения (3) следует, что

$$M(v,w,t) = e^{A_\beta t}\, M(v,w,0) = e^{A_\beta t}\, \delta_w(v), \qquad v \in \mathbf{Z}^d,\ w \in \mathbf{Z}^d.$$

Тогда

$$M(v,w,t) = \langle M(\,\cdot\,,w,t), \delta_v(\,\cdot\,)\rangle_{\ell^2(\mathbf{Z}^d)}.$$

В силу унитарности преобразования U, определенного (7), имеем

$$\begin{aligned} M(v,w,t) &= \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} \langle U e^{A_\beta t} \delta_w(\,\cdot\,,\theta), U\delta_v(\,\cdot\,,\theta)\rangle_{\ell^2(\Omega)}\, d\theta \\ &= \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} \langle e^{A_\beta(\theta) t} U\delta_w(\,\cdot\,,\theta), U\delta_v(\,\cdot\,,\theta)\rangle_{\ell^2(\Omega)}\, d\theta. \end{aligned}$$

Пусть $v = v' + \gamma_v$, $w = w' + \gamma_w$, где $v', w' \in \Omega$, а $\gamma_v, \gamma_w \in \Gamma$. Тогда для $u \in \Omega$ имеем

$$U\delta_v(u,\theta) = \sum_{g\in\Gamma} e^{i\langle g,\theta\rangle} \delta_v(u+g) = \begin{cases} e^{i\langle \gamma_v,\theta\rangle}, & u = v',\ \theta \in \widetilde{\mathcal{C}}, \\ 0, & u \neq v',\ \theta \in \widetilde{\mathcal{C}}, \end{cases}$$

$$U\delta_w(u,\theta) = \sum_{g\in\Gamma} e^{i\langle g,\theta\rangle} \delta_w(u+g) = \begin{cases} e^{i\langle \gamma_w,\theta\rangle}, & u = w',\ \theta \in \widetilde{\mathcal{C}}, \\ 0, & u \neq w',\ \theta \in \widetilde{\mathcal{C}}. \end{cases}$$

Разложим функции $U\delta_{w'}(\,\cdot\,,\theta)$ и $U\delta_{v'}(\,\cdot\,,\theta)$ по собственным функциям оператора $A_\beta(\theta)$ при каждом $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$

$$U\delta_{w'}(u,\theta) = \sum_{j=1}^{p} c_j^{w'}(\theta)\,\psi_j(u,\theta),\;\; U\delta_{v'}(u,\theta) = \sum_{j=1}^{p} c_j^{v'}(\theta)\,\psi_j(u,\theta),$$

где

$$c_j^{w'}(\theta) = \langle U\delta_{w'}(\,\cdot\,,\theta), \psi_j(\,\cdot\,,\theta)\rangle_{\ell^2(\Omega)} = \psi_j(w',\theta),$$
$$c_j^{v'}(\theta) = \langle U\delta_{v'}(\,\cdot\,,\theta), \psi_j(\,\cdot\,,\theta)\rangle_{\ell^2(\Omega)} = \psi_j(v',\theta).$$

Имеем

$$e^{A_\beta(\theta)\,t} U\delta_{w'}(u,\theta) = \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j(\theta)t} c_j^{w'}(\theta)\,\psi_j(u,\theta).$$

Отсюда следует, что

$$M(v,w,t) = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} \sum_{j=1}^{p} e^{\lambda_j(\theta)t}\, e^{i\langle \gamma_w - \gamma_v, \theta\rangle}\, \psi_j(w',\theta)\, \overline{\psi}_j(v',\theta)\, d\theta.$$

При $t \to \infty$ основной вклад в интеграл дает экспонента с наибольшим собственным значением $\lambda_1(\theta)$ в показателе. Тогда

$$M(v,w,t) = \int\limits_{\widetilde{\mathcal{C}}} e^{\lambda_1(\theta)t}\, e^{i\langle \gamma_w - \gamma_v, \theta\rangle}\, \psi_1(w',\theta)\, \overline{\psi}_1(v',\theta)\, d\theta\, \Big(1 + O(e^{-\varepsilon t})\Big) \quad (19)$$

