

Общероссийский математический портал

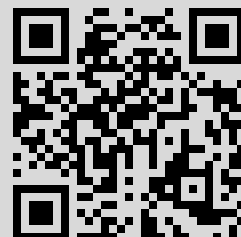
М. В. Платонова, С. В. Цыкин, Вероятностный подход к решению задачи Коши для уравнения Шрёдингера с оператором дробного дифференцирования порядка $\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty} (m-1, m)$, *Зап. научн. сем. ПОМИ*, 2018, том 474, 199–212

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 89.223.47.198

9 июня 2019 г., 10:42:10



М. В. Платонова, С. В. Цыкин

**ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ
ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА
С ОПЕРАТОРОМ ДРОБНОГО
ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПОРЯДКА $\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty} (m-1, m)$.**

§1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу Коши

$$-i \frac{\partial u}{\partial t} = c_\alpha \mathcal{D}^\alpha u, \quad u(0, x) = \varphi(x), \quad (1)$$

где

$$\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty} (m-1, m),$$

\mathcal{D}^α – симметричный оператор дробного дифференцирования порядка α , а константа c_α имеет вид

$$c_\alpha = -\frac{1}{\alpha \cos(\frac{\pi\alpha}{2})}.$$

Оператор \mathcal{D}^α является псевдодифференциальным оператором с символом $\cos(\frac{\pi\alpha}{2})|p|^\alpha$. При $\alpha = 2$ оператор \mathcal{D}^α – это оператор дифференцирования второго порядка, а соответствующая задача Коши (1) отвечает уравнению Шрёдингера.

В работе [6] был предложен метод построения представления вероятностной аппроксимации решения задачи Коши (1) для $\alpha \in (1, 2)$. Для построения вероятностной аппроксимации в этой работе использовалось семейство $\xi_\varepsilon(t)$ сложных пуассоновских процессов. При каждом

Ключевые слова: дробные производные, уравнение Шрёдингера, предельные теоремы, пуассоновские точечные поля.

Работа первого автора (лемма 2) выполнена при поддержке Российского научного фонда, грант No. 14-21-00035. Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ (грант 16-01-00443а).

$\varepsilon > 0$ процесс $\xi_\varepsilon(t)$ определялся, как

$$\xi_\varepsilon(t) = \int_{[0,t] \times (\varepsilon, \infty)} x \tilde{\nu}(dt, dx),$$

где ν – пуассоновская случайная мера на $(0, \infty) \times (0, \infty)$ с интенсивностью

$$d\mu = -\frac{dt dx}{\Gamma(1-\alpha)x^{1+\alpha}},$$

а $\tilde{\nu} = \nu - \mathbf{E}\nu$ – соответствующая центрированная мера.

Далее, для каждого $\varepsilon > 0$ определялась полугруппа P_ε^t операторов в $L_2(\mathbf{R})$. Каждый такой оператор действовал на $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ по формуле

$$P_\varepsilon^t \varphi(x) = \mathbf{E} [(P_- \varphi * g_\varepsilon)(x - \sigma \xi_\varepsilon(t)) + (P_+ \varphi * g_\varepsilon)(x + \sigma \xi_\varepsilon(t))],$$

где P_\pm – проекторы Рисса, действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2(\mathbf{C}_\pm)$ в верхней и нижней полуплоскостях, $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}$, а функция g_ε определялась своим преобразованием Фурье

$$\widehat{g}_\varepsilon(p) = \exp\left(\frac{t p^2 \varepsilon^{2-\alpha}}{2\Gamma(1-\alpha)(2-\alpha)}\right).$$

В [6] было показано, что при $\varepsilon \rightarrow 0$ полугруппы P_ε^t аппроксимируют в смысле сильной операторной сходимости полугруппу

$$P^t = \exp(itc_\alpha \mathcal{D}^\alpha)$$

(напомним, что по определению для каждого $t > 0$ оператор P^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши (1)).

Данная работа обобщает результаты работы [6] на случай произвольного $\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty} (m-1, m)$.

Отметим еще, что в случае $\alpha = 2$ соответствующая аппроксимация была построена в работах [2, 3].

Авторы выражают благодарность Н. В. Смородиной за внимание к работе и полезные замечания.

