ДОКЛАДЫ АКАДЕМИИ НАУК, 2018, том 479, № 3, с. 1–4

МАТЕМАТИКА

УДК 000.000

О СРЕДНЕМ ЧИСЛЕ ЧАСТИЦ ВЕТВЯЩЕГОСЯ СЛУЧАЙНОГО БЛУЖДАНИЯ НА РЕШЁТКЕ $\mathbb{Z}^d$ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ ВЕТВЛЕНИЯ

© 2018 г. М. В. ПЛАТОНОВА*, К. С. РЯДОВКИН**

Представлено академиком РАН И.А. Ибрагимовым 06.10.2017 г.

Поступило 24.10.2017 г.

В работе рассматривается модель ветвящегося случайного блуждания на решётке $\mathbb{Z}^d$ с непрерывным временем и источниками ветвления, расположенными периодически на $\mathbb{Z}^d$. Исследуются спектральные свойства оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц в произвольной точке решётки. Доказано существование положительного спектра данного оператора, что приводит к экспоненциальной асимптотике среднего числа частиц при $t \to \infty$.

DOI:

Рассмотрим модель ветвящегося случайного блуждания на решётке $\mathbb{Z}^d$ с непрерывным временем. Будем считать, что размножение или гибель частиц происходят только в узлах периодической решётки (источниках), а между источниками частицы совершают случайное блуждание по точкам решётки $\mathbb{Z}^d$. Предположим также, что частицы эволюционируют независимо друг от друга, а интенсивность источников одинакова. Далее, предположим, что случайное блуждание частиц определяется матрицей переходных интенсивностей $A = (a(v,u))_{v,u\in\mathbb{Z}^d}$, для элементов которой выполнено $a(v,u) = a(u,v) = a_0(u - v),\ u, v \in \mathbb{Z}^d$, причём функция $a_0(u)$ удовлетворяет $a_0(u) \geqslant 0$, если $u \neq 0$, $a_0(0) < 0$, $\sum_{u\in\mathbb{Z}^d} a_0(u) = 0$ и

$$\sum_{u\in\mathbb{Z}^d} \| u \|^2\ a_0(u) < \infty, \qquad (1)$$

где $\| u \|$ – евклидова норма вектора в $\mathbb{Z}^d$. Свойство (1) означает конечность дисперсии скачков случайного блуждания. Предположим также, что случайное блуждание является неприводимым, т.е. любая точка $v \in \mathbb{Z}^d$ достижима (см.).

Определим множество Γ, в точках которого располагаются источники ветвления. Пусть $g_1, \ldots, g_d$ – набор линейно независимых векторов с целочисленными координатами. Будем называть решёткой множество

$$\Gamma = \left\{ g \in \mathbb{Z}^d:\ g = \sum_{j=1}^{d} n_j g_j, n_j \in \mathbb{Z}, j = 1, 2, \ldots, d \right\},$$

а множество $\{g_j\}_{j=1}^d$ будем называть базисом решётки Γ.

Ветвление в источниках задаётся производящей функцией $b(s) = \sum_{k=0}^{+\infty} b_k s^k$, $0 \le s \le 1$, где $b_k \ge 0$ при $k \neq 1$, $b_1 < 0$ и $\sum_{k=0}^{+\infty} b_k = 0$. Предположим, что $\beta = b'(1) < \infty$, т.е. число потомков имеет конечный первый момент.