для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, где ε_1 определяется формулой (17). Асимптотика старшего члена в интеграле (19) может быть вычислена с помощью метода Лапласа (см. [5]). Так как мы показали, что нуль является точкой максимума функции $\lambda_1(\theta)$ на $\widetilde{\mathcal{C}}$, основной вклад в интеграл вносят значения функции в окрестности нуля. Тогда существует такое $N = N(v,w) < \infty$, что при $t \to \infty$ справедливо следующее асимптотическое разложение (см. [5], глава 2, теорема 4.3)

$$M(v,w,t) = e^{\lambda_1(0)t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{N} c_{kl}(v,w)\, t^{-r_k}\, (\ln t)^l\, \big(1 + O(e^{-\varepsilon t})\big),$$

где r_k – рациональные числа, $\frac{d}{2} \leqslant r_0 < r_1 < \cdots < r_s \to \infty,\ s \to \infty$. В общем случае нам не известен алгоритм для вычисления коэффициентов $c_{kl}(v,w)$. $\square$

В некоторых случаях асимптотика имеет более простой вид. Определитель матрицы

$$\lambda_1^{''}(\theta) = \left\{ \frac{\partial^2 \lambda_1(\theta)}{\partial\theta_j \partial\theta_k} \right\}_{j,k=1}^{d}$$

называется гессианом функции $\lambda_1(\theta)$. Предположим, что критическая точка $\theta_0 = 0$ функции $\lambda_1(\theta)$ является невырожденной, то есть гессиан не равен нулю. В этом случае коэффициенты $c_{kl}(v,w)$ в (18) могут быть вычислены явно, и при $t \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение (см. [5], глава 2, теорема 4.1)

$$M(v,w,t) = e^{\lambda_1(0)t}\, t^{-d/2} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(v,w)\, t^{-k} \left(1 + O(e^{-\varepsilon t})\right).$$

Коэффициент $c_0(v,w)$ имеет следующий вид

$$c_0(v,w) = \frac{(2\pi)^{d/2}\, \psi_1(w',0)\, \psi_1(v',0)}{\sqrt{|\det \lambda_1^{''}(0)|}},$$

где $v = v' + \gamma_v$, $w = w' + \gamma_w$, $v', w' \in \Omega$, $\gamma_v, \gamma_w \in \Gamma$. Все остальные коэффициенты $c_k(v,w)$ также могут быть вычислены явно.

§4. Примеры

Оператор Лапласа на $\mathbf{Z}^1$. Рассмотрим оператор A_0 на $\mathbf{Z}^1$ с коэффициентами

$$a(v,u) = \begin{cases} -2, & v = u, \\ 1, & |v-u| = 1, \\ 0, & |v-u| \geqslant 2. \end{cases}$$

В этом случае оператор $-A_0$ называют оператором Лапласа на $\mathbf{Z}^1$. Рассмотрим потенциал V, периодический относительно решетки Γ с базисным вектором $g = 2$. Решетка Γ изображена на рисунке 1, жирным выделены точки, в которых потенциал не обращается в нуль. В

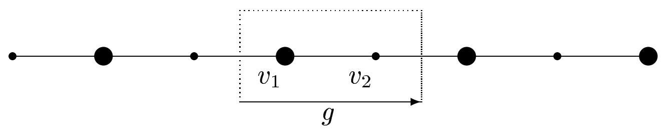

Рис. 1. Решетка в примере 1.