§2. ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Прямое преобразование Фурье в настоящей работе определяется как

$$\widehat{\varphi}(p) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) e^{ipx} dx,$$

а, соответственно, обратное преобразование как

$$\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p)e^{-ipx} dp.$$

Через $W_2^k(\mathbf{R})$ обозначим пространство функций Соболева, определенных на \mathbf{R} и имеющих квадратично суммируемые обобщенные производные до порядка k включительно ([8, с. 146]). Стандартная норма в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ определяется формулой

$$\|\psi\|_k^2 = \sum_{l=0}^k \int_{\mathbf{R}} |\psi^{(l)}(x)|^2 dx.$$

Нам удобно использовать в пространстве $W_2^k(\mathbf{R})$ другую норму, эквивалентную стандартной (см. [8], с. 190),

$$\|\psi\|_{W_2^k(\mathbf{R})}^2 = \int_{\mathbf{R}} (1 + |p|^{2k}) |\widehat{\psi}(p)|^2 dp.$$

Оператор A , действующий по правилу

$$(A\varphi)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} e^{-ipx} A(p)\widehat{\varphi}(p)dp,$$

называется псевдодифференциальным оператором с символом $A(p)$.

Для ограниченного оператора $A : W_2^k(\mathbf{R}) \rightarrow W_2^l(\mathbf{R})$ через

$$\|A\|_{W_2^k \rightarrow W_2^l}$$

будем обозначать соответствующую операторную норму.

Для $\alpha > 0$ через $[\alpha]$ и $\{\alpha\}$ будем обозначать целую и дробную часть числа α .

Симметричный оператор дробной производной определяется на гладких функциях f формулой (подробнее см. [7])

$$(\mathcal{D}^\alpha f)(x) = \frac{1}{2\Gamma(-\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(x-y) - f(x) + \sum_{j=1}^{[\alpha]} \frac{(-1)^{j-1} y^j f^{(j)}(x)}{j!}}{|y|^{1+\alpha}} dy,$$

где $\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty} (m-1, m)$. Оператор дробного дифференцирования является псевдодифференциальным оператором. Легко показать, что для

преобразования Фурье дробной производной справедливо

$$\widehat{(\mathcal{D}^\alpha \varphi)}(p) = \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) |p|^\alpha \widehat{\varphi}(p),$$

то есть оператор $\widehat{\mathcal{D}^\alpha}$ действует как оператор умножения на $\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) |p|^\alpha$.

Через \mathbf{C} обозначим комплексную плоскость, а через \mathbf{C}_+ и \mathbf{C}_- – соответственно верхнюю и нижнюю полуплоскости.

Далее напомним определение классов Харди $H^2(\mathbf{C}_+)$ и $H^2(\mathbf{C}_-)$. Функция F , аналитическая в верхней (нижней) полуплоскости комплексной плоскости принадлежит классу $H^2(\mathbf{C}_+)$ (соответственно, $H^2(\mathbf{C}_-)$), если существует константа C , такая что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(x + iy)|^2 dx \leq C$$

при всех $y > 0$ ($y < 0$). Хорошо известно (см. [7]), что носитель преобразования Фурье граничного значения функции из $H^2(\mathbf{C}_-)$ лежит на положительной полуоси, а носитель преобразования Фурье граничного значения функции из $H^2(\mathbf{C}_+)$ содержится на отрицательной полуоси. Кроме того, верно и обратное утверждение. Именно, если $\Phi \in L_2(\mathbf{R})$ и $\Phi(p) = 0$ почти всюду при $p \geq 0$ ($p \leq 0$), то существует функция F из $H^2(\mathbf{C}_+)$ (или $H^2(\mathbf{C}_-)$), для которой $\widehat{F}(p) = \Phi(p)$.

§3. ВЕРОЯТНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ

Пусть ν – пуассоновская случайная мера на $(0, \infty) \times (0, \infty)$ с интенсивностью

$$\mathbf{E} \nu(dt, dx) = dt \mu(dx),$$

где мера μ имеет вид

$$d\mu(x) = \frac{(-1)^{[\alpha]} dx}{\Gamma(1-\alpha)x^{1+\alpha}}, \quad x > 0.$$

Для $\varepsilon > 0$ определим случайную величину $\xi_\varepsilon(t)$, полагая

$$\xi_\varepsilon(t) = \int_{[0,t] \times (\varepsilon, \infty)} x \nu(dt, dx).$$