Через $M(v,w,t)$ обозначим функцию, которая описывает среднее число частиц в момент времени t в точке w, если в начальный момент времени $t = 0$ у нас была одна частица, которая находилась в точке v. Функция $M(v,w,t)$ решает следующую задачу Коши (см.):

$$\frac{\partial M(v,w,t)}{\partial t} = \sum_{u\in\mathbb{Z}^d} a(v,u) M(u,w,t) + \beta \sum_{g\in\Gamma} \delta_g(v) M(v,w,t), \quad M(v,w,0) = \delta_w(v). \qquad (2)$$

Через $A_\beta\colon\ \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right) \to \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$ обозначим оператор, стоящий в правой части эволюционного уравнения

Санкт-Петербургский государственный университет
**E-mail: mariyaplat@rambler.ru*
***E-mail: kryadovkin@gmail.com*

(2), где $\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$ – гильбертово пространство суммируемых с квадратом комплексных функций $f\colon\ \mathbb{Z}^d \to \mathbb{C}$ с нормой $\| f \|^2_{\ell^2(\mathbb{Z}^d)} = \sum_{v\in\mathbb{Z}^d} | f(v) |^2 < \infty.$

В работах [1, 2, 6, 7] был предложен метод для исследования ветвящихся случайных блужданий по многомерной решётке $\mathbb{Z}^d$ с непрерывным временем. Этот метод основан на использовании спектральной теории для построения асимптотики решений эволюционных уравнений. В работах [1, 2, 6, 7] рассматривались модели с конечным числом источников ветвления, при этом интенсивность ветвления характеризовалась положительным числом β. Было показано, что поведение среднего числа частиц определяется структурой спектра оператора A_β. Были найдены условия экспоненциального роста среднего числа частиц в произвольной точке решётки. Именно, было показано, что существует критическое значение β_c такое, что при $\beta > \beta_c$ в спектре оператора, описывающего эволюцию среднего числа частиц, появляется положительное собственное значение. Также было показано, что при $d = 1$ или $d = 2$ критическое значение β_c равно нулю, а при $d \geq 3$ критическое значение β_c больше нуля.

Оператор A_β может быть представлен как сумма ограниченного самосопряжённого оператора $A_0\colon\ \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right) \to \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$, описывающего случайное блуждание частиц, и ограниченного оператора $\beta V\colon\ \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right) \to \ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$, описывающего ветвление. Оператор βV мы будем рассматривать как возмущение оператора A_0. В работах [2, 7] исследовалось конечное положительное возмущение оператора, которое приводит к возможному появлению конечного числа положительных собственных чисел в спектре оператора A_β. Периодическое положительное возмущение приводит к тому, что существенный спектр оператора сдвигается в положительную область. Мы покажем, что старший член асимптотики среднего числа частиц зависит от положения правого края спектра возмущённого оператора, который для любого положительного значения β есть положительное число. Будет показано, что функция, описывающая среднее число частиц в произвольной точке решётки, растёт экспоненциально при $t \to \infty$.

Поведение решения задачи Коши (2) при $t \to \infty$ может быть сведено к изучению спектра оператора A_β. Заметим, что спектр оператора A_0 содержится в отрезке $\sigma\left(A_0\right) \subset \left[2a_0(0),0\right]$. Для исследования спектра оператора A_β мы разложим его в прямой интеграл операторов в слоях (см., например, [8–10]). Введём необходимые обозначения. Назовём элементарной ячейкой $\mathcal{C}$ решётки Γ следующее множество:

$$\mathcal{C} = \left\{x \in \mathbb{R}^d\colon\ x = \sum_{j=1}^{d} x_j g_j,\ 0 \leq x_j < 1,\ j = 1,2,\ldots,d\right\}.$$

Множество точек $\mathbb{Z}^d$, лежащих внутри фундаментальной ячейки, мы будем называть фундаментальным и обозначать через $\Omega = \mathcal{C} \cap \mathbb{Z}^d$. Обозначим через $\langle\cdot,\cdot\rangle$ стандартное скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^d$. Будем говорить, что базис $\left\{\tilde{g}_j\right\}_{j=1}^{d}$ двойственный к $\left\{g_j\right\}_{j=1}^{d}$, если $\left\langle \tilde{g}_i, g_j\right\rangle = 2\pi\delta_{ij}$.