этом случае фундаментальное множество точек состоит из двух точек v_1, v_2. Изображающая матрица оператора $A_\beta(\theta)$ в слое имеет следующий вид

$$A_\beta(\theta) = \begin{pmatrix} -2+\beta & 1+e^{2i\theta} \\ 1+e^{-2i\theta} & -2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения $\lambda_{1,2}(\theta)$ матрицы $A_\beta(\theta)$ равны

$$\lambda_{1,2}(\theta) = \frac{\beta - 4 \pm \sqrt{\beta^2 + 16\cos^2\theta}}{2}.$$

При $\theta = 0$ нормированный собственный вектор ψ_1 имеет вид

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} \frac{\beta+\sqrt{\beta^2+16}}{\sqrt{2\beta^2+32+\beta\sqrt{2\beta^2+32}}} \\ \frac{4}{\sqrt{2\beta^2+32+\beta\sqrt{2\beta^2+32}}} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Вычислим вторую производную $\lambda_1(\theta)$ в точке $\theta_0 = 0$

$$\lambda_1^{''}(0) = -\frac{8}{\sqrt{(\beta^2+16)}} < 0.$$

Тогда при $t \to \infty$ асимптотика $M(v_j + \gamma_{v_j}, v_k + \gamma_{v_k}, t)$, $j, k = 1, 2$, имеет следующий вид

$$M(v_j + \gamma_{v_j}, v_k + \gamma_{v_k}, t)$$
$$= e^{t\frac{\beta-4+\sqrt{\beta^2+16}}{2}} \sqrt{\frac{\pi\sqrt{\beta^2+16}}{4t}} \psi_1(v_k, 0)\psi_1(v_j, 0)\Big(1 + O(t^{-1})\Big),$$

где $j, k = 1, 2$, $\gamma_{v_j}, \gamma_{v_k} \in \Gamma$, $\psi(v_j, 0)$ – это j-ая компонента вектора ψ_1, определенного (20).

Оператор Лапласа в плоскости. Рассмотрим оператор A_0 на $\mathbf{Z}^2$ с коэффициентами

$$a(v,u) = \begin{cases} -4, & v = u, \\ 1, & \|v-u\| = 1, \\ 0, & \|v-u\| \geqslant 2. \end{cases}$$

В этом случае оператор $-A_0$ называется комбинаторным оператором Лапласа на $\mathbf{Z}^2$. Рассмотрим потенциал V, периодический относительно решетки Γ с базисными векторами $g_1 = (2, 0)$, $g_2 = (0, 2)$. Соответствующая решетка изображена на рисунке 2, жирным выделены точки, в которых потенциал не обращается в нуль. Фундаментальное

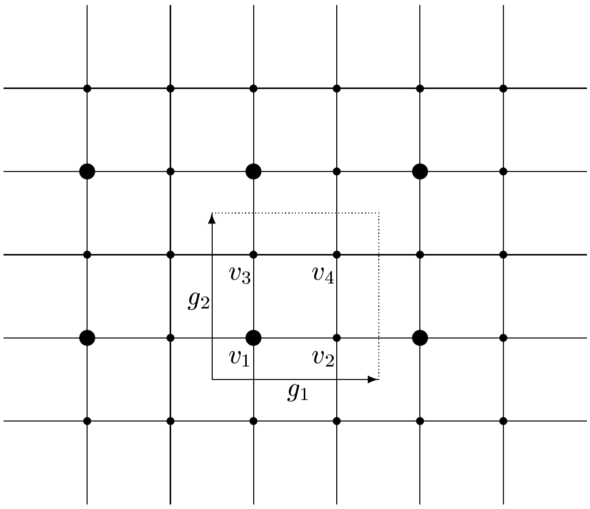

Рис. 2. Решетка в примере 2.