Рассмотрим проекторы Рисса P_{\pm} , действующие из $L_2(\mathbf{R})$ на пространства Харди $H^2(\mathbf{C}_{\pm})$. Любую функцию $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ представим в виде

$$\varphi(x) = P_+\varphi(x) + P_-\varphi(x) = \varphi_+(x) + \varphi_-(x),$$

где носитель преобразования Фурье функции φ_+ сосредоточен на отрицательной полуоси, а носитель преобразования Фурье φ_- – на положительной полуоси. Заметим, что $P_+\varphi$ – аналитическая функция в верхней полуплоскости, а $P_-\varphi$ – аналитическая функция в нижней. Через φ_+ обозначим действие проектора Рисса P_+ на функцию φ , а через φ_- обозначим действие проектора P_- на функцию φ .

Выберем комплексное число

$$\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)}.$$

Заметим, что $\sigma \in \mathbf{C}_+$ и $\operatorname{Re} \sigma > 0$.

Для $\varepsilon > 0$ определим полугруппу операторов P_{ε}^t , которая действует на $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ как

$$P_{\varepsilon}^t \varphi(x) = \mathbf{E}[(\varphi_- * g_{\varepsilon})(x - \sigma \xi_{\varepsilon}(t)) + (\varphi_+ * g_{\varepsilon})(x + \sigma \xi_{\varepsilon}(t))], \quad (2)$$

где функция $g_{\varepsilon}(x)$ определяется своим преобразованием Фурье: для $m = 2k$, $k \in \mathbf{N}$, формулой

$$\widehat{g}_{\varepsilon}(p) = \exp\left(-t \int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!} d\mu(x)\right) \exp\left(t \int_0^{\varepsilon} \frac{(i|p|\sigma x)^m}{m!} d\mu(x)\right),$$

а для $m = 2k + 1$ формулой

$$\begin{aligned} \widehat{g}_{\varepsilon}(p) = \exp\left(-t \int_{\varepsilon}^{\infty} \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!} d\mu(x)\right) \\ \cdot \exp\left(t \int_0^{\varepsilon} \left(\frac{(i|p|\sigma x)^m}{m!} + \frac{(i|p|\sigma x)^{m+1}}{(m+1)!}\right) d\mu(x)\right). \end{aligned}$$

Покажем, что $\widehat{g}_{\varepsilon}(p)$ убывает на бесконечности. Для этого заметим, что в случае $m = 2k$ знак вещественной части коэффициента при $|p|^m$ под знаком экспоненты определяется величиной

$$\operatorname{Re}(i\sigma)^{2k} = \cos\left(\frac{\pi k}{\alpha}\right) < 0,$$

а при $m = 2k + 1$ знак вещественной части коэффициента при $|p|^{m+1}$ под знаком экспоненты определяется величиной

$$\operatorname{Re}(i\sigma)^{2k+2} = \cos\left(\frac{\pi(k+1)}{\alpha}\right) < 0.$$

Таким образом, $\widehat{g}_\varepsilon(p)$ убывает по p со скоростью $e^{-c_\varepsilon p^m t}$ при $m = 2k$ и со скоростью $e^{-c_\varepsilon p^{m+1} t}$ при $m = 2k + 1$, где c_ε – некоторая положительная константа, зависящая от ε .

Заметим, что при каждом фиксированном ε величина, стоящая под знаком математического ожидания в (2), ограничена. Пользуясь теоремой Фубини, получаем

$$\begin{aligned} P_\varepsilon^t \varphi(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^0 \widehat{\varphi}_+(p) \widehat{g}_\varepsilon(p) e^{-ipx} \mathbf{E} e^{-ip\sigma\xi_\varepsilon(t)} dp \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \widehat{\varphi}_-(p) \widehat{g}_\varepsilon(p) e^{-ipx} \mathbf{E} e^{ip\sigma\xi_\varepsilon(t)} dp \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \widehat{\varphi}(p) \widehat{g}_\varepsilon(p) e^{-ipx} \mathbf{E} e^{i|p|\sigma\xi_\varepsilon(t)} dp. \end{aligned} \quad (3)$$

В силу теоремы Кэмпбелла (см. [5, с. 44]), имеем

$$\mathbf{E} e^{i|p|\sigma\xi_\varepsilon(t)} = \exp\left(t \int_\varepsilon^\infty (e^{i|p|\sigma x} - 1) d\mu(x)\right).$$