Элементарную ячейку двойственной решётки будем обозначать через $\tilde{\mathcal{C}}$

$$\tilde{\mathcal{C}} = \left\{\theta \in \mathbb{R}^d\colon\ \theta = \sum_{j=1}^{d} \theta_j \tilde{g}_j,\ 0 \leq \theta_j < 1,\ j = 1,2,\ldots,d\right\}.$$

Можно показать, что оператор A_β на $\ell^2\left(\mathbb{Z}^d\right)$ унитарно эквивалентен прямому интегралу операторов $A_\beta(\theta)$ на $\ell^2(\Omega)$:

$$UA_\beta U^{-1} = \int_{\tilde{\mathcal{C}}} \oplus A_\beta(\theta)\, d\theta.$$

Оператор в слое $A_\beta(\theta)$ при каждом $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$ является конечномерным самосопряженным оператором. Это значит, что его спектр состоит из конечного набора вещественных собственных значений $\lambda_p(\theta) \leq \ldots \leq \lambda_1(\theta)$, где $p = \#\Omega$ – число точек фундаментального множества Ω. Коэффициенты оператора $A_\beta(\theta)$ являются непрерывными функциями $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$. Тогда собственные значения $\lambda_j(\theta)$ – непрерывные функции $\theta \in \tilde{\mathcal{C}}$ при всех $j = 1, 2, \ldots, p$. Отсюда и из [11, теорема XIII.85] следует, что каждое собственное значение $\lambda_j(\theta)$ оператора в слое является либо точкой непрерывного спектра, либо собственным значением бесконечной кратности для оператора A_β. При этом спектр оператора A_β состоит из p спектральных зон (возможно перекрывающихся)

$$\sigma\left(A_\beta\right) = \bigcup_{j=1}^{p} \sigma_j\left(A_\beta\right) = \bigcup_{j=1}^{p} \left[\lambda_j^-, \lambda_j^+\right],$$

где $\lambda_j^- = \min_{\theta\in\tilde{\mathcal{C}}} \lambda_j(\theta)$, $\lambda_j^+ = \max_{\theta\in\tilde{\mathcal{C}}} \lambda_j(\theta)$.

Чтобы исследовать асимптотическое поведение числа частиц при больших временах, мы должны понять, как ведёт себя правый край спектра оператора A_β. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Для старшего собственного значения* $\lambda_1(\theta)$ *оператора* $A_\beta(\theta)$ *выполнено неравенство* $\lambda_1(\theta) \le \lambda_1(0)$, *причём равенство достигается только при* $\theta = 0$.

Таким образом, правый край спектра оператора A_β равен старшему собственному значению $\lambda_1(0)$ оператора $A_\beta(0)$. Следующее утверждение описывает свойства $\lambda_1(0)$.

Лемма 2. *Старшее собственное значение* $\lambda_1(0)$ *оператора* $A_\beta(0)$ *является простым. Соответствующая ему собственная функция может быть выбрана положительной. Для любого* $\beta > 0$ *старшее собственное значение* $\lambda_1(0)$ *удовлетворяет неравенству* $\lambda_1(0) \ge \frac{\beta}{p}$, *где* $p = \#\Omega$ *— число точек фундаментального множества* Ω.

Далее вычислим асимптотику функции $M(v,w,t)$ при $t \to \infty$. В силу лемм 1 и 2 расстояние от $\lambda_1(0)$ до второй зоны оператора A_β больше нуля:

$$\varepsilon_1 = \lambda_1(0) - \sup_{\theta \in \tilde{C}} \lambda_2(\theta) > 0.$$

Отметим также, что из условия (1) следует, что собственное значение $\lambda_1(\theta)$ является дважды непрерывно дифференцируемой функцией в нуле.

Теорема 1. *Существуют* $N = N(v,w) < \infty$ *и неограниченная последовательность рациональных чисел* $r_k = r_k(v,w)$, $\frac{d}{2} \le r_0 < r_1 < \ldots < r_k < \ldots$, *такие что при* $t \to \infty$ *справедлива следующая асимптотика*:

$$M(v,w,t) = \\ = e^{\lambda_1(0)t} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{N(v,w)} c_{kl}(v,w) t^{-r_k} (\ln t)^l \left(1 + O\left(e^{-\varepsilon t}\right)\right) \quad (3)$$

для любого $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$.