множество точек состоит из четырех точек v_1, v_2, v_3, v_4. Если занумеровать их как показано на рисунке, то изображающая матрица оператора $A_\beta(\theta)$ в слое имеет следующий вид

$$A_\beta(\theta) = \begin{pmatrix} -4+\beta & 1+e^{2i\theta_1} & 1+e^{2i\theta_2} & 0 \\ 1+e^{-2i\theta_1} & -4 & 0 & 1+e^{2i\theta_2} \\ 1+e^{-2i\theta_2} & 0 & -4 & 1+e^{2i\theta_1} \\ 0 & 1+e^{-2i\theta_2} & 1+e^{-2i\theta_1} & -4 \end{pmatrix}.$$

Для старшего собственного значения $\lambda_1(0)$ матрицы $A_\beta(0)$ получаем

$$\lambda_1(0) = \begin{cases} -4+\frac{\beta}{3}+\frac{2\sqrt{\beta^2+48}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{1}{3}\arctan\frac{6\sqrt{6}\sqrt{\beta^4+26\beta^2+512}}{\beta^3-36\beta}\right), & \beta \leqslant 6, \\ -4+\frac{\beta}{3}+\frac{2\sqrt{\beta^2+48}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{6\sqrt{6}\sqrt{\beta^4+26\beta^2+512}}{\beta^3-36\beta}\right), & \beta > 6. \end{cases}$$

Матрица вторых производных при $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T = (0,0)^T$ имеет вид

$$\lambda_1''(0) = \left\{ \frac{\partial^2 \lambda_1(\theta)}{\partial\theta_j \partial\theta_k}\Big|_{\theta=0} \right\}_{j,k=1}^{2}$$
$$= -\frac{16\,(\lambda_1(0)+4)^2 - 8\,\beta(\lambda_1(0)+4) + 32}{4\,(\lambda_1(0)+4)^3 - 3\,\beta(\lambda_1(0)+4)^2 - 32\,(\lambda_1(0)+4) + 8\,\beta} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что коэффициент перед единичной матрицей не обращается в нуль, а значит, и гессиан не обращается в нуль. Ненормированный собственный вектор ψ_1 при $\theta = (\theta_1, \theta_2)^T = (0,0)^T$ может быть выбран следующим образом

$$\psi_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\lambda_1(0)+4-\beta}{4} \\ \frac{\lambda_1(0)+4-\beta}{4} \\ \frac{\lambda_1(0)+4-\beta}{\lambda_1(0)+4} \end{pmatrix}. \tag{21}$$

Таким образом, формула (18) принимает вид

$$M(v_j + \gamma, v_k, t) = e^{\lambda_1(0)t} \frac{2\pi}{t\sqrt{|\det \lambda_1''(0)|}} \frac{\psi_1(v_k, 0)\,\psi_1(v_j, 0)}{\|\psi_1(0)\|^2_{\ell_2(\Omega)}} \big(1 + O(t^{-1})\big),$$

где $j, k = 1, 2, 3, 4$, $\gamma \in \Gamma$, а $\psi_1(v_j, 0)$ – это j-ая компонента вектора (21).
Возмущение в каждой точке. Рассмотрим оператор A_β на $\mathbf{Z}^d$ с коэффициентами общего вида и источником ветвления в каждой точке $\mathbf{Z}^d$. Тогда в фундаментальном множестве точек содержится одна точка. В этом случае преобразование U, определенное (7), является дискретным d-мерным преобразованием Фурье, и оно полностью диагонализует оператор A_β. Оператором в слое $A_\beta(\theta) : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ при фиксированном $\theta \in \widetilde{\mathcal{C}}$ является оператор умножения на число

$$A_\beta(\theta)\, f(v) = f(v) \Big(\sum_{g \in \mathbf{Z^d}} a(v+g, v)\, e^{-i\langle g, \theta\rangle} + \beta \Big)$$
$$= f(v) \Big(\sum_{g \in \mathbf{Z^d}} a(v+g, v)\, \cos\langle g, \theta\rangle + \beta \Big).$$

Отсюда, при любых $a(v, u)$, удовлетворяющих нашим условиям, оператор $A_\beta(0)$ является умножением на β. В этом случае

$$\left\{ \frac{\partial^2 \lambda_1(\theta)}{\partial\theta_j \partial\theta_k}\Big|_{\theta=0} \right\}_{j,k=1}^{d} = \Big\{ -\sum_{g \in \mathbf{Z^d}} g^j g^k a(v+g, v) \Big\}_{j,k=1}^{d}, \tag{22}$$