Лемма 1. Пусть $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}(1-\frac{1}{\alpha})}$. Тогда

$$\int_0^\infty \left(e^{i|p|\sigma x} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!} \right) d\mu(x) = \frac{-i|p|^\alpha}{\alpha}. \quad (4)$$

Доказательство. Пусть $p \geq 0$. Тогда

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(e^{ip\sigma x} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(ip\sigma x)^j}{j!} \right) d\mu(x) \\ &= (-1)^{[\alpha]} \int_0^{\infty} \left(e^{ip\sigma x} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(ip\sigma x)^j}{j!} \right) \frac{dx}{\Gamma(1-\alpha)x^{1+\alpha}} \\ &= (-1)^{[\alpha]} \frac{(ip\sigma)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \lim_{\substack{R \rightarrow \infty \\ \varepsilon \rightarrow 0}} \int_{ip\sigma\varepsilon}^{ip\sigma R} \left(e^y - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{y^j}{j!} \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}. \end{aligned}$$

Так как $\sigma \in \mathbf{C}_+$, то $\operatorname{Re}(ip\sigma R) \leq 0$, поэтому интеграл

$$J = \int_{\Gamma} \left(e^y - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{y^j}{j!} \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}}$$

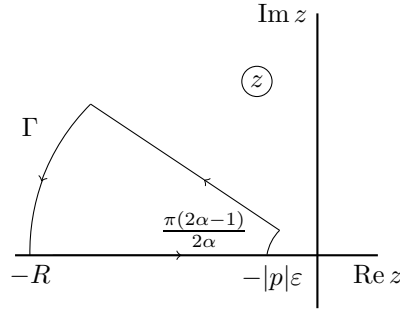
по замкнутому контуру Γ (Рис. 1)

$$\begin{aligned} \Gamma &= \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| \in [p\varepsilon, pR], \arg z = \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{1}{\alpha} \right) \right\} \\ &\cup \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| = pR, \arg z \in \left[\frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{1}{\alpha} \right), \pi \right] \right\} \\ &\cup \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| \in [pR, p\varepsilon], \arg z = \pi \right\} \\ &\cup \left\{ z \in \mathbf{C} : |z| = p\varepsilon, \arg z \in \left[\pi, \frac{\pi}{2} \left(2 - \frac{1}{\alpha} \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

равен нулю.

Интегралы по дугам $|z| = |ip\sigma R|$, $|z| = |ip\sigma\varepsilon|$ стремятся к нулю при $R \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, поэтому, переходя к пределу по R, ε , получаем

$$\begin{aligned} & \int_0^{\infty} \left(e^{ip\sigma x} - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{(ip\sigma x)^j}{j!} \right) d\mu \\ &= (-1)^{[\alpha]} \frac{(ip\sigma)^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^0 \left(e^y - \sum_{j=0}^{[\alpha]} \frac{y^j}{j!} \right) \frac{dy}{y^{1+\alpha}} \\ &= \frac{(-ip\sigma)^\alpha}{\alpha}. \quad \square \end{aligned}$$

Рис. 1. Контур интегрирования Γ .

Используя выражение (3) для функции $P_\varepsilon^t \varphi(x)$ и лемму 3, получаем

$$P_\varepsilon^t \varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{\varphi}(p) e^{-ipx} \exp\left(-\frac{i|p|^\alpha}{\alpha} t\right) \delta_\varepsilon^t(p) dp, \quad (5)$$

где при $m = 2k$

$$\delta_\varepsilon^t(p) = \exp\left[-t \int_0^\varepsilon \left(e^{i|p|\sigma x} - \sum_{j=0}^m \frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!}\right) d\mu(x)\right],$$

а при $m = 2k + 1$

$$\delta_\varepsilon^t(p) = \exp\left[-t \int_0^\varepsilon \left(e^{i|p|\sigma x} - \sum_{j=0}^{m+1} \frac{(i|p|\sigma x)^j}{j!}\right) d\mu(x)\right].$$

Далее, обозначим через P^t полугруппу операторов

$$P^t = \exp\left(-\frac{it}{\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \mathcal{D}^\alpha\right).$$

По определению оператор P^t переводит начальную функцию φ в решение задачи Коши (1).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. 1. Пусть $m = 2k$. Тогда для любого $l \geq 0$ существует число $C = C(l) > 0$, такое что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$

и всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\|P^t \varphi - P_\varepsilon^t \varphi\|_{W_2^1(\mathbf{R})} \leq Ct\varepsilon^{1-\{\alpha\}} \|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})}.$$

2. Пусть $m = 2k + 1$. Тогда для любого $l \geq 0$ существует число $C = C(l) > 0$, такое что для любой функции $\varphi \in W_2^{l+[\alpha]+2}(\mathbf{R})$, $l \geq 0$ и всех $t \geq 0$ справедливо неравенство

$$\|P^t \varphi - P_\varepsilon^t \varphi\|_{W_2^1(\mathbf{R})} \leq Ct\varepsilon^{2-\{\alpha\}} \|\varphi\|_{W_2^{l+[\alpha]+2}(\mathbf{R})}.$$

Доказательство. Для доказательства утверждения воспользуемся известной формулой теории возмущений. Именно, пусть A – оператор в некотором гильбертовом пространстве, такой что существует ограниченная ($t \geq 0$) операторная полугруппа

$$U_A(t) = e^{tA}.$$

Пусть B – некоторое возмущение оператора A , такое что полугруппа

$$U_{A+B}(t) = e^{t(A+B)}$$

также ограничена. Тогда справедливо следующее равенство (см. [4, гл. IX, §2, п. 1, с. 614])

$$e^{t(A+B)} - e^{tA} = \int_0^t e^{\tau(A+B)} B e^{(t-\tau)A} d\tau. \quad (6)$$

Применим формулу (6) для случая, когда $A = -\frac{i}{\alpha \cos \frac{\pi\alpha}{2}} \mathcal{D}^\alpha$, а $A + B = F_\varepsilon$, где F_ε – генератор полугруппы P_ε^t . Из (5) следует, что F_ε есть псевдодифференциальный оператор с символом $\widehat{f}_\varepsilon(p)$, где

$$\widehat{f}_\varepsilon(p) = \ln(\delta_\varepsilon^t(p)) - \frac{i|p|^\alpha}{\alpha}.$$

В нашем случае для любого $q > 0$ справедливо равенство

$$\|U_A(\tau)\|_{W_2^q \rightarrow W_2^q} = 1. \quad (7)$$

Заметим, что оператор B является псевдодифференциальным оператором с символом

$$\widehat{b}_\varepsilon(p) = -\ln(\delta_\varepsilon^t(p)).$$

При $m = 2k$ оценим норму оператора $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+1} \rightarrow W_2^l}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{B\varphi}\|_{W_2^l(\mathbf{R})}^2 &= \int_{\mathbf{R}} dp (1 + |p|^{2l}) |\widehat{B\varphi}(p)|^2 \\ &\leq Ct^2 \int_{\mathbf{R}} dp (1 + |p|^{2l}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \left(\int_0^\varepsilon |p|^m x^m d\mu(x) \right)^2 \\ &\leq Ct^2 \varepsilon^{2m-2\alpha} \int_{\mathbf{R}} dp (1 + |p|^{2l+2m}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \leq Ct^2 \varepsilon^{2m-2\alpha} \|\varphi\|_{W_2^{l+m}(\mathbf{R})}^2. \end{aligned} \quad (8)$$

При $m = 2k + 1$ оценим норму оператора $\|B\|_{W_2^{l+[\alpha]+2} \rightarrow W_2^l}$. Имеем

$$\begin{aligned} \|\widehat{B\varphi}\|_{W_2^l(\mathbf{R})}^2 &= \int_{\mathbf{R}} dp (1 + |p|^{2l}) |\widehat{B\varphi}(p)|^2 \\ &\leq Ct^2 \int_{\mathbf{R}} dp (1 + |p|^{2l}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \left(\int_0^\varepsilon |p|^{m+1} x^{m+1} d\mu(x) \right)^2 \\ &\leq Ct^2 \varepsilon^{2(m+1)-2\alpha} \int_{\mathbf{R}} dp (1 + |p|^{2l+2m+2}) |\widehat{\varphi}(p)|^2 \\ &\leq Ct^2 \varepsilon^{2(m+1)-2\alpha} \|\varphi\|_{W_2^{l+m+1}(\mathbf{R})}^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Для доказательства утверждения осталось оценить норму оператора $\|U_{A+B}(\tau)\|_{W_2^q \rightarrow W_2^q}$ для любого $q > 0$. Для этого нам понадобится вспомогательное утверждение.