Рассмотрим случай, когда критическая точка $\theta_0 = 0$ функции $\lambda_1(\theta)$ является невырожденной, т.е. гессиан функции $\lambda_1(\theta)$ не равен нулю. В этом случае коэффициенты $c_{kl}(v,w)$ в (3) могут быть вычислены явно, и при $t \to \infty$ справедливо асимптотическое разложение (см. [5, глава 2, теорема 4.1])

$$M(v,w,t) = e^{\lambda_1(0)t} t^{-\frac{d}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} c_k(v,w) t^{-k} \left(1 + O\left(e^{-\varepsilon t}\right)\right).$$

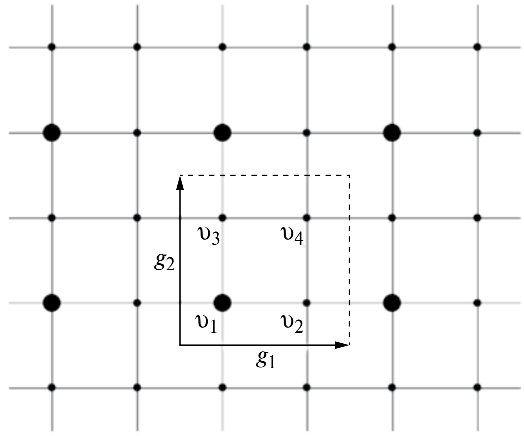

Рис. 1. Расположение источников ветвления.

Коэффициент $c_0(v,w)$ имеет следующий вид:

$$c_0(v,w) = \frac{(2\pi)^{\frac{d}{2}} \psi_1(w',0)\psi_1(v',0)}{\sqrt{\left|\det \lambda_1''(0)\right|}},$$

где $v = v' + \gamma_v$, $w = w' + \gamma_w$, $v',w' \in \Omega$, $\gamma_v, \gamma_w \in \Gamma$, $\psi_1(\cdot,0)$ — положительный нормированный собственный вектор оператора $A_\beta(0)$, отвечающий собственному значению $\lambda_1(0)$. Все остальные коэффициенты $c_k(v,w)$ также могут быть вычислены явно.

Пример. Рассмотрим оператор A_0 на $\mathbb{Z}^2$ с коэффициентами $a_0(u) = a_0(|u|)$, причем функция $a_0(u)$ удовлетворяет условиям: $a_0(0) = -4$, $a_0(1) = 1$, $a_0(u) = 0$, если $|u| \ne 0$ или $|u| \ne 1$. В этом случае оператор $-A_0$ называется комбинаторным оператором Лапласа на $\mathbb{Z}^2$. Будем считать, что источники ветвления (на рис. (1) выделены жирным) расположены в точках решётки Γ с базисными векторами $g_1 = (2,0)$, $g_2 = (0,2)$. Фундаментальное множество состоит из четырёх точек. Если занумеровать точки как показано на рис. 1, то изображающая матрица оператора $A_\beta(\theta)$ в слое имеет следующий вид:

$$A_\beta(\theta) = \begin{pmatrix} -4+\beta & 1+e^{2i\theta_1} & 1+e^{2i\theta_2} & 0 \\ 1+e^{-2i\theta_1} & -4 & 0 & 1+e^{2i\theta_2} \\ 1+e^{-2i\theta_2} & 0 & -4 & 1+e^{2i\theta_1} \\ 0 & 1+e^{-2i\theta_2} & 1+e^{-2i\theta_1} & -4 \end{pmatrix}.$$