где $g^j = \frac{\partial\langle g,\theta\rangle}{\partial\theta_j}\Big|_{\theta=0}$ – j-ая координата вектора g. Из этой формулы, в частности, видно, что вторая частная производная по любому направлению строго меньше нуля. Тогда определитель $\det\lambda_1''(0)$ меньше нуля. Отсюда следует, что формула (18) имеет вид

$$M(v,w,t) = e^{\beta t}\left(\frac{2\pi}{t}\right)^{d/2}\frac{1}{\sqrt{-\det\lambda_1''(0)}}\left(1+O(t^{-1})\right),$$

для любых $v, w \in \mathbf{Z}^d$, где $\lambda_1''(0)$ – матрица, определенная (22).

Литература

1. Е. А. Антоненко, Е. Б. Яровая, *Расположение собственных значений в спектре эволюционного оператора в ветвящемся случайном блуждании.* — Современные проблемы математики и механики **X**, No. 3 (2015), 9–22.
2. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* ЛГУ, 1980.
3. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* Наука, М., 1977.
4. Б. А. Севастьянов, *Ветвящиеся процессы.* Наука, М., 1971.
5. М. В. Федорюк, *Метод перевала.* Наука, М., 1977.
6. Е. Б. Яровая, *Ветвящиеся случайные блуждания в неоднородной среде.* Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, М., 2007.
7. Е. Б. Яровая, *Критерии экспоненциального роста числа частиц в моделях ветвящихся случайных блужданий.* — Теория вероятн. и ее примен. **55**, No. 4 (2010), 705–731.
8. Е. Б. Яровая, *Спектральные свойства эволюционных операторов в моделях ветвящихся случайных блужданий.* — Матем. заметки **92**, No. 1 (2012), 123–140.
9. P. R. Halmos, V. S. Sunder, *Bounded Integral Operators on L^2 Spaces.* Springer Science & Business Media, **96**, 2012.
10. Y. Higuchi, Y. Nomura, *Spectral structure of the Laplacian on a covering graph.* — Europ. J. Combin. **30**, No. 2 (2009), 570–585.
11. Y. Higuchi, T. Shirai, *Some spectral and geometric properties for infinite graphs.* — Contemporary Math. **347** (2004), 2–56.
12. R. A. Horn, C. R. Johnson, *Matrix Analysis.* Cambridge university press, 2012.
13. E. Korotyaev, N. Saburova, *Schrödinger operators on periodic discrete graphs.* — J. Math. Analysis Appl. **420**, No. 1 (2014), 576–611.
14. E. Korotyaev, N. Saburova, *Schrödinger operators with guided potentials on periodic graphs.* — Proc. Amer. Math. Soc. (2017).
15. M. Reed, B. Simon, *Analysis of Operators. IV*, Elsevier, 1978.
16. P. W. Sy, T. Sunada, *Discrete Schrödinger operators on a graph.* — Nagoya Math. J. **125** (1992), 141–150.

Platonova M. V., Ryadovkin K. S. Asymptotic behavior of the mean number of particles of branching random walk on $\mathbb{Z}^d$ with periodic sources of branching.

We consider a continuous-time branching random walk on $\mathbb{Z}^d$ with birth and death of particles at a periodic set of points (the sources of branching). Spectral properties of an evolution operator of the mean number of particles are studied. We derive a representation of the mean value of particle number in a form of asymptotic series.

С.-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова, Фонтанка 27, С.-Петербург 191023, Россия

СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева, 14 линия В.О., дом 29Б, С.-Петербург 199178, Россия

E-mail: `mariyaplat@rambler.ru`

С.-Петербургский государственный университет, Университетская наб., д. 7/9, С.-Петербург 199034, Россия

E-mail: `kryadovkin@gmail.com`

Поступило 23 октября 2017 г.