Лемма 2. Пусть $2m - 2 < \alpha < 2m$, $\alpha \neq 2m - 1$, $m = 2, 3, \dots$. Для любого $x \geq 0$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re} \left(e^{i\sigma x} - \sum_{j=0}^{2m} \frac{(i\sigma x)^j}{j!} \right) \geq 0,$$

где $\sigma = e^{\frac{\pi i}{2}} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)$.

Доказательство. Обозначим

$$d^{-1} = \cos \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) \right) > 0.$$

Масштабным преобразованием переменной x утверждение леммы можно свести к следующему неравенству: при $x \geq 0$

$$\operatorname{Re} \left(e^{i\sigma xd} - \sum_{j=0}^{2m} \frac{(i\sigma xd)^j}{j!} \right) \geq 0.$$

Рассмотрим функцию

$$f(x) = \operatorname{Re} \left(e^{i\sigma xd} - \sum_{j=0}^{2m} \frac{(i\sigma xd)^j}{j!} \right).$$

Заметим, что

$$f(0) = 0, f'(0) = 0, \dots, f^{(2m)}(0) = 0.$$

Вычислим производную порядка $2m+1$ функции $f(x)$

$$\begin{aligned} f^{(2m+1)}(x) &= \operatorname{Re} \left((i\sigma d)^{2m+1} e^{i\sigma xd} \right) \\ &= d^{2m+1} e^{-x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right)} \cos \left(x + \pi - \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} \right). \end{aligned}$$

Производная $f^{(2m+1)}(x)$ неотрицательна на интервалах

$$x \in \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k \right], k = 0, 1, 2, \dots \quad (10)$$

и неположительна на интервалах

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k \right], k = 0, 1, 2, \dots \quad (11)$$

Это означает, что $f^{(2m)}(x)$ не убывает на интервалах (10) и не возрастает на интервалах (11). Отсюда следует, что функция $f^{(2m)}(x)$ имеет локальные минимумы в точках

$$x_k = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k, k = 0, 1, \dots$$

Вычислим $2m$ -ую производную функции $f(x)$

$$\begin{aligned} f^{(2m)}(x) &= \operatorname{Re} \left((i\sigma d)^{2m} e^{i\sigma xd} - (i\sigma d)^{2m} \right) \\ &= d^{2m} e^{-x \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{\alpha} \right) \right)} \cos \left(x - \frac{\pi m}{\alpha} \right) - d^{2m} \cos \left(\frac{\pi m}{\alpha} \right). \end{aligned}$$

Определим знак $f^{(2m)}(x)$ в точках локальных минимумов x_k . Угол $\frac{\pi m}{\alpha}$ лежит в интервале от $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2(m-1)})$, а значит

$$\cos\left(\frac{\pi m}{\alpha}\right) < 0.$$

Угол

$$x_k - \frac{\pi m}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi(2m+1)}{2\alpha} + 2\pi k - \frac{\pi m}{\alpha} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\alpha} + 2\pi k$$

лежит во втором квадранте, а значит,

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\alpha}\right) < 0.$$

Заметим, что $0 < e^{-x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)} \leq 1$ при $x > 0$, и

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2\alpha}\right) - \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha}\right) > 0$$

при $2m - 2 < \alpha < 2m - 1$. Отсюда следует, что значение $f^{(2m)}(x_k) > 0$ для любого $k \in \mathbf{N} \cup \{0\}$, а значит и $f^{(2m)}(x) > 0$ для всех $x > 0$.

Рассмотрим теперь случай $2m - 1 < \alpha < 2m$.

Через x_1 и x_2 обозначим решения $f^{(2m)}(x) = 0$ на промежутке $[\frac{2\pi m}{\alpha}, 2\pi]$. Тогда производная $f^{(2m-1)}(x)$ не убывает на промежутках

$$[2\pi k, x_1 + 2\pi k] \cup [x_2 + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k], \quad k = 0, 1, \dots, L$$

и

$$[2\pi + 2\pi L, \infty),$$

а не возрастает на промежутках

$$[x_1 + 2\pi k, x_2 + 2\pi k], \quad k = 0, 1, \dots, L.$$

Вычислим производную порядка $(2m - 1)$ функции $f(x)$

$$\begin{aligned} f^{(2m-1)}(x) &= \operatorname{Re}\left((i\sigma d)^{2m-1} e^{i\sigma x d} - (i\sigma d)^{2m-1} - (i\sigma d)^{2m} x\right) \\ &= d^{2m-1} e^{-x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\right)} \cos\left(x + \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi m}{\alpha} - \pi\right) \\ &\quad - d^{2m-1} \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi m}{\alpha} - \pi\right) - d^{2m} \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha}\right) x. \end{aligned}$$