Для старшего собственного значения $\lambda_1(0)$ матрицы $A_\beta(0)$ имеем

$$\lambda_1(0) = \begin{cases} -4 + \frac{\beta}{3} + \frac{2\sqrt{\beta^2+48}}{3}\cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{1}{3}\arctan\frac{6\sqrt{6}\sqrt{\beta^4+26\beta^2+512}}{\beta^3-36\beta}\right), & \beta \le 6, \\ -4 + \frac{\beta}{3} + \frac{2\sqrt{\beta^2+48}}{3}\cos\left(\frac{1}{3}\arctan\frac{6\sqrt{6}\sqrt{\beta^4+26\beta^2+512}}{\beta^3-36\beta}\right), & \beta > 6. \end{cases}$$

Матрица вторых производных при $\theta = \left(\theta_1,\theta_2\right)^{\mathrm{T}} = (0,0)^{\mathrm{T}}$ имеет вид

$$\lambda_1''(0) = -\frac{16(\lambda_1(0)+4)^2 - 8\beta(\lambda_1(0)+4) + 32}{4(\lambda_1(0)+4)^3 - 3\beta(\lambda_1(0)+4)^2 - 32(\lambda_1(0)+4) + 8\beta}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что коэффициент перед единичной матрицей не обращается в ноль, а значит, и гессиан не обращается в ноль. Ненормированный собственный вектор $\psi_1(0)$ при $\theta = \left(\theta_1,\theta_2\right)^{\mathrm{T}} = (0,0)^{\mathrm{T}}$ может быть выбран следующим образом:

$$\psi_1(0) = \left(1, \frac{\lambda_1(0)+4-\beta}{4}, \frac{\lambda_1(0)+4-\beta}{4}, \frac{\lambda_1(0)+4-\beta}{\lambda_1(0)+4}\right)^{\mathrm{T}}.$$

Формула (3) принимает вид

$$M\left(v_j + \gamma_{v_j}, v_k + \gamma_{v_k}, t\right) = e^{\lambda_1(0)t}\frac{2\pi}{t\sqrt{\left|\det\lambda_1''(0)\right|}}\frac{\psi_1\left(v_k,0\right)\psi_1\left(v_j,0\right)}{\left\|\psi_1(0)\right\|^2_{\ell_2(\Omega)}}\left(1 + O\left(t^{-1}\right)\right), \tag{4}$$

где $j,k = 1,2,3,4,$ $\gamma_{v_j},\gamma_{v_k} \in \Gamma,$ $\psi_1\left(v_j,0\right)$ – это j-я компонента вектора $\psi_1(0)$.

Работа первого автора выполнена при поддержке гранта РФФИ 16–01–00443а и фонда поддержки молодых учёных “Конкурс Мёбиуса”. Работа второго автора выполнена при поддержке гранта РФФИ 16–01–00087.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоненко Е.А., Яровая Е.Б.* // Соврем. Пробл. математики и механики. 2015. Т. X. № 3. С. 9–22.
2. *Богачев Л.В., Яровая Е.Б.* // ДАН. 1998. Т. 363. № 4. С. 439–442.
3. *Гихман И.И., Скороход А. В.* Введение в теорию случайных процессов. М.: Наука, 1977.
4. *Севостьянов Б. А.* Ветвящиеся процессы. М.: Наука, 1971.
5. *Федорюк М. В.* Метод перевала. М.: Наука, 1977.
6. *Яровая Е.Б.* // Теория вероятностей и ее применения. 2010. Т. 55. № 4. С. 705–731.
7. *Яровая Е.Б.* // Мат. заметки. 2012. Т. 92. № 1. С. 123–140.
8. *Higuchi Y., Nomura Y.* // Eur. J. Combin. 2009. V. 30. № 2. P. 570–585.
9. *Higuchi Y., Shirai T.* // Contemp. Math. 2004. V. 347. P. 2–56.
10. *Korotyaev E., Saburova N.* // J. Math. Anal. and Appl. 2014. V. 420. № 1. P. 576–611.
11. *Reed M., Simon B.* Analysis of Operators. L.: Elsevier, 1978.