Отметим, что при $2m - 1 < \alpha < 2m$ выполнены неравенства

$$\cos\left(\frac{\pi m}{\alpha}\right) < 0, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi m}{\alpha} - \pi\right) < 0.$$

Уравнение $f^{(2m-1)}(x) = 0$ может быть переписано в виде

$$\begin{aligned} & \cos\left(x + \frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi m}{\alpha} - \pi\right) \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{2\alpha} - \frac{\pi m}{\alpha} - \pi\right) + \cos\left(\frac{\pi m}{\alpha}\right)xd\right) e^{x \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\right)}. \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что левая часть последнего равенства больше правой на промежутках

$$\left[\frac{2\pi m}{\alpha} + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k\right], \quad k = 0, 1, \dots, L,$$

а значит на этих промежутках $f^{(2m-1)}(x) \geq 0$. Этого наблюдения достаточно для доказательства леммы. \square

Из леммы 3 вытекает оценка

$$|\delta_\varepsilon^t(p)| \leq 1.$$

Из последней оценки немедленно следует неравенство для операторной нормы

$$\|U_{A+B}(t - \tau)\|_{W_2^k \rightarrow W_2^k} \leq 1. \quad (12)$$

Утверждение теоремы следует теперь из (7), (8), (9) и (12). \square

Следствие 1. Для любых функций $\varphi \in L_2(\mathbf{R})$ справедливо

$$\|P^t \varphi - P_\varepsilon^t \varphi\|_{L_2(\mathbf{R})} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0.$$

Доказательство. Так как

$$\|P^t\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq 1 \quad \text{и} \quad \|P_\varepsilon^t\|_{L_2 \rightarrow L_2} \leq 1,$$

а классы Соболева $W_2^{l+[\alpha]+1}(\mathbf{R})$ и $W_2^{l+[\alpha]+2}(\mathbf{R})$ плотны в пространстве $L_2(\mathbf{R})$, то утверждение следствия вытекает из теоремы 1 и теоремы Банаха–Штейнгауза (см. [1, П.1.18]). \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Н. Данфорд, Дж. Шварц, *Линейные операторы. Общая теория.* — Изд-во иностр. лит-ры, М., 1962.
2. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Предельная теорема о сходимости функционалов от случайного блуждания к решению задачи Коши для уравнения $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2} \Delta u$ с комплексным параметром σ .* — Зап. научн. семин. ПОМИ **420** (2013), 88–102.
3. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Об одной предельной теореме, связанной с вероятностным представлением решения задачи Коши с оператором Шрёдингера.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **454** (2016), 158–175.

4. Т. Като, *Теория возмущений линейных операторов*. Мир, М., 1972.
5. Дж. Кингман, *Пуассоновские процессы*. МЦНМО, М., 2007.
6. М. В. Платонова, С. В. Цыкин, *Вероятностная аппроксимация решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с оператором дробного дифференцирования*. — Зап. научн. семин. ПОМИ **466** (2017), 257–272.
7. С. Г. Самко, А. А. Килбас, О. И. Маричев, *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. Наука и техника, Минск, 1987.
8. Д. К. Фаддеев, Б. З. Вулих, Н. Н. Уральцева, *Избранные главы анализа и высшей алгебры*. Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1981, 200 с.

Platonova M. V., Tsikin S. V. Probabilistic approach to Cauchy problem solution for the Schrödinger equation with a fractional derivative of order $\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty} (m-1, m)$.

We construct a probabilistic approximation of the Cauchy problem solution for the nonstationary Schrödinger equation with a symmetric fractional derivative of order $\alpha \in \bigcup_{m=3}^{\infty} (m-1, m)$ in the right hand side.

С.-Петербургское отделение Математического
института им. В. А. Стеклова, Фонтанка 27,
С.-Петербург 191023;

Поступило 29 октября 2018 г.

СПбГУ, Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
14 линия В.О., дом 29Б, С.-Петербург 199178, Россия
С.-Петербургский государственный университет,
Университетская наб., д. 7/9,
С.-Петербург 199034, Россия